Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Diplomová práce

Konstruktivistické přístupy k vyučování v matematice

Constructivist approaches to mathematics education

Bc. Lucie Šmídová

Vedoucí práce:	prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc., Dr.
Studijní program:	Učitelství pro střední školy
Studijní obor:	Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy – matematika

Praha, 2024

Prohlášení

Odevzdáním této diplomové práce na téma „Konstruktivistické přístupy k vyučování v matematice“ potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Rovněž potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Poděkování

Touto cestou bych ráda poděkovala vedoucímu práce prof. RNDr. Ladislavu Kvaszovi, DSc., Dr. za odborné vedení, cenné rady, vstřícný přístup a čas, který mi věnoval při zpracování diplomové práce.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá konstruktivistickým hnutím se zaměřením na didaktiku matematiky. V úvodní části práce jsou shrnuty myšlenky a postoje významných osobností konstruktivistického hnutí, které výrazně ovlivnili přístup k výuce nejen v oblasti matematiky. Tyto poznatky jsou následně porovnány s přístupem dvou řad učebnic matematiky – na jedné straně učebnic Hejného metody, na straně druhé učebnic kanadského nakladatelství Peason *Math Makes Sense.* Porovnání je provedeno jednak v obecné rovině a jednak na přístupu učebnic k vybraným tématům, kterými jsou Pythagorova věta, záporná celá čísla a obsahy rovinných útvarů. V rámci tohoto srovnání se ukázalo, že obě řady učebnic využívají k zavedení daných témat podobné úlohy a v mnoha ohledech i podobné postupy, přesto se v některých aspektech odlišují.

Klíčová slova: konstruktivismus, Hejného metoda, Math Makes Sense, Pearson

Abstract

This thesis deals with the constructivist movement with a focus on mathematics didactics. The introductory part of the thesis summarizes the ideas and attitudes of significant figures of the constructivist movement, who have greatly influenced the approach to teaching not only in the field of mathematics. These findings are subsequently compared with the approach of two series of mathematics textbooks – on one side, the textbooks of the Hejný method, and on the other side, the textbooks of the Canadian publisher Pearson *Math Makes Sense*. The comparison is carried out both in a general sense and in the textbooks' approach to selected topics, namely the Pythagorean theorem, negative whole numbers, and the areas of plane figures. Within this comparison, it has been shown that both series of textbooks use similar tasks to introduce these topics and, in many respects, similar methods, although they differ in some aspects.

Key words: constructivism, Hejný method, Math Makes Sense, Pearson

Obsah

1 Úvod

Téma diplomové práce „Konstruktivistické přístupy k vyučování v matematice“ jsem si zvolila, jelikož jsem se s konstruktivisticky laděným vyučováním seznámila při svém studiu na pedagogické fakultě a tento přístup mě natolik oslovil, že jsem se také rozhodla ho zapojovat v rámci své výuky. Nicméně pro plnohodnotné zapojení konstruktivistických principů do vyučování je potřeba mít o těchto principech přehled a dostatečné porozumění. V tomto ohledu beru tuto práci jako průpravu pro svou další pedagogickou praxi.

Tato práce je zaměřena na konstruktivistické hnutí, jeho důležité představitele a jejich přínosy didaktice nejen v oblasti matematického vzdělávání. Cílem práce je pak porovnání Hejného metody s přístupem dalších konstruktivistických přístupů, jednak v rovině obecné a jednak v rovině srovnání s další řadou konstruktivisticky koncipovaných učebnic. Jako druhou řadu učebnic jsem pro účely této práce zvolila kanadské učebnice *Math Makes Sense.* Na tuto řadu jsem narazila ještě před výběrem tématu práce, v rámci vlastní přípravy na výuku a velmi mě zaujaly používané modely a postupy při zavádění nových témat. Následně jsem z nich opakovaně čerpala, a proto při výběru vzorku k porovnání byla tato řada učebnic jasnou volbou.

Samotná práce se tedy skládá ze dvou částí – teoretické zaměřené na základní principy konstruktivismu v pojetí jeho jednotlivých představitelů (kapitoly 2 až 4) a praktické zaměřené na porovnání vybraných učebnic.

První kapitola je věnována obecnému vymezení termínu konstruktivismus a jeho pedagogické verzi, uvedeny jsou používané definice, základní aspekty konstruktivistického vyučování a také směry, do kterých bývá konstruktivistické hnutí rozdělováno.

Druhá kapitola je věnována významným osobnostem konstruktivistického hnutí, jednak v obecné rovině, kde jsou rozebrány práce Jeana Piageta, Lva Vygotského, Davida Bloora a Ernesta von Glasesrsfelda, jednak se zaměřením na didaktiku matematiky, v této části jsou zařazeni Hans Freudenthal, Paul Ernest a Anna Sfard.

Třetí kapitola je zaměřena na Hejného metodu, její základní myšlenky a její srovnání s dříve uvedenými autory. Podrobněji jsou pak rozebrány některé důležité aspekty jako například teorie generických modelů.

Ve čtvrté kapitole jsou představeny zvolené řady učebnic a porovnána vybraná témata – Pythagorova věta, záporná celá čísla a obsahy rovinných útvarů. V rámci porovnání jsou podrobně popsány postupy, jakými jsou zvolená témata zavedena, aby bylo možné srovnat přístupy obou řad učebnic. V závěru jsou pak shrnuty společné znaky a rozdíly v jednotlivých pojetích a v přístupech učebnic.

2 Konstruktivismus

V úvodní části této diplomové práce budou uvedeny některé definice konstruktivismu, jednak obecné a jednak se zaměřením na didaktiku. V následujících částech pak budou uvedeny základní principy, druhy konstruktivismu a bude rozebrána práce významných osobností, které přispěly k rozvoji konstruktivistického hnutí, zvláště pak ty, které měly vliv na didaktiku matematiky.

2.1 Konstruktivismus – obecné vymezení

Vymezení pojmu konstruktivismus není zcela jednoznačné a u různých autorů se jeho definice více či méně liší, což je s největší pravděpodobností dáno šířkou daného pojmu. Pro představu zde bude uvedeno několik možných definic.

Dle (Průcha, Mareš a Walterová 2013, s. 132) je konstruktivismus definován následovně:

> Široký proud teorií ve vědách o chování asociálních vědách, zdůrazňující jak aktivní úlohu subjektu a význam jeho vnitřních předpokladů v pedagogických a psychologických procesech, tak důležitost jeho interakce s prostředím a společností, v tomto smyslu je také interakční teorií překonávající jednostrannost empirismu a nativismu. v didaktice je jedním z dominantních soudobých paradigmat, dělících se do několika proudů.

Hartl a Hartlová (2015, s. 271) pak v *Psychologickém slovníku* definují konstruktivismus takto:

> Směr druhé poloviny 20. století, který zdůrazňuje aktivní úlohu člověka, význam jeho vnitřních předpokladů a důležitost jeho interakce s prostředím a společností.

Pro tuto práci bude nejzásadnější vymezení konstruktivismu v rámci pedagogiky a psychologie, nicméně je třeba si uvědomit, že tento směr výrazně ovlivnil i řadu dalších oborů – počínaje filozofií, sociologií a konče například u architektury.

2.1.1 Pedagogický konstruktivismus

Obdobně jako u obecného konstruktivismu, i v případě pedagogického konstruktivismu se definice různých autorů mohou lišit. Nicméně v tomto omezeném kontextu již rozdíly nejsou tak výrazné, proto zde bude uvedena pouze jedna definice, a to od autorů Khalouse a Obsta (2009, s. 49):

> Pedagogický konstruktivismus se někdy vymezuje jako snaha o překonání transmisivního vyučování, jež je chápáno jako předávání definitivních vzdělávacích obsahů žákům, kteří jsou přitom odsouzeni do pasivní role jejich příjemců.

Transmisivním vyučováním, jak vyplývá z výše uvedené definice, rozumíme vyučování, kde hlavním aktivním činitelem je učitel, jakožto nositel vědomostí, zatímco žáci jsou pouze pasivními příjemci těchto vědomostí. Vědomosti jsou žákům předávány jako hotové konstrukty, což je v přímém rozporu s myšlenkami konstruktivistického přístupu. Jak také vyplývá z uvedené definice, konstruktivismus je často vymezován jako protipól transmisivního přístupu. Základní myšlenkou konstruktivismu, která spojuje většinu jeho představitelů, je, že žáci si sami aktivně konstruují své vlastní poznatky a chápání reality. Při této konstrukci využívají své zkušenosti a předchozí znalosti. Výuka by měla být koncipována tak, aby vedla žáky k samostatnému objevování a učení, učitel by měl být spíše facilitátorem učení nikoliv pouhým poskytovatelem informací.

Rozdíly mezi konstruktivistickým a transmisivním vyučováním mohou být shrnuty například tak, jak uvádí (Molnár et al., 2008, s. 47) v tabulce 1.

Tabulka 1 - Rozdíly mezi konstruktivistickým a transmisivním vyučováním

Tradiční (transmisivní) přístup	**Přístup orientovaný na žáka (konstruktivistický)**
Škola předává dětem především vzdělání jako výsledný produkt, který je nutno si osvojit v hotové podobě.	Škola připravuje děti pro život a vzdělávání je považováno za proces, který nikdy nekončí.
Obsah vzdělání je určován zvnějšku, je předkládán v oddělených předmětech a důraz je kladen především na osvojení si vědomostí.	Na rozhodování o obsahu vzdělání se podílejí všichni zainteresovaní (odborníci, pedagogové, rodiče, děti) je integrován do smysluplných celků a důraz je kladen na osvojení klíčových kompetencí.
Nové poznatky jsou cílem, kterého je třeba dosáhnout a které předkládá učitel prostřednictvím učebnic.	Nové poznatky jsou nástrojem k porozumění sobě i okolnímu světu, děti si je budují samy, učitelé jsou partnery podporující učení a nabízející práci s mnoha zdroji.

Učitelé nesou odpovědnost za dění ve třídě, určují pravidla a kontrolují, jsou v ní hlavní autoritou a představují roli „předavatelů“ informací.	Pravidla pro práci a chování ve třídě tvoří učitel společně s dětmi, každý nese odpovědnost za své chování a učitelé jsou „průvodci“ na cestě za vzděláním, kteří dítě respektují.
Dítě je považováno za pasivního příjemce, za „čistý list papíru“, na který je třeba vepsat informace.	Dítě je chápáno jako aktivní tvůrce a samostatně myslící bytost, která si konstruuje vlastní poznávání na základě svých zkušeností svým vlastním způsobem.
Učitel vyučuje celou třídu stejným způsobem, většinou frontálně, děti plní příkazy učitele, pracují převážně individuálně.	Učitel nabízí dětem možnost práce různým způsobem, respektuje jejich individuální rozdíly, děti mohou pracovat individuálně, ve dvojicích, ve skupinách. Mají možnost si pomáhat a spolupracovat.
Komunikace s rodiči je vyhrazena pro případy, kdy je třeba informovat o výsledcích dítěte nebo pokud se objeví nějaký problém, škola žije svým vlastním životem.	Rodiče jsou považováni za partnery učitele, jsou ve škole vždy vítáni a očekává se jejich účast na školním vzdělávání svého dítěte.
Hodnocení je zcela v kompetenci učitele a je založeno na porovnávání úspěšnosti dítěte s ostatními dětmi prostřednictvím známek.	Hodnocení zachycuje individuální pokrok každého dítěte, podílejí se na něm i děti, které společně s učitelem formulují požadavky (kritéria) hodnocení.

2.1.2 Konstruktivistické směry

Jak již bylo zmíněno v předchozí části, konstruktivismus je poměrně široký myšlenkový proud, není tedy ku podivu, že i v rámci pedagogického konstruktivismu došlo ke vzniku různých směrů, které se v určitých aspektech lišily. Za nejvýraznější z těchto směrů mohou být považovány tyto:

1. **Kognitivní konstruktivismus**

   Za nejznámějšího představitele tohoto směru je považován Jean Piaget, jehož dílo bude podrobněji rozebráno v následující části této práce. Hlavním bodem zájmu tohoto směru je kognitivní vývoj dítěte.

2. **Radikální konstruktivismus**

   Typickým znakem radikálního konstruktivismu je odmítání objektivní pravdy či nepravdy, velký důraz je kladen na subjektivní realitu, která je vázaná na poznání konkrétního jedince. Jedním z hlavních představitelů byl Ernst von Glasersfeld.

3. **Sociální konstruktivismus**

   Sociální konstruktivismus klade důraz na vliv společnosti, ale i postavení jedince a jeho sociálních interakcí na jeho konstrukci reality. Mezi představitele tohoto směru patří například Lev Vygotskij, autor pojmu „zóna nejbližšího vývoje“, v didaktice matematiky pak například Paul Ernest.

4. **Didaktický konstruktivismus**

   Hlavními představiteli tohoto směru jsou Milan Hejný a František Kuřina. Milan Hejný je společně se svým otcem Vítem Hejným zakladatelem „Hejného metody“, konstruktivistického přístupu pro výuku matematiky, který významně ovlivnil vzdělávání v České republice a dosáhl i mezinárodního věhlasu.

   Společně s Kuřinou zkoumali didaktické principy pro konstruktivisticky laděnou výuku matematiky, výsledky svého zkoumaní publikovali například v knize *Dítě, škola a matematika*.

5. **Realistický konstruktivismus**

   Realistický konstruktivismus se zaměřuje na propojení výuky a reálného světa. Hledá způsoby, jak propojit výuku se reálným kontextem, aplikací postupů a řešení problémových situací. Jedním z představitelů je nizozemský matematik Hans Freudenthal.

3 Konstruktivismus ve světě

V následující části budou uvedeny osobnosti, které měli podíl na vzniku a rozvoji konstruktivistického hnutí ve světě. Jak bylo uvedeno dříve, konstruktivismus je velmi široký pojem, a proto by zde mohly být uvedeny osobnosti z nejrůznějších oborů, nicméně vzhledem k zaměření této práce byly vybrány pouze obory související se vzděláváním. Z vybraných osobností zde bude rozebrána práce Jeana Piageta a Lva Vygotského, kteří jsou často považováni za duchovní otce konstruktivismu. Dále Budou stručně uvedeni David Bloor a Ernest von Glasersfeld. Závěrečná část této kapitoly bude věnována několika významným osobnostem didaktiky matematiky, konkrétně Hansi Freudenthalovi, Anně Sfard a Paulu Ernestovi.

3.1 Jean Piaget

Jean Piaget (1896–1980) byl švýcarský psycholog, který je považován za jednoho z nejvýznamnějších představitelů konstruktivismu. Piagetův výzkum se zaměřoval především na kognitivní vývoj dětí. Jeho teorie kognitivního vývoje popisuje, jak se v průběhu vývoje dítěte rozvíjejí jeho mentální schopnosti. Jedna ze základních myšlenek této teorie spočívá v tom, že dítě aktivně konstruuje své chápání světa. Dítě se dle Piageta může učit novým věcem pouze tehdy, pokud je schopno tyto nové poznatky začlenit do svých stávajících mentálních struktur.

3.1.1 Základní principy Piagetova konstruktivismu

Mezi základní znaky Piagetova konstruktivismu patří adaptace, organizace a eqilibrium, proto budou tyto pojmy v následujících odstavcích stručně vysvětleny.

Adaptací se rozumí přizpůsobování se jedince okolnímu světu. V rámci adaptace jednotlivce jsou pak zásadní dva procesy – **asimilace** a **akomodace**. Při asimilaci si jedinec začleňuje nové informace do stávajících mentálních struktur, oproti tomu při akomodaci jedinec upravuje stávající mentální struktury tak, aby odpovídaly nově získaným informacím nebo aby do nich bylo možné nové informace začlenit.

Pojem **organizace** popisuje, jakým způsobem si jedinec organizuje své mentální struktury. Dle Piageta má každý jedinec vrozený sklon organizovat získané informace do logických struktur, které se mění v závislosti na vývoji jedince.

Equilibrium je v podstatě stav rovnováhy či vyvážení adaptace a organizace. Dojde-li v poznávání daného jedince k rozporu mezi novou informací a stávající mentální strukturou, nebo nejde novou informaci do stávající mentální struktury zařadit, vzniká u jedince nejistota (disequilibrium). Aby bylo možné opět nastolit rovnováhu, musí dojít k novému vývoji mentálních struktur.

3.1.2 Stádia vývoje

Jak již bylo uvedeno výše, dalším významným prvkem Piagetovy práce bylo zkoumání různých stádií vývoje dítěte. Piaget v tomto ohledu provedl řadu experimentů a výzkumů. Jejich výsledky prezentuje mimo jiné také v knize *Toward a logic of meanings* (Piaget et al. 1991), kde popisuje sérii experimentů prováděných s dětmi různého věku. Dětem předkládá k řešení různé problémové úlohy (například získat hračku, na kterou dítě nedosáhne), a zkoumá, jak se mění strategie řešení v závislosti na věku dítěte. U starších dětí jsou pak použity také úlohy s matematickým přesahem, například odhady vzdáleností, dláždění či zachování míry. Kniha je značně zaměřena na matematické úlohy a Piaget v této sérii experimentů poukazuje na to, kdy vznikají a jakým způsobem se v řešení zadaných úkolů projevují prvky matematické logiky

V obecné rovině ale Piaget zkoumá, jak se liší vnímaní dítěte a jeho přístupy k řešení problému na základě jeho věku a zkušeností, studuje duševní vývoj dítěte od jeho narození až po období pubescence, kdy dle Piageta dosahuje dítě úrovně formálního myšlení a tvorby takzvaných formálních operačních schémat.

Podle Piageta (2014) je možné duševní vývoj dítěte rozdělit do čtyř základních stádií

1. Senzomotorické stádium
2. Předoperační stádium
3. Stádium konkrétních operací
4. Stádium formálních operací

Senzomotorické stádium

Dle Piageta se v prvotní stádium duševního vývoje dítěte rozvíjí senzomotorická inteligence, proto je označováno jako stádium senzomotorické. Trvá od narození přibližně do dvou let dítěte, jedná se tedy o období před „vznikem“ řeči, a proto jde o čistě praktickou inteligenci. Dítě v tomto období získává první informace o světě kolem sebe pomocí svých smyslů, zatím však není schopno abstraktního myšlení. Dalším důležitým znakem tohoto stádia je motorická aktivita, dítě se v tomto období učí, jak ovládat své tělo. Důležitým vyústěním tohoto stádia je vývoj objektové stálosti, tedy uvědomění si, že předmět existuje i tehdy, když není vidět.

Předoperační stádium

Následující, předoperační, stádium trvá přibližně od dvou do sedmi let věku dítěte. V tomto období dochází k rozvoji řeči a symbolického myšlení, což dítěti umožňuje uvažovat o abstraktních pojmech které nemusí nutně mít fyzickou podobu. V průběhu tohoto období dítě začíná být schopno mluvit o minulosti, objevuje se u něj symbolická hra a schopnost předstírat.

Nicméně i toto stádium má jistá omezení, myšlení dítěte je stále konkrétní a neabstraktní. V předoperačním stádiu je myšlení dítěte také egocentrické, dítě vidí svět pouze z vlastního pohledu, nedokáže na věci pohlížet z perspektivy jiného člověka. Dítě již je schopné jisté úrovně logického uvažování, ale větší význam, než logickým argumentům přikládá tomu, jak ne něj věci působí, jakými se mu zdají být.

Stádium konkrétních operací

Stádium konkrétních operací se obvykle vyskytuje u dětí ve věku mezi sedmi a jedenácti lety, dochází během něj k velkému rozvoji kognitivních dovedností. Dítě je v tomto období schopno provádět operace s konkrétními objekty či událostmi, dochází k rozvoji logických dovedností. Na rozdíl od předchozího stádia je dítě schopno zaměřit se na více vlastností jednoho objektu, zatímco v předoperačním stádiu by se většinou zaměřilo ne jednu vlastnost a ostatní by nezohledňovalo.

Dítě v tomto období začíná rozumět konzervaci, chápe že vlastnosti objektu jako množství, objem či délka zůstávají neměnné i v případě, že dojde ke změně jejich vzhledu. S rozvojem tohoto konceptu také souvisí rozvoj reversibility, tedy uvědomění si, že některé akce mohou být následně vráceny do původního stavu (například při přelívání vody z jedné nádoby do druhé).

Ve stádiu konkrétních operací dítě začíná chápat základní principy matematiky a logiky, je schopné klasifikovat objekty dle jejich vlastností. Dítě je schopno zpracovávat a organizovat získané informace, což je základním předpokladem pro tvoření logických postupů a plánů. Ačkoliv je dítě schopno nahlížet a soustředit se na více aspektů řešeného problému, jsou jeho schopnosti v tomto ohledu stále značně omezené.

Stádium abstraktních operací

Poslední ze stádií, stádium abstraktních operací, trvá obvykle od jedenácti let. V této fázi kognitivního vývoje začíná být jednice schopen abstraktního myšlení, nepotřebuje tedy k manipulaci konkrétní objekty, vystačí si s abstraktními koncepty a symboly. Díky tomu může provádět abstraktní matematické operace či rozvíjet teoretické koncepty. Mimoto je schopen i hypotetického uvažování, dokáže zvažovat možné důsledky, předpovídat možné budoucí události.

V tomto období dochází k výraznému rozvoji logického myšlení a schopnosti logicky argumentovat. Jedinec je již schopen řešit složité problémy, při jejich řešení postupuje systematicky a analyticky. Dále zde vzniká schopnost metakognice, tedy schopnost uvědomovat si a porozumět vlastnímu myšlení, což vede k možnosti najít způsoby, jak své myšlení vylepšovat.

Stádium abstraktních operací představuje zralé kognitivní myšlení, které umožňuje lidem provádět složité úkoly, řešit abstraktní problémy a vyvíjet teoretické koncepty. Toto stádium se nevztahuje pouze na děti, ale také na dospělé a tvoří základ pro komplexní myšlení a řešení problémů v různých oblastech, včetně vědy, matematiky a filozofie.

Ačkoliv by se mohlo na první pohled zdát, že uvedená stádia kognitivního vývoje s konstruktivistickým hnutím v zásadě nesouvisejí, opak je pravdou. Piaget ve své teorii zdůrazňuje, že jedinec si v průběhu kognitivního vývoje sám konstruuje své poznání, což je základní myšlenka konstruktivismu. Mezi další myšlenky, které propojují Piagetovu teorii kognitivního vývoje a konstruktivismus, patří například důležitost interakce s prostředím nebo proces vyrovnávání se se změnami, na které dítě v jednotlivých fázích svého vývoje naráží a jejich začlenění do kognitivních struktur dítěte.

3.2 Lev Vygotskij

Lev Vygotskij (1896–1934) byl jedním z nejznámějších sovětských psychologů a pedagogů, jehož teorie dodnes ovlivňují přístupy ke vzdělávání. Jedním z klíčových aspektů jeho práce byla jeho sociokulturní teorie vývoje, která klade velký důraz na sociální podmíněnost psychického vývoje dítěte. Vygotskij zastával názor, že sociální interakce silně ovlivňují kognitivní vývoj jedince, ale také formují jeho hodnotový systém a výrazně ovlivňují učení.

Kromě sociálních interakcí hraje při vývoji jednice významnou roli také kultura, jelikož jazyk, písmo či matematické symboly jsou kulturními produkty a zároveň jsou to pro jedince nástroje myšlení, které využívá při řešení problémů a jejichž prostřednictvím rozvíjí své kognitivní schopnosti. Dle Vygotského je jazyk jedním z nejdůležitějších nástrojů pro kognitivní vývoj. Toto tvrzení podporují výsledky experimentu popsaného ve (Vygotskij 1979), při kterém bylo prokázáno, že děti před osvojením řeči, využívají stejnou praktickou inteligenci jako primáti. Toto se ale po osvojení řeči mění a děti začínají využívat nové strategie řešení problémů, které nejsou tolik závislé na informacích, které získávají z prostředí, například jsou schopné navrhnout řešení, při kterém využijí předmět, který není v místnosti přítomen. (Vygotskij 1979, s. 29) shrnuje toto téma následovně:

> Specificky lidská schopnost použití jazyka umožňuje dětem používat pomocné nástroje při řešení obtížných úkolů, překonávat impulzivní jednání, naplánovat řešení problému před jeho realizací a ovládat své vlastní chování.[1]

Klíčovou roli má dle Vygotského ve vývoji také vnitřní řeč dítěte, která má zásadní roli během kognitivního vývoje dítěte. Vygotskij tvrdí, že vnitřní řeč se postupně vyvíjí z řeči vnější, která má z počátku pouze sociální charakter, ale postupem času se internalizuje a mění na vnitřní. Tento proces popisuje Vygotskij v rámci experimentů prováděných s dětmi různého věku, nejprve dítě všechny své úvahy související s řešením problému popisuje nahlas, nicméně účelem není o tomto procesu informovat další osobu, ale jde o takzvaně „egocentrickou řeč“, tedy dítě mluví samo k sobě. Právě tato „egocentrická řeč“ je dle Vygotského předstupněm vnitřní řeči. Tu pak dítě může používat obdobně, nicméně už pouze na úrovni vlastního myšlení. Vnitřní řeč pak pomáhá dítěti v řešení složitějších úkol, umožňuje abstraktní uvažování, pomáhá plánovat a kontrolovat jednání dítěte.

