Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Sbírka řešených úloh z kombinatoriky – variace bez opakování

Collection of solved problems from combinatorics – variations without repetition

Jan Grill

Vedoucí práce:	Doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.
Studijní program:	Matematika se zaměřením na vzdělávání
Studijní obor:	B M-AJ 20

2024

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Sbírka řešených úloh z kombinatoriky – variace bez opakování potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Dolní Stakory, 11. 7. 2024

Rád bych poděkoval především vedoucímu této práce, docentu Antonínu Jančaříkovi, za vedení práce, pomoc s vymyšlením tématu práce, poskytnuté materiály k vypracování práce, rady ke zpracování tématu a inspirativní výuku. Děkuji magistře Martině Suché za kontrolu pravopisu a gramatiky. Děkuji Veronice Kabátové za tvorbu ilustrací pro tuto práci. Dále děkuji své rodině za podporu, kterou mi poskytovali při psaní práce.

ABSTRAKT

Tato práce je sbírkou řešených úloh z kombinatoriky na téma variace bez opakování. Práce se skládá ze dvou hlavních částí. První z těchto částí je část teoretická. Ta jest dále rozdělena na další čtyři části. Nejprve na část pojednávající obecně o metodě Concept Cartoons, jejímu využití a významu. Dále pak část, která zahrnuje využití metody Concept Cartoons konkrétně v této práci, a formu úloh v této práci obsažených. Třetí teoretická část práce pak pojednává o analýze a priori, jejím využití v této práci a o její struktuře. Poslední teoretická část se zabývá strategiemi řešení kombinatorických úloh. Zde se práce zaměřuje na co možná největší možné množství strategií řešení úloh.

Další část práce je pak samotná sbírka úloh. Každá úloha je zadána textovým zadáním a obohacena o metodu Concept Cartoons. Účelem využití metody Concept Cartoons je podnítit výuku diskusní formou a motivovat žáky k zapojení se do diskuse. Dále je každá úloha dopodrobna rozebrána pomocí analýzy a priori. Hlavní podstatou tohoto rozboru je pokrýt co možná největší množství správných i špatných řešení dané úlohy a poskytnout tak učiteli přípravu na to s čím se při využití této úlohy může setkat.

KLÍČOVÁ SLOVA

Kombinatorika, Variace, Matematika, Strategie řešení úloh, Concept Cartoons, Analýza A priori

ABSTRACT

This bachelor's thesis is a collection of solved problems from combinatorics on the topic of variations without repetition. The thesis consists of two main parts. The first part is theoretical and is further divided into four sections. The first section deals generally with the Concept Cartoons method, its use, and its significance. The second section covers the use of the Concept Cartoons method specifically in this thesis and the form of the problems included. The third theoretical section discusses the a priori analysis, its use in this thesis, and its structure. The last theoretical section deals with strategies for solving combinatorial problems, focusing on as many problem-solving strategies as possible.

The next part of the thesis is the collection of problems itself. Each problem is presented with a textual assignment and enriched with the Concept Cartoons method. The purpose of using the Concept Cartoons method is to encourage teaching in a discussion format and motivate students to engage in the discussion. Furthermore, each problem is analyzed in detail using a priori analysis. The main aim of this analysis is to cover as many correct and incorrect solutions to the problem as possible, thus preparing the teacher for what they might encounter when using this problem.

KEYWORDS

Combinatorics, Variations, Mathematics, Problem Solving Strategies, Concept Cartoons, A priori Analysis

Obsah

Úvod

Cílem práce je vytvořit sbírku řešených úloh z kombinatoriky na téma variace bez opakování, kde úlohy budou zadávány formou Concept Cartoons. Pro volbu tohoto tématu jsme se rozhodl, jelikož mě kombinatorika dlouhodobě fascinuje. Kombinatorika mě zaujala hlavně tím, že většinu úloh lze řešit více než jedním způsobem, což podporuje kreativní myšlení a hlubší pochopení kombinatorických principů. Větší množství řešení otvírá prostor pro diskusi a analýzu různých přístupů, což je pro mě velice inspirující.