Zřejmě nejvýznamnějším a dodnes využívaným konceptem Vygotského teorie je **Zóna nejbližšího vývoje** (Zone of Proximal Development, dále ZPD), ten Vygotskij definuje následovně (Vygotskij, 1930, s. 86):

> Je to rozdíl, mezi aktuální úrovní rozvoje, která je určena samostatným řešením problémů, a úrovní potenciálního rozvoje, která je určena řešením problémů pod vedením dospělého nebo ve spolupráci se schopnějšími vrstevníky.[2]

Z uvedené definice je evidentní, že žákův rozvoj je chápán ve dvou rovinách, v rovině aktuální a v rovině potenciální. Aktuální úroveň je dána tím, co je žák schopen vyřešit sám, co je ale mnohem důležitější je právě úroveň potenciální, tedy ta, ke které se žák může s dopomocí dostat. V této oblasti probíhá efektivní učení, žák pracuje na úkolech, které by pro něj

---

[1] To summarize what has been said thus far in this section: The specifically human capacity for language enables children to provide for auxiliary tools in the solution of difficult tasks, to overcome impulsive action, to plan a solution to a problem prior to its execution, and to master their own behaviour.

[2] It is the distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers.

samotného byly náročné, ale s pomocí je dokáže splnit. V zásadě lze říct, že v aktuální úrovni je poznání, které již u žáka bylo plně vytvořeno, a dané problémy je tedy schpen řešit samostatně, a v úrovni potenciální se nachází poznání, které se vytváří.

S teorií ZPD se také pojí pojem „scaffolding“ (lešení), který popisuje proces, ve kterém zkušenější osoba, například učitel, poskytuje žákovi podporu v ZPD, tato podpora může mít formu povzbuzení, návodných otázek atd. Tyto formy pomoci, ačkoliv se mohou jevit jako bezvýznamné, mohou žákovi zásadně pomoci v procesu učení a žák má pak šanci dosáhnout úrovně, které by bez této podpory neměl šanci dosáhnout. Tato podpora je dočasná, jakmile ji žák přestává potřebovat, postupně dochází k jejímu odbourávání. Vygotskij byl přesvědčen, že scaffolding má zásadní význam v rámci kognitivního vývoje žáka, což potvrzuje například následujícím výrokem (Vygotskij 1979, s.85):

> Po více než desetiletí ani ti největší myslitelé nikdy nezpochybnili tento předpoklad – nikdy nezvažovali možnost, že to, co děti dokážou s pomocí ostatních, by mohlo v jistém smyslu vypovídat o jejich duševním vývoji více než to, co dokážou samy.[3]

Díky scaffoldingu a zóně nejbližšího vývoje Vygotskij položil základy individualizaci výuky, jelikož prvním krokem je v obou případech určení aktuální úrovně žáka, a následně stanovení dalšího postupu tak, aby se žák mohl co nejvíce rozvíjet. Obdobně tomu je i scaffoldingu, kde je potřeba pro každého žáka vybrat vhodnou podporu, tam kde jednomu žákovi bude stačit vhodně položená otázka, jiný bude potřebovat vhodnou pomůcku. Je tedy zřejmé, že pokud je cílem využití těchto konceptů maximální rozvoj žákových schopností, je třeba se zaměřit na konkrétního žáka v daném okamžiku.

3.3 Ernst von Glasersfeld

Dalším z významných představitelů konstruktivistického hnutí byl rakouský psycholog a filozof Ernst von Glasersfeld (1917–2010). Von Glasersfeld se kromě jiného zabýval také procesem poznávání a konstrukcí vědomí, ve svém zkoumání se zaměřil na to, jak lidé aktivně konstruují své vlastní poznání a jak se učí prostřednictvím interakce se světem. Jeho práci významně ovlivnily myšlenky Jeana Piageta.

[3] Over a decade even the profoundest thinkers never questioned the assumption; they never entertained the notion that what children can do with the assistance of others might be in some sense even more indicative of their mental development than what they can do alone.

3.3.1 Radikální konstruktivismus

Von Glasersfeld je považován za zakladatele a jednoho z hlavních představitelů takzvaného radikálního konstruktivismu. Stejně jako ostatní konstruktivisté i von Glasersfeld tvrdí, že poznání je aktivním procesem jedince, nicméně oproti ostatním konstruktivistickým směrům se vyhrazuje v tom, jaký je výsledek tohoto poznání.

Podle von Glasersfelda není možné dosáhnut objektivního poznání, protože vnější realita je pro poznávajícího nedosažitelná. Výsledkem našeho poznání jsou potom pouze naše subjektivní mentální modely, naše vysvětlení toho, jak svět funguje. Z tohoto pohledu je tedy poznání jedince zcela subjektivní, závisí pouze na jedinci, který ho vytvořil. Sám von Glasserfeld (2013) pak uvádí, že poznání jedince neodpovídá samotné realitě, nekoresponduje s ní („matches reality“), ale je uzpůsobeno tak, aby do ní zapadlo („fits reality“). Zjednodušeně řečeno, jedinec si nevytváří poznání objektivní reality, ale poznání něčeho, co v ní může fungovat.

Tento přístup k poznání, kdy každý jedinec má své vlastní poznání a své vlastní chápání reality, bylo také jedním z důvodů kritiky radikálního konstruktivismu, jelikož v zásadě odmítá existenci objektivní reality. Neexistence objektivní reality pak nutně vede k tomu, že jakékoliv poznání, které si jedinec vytvořil, musí být považováno za správné, jelikož není možné ho s ničím porovnat a určit tak jeho správnost.

Radikální konstruktivismus a vzdělávání

Von Glasersfeld a jeho radikální konstruktivismus měli významný vliv na přístup ke vzdělávání, ale i v oblastech jako je psychologie či filozofie. Vzhledem k jeho pohledu na subjektivní poznávání, které je plně závislé na konkrétním jedinci, výrazně napomohl k rozvoji personalizovaného učení, vede pedagogy k zohledňování různých potřeb studentů v rámci jejich poznávacího procesu. Mimoto von Glasersfeld také zdůrazňoval, že je potřeba zohledňovat i předchozí zkušenosti žáků, neboť hrají významnou roli v jejich vnímání reality a ovlivňují tak poznávací proces.

3.4 David Bloor

V návaznosti na předchozí část o radikálním konstruktivismu je třeba také zmínit práci Davida Bloora. David Bloor (1942 – současnost) je britský sociolog, který se ve své práci zajímal hlavně o sociologii vědy a sociologií vědeckého poznání. Ve své knize *Knowledge and social* *imaginery* se Bloor zabývá analýzou vztahu mezi společností a vědeckým poznáním. Jednou ze stěžejních myšlenek je, že vědecké poznání, respektive to, zda je pravdivé či správné, je podmíněno společností.

Kuhn-Popperova polemika a Silný program

Jelikož těžištěm Bloorovy práce bylo zkoumání různých faktorů ovlivňujících vědecké poznání, bude zde zmíněna jedna z významných debat 20. století související s tímto tématem, která také následně ovlivnila Bloorovu práci – Kuhn-Popperova polemika. Těžištěm sporu mezi Thomasem Kuhnem a Karlem Popperem byly jejich odlišné názory na chápání vědeckého vývoje a na povahu vědeckého poznání.

Zatímco Popper zastával názor, že by všechny vědecké teorie měly být falsifikovatelné, tedy postavené tak, aby bylo možné je ověřit nebo je naopak vyvrátit, a vědecký pokrok je postaven na vyvrácení starých teorií, Kuhn zastával myšlenku, že vědecký vývoj probíhá v obdobích, kdy je vědecká komunita soustředěna kolem konkrétního vědeckého paradigmatu, když toto paradigma narazí na krizi, dochází k revoluci a nahrazuje ho nové paradigma.

Dalším bodem, ve kterém se Kuhn a Popper neshodovali byl relativistický přístup k vědeckému poznání. Popper byl odpůrcem relativistického přístupu, vnímal ho jako ohrožení pro objektivitu vědeckého poznání. Kuhn sice nebyl přímým zastáncem relativistického postoje, nicméně zdůrazňoval, že vědecký vývoj a poznání jsou nezbytně nutně spjaty se společenským a historickým vývojem. Znalosti podle něj vznikají v reálném světě a jsou jím tedy i ovlivňovány, což ale ovšem neznamená, že jsou zcela relativní.

Ačkoliv se Bloor přímo neúčastnil polemiky mezi Kuhnem a Popperem, nicméně se jí zabýval – popisuje ji například ve své knize *Knowledge and social imaginery* – a sám se vůči uvedené problematice vyčlenil v rámci takzvaného Silného programu („Strong programme“). Silný program je sociologická teorie, za jejíž autor jsou kromě Bloora považováni i další sociologové Edinburské školy sociologie vědeckého poznání („Edinburgh School of Sociology of Scientific Knowledge“), jmenovitě třeba Barry Barnes, Henry Collins, Donald MacKenzie a John Henry.

Sám Bloor pak jako čtyři hlavní principy Silného programu uvádí (Bloor, 1991):

1. **Kauzalita** („causality“)
   Vědecké poznání je ovlivňováno nejrůznějšími faktory, například sociálními či historickými, což je třeba zohlednit při jeho zkoumání. Bloor se jako sociolog

samozřejmě nejvíce soustředil na sociální faktory a na to, jak ovlivňují a formují vědecké teorie a přesvědčení.

2. **Nestrannost** („impartiality“)
   Analýza vědeckého poznání by měla být de Bloora nestranná, neměla by tedy upřednostňovat vědecké teorie a přístupy na základě předpokladu o jejich pravdivosti či nepravdivosti. Sociolog by tedy měl k analýze těchto přístupů a teorií přistupovat s neutralitou.
3. **Symetrie** („symmetry“)
   Dle tohoto principu by všechny teorie měly být zkoumány stejnými metodami, bez ohledu, zda jde o teorii všeobecně uznávanou nebo o teorii alternativní. Autoři se tímto přístupem snaží ze zkoumání vyřadit předsudky vůči určitým vědeckým přístupům, aby tak nedocházelo ke zkreslování výsledků.
4. **Reflexivita** („reflexivity“)
   Jelikož sociologie a sociologové jsou sami součástí sociálního kontextu, který studují, mělo by i samo jejich zkoumání být otevřeno reflexi. Sociologové by tedy měli provádět reflexi svých vlastních výzkumů s ohledem na jejich sociální a kulturní postavení.

Bloor a konstruktivistické hnutí

Bloorův postoj k vědeckému poznání má úzkou souvislost s konstruktivistickým hnutím. Jak bylo uvedeno výše, Bloor zastává myšlenku, že vědecké poznání je přímo ovlivněno sociálními faktory, což vede k myšlence, že vědecké poznání není absolutní, nýbrž závisí na lidských interakcích a sociálním kontextu. Tímto přístupem Bloor v podstatě rozšiřuje konstruktivistickou představu, že lidské vnímání reality je přímo závislé na jeho sociálních a jazykových konstrukcích, tím, že ji vztahuje i na vědecké teorie, jelikož i ty jsou součástí tohoto vnímání.

Bloor navíc zdůrazňuje, že rozhodnutí o pravdivosti či nepravdivosti vědeckého poznání, je velmi problematická záležitost. Tvrdí, že hodnocení vědeckého poznání je opět závislé na společenském a kulturním kontextu, čímž v zásadě odmítá objektivní a univerzální kritéria pro hodnocení vědeckých teorií. Bloorova práce, zvláště pak Silný program, výrazně přispěla k rozvoji konstruktivistického přístupu ve studiu vědeckého poznání a přenesla pozornost k významu sociálních a kulturních faktorů, které toto poznání výrazně ovlivňují

3.5 Didaktika matematiky

V předchozích částech byly stručně shrnuty myšlenky významných osobností konstruktivistického hnutí, v následující části pak budou uvedeny někteří z významných představitelů konstruktivismu z oblasti didaktiky matematiky. Největší část bude věnována Vítu Hejnému a Milanu Hejnému, jejichž metoda je stěžejní pro praktickou část této práce.

3.5.1 Anna Sfard

Anna Sfard (1949 – současnost) je významnou osobností v oblasti vzdělávací psychologie, mimo jiné je známá pro svůj přínos v oblasti výuky matematiky. Sfard ve své práci částečně navazuje na Vygotského, zdůrazňuje roli jazyka a komunikace v procesu učení. V tomto ohledu je asi nejznámější její teorie **diskursivního učení**, která se primárně zaměřuje na to, jak se lidé učí pomocí jazyka a komunikace. Sfard jazyk považuje za klíčový nástroj pro učení, jelikož umožňuje myšlení a učení. Nejenže jazyk zprostředkovává myšlenky, al také ovlivňuje to, jak o věcech přemýšlíme. Značnou pozornost také věnovala komunikačním problémům, které mohou komplikovat proces učení.

Sfard se také zabývá problémy spojenými s výukou matematiky, zkoumá, proč i přes všechny podobnosti matematiky s dalšími vědeckými disciplínami, činí matematika a její učení žákům často velké obtíže. Obvyklé zdůvodnění, že matematika je mnohem abstraktnější než ostatní obory, jelikož jejím předmětem jsou abstraktní pojmy, které nemají fyzickou formu, Sfard nepovažuje za dostačující, dokonce ji považuje za nedostatečně vypovídající o skutečném problému. Své vlastní vysvětlení pak staví na dualitě procesu a jeho produktu (Sfard 2011, s.2):

> Nicméně doposud nebylo dosaženo jednotné teorie, která by se zabývala filozofií a psychologií matematiky současně a věnovala stejnou péči matematickému myšlení i matematické myšlence – jak procesu, tak produktu.[4]

Toto rozdělení samo o sobě není v rámci matematiky novým objevem, nicméně Sfard k němu přistupuje odlišně oproti svým předchůdcům. Obdobně jako její předchůdci i Sfard vnímá jako proces různé činnosti, algoritmy a jako produkt objekty, které je možné získat pomocí těchto procesů. Její přístup se ale liší v propojení těchto dvou prvků, dle Sfard jsou

[4] But up to now, not enough has been done in the direction of unified theory which would address philosophy and psychology of mathematics simultaneously, and would take an equal care of mathematical thinking and of mathematical thought - of both the process and the product.

procesy a produkty neoddělitelně spjaty, pro porozumění matematice je třeba je neustále propojovat. Pro efektivní matematické myšlení je dle Sfard potřeba plynule přecházet mezi procesní a produktovou perspektivou.

Na matematiku pak lze nahlížet z pohledu procesů či z pohledu produktů, tyto pohledy Sfard označuje jako operativní pojetí („operational conception“) a strukturální pojetí („structural conception“), nicméně jak bylo uvedeno dříve, tvrdí, že je třeba kombinovat oba přístupy. Operativní pojetí by mělo nejen ve výuce předcházet strukturálnímu, tento fakt je možné nastínit i pomocí vývoje matematiky – při vzniku číselných struktur se mnohdy i po velmi dlouhá období nová číselná struktura prakticky využívala, aniž by k ní existovala ucelená definice, jak (Sfard, 2011, s. 15):

> Je třeba zdůraznit, že v určité fázi si matematici a filozofové plně uvědomili něco, co bylo pravděpodobně po nějakou dobu činěno pouze intuitivně – jejich úsilí o reifikaci, jejich potřebu definice, která by ospravedlnila běžnou praxi odkazování na funkci, jako by to byla skutečná ‚věc‘.[5]

Tento přechod od dynamického využití k vytvoření statického konceptu Sfard nazývá **reifikace**. Jelikož přechod od dynamických procesů ke statickým produktům je velmi obtížný, je mezi nimi výrazný rozdíl primárně s ohledem na kognitivní náročnost a míru abstrakce, je proces reifikace je dále rozdělen do tří fází – interiorizace, kondenzace a reifikace.

Při **interiorizaci** dochází k přechodu od vnějších operací k operacím mentálním. Žák přestává používat reálné pomůcky a modely a místo nich začíná využívat mentální vizualizace nebo konceptualizace bez potřeby vnějších pomůcek. **Kondenzace** neboli zhušťování je proces, při kterém žák přechází od konkrétních příkladů k abstraktnějším reprezentacím, například když žák přejde od sčítání konkrétních objektů ke sčítání pomocí symbolického zápisu. Dochází při ní ke snižování složitosti, přičemž je ale zachován základní význam. V posledním kroku – **reifikaci** dochází k vytvoření abstraktního konceptu, který je ale dále vnímán jako konkrétní objekt, tedy lze s ním dále pracovat, provádět operace atd. Tyto tři kroky musí na sebe navazovat (Sfard 2011, s. 21):

5 It should be pointed out that at a certain stage, mathematicians and philosophers became fully aware of what for some time had probably been done only intuitively - of their striving for reification, of their need of definition which would justify the common practice of referring to function as if it was a real "thing"

> V tuto chvíli by již mělo být jasné, že naše třífázové schéma musí být chápáno jako hierarchie, což znamená, že určitého stupně nelze dosáhnout, pokud nebylo dosaženou všech předchozích.[6]

Podstatnou myšlenkou týkající se popsaného procesu je, že struktura získaná procesem reifikace může pak dále vstupovat do tvorby dalších konceptů, může se dále dynamicky vyvíjet. Příkladem takového posunu mohu být třeba funkce – v prvních fázích jsou vnímány jako proces přiřazování hodnot, postupně pak dojde k vytvoření struktury, funkce jsou vnímány jako objekty. S těmito objekty lze pak následně provádět další operace (například řešit funkcionální rovnice), čímž dochází k návratu k operativní fázi. Tímto „navazováním“ dochází k rozšiřování původního konceptu a vzniku nových vazeb či struktur.

Důležité je uvědomění, že je nutné vycházet ze známé struktury a pomocí procesu budovat strukturu novou, což by měl být i postup, který by měl být dodržován i při výuce. Sfard také uvádí, že v mnoha ohledech by se procesuální porozumění mohlo zdát jako dostačující, nicméně strukturální pojetí je dle ní nezbytné pro hlubší porozumění a zásadně zjednodušuje budování navazujících poznatků. Nicméně procesuální porozumění na určité úrovni může být dostačující, je ale třeba vést žáky k potřebě reifikace, ta se totiž nemusí dostavit ihned, ale s určitým časovým odstupem, takže žáci někdy musejí dané období překlenout pouze s porozuměním procesu.

Dalším znakem jejího diskursivního přístupu je participativní metafora učení – učení je podle Sfard chápáno jako aktivní účast v sociálních praktikách, diskusích atd. Sfard zdůrazňuje potřebu aktivního zapojení studentů do těchto diskusí, protože tím se podporuje smysluplné učení.

Artefaktizace se zabývá procesem vytváření a použití kulturních nástrojů, těmi mohou být například symboly, grafy, modely atd. Tyto nástroje mohou výrazně usnadňovat komunikaci, porozumění i učení, pomáhají při porozumění složitým konceptům. Dle Sfard artefakty nejsou pouze pasivními nástroji, ale obdobně jako jazyk, ovlivňují naše myšlení a chápání.

---

[6] At this point it should already be clear that our three-phase schema is to be understood as a hierarchy, which implies that one stage cannot be reached before all the former steps are taken

3.5.2 Paul Ernest

Další významnou osobností konstruktivistického hnutí je Paul Ernest (1944 – současnost), britský filozof zaměřující se na matematiku a didaktiku matematiky. Ernest patří mezi představitele sociálního konstruktivismu, důrazně se vymezuje proti radikálnímu konstruktivismu dle von Glasersfelda, především vůči jeho odmítání sociálního aspektu učení. Své výhrady vůči tomuto přístupu Ernest vyjadřuje například tímto výrokem (Ernest, 2011, s. 88):

> Nicméně tento postoj komplikuje vytvoření sociálního základu pro mezilidskou komunikaci, pro společné pocity a obavy, natož pak pro sdílené hodnoty. Tyto problémy se musí v paradigmatu zohlednit, jednak tím, že vyváží vědění s cítěním, a také uznáním, že všichni lidé začínají jako součást jiného bytí, nikoliv odděleně.[7]

Ernest ve své práci zdůrazňuje sociální aspekt učení, radikální konstruktivismus podle něj jedince v procesu učení izoluje od okolního světa a uzavírá ho pouze do jeho vlastní reality, jejíž součástí je daný jedinec. Z tohoto důvodu je radikální konstruktivismus považován za solipsistický, poznávající je součástí poznávaného, a je potřeba jeho přístup změnit. Za další nedostatek radikálního konstruktivismu Ernest považuje absenci objektivní pravdy, každý jedinec si vytváří svou vlastní verzi chápání světa, tak aby odpovídalo jeho zkušenostem, nicméně tyto verze se mohou u různých jedinců výrazně lišit s ohledem na jejich zkušenosti. Co více tato dvě vnímání reality se navzájem nemohou nikterak ovlivňovat, ani zasahovat do vzniku sociální reality.

Jako protipól, který řeší uvedené nedostatky radikálního konstruktivismu, Ernest staví sociální konstruktivismus. Jak již název napovídá oproti radikálnímu konstruktivismu tento zahrnuje i vliv společnosti a okolí na poznání jedince a na jeho učení. Ernest pak rozděluje sociální konstruktivismus na dvě odnože – zaměřenou na jednotlivce a zaměřenou na společnost. První uvedená dle Ernesta vychází z radikálního konstruktivismu, ke kterému „pouze" přidává sociální aspekt. Jedinci tedy nebudují své poznání izolovaně, do jeho tvorby mohou vstupovat i další aktéři. Oproti tomu představitelé druhého typu, tedy sociálního konstruktivismu zaměřenému na společnost, ke kterým se řadí i sám Ernest, nejenže připouštějí,

[7] But such a view makes it hard to establish a social basis for interpersonal communication, for shared feelings and concerns, let alone for shared values. Thus, the paradigm needs to accommodate these issues by balancing knowing with feeling, and acknowledging that all humans start as a part of another being, not separately.

že se na poznání jedince podílejí nejen další jednotlivci a společnost, ale také zdůrazňují, že tento vztah je vzájemný. Tedy nejenže poznání a myšlení jedince je ovlivněno společností, ale také jedinec a jeho poznání ovlivňují společnost, pomáhají vytvářet společenské konstrukty, ale také hodnoty, postoje atd. Sám Ernest pak uvádí (Ernest, 2010, s. 68):

> Důsledkem toho je, že lidské poznání nemůže vytvořit „skutečný obraz“ reality (v tomto ohledu souhlasíme s radikálním konstruktivismem). Klíčovým problémem, jímž se odlišuje od zkušenostního světa radikálního konstruktivismu, je to, že sociální realita existuje před každým jednotlivcem, který je socializován k přijetí upravené místní verze pohledu na svět, zatímco se sám současně podílí na neustálém vývoji této sociální reality, což znamená, že sociální realita nikdy není statická.[8]

Tento pohled se pak prolíná i v Ernestově pohledu na matematiku a její výuku. Není podle něj možné na matematiku pohlížet jako na objektivní a nezávislou disciplínu, naopak ji považuje za společenský konstrukt, který je vytvářen a udržován prostřednictvím lidské interakce a který je rovněž ovlivňován kulturními normami. Ve výuce matematiky jsou pak klíčovými prvky, nepostradatelnými pro konstrukci matematického poznání, interakce mezi jedinci, sdílení znalostí a diskuse.

V oblasti matematiky a didaktiky matematiky se Ernest zaměřoval na kritickou analýzu matematické epistemologie. Ve svém zkoumání se zabýval otázkami fungování matematického poznání a způsoby jeho konstrikce, často se v tomto ohledu zaměřoval na filozofické hledisko tohoto procesu. V rámci poznávání a učení se matematice Ernest rozlišuje 6 základních výstupů, jimiž jsou:

- Fakta
- Dovednosti
- Koncepty
- Konceptové struktury
- Obecné strategie
- Ocenění

[8] Consequently, human knowledge can never give a „true picture” of reality (an insight shared with radical constructivism). The key issue that distinguishes it from the experiential world of radical constructivism is that social reality pre-exists any individual who is socialised into accepting a modified local version as his or her worldview, whilst simultaneously participating in the ongoing development of that social reality, which means that it is never static

První úrovní výstupů v matematice jsou dle Ernesta fakta, informace, které si jedinec musí uložit do krátkodobé a následně i do dlouhodobé paměti, jedná se zde například o značky, zkratky, převodní vztahy atd. Proces učení faktů usnadňuje takzvané kouskování („chunking“), proces, při kterém si jedinec jednotlivé informace spojuje a skládá do větších celků, toto skládání může být i nahodilé, nicméně již jde o náročnější proces než pouhé pamětní učení. Další úrovní výstupů jsou dovednosti, většinou vícekrokové postupy, které mají jasně daná pravidla. Příkladem takového postupu mohou být například základní matematické operace, jako písemné sčítání či odčítání. Na rozdíl od faktů, pro učení dovedností není dostačující pouze zapamatování, ale je potřeba dané postupy i natrénovat. Součástí tohoto procvičování bývají zpravidla žákovské chyby, často se v nich opakují jisté vzorce, jež musí učitel odhalit a následně dovést žáky k jejich odstranění.

Vyšším výstupem v učení matematiky jsou pak koncepty a kontextové struktury. Konceptem jsou zde chápány buďto množiny nebo konkrétní vlastnosti. Pokud by jako příklad konceptu byl brán čtverec, žáci by z dané množiny měli být schopni vybrat čtverce, tedy čtyřúhelníky se stejně dlouhými stranami a pravými úhly. Zjednodušeně řečeno, koncept je myšlenka, která se skrývá za daným pojmem. Pokud by se žáci naučili pouze pojem jakožto název, jednalo by se o fakt, pokud tomuto pojmu porozumí, jedná se o koncept. Konceptové struktury jsou pak propojením konceptů, vztahy mezi nimi, jejich společné vlastnosti a rozdíly, … Tyto struktury se pak v rámci poznávacího procesu neustále rozšiřují a doplňují o nové koncepty, které jsou žákům v průběhu učení matematice předkládány. Na úrovni konceptů, a zvláště pak na úrovni konceptových struktur, začíná být výraznější potřeba vlastní konstrukce poznatků a jejich organizace, poněvadž pouhým paměťovým učením by bylo pro žáky velmi obtížné, ne-li nemožné, obsáhnout všechny potřebné poznatky a vybavit si je v odpovídajících situacích. Čím více konceptů a vazeb mezi nimi si žák vytvoří, tím snazší je pak pro něj si je následně vybavit.

Dalším výstupem jsou obecné strategie, v této rovině je pozornost věnována řešení problémů matematického a následně i nematematického charakteru. Řešení problémů patří mezi jednu z nejdůležitějších oblastí výuky matematiky, ostatně je také součástí rámcového vzdělávacího programu, jeho důležitost spočívá v tom, že strategie, které při řešení matematických úloh žáci využívají, mohou následně použít i při řešení problémů v rámci dalších vyučovacích předmětů, ale i v běžném životě. Z matematického hlediska jsou důležité tři úrovně řešení problému – první je zkoumání problému a návrh jeho řešení, druhá zahrnuje rozvoj matematického jazyka a komunikaci, v této části je důležitým prvkem schopnost komunikovat své řešení s dalšími jedinci ale také zápis vlastního řešení. Poslední úroveň je zaměřena na rozvoj matematického uvažování, zahrnuje matematické myšlení, usuzování a také zdůvodňování získaných výsledků.

Poslední z výstupů je nazýván ocenění („appreciation“) a je úzce propojen s postojem, který žák k matematice zaujímá a jeho hodnocením matematiky jako celku. Tato hodnotící část by měla být zaměřena nejen na matematiku jako celek, všechny její prvky, vztahy mezi nimi a jejich další možné využití v rámci řešení matematických problémů, ale také roli, kterou matematika hraje ve společnosti a na všechna její možná využití. Samozřejmě tato část není přímo součástí výuky matematiky, nelze ji žáky přímo naučit, nicméně zkušenosti, které žáci v rámci vzdělávacího procesu získávají mohou ovlivnit jejich postoje a vztah k matematice a následně tedy i to, jak žák matematiku hodnotí, samozřejmě tento vliv může bát jak v pozitivním, tak i v negativním slova smyslu.

Závěrem je třeba podotknout, že Ernest je také znám pro svou kritiku tradičních přístupů k výuce matematiky, mimo jiné přispěl k rozvoji výzkumných metod ve výuce matematiky. Zdůrazňoval při tom důležitost mezipředmětových vztahů, rozvoje kritického myšlení a v neposlední řadě také sociální konstrukci matematického poznání. Tyto myšlenky jsou plně v souladu s výše popsanými principy, a jsou tak logickým vyústěním Ernestovy koncepce vyučování matematice.

3.5.3 Hans Freudenthal

Hans Freudenthal (1905–1990) byl významný nizozemský matematik a didaktik matematiky, který přispěl k rozvoji teorie a praxe výuky matematiky. Mezi jeho nejvýznamnější počiny patří vývoj Realistic Mathematics Education (RME), což je přístup k výuce matematiky, který klade důraz na reálné kontexty a v souladu s konstruktivistickým hutím také na aktivní zapojení žáků do procesu objevování matematických konceptů.

Freudenthal byl výrazným kritikem „tradiční“ výuky matematiky, která využívala memorování pouček a algoritmů, Freudenthal je přesvědčen, že tento způsob, přestože byl ve výuce hojně využíván, nevede k porozumění matematice (Freudenthal, 2002, s. 3):

> Jedním z důvodů, proč učitelé učí tímto způsobem, je tradice: takto se to sami naučili, zatímco zapomněli, že to nebyl způsob, jakým matematiku skutečně pochopili, pokud ji vůbec kdy pochopili.[9]

Freudenthal také zdůrazňuje, že dalším důvodem, proč se vyučování matematice po velmi dlouhou dobu ubíralo tímto směrem je také dáno tím, že matematika na rozdíl od dalších vědeckých disciplín svou strukturou umožňuje tento způsob vyučování – lze ji uchopit pomocí pouček a algoritmů.

Realistic Mathematics Education (RME)

Jak již bylo uvedeno, Freudenthal se ve své práci zaměřoval na přístup ve výuce matematiky, který by žákům umožňoval porozumění matematice. Jako vyústění této snahy může být považován přístup Realistic Mathematics Education (dále RME), který je dílem Freudenthala a jeho kolegů. Jak název napovídá je tento přístup zaměřen na propojení matematiky s realitou, nicméně základním stavebním kamenem je Freudenthalovo pojetí matematiky jako lidské aktivity. V rámci tohoto pojetí se Freudenthal vymezuje proti tradiční výuce, zdůrazňuje význam aktivit a činností souvisejících s matematickým myšlením („mathematizing“) na úkor konečného produktu („mathematics“). Tento přístup ovšem neznamená, že by se podle Freudenthala výuka neměla věnovat i matematické teorii, ale spíše zdůrazňuje, že tato teorie by neměla být základem výuky, jak tomu bylo v „tradičním“ vyučování.

V rámci RME jsou s ohledem na výuku matematiky rozlišovány dva základní procesy, kterými jsou horizontální a vertikální matematizace. Horizontální matematizací je rozuměno převedení problému do matematického modelu, v zásadě jde o způsob, jakým žák problém uchopí, aby ho mohl řešit matematicky. Tato úroveň je z kognitivního hlediska nižší, nicméně pro porozumění danému problému a následně i matematickému konceptu je zcela nezbytná. Vertikální matematizace pak značí přechod k abstraktnějším modelům a matematickým konceptům, ten pak žákům umožňuje zlepšovat a prohlubovat jejich matematické dovednosti a propojovat různé matematické koncepty, což v důsledku vede ke schopnosti řešit i obtížnější problémy. V souvislosti s tímto rozdělením Freudenthal zdůrazňuje, že pro porozumění matematice je potřeba obou uvedených procesů, vertikální matematizace umožňuje žákům řešit abstraktnější problémy, nicméně horizontální matematizace je nezbytná pro propojení matematiky s reálnými problémy.

[9] One reason why teachers teach it this way is tradition: it is the way they learned it themselves, while they have forgotten that it was not the way they really understood mathematics if ever they did.

Převážně v souvislosti s horizontální matematizací se Freudenthal věnuje také konceptu “common sense“, jenž by se nechal překládat jako zdravý rozum. Základní myšlenkou tohoto konceptu je využití intuitivního myšlení žáků při řešení matematických problémů a při snaze porozumět matematickým konceptům. Za tímto účelem jsou žákům předkládány problémy v kontextech, které jsou jim známé, aby při jejich řešení mohli žáci využít vlastních zkušeností a díky tomu i zdravého rozumu. Tento koncept přináší do výuky řadu benefitů, mimo jiné zvyšuje angažovanost a motivaci žáků, pomáhá žákům vyvážet relevantní a smysluplné koncepty, podporuje kritické myšlení, … Na druhou stranu i tento koncept má svá úskalí, může vést k problémům s přechodem k abstraktnějším konceptům, nemusí být pro některé koncepty dostačující, může vést k nesprávním úvahám. Aby bylo využití zdravého rozumu v matematice žákům ku prospěchu, je potřeba vyvážit jeho použití s dostatečným pochopením formálních matematických principů.

Dalším neméně důležitým konceptem v tomto přístupu je propojení matematiky s reálným životem. Pod tímto konceptem se samozřejmě skrývá využití reálných prostředí, do kterých jsou zasazeny matematické problémy, nicméně Freudenthal zdůrazňuje, že jde i o to, ukázat žákům reálné využití matematiky v běžném životě (Freudenthal, 2002, s. 15):

> Lidé stále častěji používají matematiku, aniž by si toho byli vědomi. Matematiku používají, protože se bez ní neobejdou.[10]

Tento aspekt zdůrazňuje Freudenthalovo pojetí matematiky jako lidské činnosti, poukazuje na důležitost matematiky pomocí jejího využití v běžných každodenních činnostech, ale i v dalších vědních oborech. Matematika by měla být žákům předkládána jako dynamická činnost (mathematising), která má své kořeny v jejich každodenním životě.

Mimo propojení matematiky s realitou na úrovni významu se Freudenthal a RME zaměřuje na kontext, které dělí na chudé (poor) a bohaté (rich) ve smyslu jejich obsáhlosti. Za chudé kontexty jsou považovány ty, které neodpovídají reálným situacím, jsou uměle vytvořeny a výrazně zjednodušeny. Díky tomuto rozporu s realitou mohou žákům zásadně zkomplikovat řešení daného úkolu, jelikož neodpovídají jejich chápání, jsou v rozporu se zdravým rozumem. Dalšími problémy chudých kontextů můžou být jejich nedostatečná hloubka, omezené možnosti jejich propojení s dalšími koncepty, či přehnaná návodnost, která tlumí kreativitu při řešení zadaných problémů. Oproti tomu bohaté kontexty bývají více autentické, odpovídají

[10] People increasingly use mathematics more often than they are aware of. They use mathematics because they cannot do without it.

reálnému svět, což u žáku zvyšuje vnímání užitečnosti matematiky a tím také zvyšuje jejich motivaci, mimoto podporují hlubší porozumění, využití více perspektiv při řešení problému, umožňují propojování různých konceptů v rámci jednoho problému. Nicméně ani bohaté kontexty nepřinášejí pouze pozitivní aspekty, pro některé žáky mohou být nepřiměřeně složité až matoucí, navíc z matematického hlediska je náročné zajistit, aby všem matematickým konceptům byla v rámci bohatých kontextů věnována dostatečná pozornost.

V dalších aspektech odpovídá poznávací proces, označovaný jako řízené znovuobjevování (guided reinvention), v pojetí RME dalším konstruktivistickým přístupům. Důraz je kladen na aktivitu žáků, je dodržován postup od konkrétního k abstraktnímu, zásadní role je přikládána spolupráci a komunikaci mezi žáky, učitel plní roli průvodce žákovým poznáním, nepředává žákům hotové poznatky. Kromě uvedených Freudenthal přejímá i Vygotského myšlenku zóny nejbližšího vývoje, přestože tento termín nezmiňuje (Freudenthal, 2002, s. 47) uvádí:

> Říkám si, když si chytré dítě může samo znovuobjevit značnou část matematiky, tak proč by to také nemohlo dokázat méně chytré dítě s pomocí a pod vedením ostatních – dospělých i svých vrstevníků?[11]

Tuto otázku pak Freudenthal dále rozvádí a konstatuje, že by žáci rozhodně měli dostat potřebnou podporu, aby mohli dosáhnout co možná nejvyšší úrovně, která je v jejich možnostech. Obecně vzato Freudenthalův přístup odpovídá zásadám konstruktivismu, nicméně sám Freudenthal uvádí, že z jeho pohledu vnímá konstruktivismus hlavně jako svobodu činnosti, žáci by dle něj měli možnost přistupovat k řešení problémů vlastními způsoby a nebýt nuceni k předem daným řešením. Taková výuka matematiky je dle Freudenthala nejpřínosnější.

[11] A clever youth can reinvent quite a lot of mathematics on his own, I said. So why should less clever ones not be able to do so with the help and under the guidance of others -- adults as well as their peers?

4 Vít Hejný a Milan Hejný – Hejného metoda

Hejného metoda je označení konstruktivistického přístupu vyučování v matematice, jehož zakladateli jsou Vít Hejný (1904–1977) a jeho syn Milan Hejný (1936 – současnost). V rámci této metody jsou žáci vedeni k budování vlastních matematických schémat v souladu s principy konstruktivistického vyučování. Klíčové principy této metody jsou někdy označovány jako Desatero didaktického konstruktivismu, pod tímto názvem byly také publikovány v knize Milana Hejného a Františka Kuřiny *Dítě, škola a matematika*.

4.1 Teorie generických modelů

Kromě zmíněných principů je dalším zásadním aspektem Hejného metody teorie generických modelů. Tato teorie reflektuje vznik matematického poznání v mysli žáka a úzce souvisí se stádii kognitivního vývoje. Dle teorie generických modelů lze poznávací proces žáka rozdělit do čtyř, respektive pěti fází, kterými jsou:

- Stádium motivace
- Stádium izolovaných modelů
- Stádium generických modelů
- Abstrakce
- Krystalizace

Mezi jednotlivými fázemi pak dochází ke dvěma abstrakčním zdvihům, k prvnímu dochází mezi stádii izolovaných a generických modelů, ke druhému potom mezi stádiem generických modelů a vznikem abstraktního poznání, přičemž každý ze zdvihů vyjadřuje přechod k abstraktnějšímu poznání. Jednotlivé fáze budou hlouběji rozebrány v následující části.

4.1.1 Motivace

V některých zdrojích zaměřených na Hejného metodu není motivace uváděna jako samostatná fáze, nicméně je nepochybně nedílnou součástí procesu učení a hraje v něm klíčovou roli. Bez motivace by nebylo možné zahájit proces aktivního učení, který je nezbytný pro všechny konstruktivistické směry. (Hejný, 2014, s. 42) ohledně motivace uvádí:

> Motivace dává poznávacímu procesu energii i orientaci, a proto hraje klíčovou roli pro kvalitu celého procesu. Žák, který má vnitřní potřebu poznávat, poznává intenzivněji, hlouběji a komplexněji než ten, který je k poznávání nucen.

Pro zahájení procesu učení je v případě Hejného metody nutnou podmínkou vnitřní motivace žáka – rozpor mezi tím, že žák něco nezná a zároveň má potřebu danou věc znát. Proto jsou v rámci této metody žákům předkládány úkoly, které tento rozpor u žáků vyvolávají, které u žáků vzbuzují zvědavost a podněcují tak jejich aktivitu. Pokud by tato fáze nenastala, nemohly by být plnohodnotně zahájeny fáze následující. Hejný také uvádí, že pokud by byla vnitřní motivace nahrazena motivací vnější, šlo by spíše o stimulaci nežli o motivaci. Takové učení by pak nebylo zdaleka tak efektivní a trvalé jako v případě, kdy je využita přirozená zvědavost žáka, a tedy i vnitřní motivace.

4.1.2 Stádium izolovaných modelů

V této fázi poznávacího procesu, v některých zdrojích též nazývané stádium separovaných modelů, se žák seznamuje s různými modely, které reprezentují budoucí abstraktní znalost. Modelem se rozumí prostředek, pomocí kterého se žáci mohou orientovat v daném problému, učinit si ho přehlednějším či názornějším. Žák v této fázi získává zkušenosti s budoucím poznáním, seznamuje s jeho různými reprezentacemi, díky čemuž získává možnost na něj nahlížet různými způsoby a také s ním různými způsoby pracovat.

V této fázi se žák také seznamuje se zdánlivými modely, překvapivými modely a tzv. nemodely. Jako zdánlivý je označován model, který se na první pohled může jevit jako model, přestože ve skutečnosti se o model nejedná. Naopak překvapivý model je takový, který zprvu jako model nevypadá, ale přesto je modelem daného poznání. Za nemodel je považováno to, co nepatří mezi modely, jejich význam spočívá v tom, že se díky nim žák naučí rozeznat co je a co není modelem.

4.1.3 Stádium generických modelů

Jakmile žák získá dostatečný počet izolovaných modelů a uvědomí si, že tyto modely popisují stejný jev, je možné daný problém řešit stejným způsobem, proběhl u něj 1. abstraktní zdvih, čímž se dostává do stádia generických, nebo také obecných či univerzálních modelů.

Pro vytvoření generického modelu je tedy u žáka nutná určitá míra vhledu do daného problému. Na rozdíl od izolovaných modelů, generický model je obecnější, je možné pomocí něj řešit různé situace spojené s daným kontextem (například použití diskrétního modelu pro zlomky – v určitém kontextu již nebude dostačující, na rozdíl od spojitých modelů, které lze „dělit“ neomezeně). Generický model je v podstatě prototypem skupiny izolovaných modelů.

4.1.4 Abstrakce

Dojde-li ke zobecnění izolovaných a generických modelů, žák prochází 2. abstraktním zdvihem, jeho poznání má výrazně obecnější charakter, dostává se do fáze abstrakce. V této fázi jsou modely restrukturalizovány v abstraktní znalost, žák nepotřebuje nadále model k řešení problému (nemusí již modelovat sčítání zlomků, ale provede operaci pouze pomocí symbolického zápisu).

4.1.5 Krystalizace

Pojem krystalizace v teorii generických modelů značí proces, při kterém se žákovy poznatky začleňují do stávajících struktur vytvořených z předchozích poznatků. Tato fáze je ve všech zdrojích uváděna jako poslední, nicméně toto umístění neodpovídá průběhu žákova poznání. Ve skutečnosti může ke krystalizaci dojít jak v průběhu vzniku abstraktního poznání, tak i v průběhu vzniku modelů.

4.2 Duševní (matematický) orgán

S teorií generických modelů rovněž souvisí pojem matematický orgán. Vít Hejný tento pojem, respektive jeho obecnější verzi duševní orgán zavádí v rámci své kinetické psychologie. Základní myšlenkou kinetické psychologie je zkoumání duševního pohybu jedince, Hejný se snažil tento duševní pohyb poznat na základě vnějších projevů jedince. Duševní pohyb se skládá ze tří fází – pohnutky, hodnocení a konání, přičemž první dvě fáze mohou ovlivnit klima a intenzitu duševního pohybu, a tedy i třetí fázi duševního pohybu.

Pojem duševní orgán Hejný zavádí takto (Bachratý, 2012, s. 42):

> Každá z uvedených činností je nejako psychikou administrovaná. Centrum poverené touto administráciou nazveme duševným orgánom.

Hejný následně rozlišuje různé druhy těchto duševních orgánů, přičemž jedním z nich je i orgán matematický. Důvodem využití pojmu duševní orgán oproti používanému pojmu duševní funkce, Hejný zdůvodňuje jeho lepší využitelností v pedagogické praxi. Pokud se u žáka projeví problém, při využití pojmu duševní orgán je chápán jako „onemocnění“ tohoto orgánu, a toto „onemocnění“ je potřeba diagnostikovat a léčit, tedy pochopit duševní pohyb žáka a najít způsob, který mu pomůže problém odstranit. V tomto ohledu duševní orgán pomáhá vyhnout se statickému chápání žákovských problémů a mimo jiné předchází „nálepkování“.

Pojem matematický orgán v zásadě popisuje vrozenou schopnost každého jedince chápat matematické vztahy a struktury, podle Hejného ho také lze u každého jedince dále rozvíjet, což by mělo být hlavním cílem výuky matematiky. Nicméně rozvoj matematického orgánu nelze provádět zvenčí, je plně závislý na aktivitě žáka. Rovněž v souladu s předchozím odstavcem, neporozumění danému problému je chápáno jako nemoc matematického orgánu, a dle toho je třeba k němu přistupovat.

4.3 Role učitele

Jak bylo uvedeno výše, matematický orgán žáka nelze rozvíjet zvenčí, i přesto má ale učitel ve vyučování klíčovou roli. Při použití správného edukačního stylu může rozvíjet žáky nejen na úrovni matematického orgánu, ale i na úrovni osobnostní. Podle Hejného (2014) by měl učitel dodržovat následující zásady:

- Vytváří optimální pracovní klima
- Nechává prostor pro žákovské úvahy
- Vede žáky ke vzájemným diskusím
- Zadává žákům přiměřené úlohy
- Vlastním přístupem podporuje u žáků zájem o matematiku
- Smysluplně pracuje s chybou

Zvláště poslední bod – práce s chybou je v rámci Hejného metody poměrně zásadní téma. V rámci Hejného metody je chyba vnímána jako nástroj učení. V ideálním případě by žáci měli být sami schopni své chyby najít a analyzovat jejich původ, pokud tomu tak není měl by je učitel k objevení chyby dovést, ovšem nejlépe bez toho, aby sám na chybu upozornit, jelikož učitel nemá být tím, kdo hodnotí správnost, o té by měli rozhodnout žáci. K objevení chyby mohou sloužit návodné otázky, zadání nové úlohy, kde bude mít chyba výraznější dopad, nebo rozebrání postupu se zbytkem žáků. Každopádně v tomto pojetí je chyba pozitivním jevem, protože pomáhá žákům hlouběji porozumět matematickým konceptům.

4.4 Desatero didaktického konstruktivismu

Autoři Hejný a Kuřina (2009), shrnují základní principy didaktického konstruktivismu v takzvaném Desateru didaktického konstruktivismu, které obsahuje následující body:

I. **Aktivita**

   Jedním ze základních prvků konstruktivistického vyučování je aktivní učení žáka. V rámci didaktického konstruktivismu autorů Hejného a Kuřiny je navíc i matematika chápána jako specifická činnost, a nejen její výsledek (důkazy, vzorce, poučky, …), proto by tak neměla být předávána ani žákům.

II. **Řešení úloh**

Ve výuce matematiky by řešení úloh a problémů mělo být stěžejní složkou žákovy aktivity, řešení úlohy by se ale nemělo omezovat pouze na matematiku, ale i na další oblasti žákova poznávání.

III. **Konstrukce poznatků**

Dle autorů je v rámci konstruktivistické výuky rozlišovat pojmy informace a poznatek. Informace jsou přenosné, žák je může přijmout z nejrůznějších zdrojů, například od učitele či z knihy. Oproti tomu poznatky jsou nepřenosné, je nutné, aby si je žák sám vybudoval, vznikají v jeho mysli.

IV. **Zkušenosti**

Tento bod velmi úzce souvisí s předcházejícím, jelikož při tvorbě poznatků se žák musí kromě informací, které získal z nějakého zdroje, využívat také vlastní zkušenosti. Tyto zkušenosti by měl žák čerpat jednak z „běžného" života ale také by je měl získávat při řešení úloh a problémů ve školním prostředí.

V. **Podnětné prostředí**

Pro konstruktivistickou výuku nejen v matematice je nezbytné podnětné prostředí. Tímto termínem je jednak rozuměno prostředí, které žákovi přináší dostatek vhodných podnětů, které podněcují žákovu tvořivost a aktivitu, jednak je ale také nutně definováno příznivým sociálním klimatem ve třídě, které je také nezbytným aspektem pro poznávací proces žáka.

VI. **Interakce**

Přestože by se proces učení a konstrukce poznatků mohl jevit jako proces individuální, jelikož probíhá v mysli žáka, interakce při něm může hrát také významnou roli. Interakce ve třídě může významně přispět k rozvoji poznávacího procesu.

VII. **Reprezentace a strukturování**

Dalším důležitým znakem konstruktivistického přístupu je budování široké škály různých druhů reprezentací zkoumaných problémů. U každého poznatku žák nejprve získává tyto konkrétní reprezentace, na jejichž základě pak vytváří obecnější představy, ty následně propojuje a zařazuje mezi dříve získané poznatky – vytváří si strukturu matematického světa. Tento proces je podrobněji popsán v části Teorie generických modelů.

VIII. **Komunikace**

Jak již bylo uvedeno v bodě VI., jedním ze znaků didaktického konstruktivismu je interakce, proto musí být jeho nedílnou součástí také komunikace. Komunikací zde nicméně není míněna pouze komunikace verbální, ale také komunikace neverbální, matematická symbolika atd. Hlavní myšlenkou tohoto bodu je schopnost vyjádřit své myšlenky různými způsoby, ale také schopnost porozumět jazyku ostatních.

IX. **Vzdělávací proces**

Vzdělávací proces je podle autorů třeba hodnotit dle tří hledisek, prvním je porozumění matematice, pro porozumění matematice je základním předpokladem vytváření představ a pojmů a také jejich vzájemné propojení, schopnost hledat souvislosti mezi nimi. Druhým hlediskem pro hodnocení je zvládnutí matematického řemesla, schopnost zvládnout určitá pravidla a algoritmy, znát definice. Posledním hlediskem je aplikace matematiky, schopnost využít získané poznatky pro řešení problémů z různých oblastí života. Nicméně aplikace matematiky může tvorbě poznatků předcházet, působit jako motivační prvek, například při použití motivační úlohy z praxe při zavádění nového tématu.

X. **Formální poznání**

Jako poslední bod desatera autoři uvádějí formální poznání, jev, kterému je třeba v rámci konstruktivistického vyučování předcházet. Jedná se v podstatě o pseudopoznání, žákovi je při něm velmi často předkládán pouze návod, algoritmus, jak při řešení daného problému postupovat, bez hlubšího porozumění danému problému. U žáků tento postup pak vede k tomu, že si získané informace ukládají do paměti, nicméně obvykle relativně brzy dochází k jejich zapomínání a také je jsou jen velmi zřídka schopni použít v jiném než naučeném kontextu, či při alteraci řešeného problému.

4.5 Hejného metoda a konstruktivismus ve světě – srovnání

Hejného metoda nepochybně vykazuje znaky konstruktivistického vyučování a v řadě ohledů je ve shodě s dříve uvedenými autory, sám Milan Hejný uvádí (Hejný, 2004, s. 24):

> „Konstrukce mechanizmu vycházela z experimentálního vyučování autora, ale výrazně využívala mnohaleté pedagogické zkušenosti i pedagogickou

filosofii autorova otce, dále i některé myšlenky J. Piageta a L.P. Vygotského, později, při hlubším rozpracovávání mechanizmu, byly využity i myšlenky dalších autorů.“

Kromě Piageta a Vygotského, kteří jsou přímo uvedeni, zmiňuje Hejný i další autory, z uvedeného výběru například Annu Sfard. Je tedy zřejmé, že Hejného metoda nejenže odpovídá definici konstruktivistického vyučování, ale rovněž čerpá z díla řady konstruktivisticky zaměřených osobností z oblastí psychologie, sociologie a didaktiky. Společné aspekty a konstruktivistické prvky využité v Hejného metodě budou dále podrobněji rozebrány.

Jak již bylo uvedeno, Hejného moteta výrazně vychází z prací Piageta a Vygotského. Z Piagetova přístupu Hejný přejímá v prvé řadě stádia kognitivního vývoje, která jsou v jeho přístupu úzce propojena s teorií generických modelů. V rámci teorie generických modelů, stejně jako v Piagetově stádiích kognitivního vývoje, se nejprve pracuje s konkrétními objekty (stádium konkrétních operací), následně se přechází k jejich reprezentacím, a nakonec dochází k jejich abstrakci (stádium formálních operací), kdy v žákově mysli vznikají abstraktní matematické koncepty, se kterým může žák nadále pracovat bez potřeby pomocných modelů. Samozřejmě tento přístup vyžaduje výraznou míru zapojení žáka a abstrakci musí nutně předcházet dostatečně rozsáhlá práce s konkrétními modely.

Dalším možným pohledem na propojení práce Piageta a Hejného metody můžou být pojetí matematického orgánu, ten v určitém slova smyslu popisuje úroveň žákova poznání, strukturu vytvořenou v žákově mysli, jeho rozvoj pak v zásadě odpovídá procesům asimilace a akomodace. Mimo tuto paralelu se Hejného metoda shoduje s Piagetovou prací i v dalších aspektech, jako jsou aktivní konstrukce poznání či důležitost sociální interakce, nicméně tyto podobnosti jsou platné v rámci obecného konstruktivismu.

Z práce Vygotského Hejný čerpá jednak v rámci obecnějších principů, jako je například vnitřní řeč žáka či pojmové učení, nicméně za zmínku nepochybně stojí dva prvky přejaté z Vygotského díla – zóna nejbližšího vývoje a „scaffolding“. Učitel v rámci výuky zadává žákům úlohy odpovídající obtížnosti a při jejich řešení pak následně poskytuje žákům odpovídající podporu, ať už přímo, nebo prostřednictvím řízené diskuse se ostatními žáky.

Při porovnání s radikálním konstruktivismem (Glasersfeld) a sociálním konstruktivismem (Bloor, Ernest) je zřejmé, že se Hejného metoda přiklání k sociálnímu konstruktivismu. Podobně jako Ernest se s radikálním konstruktivismem shoduje v pojetí žákova poznání jakožto reprezentace žákovské reality, nicméně na rozdíl od radikálního konstruktivismu Hejného metoda z procesu poznání a učení nevylučuje sociální aspekt, ba naopak ho považuje za jeden z klíčových prvků. V tomto ohledu se tedy shoduje s myšlenkami sociálního konstruktivismu, přinejmenším jeho „mírnější“ odnože, která je zaměřená na žáka a jeho poznávací proces.

S realistickým konstruktivismem Hanse Freudenthala se Hejný rovněž shoduje v některých myšlenkách, výrazná shoda u obou autorů panuje v použití zdravého rozumu, intuitivní učení a vycházení z předchozích zkušeností žáka je základem poznávacího procesu jak u Hejného, tak u Freudenthala. Dalším aspektem společným pro oba autory je propojení matematiky a reálných kontextů, i tento aspekt je v Hejného metodě zohledněn, i když mu není věnováno tolik pozornosti, jako v RME.

Ukázalo se, že Hejného metoda nejenže splňuje základní charakteristiky konstruktivistického přístupu k výuce, ale že v mnoha svých aspektech čerpá z práce uvedených představitelů konstruktivistického hnutí.

5 Praktická část

V této části budou porovnány přístupy k vybraným tématům u dvou řad učebnic. Jednou z nich budou české učebnice Hejného metody, druhou série kanadských učebnic *Math Makes Sense.* Obě sady učebnic jsou koncipovány pro základní školu a odpovídající úroveň v kanadském vzdělávacím systému.

5.1 Učebnice Hejného metody

Učebnice Hejného metody v současnosti pokrývají výuku na základní škole. Pro první stupeň jsou učebnice označovány pomocí ročníků, tedy Matematika 1, Matematika 2, atd. Učebnice pro druhý stupeň nesou označení pomocí písmen, tedy Matematika A, Matematika B atd. S ohledem na to, že v následující části práce budou porovnávána témata odpovídající druhému stupni základní školy, učebnice pro první stupeň zde budou zmiňovány pouze pokud v nich bude stěžejní část některého ze porovnávaných témat. Učebnice jsou společným dílem kolektivu autorů v čele s Milanem Hejným a Pavlem Šalomem, mezi další autory patří Darina Jirotková, Anna Sukniak, Jana Hanušová a další.

5.1.1 Struktura učebnic Hejného metody

Z hlediska struktury se učebnice Hejného metody pro druhý stupeň značně liší od jiných učebnic, včetně učebnic *Math makes sense*, jelikož nejsou uspořádány do tematických celků, jak tomu většinou u učebnic bývá. Pro představu téma dělitelnosti, které bývá většinou zařazeno v 6. či 7. ročníku jako jeden tematický celek je v této řadě učebnic zařazeno v učebnicích B (šestkrát), C (jednou), D (jednou), E (dvakrát) a F (jednou). Žáci se k tématům opakovaně vracejí a postupně si prohlubují své znalosti. Tento přístup autoři zvolili s ohledem na to, jak žáci nejsnáze přijímají nové poznatky. (Hejný et a. 2015c) argumentují tím, že střídání témat usnadňuje proces učení, jelikož žáci dostanou prostor nové poznatky zpracovat. Naopak v případě probírání celého tematického celku je množství nových poznatků pro žáky příliš zahlcující a velmi rychle se takto unaví.

Úlohy zadávané v učebnicích jsou obvykle zvoleny tak, aby žáky dovedly k hledanému poznatku. V učebnicích je relativně malý počet úloh, úlohy k procvičení jsou pak v doplňujících pracovních sešitech. Úlohy většinou mívají více dílčích částí, ty jsou často odstupňovány podle obtížnosti, přičemž žáci nemusí nutně zvládnout vyřešit všechny úlohy – rychlejší žáci mohou vyřešit všechny úlohy, nebo mohou vynechat snadné, které pro ně nejsou výzvou, naopak pomalejší žáci mohou vyřešit jen část úloh.

Dalším specifikem této řady učebnic jsou jejich charakteristická prostředí. Některá se vyskytují i v dalších učebnicích či jiných zdrojích, například součtové pyramidy, jiná jsou typické právě pro učebnice Hejného metody. V rámci porovnání budou popsána i jednotlivá prostředí, která jsou v daných tématech využita. Žáci jsou s prostředími seznamováni průběžně již od prvního stupně, žáci jsou pak s jejich pomocí schopni řešit i úlohy, které by pro ně bez daného prostředí nebylo možné řešit. Dalším benefitem využívaných prostředí je, že se žáci při zavádění nových témat vracejí k něčemu známému, což zvyšuje jejich motivaci i úspěšnost.

Učebnicemi žáky provázejí tři postavy – Kira, Ariana a Elmar, řada úloh je postavena na rozhovorech mezi těmito postavami, jejich jména se proto budou vyskytovat u popisu některých úloh. Postavy v učebnicích působí jako motivační prvek, žáci reagují na jejich rozhovory, diskutují navržená řešení, …

5.2 Učebnice Math Makes Sense

Učebnice *Math Makes Sense* je řada učebnic Kanadského nakladatelství Pearson, které je známe pro své inovativní přístupy k výuce. Uvedená řada učebnic klade důraz na praktické použití matematiky, což se výrazně projevuje i v jejich struktuře – části zaměřené na praktické využití matematiky jsou zařazeny do každé lekce. Mimo praktické využití matematiky, autoři také kladou velký důraz na aktivní zapojení žáků a jejich vlastní konstrukci matematického poznání, což je nepochybně řadí mezi konstruktivistické.

Na tvorbě učebnic *Math Makes Sense* se podílel kolektiv autorů z různých oblastí vzdělávání, nicméně nikdo z nich se otevřeně nehlásí ke konstruktivistickému hnutí, ani k žádnému z jeho směrů. Jelikož je kolektiv autorů učebnic velmi rozsáhlý, budou pro představu uvedena jména jen některých z autorů, těch, kteří se podílejí na více knihách této řady – například Addison Wesley, Catherine Heideman, …

Jak již bylo uvedeno, i přes tento fakt učebnice odpovídají charakteristikám konstruktivistického přístupu. Pokud bychom chtěli učebnice v rámci konstruktivismu zařadit konkrétněji, připadají v úvahu sociální konstruktivismus a realistický konstruktivismus. Sociální aspekt je v učebnicích velmi výrazný, v rámci zadávaných úkolů jsou žáci vedeni ke spolupráci a diskusi, učí se prostřednictvím interakce se svým okolím. Spolupráce je v této řadě stěžejním prvkem, v rámci většiny zkoumání pracují žáci ve dvojicích či větších skupinách a následně svá zjištění porovnávají a diskutují s ostatními žáky, buďto v rámci menších skupin, nebo v rámci celotřídní diskuse. Na druhou stranu dalším výrazným prvkem je propojujícím tuto řadu učebnic je provázanost s reálnými situacemi, v této řadě ještě navíc doplněna o propojení s technologiemi.

Dalším charakteristickým rysem učebnic *Math Makes Sense* je velké množství úloh na procvičení, které jsou zařazeny v jednotlivých lekcích. Úlohy jsou samozřejmě zadávány v různých obtížnostech tak, aby učebnice umožnili diferenciaci výuky a aby vyhověly potřebám jednotlivých žáků. V některých kapitolách jsou zařazeny úlohy, které výrazně přesahují rozsah učiva stanovený pro základní vzdělávání, což jen podtrhuje míru diferenciace. V rámci jednotlivých kapitol jsou také často zařazeny hry, nebo lekce zaměřené na ověřování získaných znalostí pomocí technologií, například pomocí geometrického softwaru. Vloženy jsou ale také lekce zaměřené na práci s kalkulátorem, či na výběr různých strategií pro řešení zadaného problému.

5.2.1 Struktura učebnic Math Makes Sense

Druhá porovnávaná sada učebnic má při srovnání s učebnicemi Hejného metody na první pohled mnohem tradičnější charakter. Témata jsou uspořádána do kapitol, které v podstatě odpovídají tematickým celkům. Na úvodních stránkách každé kapitoly jsou uvedena klíčová slova pro dané téma, co se žáci v kapitole naučí a rovněž, kde se s daným tématem mohou setkat v běžném životě. Obzvláště poslední uvedená informace může mít pozitivní vliv na motivaci žáků.

Jednotlivé kapitoly jsou pak děleny do dalších menších částí – lekcí. První lekce je v učebnicích označována jako „Launch“ (zahájení/rozjezd), někdy jako více popisné „Skills you´ll need“ (Dovednosti, které budete potřebovat). Jak druhý název napovídá, jde o část, ve které se objevují základní poznatky, které budou potřeba pro řešení následujících problémů. Ve většině lekcí je tato část věnována opakování dovedností, které byly zařazeny dříve. Po této části bývá zařazena první část nového učiva, rozsah se různí podle toho, o jak rozsáhlé téma se jedná. Zhruba v polovině je pak zařazeno procvičení v podobě „Mid-unit rewiev“.

V následující části kapitoly je předložen zbytek hlavního tématu. Nová témata jsou obvykle zadávána jako problém k řešení pro žáky, kteří jsou pomocí jednotlivých úloh naváděni k hlavnímu poznatku dané lekce. Celé téma je pak shrnuto v závěrečném opakování označovaném jako „Unit rewiev“. V závěru kapitoly pak bývá vložen závěrečný projekt („Unit problem“), obvykle zaměřeným na využití probraného tématu v praxi. Mimo závěrečný projekt se v lekcích objevují i další pokusy o napojení na praktické využití – jednak v rámci zadávaných úloh, ale také formou dalších charakteristických částí, které jsou do tématu zařazovány. Za zmínku nepochybně stojí propojení tématu lekce se světem práce („The World of work“), část „Čtení a psaní v matematice“ („Reading and writingin math“) a propojení matematiky s technologiemi.

5.3 Porovnávaná témata

V této části budou porovnána následující témata:

- Pythagorova věta
- Záporná celá čísla
- Obsahy rovinných útvarů (rovnoběžník, lichoběžník, trojúhelník)

Tato témata byla zvolena vzhledem k jejich důležitosti – všechna patří mezi výstupy dle Rámcově vzdělávacího programu pro základní školy, objevují se v přijímacím řízení – ale také s ohledem na přístup jednotlivých učebnic k jejich zavedení. Výběr byl také proveden s ohledem na to, aby si témata nebyla přespříliš blízká a jejich srovnání tak vytvořilo lepší přehled o podobnostech a rozdílech porovnávaných učebnic. V této části bude popsán způsob zavedení témat a modely, které jsou při zavedení využity. Přístupy obou učebnic budou porovnány.

5.3.1 Pythagorova věta

Pythagorova věta je jedním ze zásadních objevů matematiky a zároveň se jedná o jeden z prvních případů, kdy se žáci setkávají s propojením geometrie a algebry. Mimoto je nedílnou součástí výstupů RVP, který by si žáci měli po absolvování základní školy odnést. Jeho důležitost jen podtrhuje široká využitelnost Pythagorovy věty při řešení různých problémů nejen matematického charakteru.

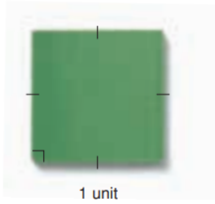
Pythagorova věta v učebnicích Math Makes Sense

V této řadě učebnic je Pythagorova věta zařazena v úvodní kapitole učebnice pro 8. ročník. Samotnému zavedení Pythagorovy věty předchází poměrně dlouhá část, ve které učebnice pracuje s druhou mocninou a odmocninou, konkrétně na propojení mezi jejich algebraickým a geometrickým pojetím. Samotné téma druhé mocniny je zařazeno v učebnici pro sedmý ročník.

V úvodu této lekce je žákům předložena úloha z obrázku 1. Žáci zde mají za úkol sestrojit ze čtverců odpovídajících jedné čtvereční jednotce co možná největší počet obdélníků o daném obsahu, při čemž mají spolupracovat se spolužákem. Vytvořené obdélníky mají zakreslit na čtverečkovaný papír a následně zodpovědět doplňující otázky, které se zaměřují na to, ve kterých případech bylo možné sestrojit čtverec a jak souvisí délka strany takto získaného čtverce jeho obsahem. Poté následuje diskuze se zbytkem třídy o zvolené strategii a jak by bylo možné najít další vhodné obsahy větší, než 20 čtverečních jednotek.

Investigate

Work with a partner.
You will need grid paper and 20 square tiles like this:
Use the tiles to make as many different rectangles
as you can with each area.



4 square units	12 square units
6 square units	16 square units
8 square units	20 square units
9 square units	

Draw the rectangles on grid paper.
- ➤ For how many areas above were you able to make a square?
- ➤ What is the side length of each square you made?
- ➤ How is the side length of a square related to its area?

Obrázek 1 – Pythagorova věta – Úvodní cvičení, mocniny (Baron et al., 2008, s. 6)

V této úloze jde primárně o seznámení žáků s pojmem čtvercové číslo („square number“), a propojení představy druhé mocniny, se kterou jsou žáci seznámeni v učebnici *Math makes sense 7*, a její grafickou reprezentací, tedy obsahem čtverce s délkou strany rovnou mocněnci. Po tomto cvičení následuje krátké vysvětlení a připomenutí značení pro druhou mocninu, v závěru této části je pak řada úloh k procvičení, při kterých žáci i nadále mohou využívat čtverečky pro modelování situace.

V další části lekce mají žáci za úkol objevit vztah mezi čtvercovými čísly a počtem dělitelů. Jejich prvním úkolem je doplnit tabulku dělitelů (viz obrázek 2) a následně odpovědět na otázky:

- Která čísla mají pouze dva dělitele? Čeho jste si na těchto číslech všimli?
- Která čísla mají sudý počet dělitelů, ale více než dva?
- Která čísla mají lichý počet dělitelů?

					6		8																						
			4		3		4																						
	2	3	2	5	2	7	2																						
1	1	1	1	1	1	1	1																						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Obrázek 2 – Pythagorova věta – Tabulka dělitelů (Baron et al., 2008, s. 11)

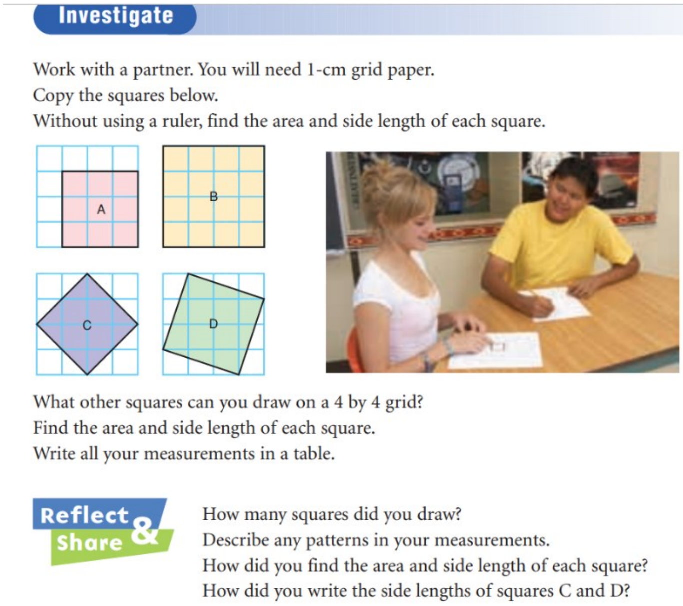
Stejně jako v předchozí části, i při tomto úkolu pracují žáci ve dvojicích, poté následuje diskuze se zbytkem třídy. V této diskuzi mají žáci porovnat své výsledky a také ze zadaných čísel vybrat čísla čtvercová. U čtvercových čísel pak mají diskutovat, jaký vztah platí pro jejich dělitele.

Výstupem této úlohy je zjištění, že pokud má číslo lichý počet dělitelů, je toto číslo čtvercové. Ve shrnutí poznatků je pak uvedeno, že jednou z možností, jak čtvercové číslo poznat je pomocí dělení – hledáme dělení při kterém je podíl roven děliteli – anebo právě počet dělitelů daného čísla. V závěru tohoto shrnutí je také zaveden pojem druhá odmocnina, jako inverzní operace k druhé mocnině a vysvětleno, že druhou odmocninu nelze vždy zapsat jako celé číslo.

Po zavedení druhé odmocniny je vložena lekce zaměřená na její využití pro určování délky úsečky. V úvodní úloze k tomuto tématu (viz obrázek 3) mají žáci určit délky stran zadaných čtverců, také mají doplnit další čtverce, které je možné zakreslit do sítě 4x4 své vlastní čtverce. Cílem úlohy je využít druhou odmocninu pro určení délky strany, je-li znám obsah čtverce. V dalších úlohách je pak využito obecnější zadání, kde je rovněž úkolem určit délku úsečky, nicméně čtverec si musí řešitel doplnit sám.

Další část kapitoly je věnována porovnávání hodnot druhé mocniny a jejich zakreslování na číselnou osu. Poznatek je postaven na porovnání hodnot pod odmocninou se známými čtvercovými čísly. K procvičení je uvedeno několik úloh, obdobně jako u dalších částí, a navíc je přidána hra, která má rozvinout schopnost žáků určit hodnoty druhých odmocnin. Na kartičkách jsou uvedena čísla, některá zadána jako zlomky, celá čísla, mocniny, odmocniny atd. kolem pro žáky je vybrat daný počet karet a ty pak uspořádat podle velikosti.

Před samotným zavedením Pythagorovy věty je pak ještě zařazena lekce zaměřená na práci s kalkulátorem. Mimo jiné zde učebnice představuje vizuální provedení tlačítka pro odmocninu, ale také se zaměřuje na porovnání hodnot druhé odmocniny u různých typů kalkulátorů a upozorňuje na zaokrouhlování, které kalkulátory při výpočtech používají.



Investigate

Work with a partner. You will need 1-cm grid paper.
Copy the squares below.
Without using a ruler, find the area and side length of each square.

What other squares can you draw on a 4 by 4 grid?
Find the area and side length of each square.
Write all your measurements in a table.

Reflect & Share

How many squares did you draw?
Describe any patterns in your measurements.
How did you find the area and side length of each square?
How did you write the side lengths of squares C and D?

Obrázek 3 - Úloha "Délka strany" (Baron et al., 2008, s.17)

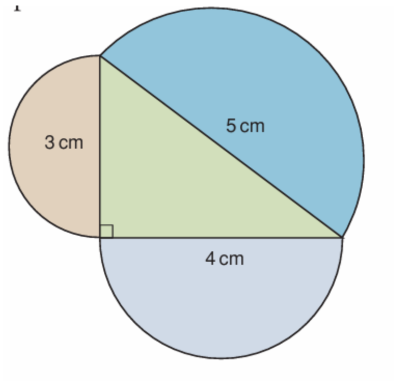
Další část kapitoly se již věnuje zavedené Pythagorovy věty. Nejprve jsou žákům připomenuty termíny přepona a odvěsna. Následně mají žáci za úkol sestrojit z úsečky zadané na čtverečkovaném papíře sestrojit pravoúhlý trojúhelník, přičemž zadaná úsečka má být jeho přeponou. Ke všem stranám mají sestrojit čtverce a pak určit jejich obsah a délky jednotlivých stran trojúhelníku.

Obdobný úkol je poté žákům zadán pro tři libovolné pravoúhlé trojúhelníky, které si mají žáci ve čtvercové síti zvolit. Získané hodnoty žáci zapisují do připravené tabulky (viz obrázek 4) a následně se spolužáky porovnávají své výsledky a hledají vztah mezi obsahy čtverců nad jednotlivými stranami pravoúhlého trojúhelníka a délkami jeho stran – Pythagorovu větu. Ta je následně zformulována a následuje několik řešených úloh. Nutno podotknout, že v této části je uvedena pouze slovní formulace, algebraický tvar Pythagorovy věty zatím uveden není a ani při řešení úlohy není použit.

	Area of Square on Leg 1	Length of Leg 1	Area of Square on Leg 2	Length of Leg 2	Area of Square on Hypotenuse	Length of Hypotenuse
Triangle ABC						
Triangle 1						
Triangle 2						
Triangle 3						

Obrázek 4 - Pythagorova věta – tabulka (Baron et al., 2008, s.31)

Po řešených úlohách jsou přidány úlohy neřešené, stejně jako v ostatních částech jsou zařazeny úlohy různých obtížností. V této konkrétní části jsou ale zařazeny úlohy, se kterými se v běžných učebnicích pro základní školy používaných v České republice setkáme spíše výjimečně. Například Theodorova spirála, ve které žáci mají počítat délky jednotlivých odvěsen, nebo Pythagorova věta, kde jsou místo čtverců využity polokruhy (obrázek 5). Druhá zmíněná úloha se vyskytuje i v učebnicích Hejného metody v rámci kapitoly zaměřené na určení obsahu kruhu.

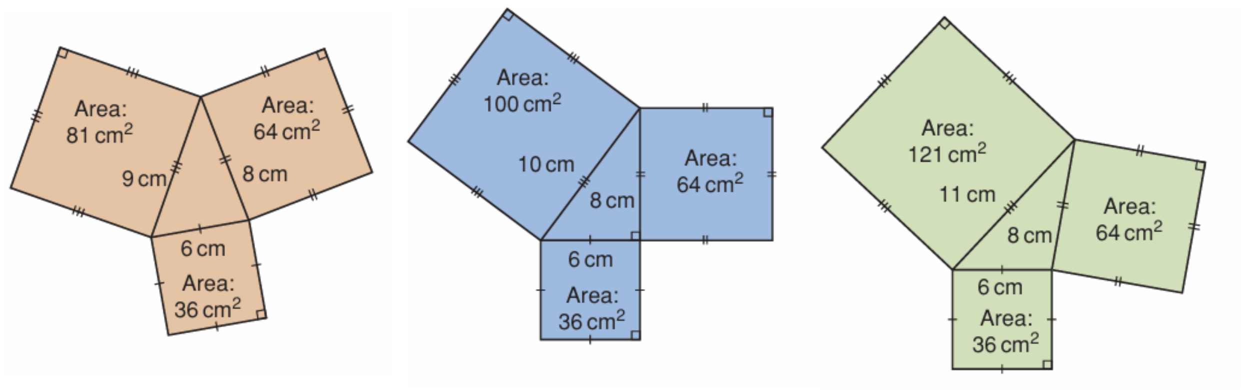


Obrázek 5 - Pythagorova věta, rozšiřující úlohy (Baron et al., 2008, s. 36)

Po úlohách je vložena část zaměřená na využití technologií, v tomto případě na použití počítače a geometrického softwaru na ověření platnosti. Žákům je předložen návod na sestrojení trojúhelníku a čtverců nad jeho stranami včetně měření délek stran a obsahu čtverců. Žáci pak mají zkoumat, zda je Pythagorova věta splněna, i když mění parametry trojúhelníku. V posledních otázkách této části pak mají zjistit, zda bude Pythagorova věta fungovat, i když bude trojúhelník ostroúhlý nebo tupoúhlý.

Otázka vznesená na konci předchozí části je klíčovým prvkem části následující. Obdobně jako při hledání Pythagorovy věty si žáci sami zvolí trojúhelníky ve čtvercové síti – jeden ostroúhlý a jeden tupoúhlý a opět určují délky jejich stran a obsahy čtverců nad těmito stranami. Své výsledky zanášejí do připravené tabulky a následně porovnávají se spolužáky a snaží se zjisti, jak by pomocí získaných informací mohli zjistit, o jaký druh trojúhelníku se jedná.

Vše je shrnuto pomocí tří trojúhelníků, které se shodují ve dvou kratších stranách, přičemž jeden je ostroúhlý, druhý pravoúhlý a třetí je tupoúhlý (viz obrázek 6). Porovnání součtu obsahů čtverců nad kratšími stranami s obsahem čtverce nad nejdelší stranou je uvedeno v tabulce. Na základě toho je potom uvedeno, že Pythagorova věta platí pouze pro pravoúhlý trojúhelník a že ji tím pádem lze využít pro určení, zda je trojúhelník pravoúhlý podle délek zadaných stran – trojice, která tuto rovnost splňuje je pak označena jako Pythagorejská trojice. Algebraický zápis stále není uveden, v řešených úlohách na konci této části jsou již použity zápisy jako 3^2+5^2, ale zatím pouze jako zkrácení zápisu řešení.



For each triangle, compare the sum of the areas of the two smaller squares to the area of the largest square.

Triangle	Sum of Areas of Two Smaller Squares	Area of Largest Square
Acute	36 + 64 = 100	81
Right	36 + 64 = 100	100
Obtuse	36 + 64 = 100	121

Obrázek 6 - Pythagorova věta – různé druhy trojúhelníků (Baron et al., 2008, s. 40)

Další část kapitoly o Pythagorově větě je zaměřená na její aplikaci. V úvodu je žákům předložena úloha (Baron et al., 2008, s. 46):

> Dveře mají výšku 2,0 metru a šířku 1,0 metru. Délka strany dřevěné čtvercové desky je 2,2 metru. Je možné, aby deska prošla dveřmi? Jak to víš? Ukažte svůj postup.[12]

Žáci mají úlohu nejprve řešit ve dvojicích a poté ji ukázat dalším dvojicím a porovnat svá řešení a v případě různých řešení vybrat, které z nich je správné.

Po této úloze jsou žáci upozorněni, že Pythagorovu větu je možné využívat k řešení úloh z praxe, ve kterých se vyskytují pravoúhlé trojúhelníky a také je zde uveden algebraický zápis Pythagorovy věty. Opět následuje několik řešených úloh a také úlohy k procvičení.

V posledních částech kapitoly o Pythagorově větě jsou shrnuty poznatky, které by si měli žáci odnést a další úlohy na využití Pythagorovy věty. Kapitolu uzavírá „Unit Problem“, rozšiřující úloha, která vyžaduje větší zkoumání. Zadaná úloha je zaměřena na hledání čtvercových čísel a velikosti rozdílu mezi dvěma po sobě následujícími čtvercovými čísly.

[12] A doorway is 2.0 m high and 1.0 m wide. A square piece of plywood has side lenght 2.2. Can plywood fit trough the door? How do you know? Show your work.

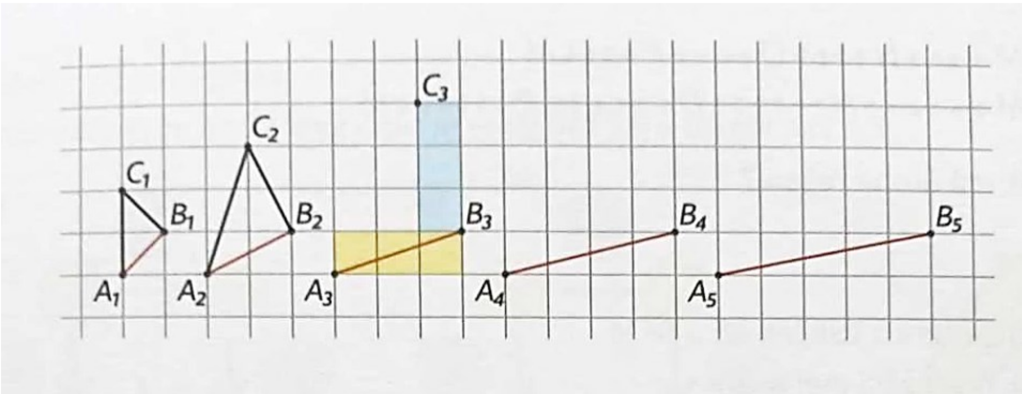
Vzhledem k tomu, že úloha nemá větší význam pro zavedení či aplikaci Pythagorovy věty, nebude více rozebírána.

Pythagorova věta v učebnicích Hejného metody

Samotná Pythagorova věta se v učebnicích Hejného metody vyskytuje pouze v učebnici C, nicméně protože při jejím odvození používá také mřížové čtverce, jejichž konstrukce je součástí učebnice A, bude do popisu zařazena i tato část.

Konstrukci mřížových čtverců předchází v učebnici *Matematika A* ještě dvě kapitoly zaměřená na práci v prostředí mříže, v první je zaměřena na porovnávání délek mřížových úseček, a hledání rovnoběžek. Druhá kapitola se zaměřuje na pohyb po mříži a na popis pomocí šipkových zápisů a hledání středů úseček. Je zde vloženo jedno cvičení, kde mají žáci za úkol doplnit ke dvěma daným bodům třetí tak, aby vznikl pravoúhlý trojúhelník, nicméně to pro samotné odvození Pythagorovy věty nemá větší význam. Samozřejmě bez těchto základních dovedností by další práce v mříži nebyla možná.

Kapitola Mříž III je uvedena úlohou, ve které mají žáci rovněž sestrojovat pravoúhlé trojúhelníky, nicméně zde je navíc podmínka, že tyto trojúhelníky musí být rovnoramenné. V zadání jsou již dva trojúhelníky sestrojeny (viz obrázek 7).

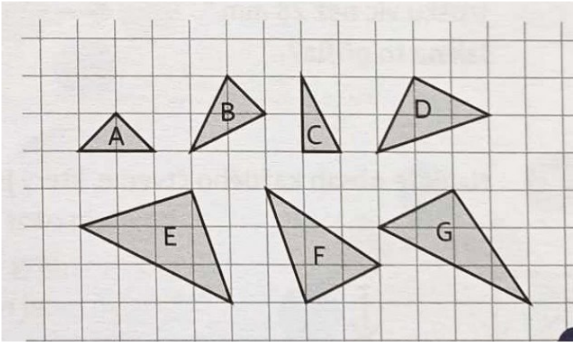


Obrázek 7 - Pythagorova věta – doplňování trojúhelníků v mříži (Hejný et al., 2015a, s. 73)

Podle autorů je hlavní myšlenkou této úlohy, aby se u žáků začala budovat myšlenka kolmých úseček. V další části je pak navrženo, aby žáci doplnili další úsečky A_6B_6 a , A_7B_7, tak aby byly, obdobně jako je tomu v předchozích případech, úhlopříčkami obdélníků 6x1 a 7x1. Autoři také navrhují, že pokud by sestrojení trojúhelníků dělalo žákům problémy, je vhodné doplnit stejným způsobem i další úsečky. U třetího trojúhelníku jsou navíc doplněny dva obdélníky, které mají žáky přivést k myšlence, že úlohu je možné řešit otočením žlutého obdeníku do polohy modrého.

Následuje úloha (viz obrázek 8) , ve které je cílem ověřit, zda lze dané trojúhelníky doplnit na čtverec. Je zřejmé, že žáci musí ověřit dvě podmínky, jednak, zda je trojúhelník rovnoramenný (tato dovednost byla součástí kapitoly Mříž I a taképředchozího cvičení) a také, zda je mezi rameny pravý úhel, což bylo hlavní myšlenkou předchozí úlohy.

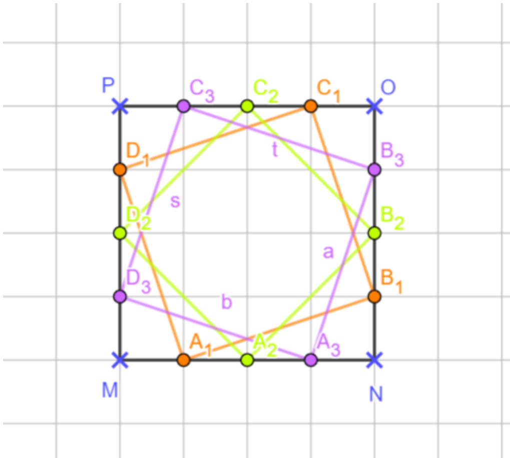
V dalších dvou úlohách se učebnice zaměřuje na přechod k šipkovému zápisu. Žáci mají za úkol doplnit zápis tak, aby útvar vzniklý jeho provedením byl čtverec RSTU. V prvních dvou případech jsou zadány body R,S a T , v dalších už pouze body R a S. Ve druhé úloze je zadání obdobné, ale zadané body tvoří úhlopříčku.



Obrázek 8 - Pythagorova věta – doplnění čtverce (Hejný et al., 2015a, s.73)

Následující úloha je zaměřena na další klíčovou dovednost v rámci práce v mříži a to na rámování. Rámování je důležité hlavně pro určování obsahů, jeho principem je, že daný mřížový mnohoúhelník je vložen do co možnánejmenšího obdélníku, jehož strany leží na mříži. V této úloze žáci mají Žáci mají do šipkového zápisu pro čtverec MNOP doplnit písmena ABCD tak, aby Čtyřúhelník ABCD byl čtverec menší než MNOP. Jelikož strany čtverce MNOP leží na mříži, jedná se zde o opačný proces k rámování.

V rámci řešní žáci také musí zvážit, kolik řešení daná úloha má. Grafické řešení pro první případ – zápis $M \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow N \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow O \leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow P \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow M$ - je na obrázku 9. Žáci mohou najít tři různé čtverce ABCD, které splňují dané podmínky. Úloha má tedy řešení:



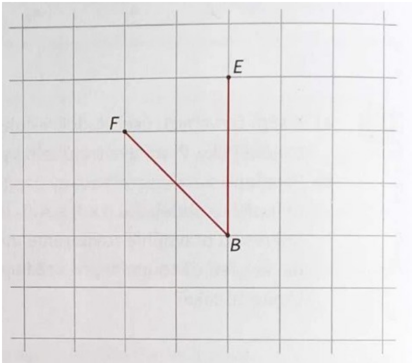
Obrázek 9 - Pythagorova věta – rámování (vytvořeno pomocí programu GeoGebra)

$$M \rightarrow A \rightarrow\rightarrow\rightarrow N \uparrow B \uparrow\uparrow\uparrow O \leftarrow C \leftarrow\leftarrow\leftarrow P \downarrow D \downarrow\downarrow\downarrow M$$

$$M \rightarrow\rightarrow A \rightarrow\rightarrow N \uparrow\uparrow B \uparrow\uparrow O \leftarrow\leftarrow C \leftarrow\leftarrow P \downarrow\downarrow D \downarrow\downarrow M$$

$$M \rightarrow\rightarrow\rightarrow A \rightarrow N \uparrow\uparrow\uparrow B \uparrow O \leftarrow\leftarrow\leftarrow C \leftarrow P \downarrow\downarrow\downarrow D \downarrow M$$

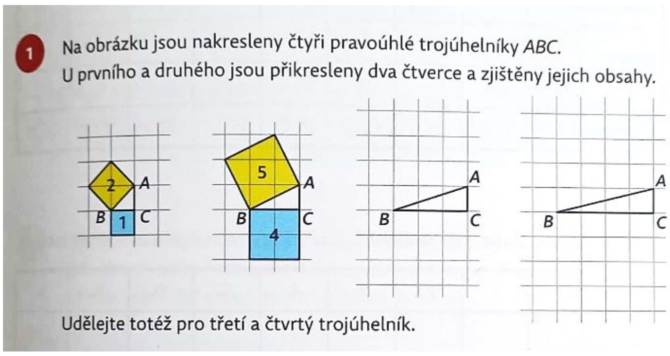
V šesté úloze mají žáci zjistit, jak Ariana přišlana to že úsečka BF je kratší než úsečka BE (viz obrázek 10) bez toho, aby obě úsečky musela měřit. Dle autorů je cílem, aby si žáci uvědomili, že leze využít obsah čtverců, které lze nad danými úsečkami sestrojit, a souvislost mezi obsahem čtverce a délkou jeho strany – tedy že čteverc s větším obsahem musí nutně mít delší stranu. Jelikož obsah čtverce nad stranou FB je 8 čtverečků a nad stranou BE je 9 čtverečků, je zřejmé, že strana BF je kratší. Obdobná myšlenka je využita v úloze následující, kde je dán odhad délky strany BF a úkolem je zdůvodnit, proš si Ariana myslí, že strana je delší. I zde se vychází z obsahu čtverce, protože obsah pro odhadovanou délku by byl menší, než 8 čtverečků, který byl určen v předchozí úloze.



Obrázek 10 - Pythagorova věta – Porovnávání délky úseček (Hejný et al., 2015a, s.74)

V poslední úloze této části mají žáci určit obsahy čtverců sestrojených v úloze s rámováním. Jako možnost rozšíření pro rychlé žáky autoři nabízejí přidat žákům obsahy čtverců nad úsečkou AB, která bude úhlopříčkou obdélníka se strnami p a q, přičemž p a q budou konkrétní větší čísla. I sami autoři uvádějí, že toto je první pokus o objevení Pythagorovy věty.

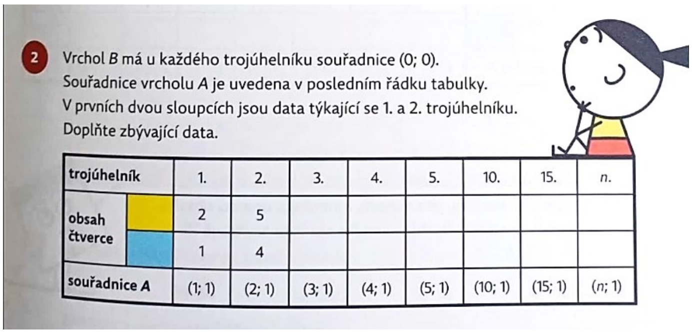
Samotná Pythagorova věta se objevuje v učebnici C v kapitle pojmenované Pravoúhlý trojúhelník. V úvodu kapitoly jsou připomenuty související pojmy přepona a odvěsna. Následuje první úloha (viz obrázek 11), ve které mají žáci doplnit čtverce ke dvěma stranám pravoúhlého trojúhelníka a určit jejich obsahy. Třetí strana má u všech trojúhelníků délku 1. Smyslem úlohy je připomenout žákům konstrukc mřížových čtverců a také výpočet jejich obsahů. Hodnoty z předchozí úlohy jou pak v druhé úloze zapsány do tabulky (viz obrázek 12). V tabulce se objevují obsahy modrých a žlutých čtverců a také souřadnice[13] vrcholu A, jestliže jsou bodu B přiřazeny souřadnice (0;0). V poslením sloupci je pak uveden obecný tvar bodu A (n;1). Žáci by si měli uvědomit, že



Obrázek 11 - Pythagorova věta – obsahy čtverců, (Hejný et al., 2016, s.73)

[13] Souřadnice jsou zavedeny v učebnici Matematika C, kapitola Mříž I

obsahy všech čtverců v této tabulce se liší právě o 1 a následně najít vztahy pro výpočty jednotlivých obsahů,tedy n^2 a $n^2 + 1$.



2 Vrchol *B* má u každého trojúhelníku souřadnice (0; 0).
Souřadnice vrcholu *A* je uvedena v posledním řádku tabulky.
V prvních dvou sloupcích jsou data týkající se 1. a 2. trojúhelníku.
Doplňte zbývající data.

trojúhelník		1.	2.	3.	4.	5.	10.	15.	*n*.
obsah čtverce		2	5						
		1	4						
souřadnice *A*		(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)	(4; 1)	(5; 1)	(10; 1)	(15; 1)	(*n*; 1)

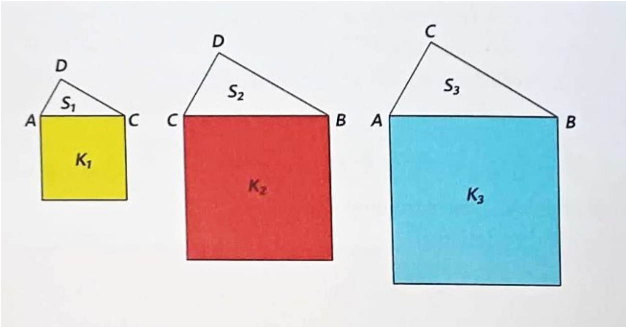
Obrázek 12 - Pythagorova věta – tabulka (Hejný et al., 2016, s.73)

V dalších úlohách jsou žákům zadávány obdobné tabulky s novými body, ve třetí úloze se druhá souřadnice bodu A zvětšila na 2, ve čtvrté úloze pak na 3. Žáci by zde měli opět hledat zákonitosti, tedy že ve třetí úloze se obsahy liší o 4, ve čtvrté o 9 čtverečků. V úlohách je využita tzv. metoda uvolňování paramerů. Souřadnice bodů jsou složeny ze dvou parametrů, proto byly uvolňovány postupně. V první tabulce byla druhá souřadnice bodu A vždy 1 a postupně se měnil parametr první souřadnice. V dalších tabulkách se pak měnil i druhý parametr.

Cílem je žáky dovést k obecnému tvrzení, a to je také jejich úkolem v další úloze, kde mají na základě předchozího zkoumání najít vztah pro obsah čtverce ned přeponou AB, je-li B(0;0) a A(a;b). Autoři uvádějí, že cílem není získat algebraický zápis $a^2 + b^2 = c^2$, který také v učebnici není uveden, čímž se snaží předcházet formálnímu učení. Raději preferují různá slovní vyjádření a dokonce doporučují změnu značení tak, aby žáci, kteří přijdou s vlastním vzorcem byli schopni tento vzorec upravit, například pokud budou zaměněny názvy jednotlivých stran.

Po Pythagorově větě jsou zařazeny ještě dvě úlohy, jejichž pomocí si žáci mají uvědomit vztah obsahu čtverce a délky jeho strany , což vyústí v zavedení druhé odmociny. První z těchto dvou úloh vyžaduje ověření, zda čtverec z jedné z předchozích úloh s obsahem 13 čtverečků má délku strany přesně 36mm, nebo zda je strana delší respektive kratší. Obdobná úloha se již objevila v učebnici A v kapitole o mřížových trojúhelnících, nicméně tam ještě neylo vyžadováno přesné určení délky, pouze její porovnání s daným odhadem. Zde je úloha cílena na určení co možná nejpřesnější hodnoty, které žáci mohou dosáhnout. Kapitolu uzavírá úloha, ve které žáci mají procvičit určování délky strany čtverce ze zadaného obsahu čtverce, tyto čtverce pak maní sestrojit ve čtvercové síti.

V učebnici D je v rámci kapitoly o podobnosti zařazena sada úloh, která má žáky dovést k důkazu Pythagorovy věty. V první úloze mají žáci rozdělit pravoúhlý trojúhelník ABC rozdělit na dva pravoúhlé trojúhelníky a následně dokázat, že původní trojúhelník a dva menší, které z něj rozdělením vzniknou jsou podobné. V další úloze jsou tyto trojúhelníky zakresleny samostatně a na jejich přeponách jsou sestrojeny čtverce tak, že vzniknou „domečky“ (viz obrázek 13), žáci mají zjistit, kolikrát je obsah čtvervce větší, než obsah jeho „střechy“. Zde autoři uvádějí, že není nutné, aby žáci objevili konkrétní číslo, ale že je hlavní uvědomění, že pro všechny „domečky“ bude toto číslo stejné.



Obrázek 13 - Pythagorova věta - "domečky" (Hejný et al., 2017a, s.74)

Vdalší úloze jsou žáci upozorněni, že pro „střechy domečků“ platí $S_1 + S_2 = S_3$ a žáci mají za úkol ověřit , zda by podobná rovnost mohla platit pro čtverce a pro celé „domečky. V poslední úloze mají žáci za úkol dokázat platnost Pythagorovy věty, nicméně to už v zásadě provedly v předchozích úlohách, bude stačit, když přeskládají „domečky“ tak, aby tvořili obvyklý obraz čtverců sestrojených nad stranami pravoúhlého trojúhelníka, platnost rovnosti obsahů čtverců byla dokázána v předchozí úloze.

Pythagorova věta – shrnutí

V učebnicích *Math makes sense* je Pythagorova věta zavedena v učebnici pro osmý ročník. Při jejím zavedení a následném řešení úloh je hojně využívána čtvercová síť a propojení s grafickou stránkou daného problému. V učebnici není zařazen důkaz Pythagorovy věty, nicméně je zde zase uvedeno, jak by se věta změnila, pokud by zadaný trojúhelník nebyl pravoúhlý.

Z hlediska konstruktivismu je výrazné sociální hledisko – součástí většiny úloh využitých k nalezení nových vztahů je využita spolupráce žáků, jednak při samotném zkoumání a řešení zadaných problémů, jednak při diskusi nad jednotlivými řešeními, které po většině úloh následuje.

V učebnicích Hejného metody je Pythagorova věta zaváděna v učebnici Matematika C, nicméně některé důležité dovednosti pro toto zavedení jsou uvedeny již dříve, například sestrojování mřížových čtverců a výpočet jejich obsahů. V učebnici Matematika D jsou žáci pomocí série úloh, na rozdíl od druhé sady učebnic, dovedeni k důkazu Pythagorovy věty.

Při zavedení Pythagorovy věty obě učebnice využívají prostředí mříže, obsahy čtverců v mříži, nicméně samotný přístup při zkoumání je odlišný. Zatímco učebnice *Math Makes Sense* nenechávají žáky experimentovat jen na připravených útvarech, ale i na svých vlastních, učebnice Hejného metody se drží poněkud striktně svého zadání, protože cílí na to, aby žáci využili metodu postupného uvolňování parametru a měli tak šanci najít obecný vztah, který bude v důsledku platit pro každý pravoúhlý trojúhelník. Tato metoda bohužel neumožňuje využití vlastních trojúhelníků, protože by se na nich s největší pravděpodobností nemusely projevit potřebné vztahy.

Učebnice *Math Makes Sense* využívá spíše sociální stránku řešení problému. Žáci pracují buďto s danými útvary nebo s těmi, které si sami zvolí (podle úlohy), a následně porovnávají své výsledky, diskutují své objevy. Pokud by tento sociální aspekt chyběl, byl by počet konkrétních modelů, které mají žáci k dispozici velmi malý pro hledání vazeb a vztahů mezi prvky, nicméně díky diskusi může být počet konkrétních modelů dostačující.

Dalším rozdílem je přístup k výsledkům žákovského zkoumání. Obě učebnice se shodují v přístupu k algebraickému vzorci vyplývajícímu z Pythagorovy věty, obě nejprve pracují s geometrickou představou. Učebnice *Math Makes Sense* nakonec vzorec uvádí, nicméně až v části zaměřené na aplikaci Pythagorovy věty. V učebnicích Hejného metody se vzorec neobjeví vůbec, v příručce pro učitele dokonce autoři uvádějí, že se zápisu pomocí vzorce vyhýbají, aby předcházeli formálnímu učení. V tomto duchu je přistupováno k většině poznatků, učebnice Hejného metody se zápisu vzorců, definic, vět či pravidel ve většině případů vyhýbá, zatímco v učebnicích *Math Makes Sense* jsou žákům vždy předloženy hned po zkoumání daného problému.

5.3.2 Záporná celá čísla a operace s nimi

Záporná čísla jsou nedílnou součástí Rámcového vzdělávacího programu pro základní školy, jejich znalost je navíc zásadní pro řadu dalších témat, například pro řešení rovnic, funkce a mnoho dalších oblastí matematiky. Zároveň jde o jedno z témat, které je pro žáky náročné jak konceptuálně, tak i početně, proto je také zařazeno mezi porovnávaná témata.

Záporná celá čísla v učebnicích Math Makes Sense

V učebnicích Math Makes Sense je téma záporných celých čísel rozděleno do dvou ročníků. V sedmém ročníku je zařazeno zavedení záporných čísel, jejich porovnávání a uspořádání a opačná čísla. Z operací je pak zavedeno sčítání a odčítání. V učebnici pro osmý ročník jsou pak zavedeny operace násobení a dělení, jejich vlastnosti a přednosti početních operací.

Math Makes Sense 7

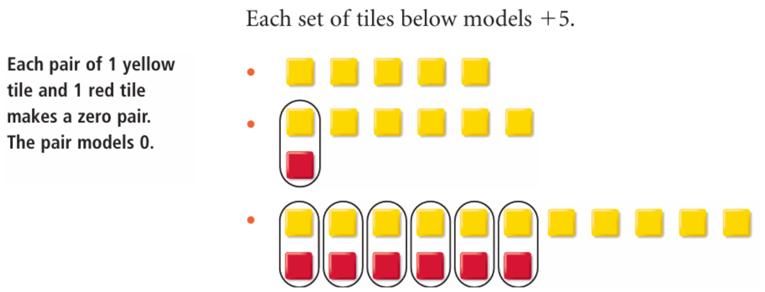
V první části kapitoly o záporných číslech je zařazeno několik úloh na sčítání a odčítání celých čísel (označeno jako „Dovednosti, které budete potřebovat“). V následující části je pomocí teplot objasněn význam záporného čísla a zavedeno označení kladné a záporné celé číslo. V rámci této části je také upozorněno na rozdíl pro označení „negative 4“ a „minus 4“ – v anglickém jazyce se forma s „minus“ používá pro označení teploty pod bodem mrazu, zatímco „negative“ je běžné označení záporného čísla používané v US a Kanadě, v případě „minus 4“ je minus pak bráno spíše jako operátor. Následuje sada úloh, ve kterých mají žáci ve dvojicích zapisovat informaci danou slovním popisem zapsat pomocí kladného či záporného celého čísla, například:

- Osm stupňů pod nulou
- Ztráta 16 dolarů
- Udělat čtyři kroky zpět

Obdobně jako v jiných částech, i v této mají žáci svá řešení prodiskutovat s dalšími dvojicemi a následně i s celou třídou. Cílem cvičení je porozumění představě záporného čísla, nicméně zvolené úlohy patří spíše mezi základní.

Pro sčítání záporných celých čísel je zaveden model – dlaždice. Dlaždice jsou čtvercové, ve dvou barvách – žlutá pro +1 a červená pro -1. Kromě dlaždic je také zaveden pojem „nulový pár“ – ten označuje dvojici červené a žluté dlaždice a slouží k tomu, aby bylo možné vymodelovat číslo nula.

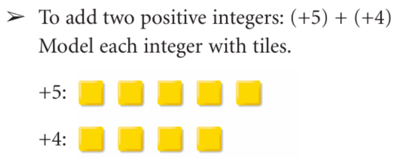
Prvním úkolem pro žáky je ve dvojicích vymodelovat několik čísel, kladných i záporných a při tom zkusit najít různé způsoby, jak by bylo možné daná čísla znázornit. Po zkoumání ve dvojicích následuje diskuze, jejíž výsledek je znázorněn na obrázku 14, kde jsou vyobrazeny tři způsoby, jak znázornit číslo +5. Následně je uvedeno, že při modelování konkrétního čísla existuje nekonečně mnoho způsobů, jak dané číslo znázornit, které se navzájem odlišují počtem nulových párů.



Obrázek 14 - Záporná celá čísla – modely čísla 5 (Johnston et al., 2005, s. 334)

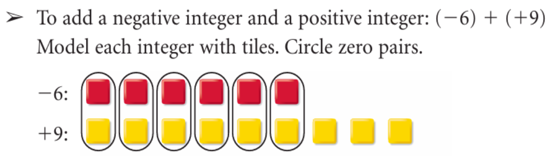
V další části pak mají žáci za úkol pomocí modelu dlaždic zkoumat samotné sčítání, nejprve dvou kladných čísel, potom jednoho kladného a jednoho záporného čísla, a nakonec dvou záporných čísel. Čísla si žáci sami vybírají a následně zkoušejí své úlohy modelovat a hledat řešení. Cílem je, aby žáci objevili následující „pravidla“:

V případě, že obě zvolená čísla jsou kladná, výsledek operace sčítání musí být kladný, což v případě zvoleného modelu znamená, že získané číslo bude poskládáno pouze ze žlutých dlaždic (viz obrázek 15).



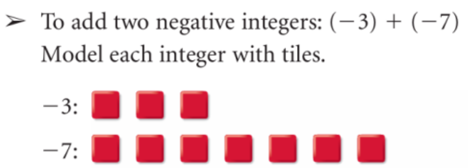
Obrázek 15 - Záporná celá čísla – sčítání kladných čísel (Johnston et al., 2005, s. 337)

Pro sčítání kladného čísla se záporným, respektive i pro opačný případ vzhledem ke komutativitě sčítání, záleží znaménko výsledku na hodnotě zvolených čísel. V případě použitého modelu je možné znaménko i výsledek určit odstraněním nulových párů (viz obrázek 16), které výsledek nijak neovlivní, protože jejich hodnota je nula. Výsledek je pak dán počtem a druhem zbývajících dlaždic – počet určuje hodnotu, barva určuje znaménko.



Obrázek 16 - Záporná celá čísla – sčítání kladného a záporného čísla (Johnston et al., 2005, s. 338)

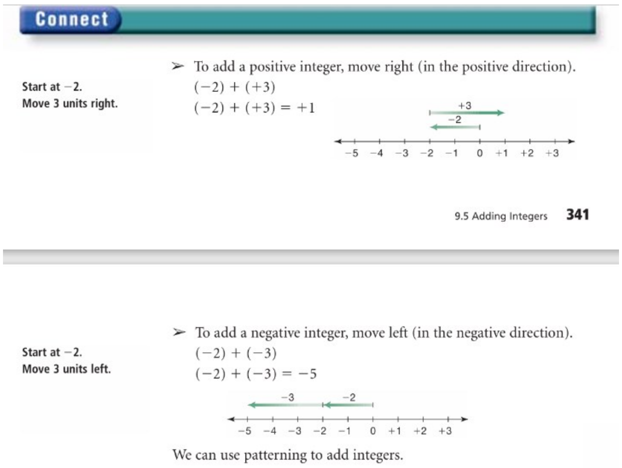
V poslední kombinaci, tedy sčítání dvou záporných čísel je výsledek obdobný jako v prvním případě, pouze s tím rozdílem, že použité dlaždice jsou vždy červené, znázorňující záporná čísla, a tedy i výsledek musí být poskládán pouze z červených dlaždic, a tedy nutně také záporný (viz obrázek 17).



Obrázek 17 - Záporná celá čísla – sčítání dvou záporných čísel (Johnston et al., 2005, s. 338)

Po několika řešených i neřešených úlohách následuje další lekce, která zavádí odlišný model pro sčítání záporných čísel, a to pohyb po číselné ose. Učebnice vychází z toho, co je žákům předloženo dříve, tedy ze sčítání dvou kladných čísel a z toho, jak se tato operace reprezentuje na číselné ose. V úvodu je uvedena konkrétní úloha, jejíž řešení je znázorněno a žákům je připomenuto, že přičtením kladného čísla se po ose posouvají doprava.

Následně je žákům předložen obdobný úkol, jako v předchozí části, tedy zkoumat, jak se při sčítání chovají různé kombinace kladných a záporných čísel při použití modelu číselné osy. Očekávaným výstupem je pak informace, že při přičítání kladného čísla dochází k posunutí doprava a při přičítání záporného k posunutí doleva (viz obrázek 18). Poté následují řešené úlohy a úlohy k procvičení.



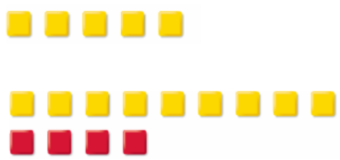
Obrázek 18 - Záporná celá čísla – model číselná osa (Johnston et al., 2005, s. 341, 342)

Další části se věnují odčítání, první pomocí modelu dlaždic, druhá pomocí číselné osy. V části zaměřené na dlaždice je žákům nejprve připomenuto, že sčítání značí, že něco přidáváme a odčítání, že něco odebíráme. S pomocí této informace a daného modelu pak mají za úkol vyřešit následující sadu úloh:

- (+5) – (+3)
- (+5) – (-3)
- (-3) – (+5)
- (-3) – (-5)

Žáci mají úlohy řešit ve dvojici a následně porovnávat s dalšími dvojicemi, důraz je kladen na to, zda různá žákovká řešení znázorňují stejná čísla, tedy zda se liší pouze o nulové páry. Následně je základní myšlenka shrnuta na řešené úloze: (+5) – (+9).

V prvním kroku řešení (viz obrázek 19) je vymodelováno číslo +5 pomocí pěti žlutých dlaždic. Následně je potřeba odebrat devět žlutých dlaždic, což vzhledem k dané situaci nelze, nicméně původní model (+5) lze pomocí nulových párů doplnit tak, aby bylo možné daný počet dlaždic odebrat. Pokud po odebrání zbyly v řešení nulové páry, je také



Obrázek 19 - Záporná celá čísla – úloha (+5) - (+9) (Johnston et al., 2005, s. 346, 347) třeba je odstranit, zbývající dlaždice jsou pak řešením zadané úlohy. Po tomto shrnutí následují další řešené úlohy a úlohy k procvičení.

Následující část se věnuje odčítání celých čísel s pomocí modelu číselné osy a pohybu po ní. První sada úloh je zaměřena pouze na řešení daného problému na číselné ose, žáci mají za úkol úlohy znázornit za pomoci daného modelu a následně ověřit správnost výsledku pomocí dlaždic.

Ve druhé sadě úloh (viz obrázek 20) pak mají žáci nejen najít řešení ale i porovnat řešení úloh v jednotlivých řádcích a pokusti se najít mezi těmito úlohami souvislosti. Cílem je, aby žáci našli vztah mezi odčítáním a přičítáním opačného čísla.

➢ Subtract. Add.

Subtract.	Add.
$(+7) - (+2)$	$(+7) + (-2)$
$(-7) - (-2)$	$(-7) + (+2)$
$(+7) - (-2)$	$(+7) + (+2)$
$(-7) - (+2)$	$(-7) + (-2)$

What do you notice about the answers in each row?
What patterns do you see in each subtraction and addition?
Check your pattern using other integers.

Obrázek 20 - Záporná celá čísla – Odčítání – úlohy (Johnston et al., 2005, s. 351)

Při zdůvodňování se autoři učebnice nejprve opírají o úlohy 5 – 2, př jejímž řešení je možné použít úvahu: „ Jaké číslo je třeba přidat k číslu 2, abychom dostali 5?“. Obdobnou úvahu pak lze aplikovat i na úlohy v předchozím cvičení. Následně autoři upozorňují, že stejné výsldky, jako při řešení odčítání celých čísel pomocí této úvahy, je možné získat také přičtením opačného čísla, a tedy že jednotlivé řádky z předchozího cvičení mají vždy stejné výsledky, protože si operace odčítání čísla a přičten čísla k němu opačného odpovídají.

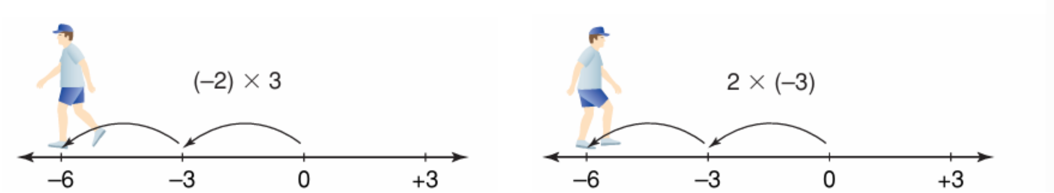
Kapitolu uzavírají rozšiřující úlohy v části „Zvolte si strategii“ (v originále „Choosing a strategy“) a „Unit problem“, tentokrát zaměřený na časová pásma a výpočet času v místech, která se nacházejí v různých časových pásmech.

Math Makes Sense 8

Znovu se záporná celá čísla objebují v učebnici pro osmý ročník, kde je téma rozšířeno o násobení a dělení a některé jejich vlastnosti, a také o výpočty s ohledem na přednosti početních operací. Obdobně jako v učebnici pro sedmý ročník se i zde střídají dva modely – pohyb po číselné ose a dlaždice.

Hned v první části, která je zaměřená na násobení, jsou nakombinované oba modely. Na začátku jsou oba modely připomenuty a následně je zařazena úloha na násobení pomocí číselné osy. Oproti předchozí učebnici, kde žáci všechny úlohy řešili pomocí číselé osy v učebnici, nebo na papíře, zde je požadováno, aby osu žáci vytvořili na podlaze a reálně se po ní pohybovali. Žáci pro svá řešení dostávají následující instrukce doplněné o obrázek 21.

- Začněte na nule.
- Pokud je dán záporný počet kroků, otočte se čelem k záporné části osy, a až potom se začněte pohybovat.
- Pokude je záporná délka kroku, couvejte.

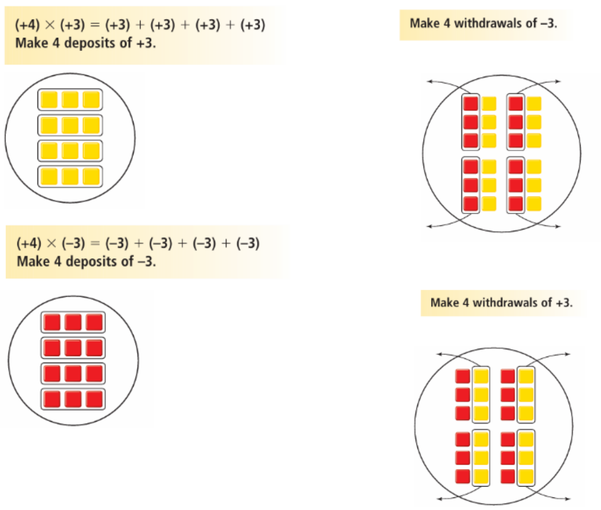


Obrázek 21 - Záporná celá čísla – násobení na číselné ose (Baron et al., 2008, s. 64)

Žáci si mají vybrat dvě kladná čísla menší než pět, a pomocí zadaných instrukcí mají najít všehny výsledky, které by násobením těchto čísel s různými znaménky mohli dostat. Žáci pracují ve dvojici, kdy jeden má za úkol pohybovat se po ose a druhý je zapisovatel, poté následuje porovnání s ostatními dvojicemi a diskuse o nalezených pravidelnostech.

Po této úloze následuje objasnění, jak bude násobení záporných čísel vypadat v dlaždicovém modelu. Podobně jako v předchozím případě jsou žákům předložena hotová pravidla, doplněná o grafickou ilustraci (obrázek 22), což je v případě použitého modelu vcelku pochopitelné, vzhledem ke složitosti pravidel by je žáci odhalili s velkými obtížemi.

V modelu pro násobení je zaveden nový prvek – kruh který je označen jako „banka“, protože při násobení do něj žáci budou dlaždice vkládat, nebo je naopak vybírat, což určije znaménko prvního činitle. Kladné znaménku u prvního činitele značí vklad, záporné naopak značí výběr. Znaménko u druhého činitele pak udává, jaké dlaždice budou vkládány respektive vybírány. Obdobně jako u modelu číselné osy se začíná s nulou, kruh je tedy na začátku prázdný. Výsledek je dán tím, kolik dlaždic v kruhu zůstává, znaménko je určeno jejich barvou.



Obrázek 22 - Záporná celá čísla – násobení pomocí modelu dlaždic (Baron et al., 2008, s. 65, 66)

Pokud je první činitel kladný, pro získání řešení stačí určit počet dlaždic, které byly do kruhu vloženy. V opačném případě je potřeba ještě v dalších krocích určit, jaké dlaždice v kruhu zůstanou. V učebnici je pro objasnění použita úloha $(-4) \times (-3)$. Podle modelu je tedy třeba provést čtyři výběry tří červených dlaždic, což ale není možné, protože kruh je na začátku prázdný, takže je nejprve nutné doplnit ho o potřebný počet nulových párů. Z těchto párů budou následně odebrány potřebné červené dlaždice a v kruhu tedy zbydou dlaždice žluté, výsledek bude mít tedy kladné znaménko. Obdbně je pak situace popsána pro úlohu $(-4) \times (+3)$.

Následují řešené úlohy pro oba typy modelů a na závěr části je vložena diskuse pro žáky zaměřená na porovnání obou modelů. Žákům je také dána možnost navrhnout vlastní modely. Také jsou zde uvedeny doplňující otázky, například jak by žáci pomocí modelů vysvětlili násobení nulou, či jak ovlivní pořadí činitelů výsledek násobení.

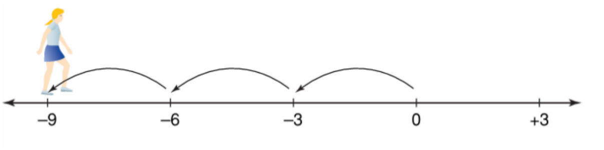
Další část kapitoly je věnována vlastnostem násobení celých čísel, nicméně v zásedě jsou zde pouze shrnuty vlastnosti, se kterými jsou žáci již seznámeni v učebnicích pro pátý a šestý ročník, nicméně v předchozích učebnicích nejsou pojmenovány. V učebnici jsou uvedeny tyto vlastnosti:

- Násobení nulou
- Násobení číslem 1 – neutrální prvek
- Komutativní vlastnost
- Distributivní vlastnost

Všechny uvedené vlastnosti jsou vysvětleny a doplněny o úlohu, která je rovněž znázorněna graficky, nicméně všechny použité úlohy jsou s kladnými čísly a pouze doplněny o informaci, že vlastnosti jsou platné i pro záporná čísla. Pro každou z vlastností je pak přidána řešená úloha, a na konci zařazena diskuse, jejímž výstupem by mělo být pravidlo, podle kterého je možné určit znaménko součinu, pokud jsou známa znaménka jednotlivých činitelů. Dále jsou zařazeny úlohy a také hra k procvičení.

Po upevnění násobení je zařazeno dělení. Samotnému zavedení dělení záporných čísel předchází pžipomenutí vztahu mezi dělením a násobením jakožto inverzními operacemi, a modelu dlaždic pro násobení. Poté už je žákům do dvojic zadána úloha, ve které mají zkoumat pomocí dříve uvedených vztahů, jaké výsledky budo dostávat, pokud budou měnit znaménka při dělení dvou zvolených čísel. Situaci mají modelovat pomocí dlaždic a po vyřešení porovnat s dalšími dvojicemi a hledat pravidelnosti v porovnávaných výsledcích.

Dále je zařazeno rozšíření modelu číselné osy pro dělení záporných čísel, i zde se využívá poznatků z násobení jakožto inverzní operace pro získání výsledků pro dělení. Úloha je převedena na řešení problému, kde hledáme počet kroků o velikosti dělitele, abychom dosáhli umístění postavy na dělenci. Například pro úlohu $(-9) \div (-3)$ je řešení znázorněno na obrázku 23. Cílem je zjistit kolik kroků o délce mínus tři, tedy couvání o délce tři, je pořeba udělat, aby se postava dostala do mínus devítky. Obdobně je situace popsána a řešena i pro další kombinace kladných a záporných hodnot. Následují řešené úlohy, které vuyžívají oba nabízené modely, a také úlohy k procvičení.



Obrázek 23 - Záporná celá čísla – dělení na číselné ose (Baron et al., 2008, s. 78)

Další část kapitoly je věnována odvození pravidel pro dělení záporných celých čísel, nicméně v podstatě jde o zobecnění předchozí části. Žáci mají pracovat ve čtveřicích a každá čtveřice si má vybrat dvě kladná a dvě záporná celá čísla, která má vyjádřit jako součin dvou celých čísel. Každé číslo má být vyjádřeno dvěma způsoby. Dále mají pro každé z těchto dvou čísel vyjádřit operaci dělení, která odpovídá předchozím součinům. Na základě tohoto zkoumání a následné třídní diskuse pak mají žáci generalizovat pravidlo pro určení znaménka pro dělení dvou celých čísel.

Hledané pravidlo je pak shrnuto, ale již bez použití modelů. V závěru je doplněno, že znak pro dělení může být nahrazen zápisem pomocí zlomku, což je následně využíváno v zařazených úlohách a v také v části zaměřené na přednosti operací, která následuje po úlohách na procvičení.

Část věnovaná přednosti operací je primárně zaměřena na procvičení tématu v úlohách. V jejím úvodu je uvedeno v jakém pořadí mají být operace řešeny, poté následuje úloha pro čtyřčlenné skupiny, ve které si žáci zvolí pět čísel a mají z nich sestavit výrazy s co možná nejvyšší a s co možná nejnižšší hodnotou, svá řešení mají porovnat s ostatními skupinami. Zbytek části je pak věnován určování hodnoty výrazu, použity jsou řešené i neřešené úlohy.

Záporná celá čísla v učebnicích Hejného metody

Záporná čísla, a hlavně pak početní operace, které se s nimi provádí se v učebnicích Hejného metody objevují většinou v rámci prostředí Krokování a Schody, někdy jsou využívány rovněž součinové čtverce. Všechna prostředí se průběžně objevují již v učebnicích pro první stupeň. V rámci krokování žáci intuitivně využívají zápis „kroků zpět“ pomocí záporného čísla již v průběhu druhého období, tedy od 3. ročníku, nicméně větší pozornost záporným číslům je věnována až v učebnici pro 5. ročník, která se zaměřuje hlavně na porozumění pojmu záporného čísla, jeho zakreslení na číselné ose, ale také řešení úloh jednoduchých úloh na odčítání pomocí krokování nebo schodů.

Krokování a schody

Při krokování mají žáci k dispozici krokovací pásy, buďto na zemi, po kterých se sami pohybují, nebo na papíře, po kterých se mohou pohybovat pomocí postavičky. Důležitou součástí je tohoto procesu je pohyb, ať už vlastní, nebo prostřednictvím postavy. V krokovacích úlohách a rovnicích jsou většinou stanovena jednoduchá pravidla:

- → značí jeden krok dopředu
- ← značí jeden krok dozadu
- ⮌ značí otočení čelem vzad – používá se pro mínus před závorkou a na jejím konci, pro návrat do původního směru

Prostředí schody je na první pohled téměř shodné s krokováním, nicméně je mezi nimi jeden zcela zásadní rozdíl, a tím je adresace jednotlivých schodů, tedy že každý schod má své číslo. V prostředí krokování jednotlivým polím žádná čísla přiřazena nejsou. Tím se prostředí schody daleko více přibližuje číselné ose.

Úlohy v těchto prostředích mohou být zadány pomocí šipkového nebo v případě schodů i číselného zápisu. Jejich řešení může vypadat například takto:

$2 - 5 - (2 - 7) =$

Úlohu je nejprve potřeba převést do šipkového zápisu:

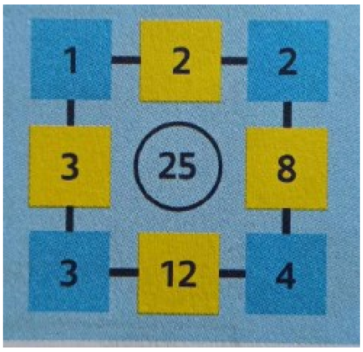
→→ | ←← ←← ← | ⮌ | →→ | ←← ←← ←← ← | ⮌

Výsledkem tohoto typu řešení je zjištění, kterým směrem a o kolik kroků je postavička na konci posunuta oproti původní poloze – v tomto případě je posunuta o dva kroky vpravo, což odpovídá řešení 2.

Další možností řešení je převedení do prostředí Schodiště. Na začátku dané úlohy může být postavička na schodu 0 a posouvat se o 2, nebo může být rovnou umístěna na schodu číslo 2, následuje pět kroků vzad, postavička je na schodu -3. Následuje pokyn čelem vzad, poté se postavička pohybuje o dva kroky vpřed (-5) a následně o 7 kroků vzad, takže postavička končí na schodu 2, nakonec se ještě otáčí do původního směru. Řešení úlohy je číslo 2.

Součinové čtverce

Princip součinových čtverců (obrázek 24) spočívá v tom, že číslo ve středu hrany je násobkem čísel v jejích krajních bodech a číslo uprostřed je součtem všech čísel ze středů hran. Ve čtvercích, které jsou žákům předkládány jsou některá čísla vynechána, takže žáci musí řešit úlohy pomocí násobení pro čísla ve žlutých rámečcích, nebo pomocí dělení pro čísla v modrých rámečcích. Číslo uprostřed lze také určit jako součin diagonálních součtů, ale to není žákům cíleně předkládáno, samozřejmě pokud na tento vztah přijdou, mohou ho při výpočtech využívat.



Obrázek 24 - Záporná celá čísla – součinové čtverce (Hejný et al., 2017a, s. 17)

Záporná čísla v učebnici pro 5. ročník

V učebnici pro pátý ročník jsou záporná čísla zařazena v kapitole nazvané „Zkoumáme číselnou osu kolem nuly, rýsujeme“. Úvodní úloha je zaměřena na chápaní pojmu záporného čísla, žáci v ní mají vysvětlit význam tvrzení obsahujících záporná čísla, jako například:

- Venku je teplota -12 °C
- Mám -300 Kč.
- …

Následuje úloha s tabulkou, ve které jsou zaznamenány teploty za jeden týden. K tabulce jsou připojeny otázky:

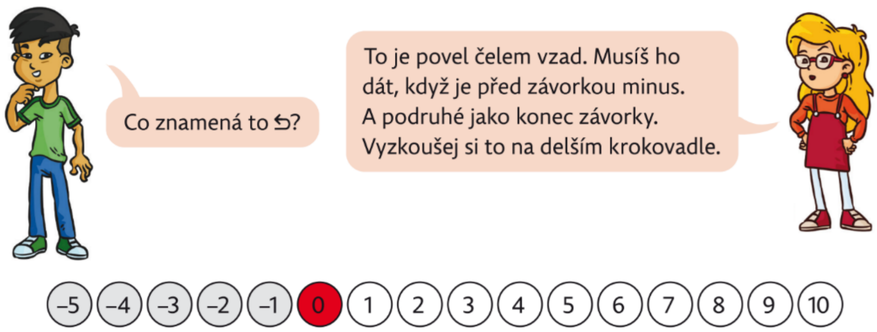
- Který den byla nejvyšší a který den nejnižší teplota?
- Jaký byl rozdíl teplot v úterý a ve středu?
- Mezi kterými dny byl největší teplotní rozdíl?

Po zodpovězení otázek mají žáci hodnoty z tabulky zakreslit do grafu a zkusit najít průměrnou teplotu, autoři předpokládají řešení pomocí „vyrovnávání výšky sloupců, nebo pomocí šipkového zápisu, kde se nejprve vyruší šipky v opačném směru a následně se zbývající šipky rozdělí mezi jednotlivé dny, tak aby u každého dne byl stejný počet šipek udávající průměrnou teplotu.

Po práci s grafem následují dvě úlohy zaměřené na práci s číselnou osou, v první mají žáci zakreslit daná čísla na číselnou osu. Jelikož čísla na číselné ose jsou opačná, mají se žáci pokusit najít tuto souvislost, nicméně autoři uvádějí, že pokud si žáci vztahu nevšimnou, nemá jim být zbytečně předkládán. V druhé úloze žáci čísla zakreslují a následně určují vzdálenost mezi nimi.

Následují dvě cvičení s krokovacími rovnicemi, jedno s úlohami zadanými pomocí šipkového zápisu, druhé s úlohami zadanými číselně. V druhém případě musí žáci nejprve převést číselný zápis na šipkový, nicméně řešení tohoto typu úloh znají již z dřívějška a nemělo by jim dle očekávání autorů činit větší obtíže.

V další sadě úloh je do šipkového zápisu přidán pokyn čelem vzad (⮌), který je vysvětlen formou komiksu (viz obrázek 25). Úlohy jsou opět nejprve zadány pomocí šipkového zápisu, v dalším cvičení pak i číselně. V závěru je pak zadáno 25 úloh na procvičení sčítání a odčítání bez závorek.



Obrázek 25 - Záporná celá čísla – krokování, čelem vzad (Hejný et al., 2022, s. 81)

Záporná čísla v učebnicích pro 2. stupeň základních škol

Obdobně jako v učebnicích pro 1. stupeň se záporná čísla vyskytují v různých tématech učebnic pro 2. stupeň, nicméně první kapitola, která je jim přímo věnována se nachází v učebnici Matematiky C. Zde jsou žákům předloženy tři rozhovory obsahující záporná čísla, většinou v ne zcela standardních situacích, například:

- Na večírku byli mínus dva kluci.
- Cecil mi dluží mínus 50 korun.
- Přestěhovali jsme se o mínus dvě patra nahoru.

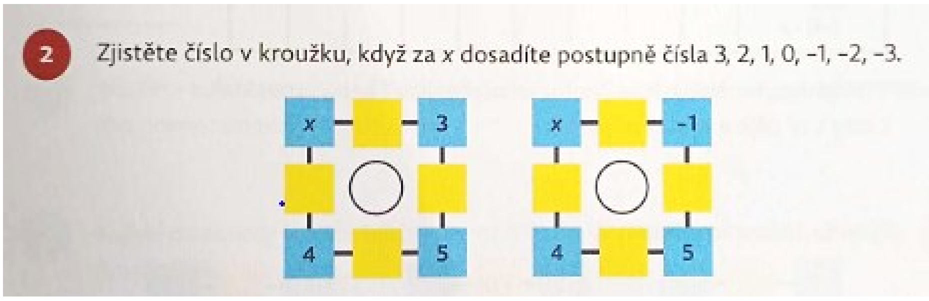
Cílem je, aby žáci diskutovali nad významem předložených diskusí a výrazů, jelikož záporná čísla jsou dle autorů pro žáky náročná nejen početně, ale také jako koncept, je tedy třeba se žáky důkladně rozebrat, jak daným tvrzením rozumí.

Další část zaměřená na téma záporných čísel se nachází v učebnici D a je věnována násobení, za hlavní cíl si autoři kladou vyjasnění, proč násobení dvou záporných čísel dává kladné výsledky. Kapitola na sčítání, respektive odčítání záporných čísel není zařazena, protože dle autorů je představy o těchto operacích se dobře budují pomocí krokování a prostředí schodů.

První úloha je opět zaměřena na porozumění pojmu záporného čísla, vychází ze dvou pojetí záporných čísel – V případě Kiry je představa -1 krok dozadu (kork), Ariana si pod -1 představuje dluh ve výši jedné koruny. Žáci mají uvažovat, co pro dívky bude znamenat součin $3 \cdot (-1)$ a $1 \cdot (-3)$. Diskuse by měla dovést žáky k následujícím závěrům:

- $3 \cdot (-1)$
    - Kira – tři kroky dozadu
    - Ariana – dlužím třem lidem po jedné koruně
- $1 \cdot (-3)$
    - Kira – posunutí o jeden trojkrok dozadu
    - Ariana – dlužím jednomu člověku 3 koruny

Další úloha jsou dva součinové čtverce, ve kterých je místo jednoho čísla v rohu umístěno x, za které postupně žáci dosazují dané hodnoty (viz obrázek 26). Jelikož výsledky klesají pravidelně – u prvního čtverce o 7, u druhého o 3, měli by žáci být schopni určit výsledky pro násobení kladného čísla se záporným a v případě druhého čtverce i dvou záporných čísel.



Obrázek 26 - Záporná celá čísla – součinové čtverce II (Hejný et al., 2017a, s. 17)

V dalších třech úlohách mají žáci doplnit hodnoty v tabulkách podle zadaného předpisu. V případě první tabulky je dán předpis $x \mapsto 2x$ a hodnoty od 4 do -4, pro které mají žáci tabulku doplnit. Tabulka je navíc doplněna o grafickou reprezentaci číselné osy jako natahující se gumy. Tato ilustrace má poukázat na to, co koeficient v předpisu, v tomto případě tedy číslo 2, provede s hodnotami na číselné ose – „roztáhne je“.

V další úloze je obdobné zadání pro předpisy s novými koeficienty – 3, $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$. Žáci mají opět doplnit tabulku a následně znázornit, jakým způsobem jednotlivé předpisy změní číselnou osu – 3 opět „roztáhne“, zbývající dva koeficienty ji naopak „smrští“. Podle autorů má po řešení této úlohy zahájit diskusi, co se stane, pokud budeme pokračovat a zmenšovat čísla „přes nulu“, protože smršťování má svá omezení. Tato diskuse by je měla dovést k myšlence, že při překročení nuly dojde k „otočení“ číselné osy. Což je také podstatou následující úlohy, kde je dán předpis $x \mapsto (-1) \cdot x$. Autoři očekávají že v této části se objeví první pokusy o formování pravidla o násobení dvou záporných čísel, nicméně předpokládají, že většina žáků porozumí této zákonitosti až při řešení následujících úloh.

První z těchto úloh jsou tři součinové čtverce, ve kterých jsou zadána čísla ve rozích, ale i ve středech stran. Žáci tedy pro řešení úlohy musí využít nejen násobení, ale také dělení, do kterého vstupují záporná čísla. Autoři doporučují žáky v případě obtíží k navedení na vztah dělení a násobení, mohou si pomoci například otázkou: „Čím je potřeba násobit číslo 3, abych dostal -6?“. U druhého čtverce se žáci setkávají s výpočtem -6:(-2), ve třetím je úloha navíc obohacena o možnost si jedno číslo zvolit libovolně.

Po součinových čtvercích je zařazena diskuse Elmara, Kiry a Ariany ohledně výpočtu 6: (-2) = -3, postavy řeší, zda je tento výpočet správný. Ariana nesouhlasí, protože se jí nezdá dělení na -2 části, Kira pomocí násobení správnost potvrzuje. Žáci mají rozhodnout, která z dívek má pravdu. Cílem je, aby žáci přijali fakt, že ne vše se nechá modelovat na situacích z reálného života, v tomto případě nejde dělit na -2 části, nicméně zdůvodnění vycházející z násobení, které použila Kira, zřejmě funguje.

Téma uzavírají dvě úlohy, sloužící k procvičení výpočtů a upevnění práce se znaménky. V první z nich mají žáci za úkol rozhodnout, která z čísel a až p jsou si rovna, přičemž čísla jsou zadána pomocí celých čísel, násobení, dělení a zlomků. Hlavním cílem pro žáky je uvědomit si, jak znaménka ovlivní výsledek a díky tomu i vybrat shodné hodnoty. Druhá pak spočívá ve vytvoření součinového čtverce s danými parametry, přičemž úloha má nekonečně mnoho řešení. Tato úloha má jednak ověřit, zda si žáci osvojili potřebné znalosti a dovednosti, a jednak může žákům dopomoci ke snadnější cestě hledání čísla v kruhu – násobení diagonálních součtů.

Záporná celá čísla shrnutí

V učebnici *Math Makes Sense* je téma záporných čísel rozděleno na dvě části, první je zařazena v sedmém ročníku, druhá v osmém ročníku. Při zavádění početních operací jsou využívány dva modely, dlaždice a číselná osa a pohyb po ní. Žáci mají možnost výběru „vhodnějšího“ modelu, o vhodnosti jednotlivých modelů mají v rámci tématu možnost diskutovat.

Model dlaždice je velmi názorný, lze ho použít pro všechny početní operace, ale pravidla pro násobení a dělení nejsou natolik přehledná jako pro sčítání odčítání. Jeho nespornou výhodou je ale fakt, že ho je možné využít jako předstupeň algebraických dlaždic, které učebnice dále využívají u algebraických výrazů a při řešení rovnic.

Model číselné osy má poměrně blízko k prostředím krokování a schody, která jsou využívána v učebnicích Hejného metody. Zatímco v Hejného metodě jsou tato prostředí a jejich pravidla budována v podstatě od první třídy, v učebnicích *Math Makes Sense* se objevuje spíše výjimečně a nejvíce právě u práce s celými čísly.

Kromě základních pravidel pro výpočty se zápornými čísly se v kapitole objevily i vlastnosti jako je komutativita, distributivita atd. Bohužel, přestože se jednalo o kapitolu zaměřenou na záporná čísla, ukázky pro tyto vlastnosti byly modelovány pouze pro kladná čísla. Vzhledem k tomu, že žáci již byli s těmito vlastnostmi v oboru kladných celých čísel seznámeni v předchozí učebnici, zdá se být tato část přebytečná, nebo nedostatečně využita s ohledem na téma kapitoly.

V učebnicích Hejného metody jsou celá čísla také rozdělena do dvou částí, nicméně samotné dělení se oproti učebnicím *Math Makes Sense* výrazně liší. V první části se učebnice zaměřuje pouze na chápání záporného čísla. Žákům jsou zde předloženy i značně nestandardní tvrzení, přičemž cílem je hlubší porozumění významu záporných čísel. Oproti tomu úlohy zaměřené na porozumění konceptu celých čísel v učebnicích *Math Makes Sense* se dané problematiky dotýkají pouze povrchně, a jsou srovnatelné s úlohami, které Hejný zadává v učebnicích pro pátý ročník.

Druhá část je pak věnována násobení a dělení se zápornými čísly, sčítání a odčítání nemá vlastní kapitolu, jelikož je v rámci krokování a schodů zařazováno již v průběhu celého prvního i druhého stupně.

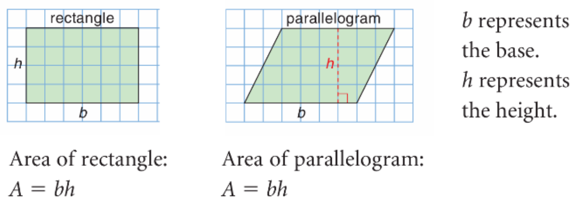
5.3.3 Obsahy rovinných útvarů – trojúhelník, rovnoběžník a lichoběžník

Výpočty obsahů rovinných jsou jedním ze stěžejních téma geometrie na základních školách. Jelikož čtverec a obdélník jsou obvykle zařazovány již na prvním stupni, budou zde zkoumány obsahy rovnoběžníku, trojúhelníku a lichoběžníku, které se dále využívají například ve stereometrii, při výpočtech povrchu a objemu těles jako je třeba hranol či jehlan.

Obsahy rovinných útvarů v učebnicích Math Makes Sense

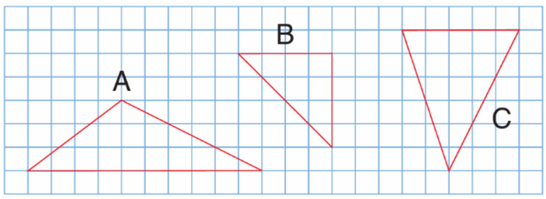
V učebnicích *Math Makes Sense* je obsah trojúhelníku, rovnoběžníku i lichoběžníku zařazen v rámci jedné kapitoly v učebnici pro sedmí ročník, což není vzhledem k tomu, jak spolu obsahy útvarů souvisejí moc překvapující.

V úvodu kapitoly jsou připomenuty pojmy obvod a obsah, a stejně tak výpočty obvodů a obsahů čtverce a obdélníka. Po opakování následuje odvození vzorce pro obsah rovnoběžníku. V první části jsou připomenuty pojmy strana y výška rovnoběžníku, poté následuje úloha pro žáky. Ti mají pracovat ve dvojici, k dispozici mají čtverečkovaný papír a tangramové kostky, nejprve mají určit obsah rovnoběžníku, který je obsažen v balíčku, poté mají zkoušet pomocí dalších dílků seskládat další rovnoběžníky a rovněž určit jejich obsahy. Při plnění úkolu jim má pomoci čtverečkovaný papír, na který své rovnoběžníky zakreslují, a pomocí něj pak mohou určit i hledané obsahy. Výstupem by měl být pokus o sestavení vzorce pro výpočet obsahu, ale úloha má i další přesah, například pro obsah trojúhelníka, v případě, že žáky napadne, že mohou rovnoběžník poskládat ze dvou shodných trojúhelníků.



Obrázek 27 - Obsahy – rovnoběžník (Johnston et al., 2005, s. 18)

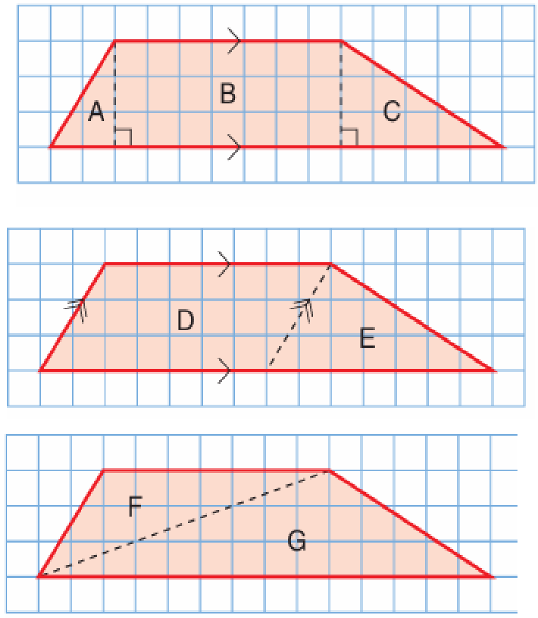
Po dokončení prvního úkolu a po závěrečné diskusi je uvedena jedna z možností, jak vzorec odvodit, pomocí rozdělení a přeskládání na obdélník (viz obrázek 27). Jelikož vzorec pro obdélník již žáci znají, mohou z něj snadno vycházet, v případě potřeby si upraví značení dle svého rovnoběžníku. V úlohách na procvičení jsou následně zařazeny výpočty obsahu pomocí získaného vzorce, včetně úloh, ve kterých má rovnoběžník „netypickou“ pozici, většinou žádná z jeho stran není umístěna vodorovně, nebo je vodorovná zadaná výška, což může být pro některé žáky matoucí a je třeba, aby se s obdobnými situacemi setkávali.



Obrázek 28 - Obsahy – trojúhelníky (Johnston et al., 2005, s. 221)

Další část se věnuje obsahu trojúhelíka, žáci mají za úkol určit obsah trojúhelníků (obrázek 28) ve čtvercové síti, podobně jako v předchozím případě pracují ve dvojicích. Součástí jejich úkolu je nejen zjistit obsah trojúhelníků, ale také najít různé způsoby, jak jeho hodnostu určit. V zadání je dokonce přímo uvedeno, že žáci mohou využít své znalosti o obsahu rovnoběžníku. V diskusi o řešení je pak již přímo položena otázka: „Jak jste využili rovnoběžník pro určení obsahu trojúhelníku?“. Takže přestože je žákům v začátku dána možnost volby, závěrečná diskuse silně navádí k využití metody s využitím vzorce pro rovnoběžník.

Po diskusi je provedeno odvození vzorce pro trojúhelník, na konkrétním příkladu je ukázáno, jak lze trojúhelník doplnit na rovnoběžník a určit tak jeho obsah, jako polovinu vzniklého rovnoběžníku. Souběžně s výpočtem pro konkrétní trojúhelník je uveden i obecný vzorec. Následije série úloh na procvičení daného tématu v různých úrovních obtížnosti.



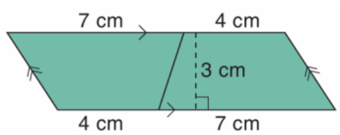
Obrázek 29 - Obsahy – lichoběžník (Johnston et al., 2005, s.227)

Dalším útvarem zařazeným v této kapitole je lichoběžník. Hledání jeho obsahu je uvedeno sadou trojúhelníků a čtyřúhelníků ve čtvercové síti, jejichž obsah mají řáci ve dvojicích vypočítat. Následně útvary vystříhnou a snaží se mezi nimi najít lichoběžník. Stejný lichoběžník se potom snaží poskládat z ostatních vystříhaných částí. Nakonec všechny objevené způsoby, jak lichoběžník poskládat diskutují se spolužáky.

Díky předchozí úloze by si žáci měli uvědomit, že obsah lichoběžníku je možné zjistit pomocí jeho rozdělení na menší části, jejichž obsah umějí určit (například čtverec, obdélník, trojúhelník…). Ve shrnutí jsou uvedeny tři možnosti, jak lichoběžník rozdělit (viz obrázek 29):

- Na dva trojúhelníky a obdélník
- Na rovnoběžník a trojúhelník
- Na dva trojúhelníky

Jelikož vzorce pro určení všech uvedených útvarů žáci znají, mohou určit obsah lichoběžníku jako součet obsahů jeho částí.



Obrázek 30 - Obsahy – rozšiřující úloha, lichoběžník (Johnston et al., 2005, s. 230)

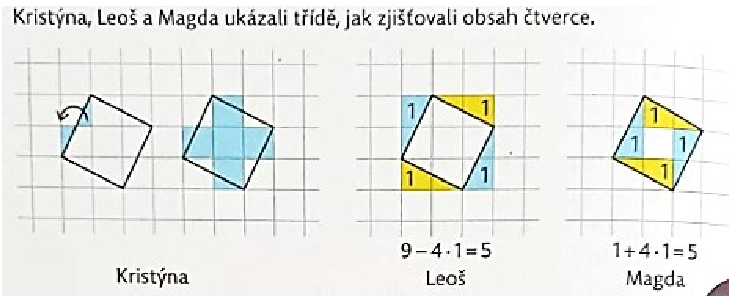
Ačkoliv u všech ostatních útvarů je v odpovídající části uveden také obecný vzorec, v tomto případě tomu tak není. Vzorec pro lichoběžník se v této kapitole vůbec nevyskytuje, u řešených úloh je využito rozdělení na části a určení obsahu pomocí obsahů částí. V rámci úloh na procvičení je zařazena jedna, která by mohla na obecný vzorec navádět, nicméně ani zde není vzorec uveden. Uvedená úloha je postavena na dvou shodných lichoběžnících spojených tak, aby tvořily rovnoběžník (viz obrázek 30). Pokud by žáci vycházeli ze vzorce pro obsah rovnoběžníku, mohli by dospět k obecnému vzorci $s = \frac{(a+c)\cdot v}{2}$.

Zkušenosti získané při výpočtu obsahu lichoběžníku mohou žáci využít v následující části kapitoly, která se věnuje výpočtu obsahů nepravidelných útvarů. Jelikož rozdělování na části se ukázalo být efektivní strategií pro lichoběžník, je možné ho použít i v tomto případě za předpokladu, že dané útvary je možno rozdělit na vhodné části, jejichž obsah žáci umí určit. Žákům jsou k řešení předloženy různé útvary, některé je možné rozložit na obdélníky, u dalších je nutné použít i další útvary jako trojúhelník a lichoběžník.

Obsahy rovinných útvarů v učebnicích Hejného metody

V učebnicích Hejného metody žáci určují obsahy mnohoúhelníků intuitivně v prostředí mříže již na prvním stupni. Vzhledem k tomu že porovnání je zaměřeno na odvození a použití vzorců pro výpočty obsahů, nebude zde určování obsahů v mříži zařazeno jako samostatná část. Jako řada dalších témat i výpočet obsahů vybraných rovinných útvarů se v učebnicích objevují postupně.

Prvním útvarem, jehož obsah je zaveden, je trojúhelník. Obsahu trojúhelníka je věnována jedna kapitola v učebnici B, i když ta není přímo zaměřena na samotné odvození vzorce, ale měla by žáky dovést, alespoň na intuitivní úrovni, ke zjištění, že trojúhelníky se stejnou základnou a výškou mají stejný obsah.



Obrázek 31 - Obsahy – čtverce v mříži, (Hejný et al., 2015b, s. 26)

Kapitola je uvedena úlohou, ve které jsou zobrazeny tři způsoby výpočtu obsahu čtverce v mříži (viz obrázek 31) a žáci mají popsat, jak řešitelé pravděpodobně postupovali. První řešení je postaveno na „přeskládávání“, druhé využívá rámování a následné odstranění přebývajících trojúhelníků, toto řešení je autory považováno za nejvhodnější, hlavně pro svou univerzálnost.

V dalším cvičení mají žáci dánu sérii úloh různých obtížností, ve kterých mají určovat obsahy trojúhelníků, ze kterých jsou poskládány čtverce a obdélníky. Úlohy mají žáci řešit obdobně jako bylo navrženo v předchozím cvičení, nicméně v posledních třech obdélnících se vyskytují trojúhelníky se stejnou výškou a délkou základny k ní, a tedy i se shodnými obsahy, což by mělo žáky navést ke vztahu mezi obsahem a těmito prvky.

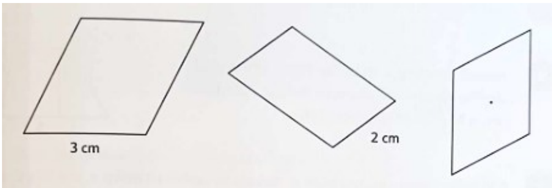
Úlohy, které následují, mají žáky ujistit ve vztahu objeveném v úloze předchozí. Žáci mají v mříži zadány tři trojúhelníky označené KLM a jejich těžnice MS, které tyto trojúhelníky rozdělují na dvě části. V první z úloh je úkolem zjistit, který z trojúhelníků MKS a SLM má větší obsah. I v případě, že by žáci nevyužili vztah z minulé úlohy, ale například rámování, dospějí k výsledku, že oba trojúhelníky mají sodný obsah, bez ohledu na to, se kterým ze tří zadaných trojúhelníků pracují. Toto zjištění jen potvrzuje vztah nalezený dříve. Zbylé úlohy mají za cíl žáky utvrdit v již objeveném, úkol pro žáky je obdobný, pouze těžnice z bodu M je nahrazena těžnicí z bodu K, žáci mají opět porovnat obsahy takto vzniklých trojúhelníků a samozřejmě i zde dospějí ke stejnému výsledku.

Samotné objevení vzorce je cílem v učebnici Matematika C v kapitole Trojúhelník II. Tato kapitola je uvedena úlohou, ve které je zadán obdélník ABCD a žáci mají najít trojúhelník ABX, tak, aby bod X ležel na straně DC a zároveň měl trojúhelník co možná největší obsah. Nutným předpokladem pro řešení úlohy je zjištění, že trojúhelník ABX tvoří polovinu obdélníka ABCD, a to bez ohledu na umístění bodu X na úsečce CD. Pro každý takto vzniklý trojúhelník bude tedy obsah stejný. Pro pokročilejší žáky může být úloha rozšířena tak, že X může ležet na přímce CD i mimo stranu obdélníku.

Další úloha přímo navazuje na první, žákům je zadán trojúhelník, ve kterém mají změřit dvě délky, pomocí kterých mohou určit jeho obsah. Autoři předpokládají, že pod vlivem úvodní úlohy většina žáků doplní trojúhelník na obdélník a následně změří délky stran obdélníka, respektive stranu a výšku trojúhelníku, a z hodnot pak určí obsah trojúhelníku jako polovinu obsahu obdélníku. Vzhledem k nepřesnostem měření se zde dají očekávat drobné odchylky ve výsledcích. V této části by dle autorů již měla zaznít první formulace vzorce pro obsah trojúhelníku.

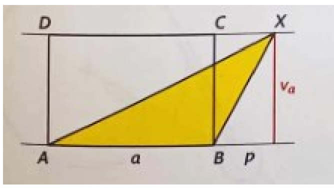
Získaný vztah mohou žáci využít v dalších úlohách, kde mají zadánu mřížovou úsečku a mají k ní doplnit třetí bod tak, aby dohromady vytvořily trojúhelník o zadaném obsahu, žáci mají najít co možná největší počet bodů, které podmínky splňují. V případě první úsečky, která splývá s mříží a má délku 3, je řešení podobné předchozím případům. Jelikož požadovaný obsah je 3 čtverečky, stačí úsečku doplnit na obdélník s obsahem 6 čtverců, všechny hledané body se nacházejí na přímce tvořící protější stranu. O tom, že vyhovuje celá přímka, a nejen strana obdélníka se mají žáci přesvědčit v rámci diskuse. Ve druhé úloze je úsečka umístěna jako úhlopříčka čtverce se stranou délky 2 (čtverec zde není vyznačen) a požadovaný obsah je 2 čtverečky. Řešení této úlohy pro žáky nemusí být tak snadno viditelné, proto autoři uvádějí, že je dobré, aby si žáci zkusili nejprve najít jedno či dvě řešení mezi mřížovými body, jakmile se jim toto podaří, většinou dále nemají problém odhalit obecné řešení. Další úlohy této kapitoly nejsou zaměřeny na obsah, ale na shodnost trojúhelníků, nebudou zde proto dále rozváděny.

Poslední kapitola věnovaná obsahům vybraných rovinných útvarů je zařazena v učebnici Matematika E a je v ní zahrnut obsah rovnoběžníku i lichoběžníku. První tři úlohy vycházejí z obrázku 32. V první úloze mají žáci za úkol rozdělit rovnoběžník tak, aby z jeho částí bylo možné poskládat obdélník. V druhé úloze mají stejné zadání s podmínkou, že řez musí procházet průsečíkem úhlopříček. Tato úloha je zařazena, aby se žáci neupínali pouze k řezům, které procházejí vrcholem. V poslední úloze propojené s obrázkem mají žáci určit obsah zadaných rovnoběžníků. Pokud žákům nedochází, že obsah přeskládaného obdélníku je shodný s obsahem rovnoběžníku, je potřeba předchozí diskuse. Hodnoty, které nejsou v obrázku zadány mají žáci zjistit měřením. V další úloze žáci sestavují vzorec pro výpočet obsahu rovnoběžníku, k dispozici mají obrázek s vyznačenými stranami a, b a výškami v_a, v_b.



Obrázek 32 - Obsahy – rovnoběžníky (Hejný et al. 2017c, s. 5)

Následuje úloha navazující na kapitolu o obsahu trojúhelníku, kde se obdobná situace řešila pro ostroúhlý trojúhelník, zde je pozornost zaměřena na trojúhelník tupoúhlý (viz obrázek 33). V úloze je uvedeno, že vzorec $S = \frac{1}{2} a v_a$ platí pro ostroúhlý trojúhelník, žákům je zadáno najít vzorec pro obsah trojúhelníku tupoúhlého. Autoři předpokládají tři různé přístupy, prvním je využití rozdílu obsahů dvou pravoúhlých trojúhelníků. Toto řešení vyžaduje úpravu výrazů, aby se žáci mohli dostat k požadovanému vzorci. Druhé předpokládané řešení je doplnění trojúhelníka na rovnoběžník, třetím a posledním návrhem je využití Cavallieriho principu, pomocí kterého mohou žáci přenést trojúhelník ABX „po vrstvách“ na trojúhelník

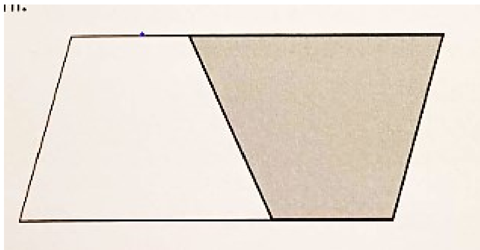


Obrázek 33 - Obsahy tupoúhlý trojúhelník (Hejný et al., 2017c, s. 5)

ABC. Všemi třemi způsoby by žáci měli dospět ke zjištění, že hledaný vzorec je shodný se vzorcem pro ostroúhlý trojúhelník.

Další část této kapitoly se zaměřuje na lichoběžník. V první úloze vychází z obrázku 33, úkolem je určit pomocí písmen obsah lichoběžníků a) ABXD a b) ABXC. V prvním případě je možné lichoběžník rozdělit na obdélník ABCD a pravoúhlý trojúhelník BXC. V případě lichoběžníku ABXC je možné rozdělit lichoběžník na dva trojúhelníky, ABC a BXC. Vzorce pro všechny části rozdělených lichoběžníků žáci znají, pro odvození vzorce bude samozřejmě potřeba provést úpravy výrazů získaných jejich součtem. Vzorce získané z této části značením neodpovídají standardnímu vzorci, jehož odvození je cílem následujících úloh.

V první z nich mají žáci ze dvou shodných lichoběžníků sestavit rovnoběžník, jelikož žáci mohou mít lichoběžníky vystřižené, úloha by jim neměla dělat větší problémy, možné řešení je na Obrázku 34. Po této manipulační úloze mají žáci obecně určit obsahy rovnoběžníku a původního lichoběžníku. Vzhledem k tomu, že vzorec pro rovnoběžník žáci mají k dispozici, je potřeba si uvědomit, že obsah lichoběžníku je poloviční, a že délka strany rovnoběžníku je rovna součtu základen. Získání vzorce potom spočívá v pouhém dosazení.



Obrázek 34 - Obsahy – rovnoběžník z lichoběžníků (Hejný et al., 2019, s. 23)

V rámci propojení známých znaků lichoběžníku je zařazena ještě jedna úloha, ve které Kira tvrdí, že k určení obsahu nepotřebuje délky a, c a v, ale stačí jí změřit dvě délky. Úkolem pro žáky je přijít na to, jak by Kira mohla obsah určit pomocí dvou hodnot a které by to byly. Myšlenka úlohy spočívá v tom že část vzorce $\frac{a+c}{2}$ odpovídá délce střední příčky, proto není potřeba znát délky obou základen ty mohou být ve vzorci nahrazeny právě střední příčkou.

Obsahy rovinných útvarů shrnutí

Pro zavedení vzorců pro obsah trojúhelníku, rovnoběžníku a lichoběžníku používají obě sady učebnic podobné modely, nicméně jejich využití se v rámci jednotlivých učebnic liší. Obě řady využívají znázornění útvarů ve čtvercové síti, ale zatímco Hejného metoda staví na výpočtech pomocí sítě, <u>Math Makes Sense</u> tuto možnost využívá jen velmi omezeně, síť v tomto případě slouží často pouze pro určení délek stran a uvědomění si, jak spolu tyto délky souvisejí (například u rovnoběžníku).

V učebnicích *Math Makes Sense* jsou všechny tři útvary zařazeny v rámci jedné kapitoly. Poněkud netypickým znakem pro tuto řadu je, že vzorec pro lichoběžník není v rámci učebnice uveden a v zásadě ani odvozen, při výpočtech v lichoběžníku zůstávají žáci u rozdělování na části a sčítání dílčích obsahů. Možná je to dáno tím, že na rozdíl od druhé řady učebnic, žáci ve době, kdy řeší obsahy ještě neznají úpravy algebraických výrazů, nicméně vzorec mohl být odvozen i bez úprav, pokud by učebnice vycházela z obrázku 30.

Oproti Hejného učebnicím, je tato řada v rámci tohoto tématu silně návodná, přestože jsou žákům předkládány úlohy na zkoumání problému, velmi rychle se od nich přechází ke vzorcům a v některých jsou žáci dokonce naváděni potřebným směrem, neboť je dáno, kterou metodou mají úlohu řešit.

Hejného učebnice, i přes malý počet úloh k tomuto tématu, nejsou v tomto ohledu tak přímočaré. Úlohy sice žáky navádějí k dalšímu postupu, dokonce i velmi podobnými způsoby, ale přesto nepůsobí tak direktivním dojmem, jako první řada učebnic. Není cílem hodnotit, zda je tento postup správný, či nikoliv, pouze s ohledem na ostatní porovnávané části, byl v tomto případě rozdíl poměrně výrazný.

Jako pozitivum přístupu učebnic Hejného metody je nepochybně propojení tématu obsahu s dalšími souvisejícími oblastmi, jako je úprava algebraických výrazů či využití vztahu pro délku střední příčky.

6 Závěr

Srovnání obou řad učebnic poukázalo na fakt, že obě řady prokazují konstruktivistické rysy. V obou hraje klíčovou roli zkoumání tématu prostřednictvím zadaných úloh, odhalování matematických vztahů a řešení problémů. Dalším společným aspektem je sociální interakce v rámci učení, v této oblasti se obě řady učebnic shodují a interakci zařazují v rámci všech témat. U učebnic *Math Makes Sense* práce ve dvojicích či větších skupinách zařazena víceméně ve všech úvodních úlohách určených ke zkoumání nového tématu, žákům je zde dán pouze minimální prostor k samostatnému zkoumání. Samostatně pak žáci pracují spíše při řešení úloh k procvičení. Diskuse řešení a navrhovaných teorií je společná oběma řadám učebnic.

Dalším společným prvkem je zaměření na propojení matematického poznání s realitou, ten se sice prolíná oběma řadami, nicméně jejich přístup k této problematice se poměrně liší. Zatímco učebnice *Math Makes Sense* hojně zařazují úlohy na propojení získaných poznatků s reálným kontextem a v každé kapitole je zdůrazňováno, kde je daný poznatek možno využít, učebnice Hejného metody toto propojení nezprostředkovávají tak výrazně. I v těchto učebnicích jsou samozřejmě zařazovány úlohy s reálným kontextem, nicméně pozornost je spíše zaměřena na využití intuitivního uvažování a využití zkušeností, které má žák z dřívějška. To Učebnice Hejného metody podporují například využitím svých didaktických prostředí.

V obou řadách je rovněž zařazena možnost diferenciace úloh, která následně umožňuje individualizaci výuky a přizpůsobení její obtížnosti možnostem konkrétního žáka, i zde se ale objevují rozdíly v přístupu k této problematice. V učebnicích Hejného metody je zadáván výrazně menší počet úloh, nicméně diferenciované úlohy jsou vloženy již v rámci fáze objevování nového poznatku, oproti tomu v řadě *Math Makes Sense* je v této fázi uvedena pouze jedna úloha, kterou zkoumají všichni žáci a až po objevení nového poznatku dochází k diferenciaci úloh. Tento postup je poměrně běžnou praxí, nicméně mohl by pro silnější žáky ubírat na atraktivnosti zkoumání, jelikož zadané úlohy pro ně nemusí být dostatečnou výzvou.

Asi nejvýraznějším rozdílem je uspořádání. Jak bylo uveden v úvodní části porovnání, učebnice Hejného metody mají specifické řazení témat, které neodpovídá tradičnímu pojetí tematických celků. Autoři toto netradiční uspořádání volí pro dosažení lepších výsledků u žáků, kteří díky řazení „na přeskáčku" mají možnost mezi jednotlivými výskyty daného tématu své objevy zpracovat a zařadit do poznatkových struktur a střídání témat rovněž snižuje jejich unavitelnost. Proti tomu učebnice *Math Makes Sense* řadí témata tradičním způsobem, do tematických celků. V případě delších celků jsou témata rozdělena na více částí, jako tomu bylo například u celých čísel. S ohledem na argumenty, jež využívá Hejného metoda je třeba podotknout, že v učebnicích *Math Makes Sense* nejenže jsou témata ponechána pohromadě, ale i jednotlivé lekce jsou koncipované ve stále se opakujícím duchu – úvodní částí je zkoumání, následuje vysvětlení a poté řešení úloh. Samozřejmě tato pravidelná struktura jednotlivých lekcí může být i ku prospěchu, podobně jako využití známých didaktických prostředí v rámci Hejného metody, nicméně v porovnání s přístupem druhé sady učebnic jde o zásadně odlišný, ne-li opačný přístup ke členění výuky.

S tímto rozdílem v uspořádání přímo souvisí ještě jeden další rozdíl, a to přístup k propojování konceptů. Už jen fakt, že úlohy zaměřené na určité téma mohou být v rámci učebnice vloženy do kapitoly, která se tímto tématem nezabývá, podporuje žáky v hledání souvislostí. Úlohy jsou takto mnohdy zařazeny do témat, se kterými na první pohled nemají nic společného, ale následně se ukáže, že opak je pravdou. Navíc střídání témat je v tomto ohledu také silným nástrojem. Učebnice *Math Makes Sense* také poukazují na vztahy mezi jednotlivými tématy, většinou v úvodních částech lekcí, kde připomínají, které znalosti budou žáci potřebovat, nicméně toto připomenutí nepůsobí zdaleka tak spontánně, jako je tomu u Hejného metody.

Dalším rozdílem mezi porovnávanými učebnicemi je formulace objevených poznatků v rámci učebnice, zatímco v učebnicích *Math Makes Sense* jsou veškeré nové poznatky shrnuty po části zaměřené na zkoumání, učebnice Hejného metody toto shrnutí v rámci učebnic zařazují spíše výjimečně. Shrnutí poznatků je dle jejich názoru prací žáků a jeho uvedení v rámci učebnice by mohlo vést jednak k utlumení kreativity a žákovské diskuse a jednak k formálnímu paměťovému učení, čemuž se autoři snaží předejít.

Jako pozitivum obou řad mohou být považovány použité modely a didaktická prostředí, ty jsou v obou případech velmi názorným a užitečným nástrojem žákova poznávacího procesu. V učebnicích Hejného metody mají prostředí navíc další výhodu v tom, že žáci jsou s nimi seznamováni průběžně a v případě nového tématu se díky nim mohou vracet ke známému prvku. Navíc didaktická prostředí umožňují přechod k řešení obtížnějších úloh bez nutnosti formálních poznatků, který je navíc pro žáky velmi přirozený.

Závěrem je nutno podotknut, že obě řady učebnic mohou být považovány za konstruktivistické, jelikož dodržují základní přístupy konstruktivistického hnutí. Srovnání poukázalo, že v přístupu učebnic jsou, ačkoliv by se to na první dojem nemuselo zdát, celkem výrazné rozdíly. Učebnice Hejného metody jsou více inovativní, nedodržují tradiční formu, což činí s ohledem na poznatky z psychologie a pedagogiky, jelikož v kolektivu autorů se nacházejí významné osobnosti z těchto oblastí. Nicméně učebnice Math Makes Sense mají mezi svými autory také zkušené pedagogy, jejichž cílem bylo vytvořit učebnice podporující porozumění matematice a efektivní výuky, což jim nepochybně podařilo. Oproti Hejného metodě jsou tyto učebnice mnohem tradičnější, nicméně i tak obsahují řadu zajímavých přístupů.

Cílem diplomové práce bylo porovnat Hejného metodu a její učebnice s dalšími formami konstruktivismu. V rámci řešení práce se ukázalo, že Hejného metoda nepochybně dodržuje základní principy konstruktivistického hnutí a v mnoha ohledech se shoduje i s myšlenkami dalších význačných osobností, které se ke konstruktivismu hlásí. V rámci porovnání učebnic byly objeveny společné rysy ale i rozdíly mezi porovnávanými učebnicemi, ty byly v závěru práce také shrnuty. Autorka tedy považuje cíle práce za splněné.

7 Zdroje

Bachratý, H. (2012). *Archív Víta Hejného. I*. EDIS-vydavateľstvo Žilinskej univerzity.

Baron, L., Brown, T., Davis, G., Jeroski, S., Ludwig, S., Milne, E., Neel, K., Pusic, J., Sidley, R., & Sufrin, D. (2008). *Math Makes Sense 8*. Pearson Education Canada.

Bloor, D. (1991). *Knowledge and Social Imagery* (2nd edition). The University of Chicago Press.

Ernest, P. (2011). *The psychology of learning mathematics: the cognitive, affective and contextual domains of mathematics education*. LAP LAMBERT Academic Publishing.

Freudenthal, H. (2002). *Revisiting Mathematics Education, China Lectures*. Kluwer Academic Publishers.

Hartl, P. & Hartlová, H. (2015). *Psychologický slovník*. Třetí, aktualizované vydání. Portál.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Hejný, M., & Vondrová, N. (1999). *Číselné představy dětí*. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Hejný, M., Novotná, J., & Vondrová, N. (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Díl 1*. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Hejný, M., & Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování* (2., aktualiz. vyd.). Portál.

Hejný, M., Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J., Sukniak, A., & Bomerová, E. (2015a). Matematika A, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia. H-mat.

Hejný, M., Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J., & Sukniak, A. (2015b). Matematika B, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia. H-mat.

Hejný, M., Šalom, P., Hanušová, J., Jirotková, D., & Sukniak, A. (2015c). *Matematika AB, příručka učitele pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. H-mat.

Hejný, M., Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J., & Sukniak, A. (2016). *Matematika C, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* H-mat.

Hejný, M., & Šalom, P. (2017a). *Matematika D, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* H-mat.

Hejný, M., Šalom, P., Hanušová, J., Jirotková, D., & Sukniak, A. (2017b). *Matematika CD, příručka učitele pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. H-mat.

Hejný, M., & Šalom, P. (2017c). *Matematika E, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* H-mat.

Hejný, M., & Šalom, P. (2018). *Matematika F, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. H-mat.

Hejný, M., Šalom, P., Hanušová, J., & Sukniak, A. (2019). *Matematika EF, příručka učitele pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. H-mat.

Hejný, M., Jirotková, D., Bomerová, E., & Michnová, J. (2022). *Matematika 5, učebnice pro 5. ročník základní školy, nová generace* (2. přepracované vydání). Fraus.

Johnston, J., Keyes, B., Doucette, M., Lenjosek, A., Thomas, S., Sinclair, M., Brown, T., Heideman, C., Jones, D., Davis, M., Paziuk, J., Jeroski, S., & Harper, K. (2005). *Math Makes Sense 7.* Pearson Education Canada.

Kalhous, Z., & Obst, O. (2009). *Školní didaktika* (2. vyd.). Portál.

Molnár, J., Schubertová, S. & Vaněk, V. (2008). *Konstruktivismus ve vyučování matematice.*Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta.

Piaget, J., & Inhelder, B. (2014). *Psychologie dítěte* (6., v této edici první). Portál.

Piaget, J., Garcia, R., Banks, L., Inhelder, B., Davidson, P. M., & Easley, J. (1991). *Toward a logic of meanings*. Psychology Press.

Průcha, J., Mareš, J., & Walterová, E. (2013). *Pedagogický slovník* (3. aktualiz. vyd). Portál.

Sfard, A. (1991/02/01). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies In Mathematics*, *22*, 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

von Glasersfeld, E. (2013). *Radical Constructivism* (1st ed.). Taylor and Francis.

Vygotskij, L. S. (1979). *Mind in Society, The Development of Higher Psychological Processes* (2. vyd.). Harvard University Press.