Tuto práci bych rád později využil při své výuce, jelikož věřím, že Concept Cartoons jsou efektivním nástrojem pro zapojení žáků do výukového dialogu a pro podporu jejich pozornosti. Formou komiksů se žáci mohou snadněji identifikovat s postavami a jejich nápady, což činí proces učení interaktivnějším a zábavnějším. Concept Cartoons umožňuje žákům nejen vidět různé pohledy na řešení úlohy, ale také reflektovat své vlastní myšlenkové procesy a případné chyby.

V první části této práce se zabývám následujícími čtyřmi tématy:

1) metoda Concept Cartoons, její vznik a vývoj, a dále její přínosy či omezení ve výuce
2) využití metody Concept Cartoon při výuce kombinatoriky a způsob zadávání úloh
3) analýza a priori
4) strategie řešení úloh z kombinatoriky

Záměrem druhé části této bakalářské práce je potom vytvořit sbírku X úloh, kde každá z těchto úloh obsahuje tři klíčové části. Zaprvé textové zadání, zadruhé Concept Cartoon obsahující možné nápady, jak úlohu řešit, a to jak správné, tak chybné, a zatřetí podrobný rozbor řešení této úlohy, který nejen ukazuje správné postupy, ale také analyzuje možné chyby, se kterými by se žáci mohli při řešení úlohy setkat.

Tyto úlohy budou řazeny od lehčích ke složitějším, aby postupně rozvíjely znalosti žáků. Tímto způsobem se snažím zajistit, aby žáci postupně nabývali dovednosti potřebné k řešení komplexnějších úloh, a zároveň si upevňovali své znalosti a porozumění základním principům kombinatoriky.

1 Concept Cartoons

Metoda Concept Cartoons byla vytvořena dvojicí britských učitelů Brendy Keoghové a Stuarta Naylora v roce 1991. Jedná se o metodu zadávání úloh využívanou k podněcování diskuse, aktivního přemýšlení, která pomáhá žákům pochopit koncept daného předmětu. Podle Naylora a Keoghové (2015) bylo jejich záměrem vytvořit systém úloh, který by podporoval diskusi, vyvolával a zpochybňoval nápady žáků a vedl k jejich přehodnocení. Dabell (2008) uvádí, že Concept Cartoons jsou kognitivní kresby či „vizuální neshody“, které využívají vzhled komiksu k představení rozhovorů uvnitř bublin. Každá postava tedy říká nějaký pohled na hlavní obrázek nebo nějakou hypotézu na toto téma, mnohdy jsou tyto pohledy nebo hypotézy chybné a obsahují časté chyby, kterých se lidé dopouští.

1.1 Struktura úlohy zadané pomocí Concept Cartoons

Představme si standartní komiks v časopise či novinách, akorát namísto toho, aby se postavy bavily o každodenních věcech, tak debatují o nějakém vědeckém konceptu jako například proč je nebe modré, nebo proč jablko padá ze stromu. Postavy by tedy pak mohly říkat třeba něco jako:

1) Nebe je modré, protože se v něm odráží barva oceánu.
2) Nebe je modré, kvůli tomu, jak sluneční paprsky interagují s naší atmosférou.
3) Nebo je modré, protože ho tak někdo namaloval.

Tato různá prohlášení reprezentují to, co si žáci mohou myslet, že je správná odpověď. Některá z těchto tvrzení jsou správná, zatímco jiná jsou nesprávná.

Někdy mohou Concept Cartoons také obsahovat prázdnou bublinu znázorňující, že uvedené hypotézy neobsahují všechny možnosti, a že existuje více správných odpovědí než jen ty zde uvedené. Zároveň tyto bubliny dávají žákům možnost doplnit do těchto bublin vlastní hypotézy.

1.2 Benefity metody Concept Cartoons

1.2.1 Podněcování diskuse

Žáci mohou diskutovat nad prohlášeními jednotlivých postav a bavit se o tom, která z nich jsou správná a která nikoliv. Již zformulované nápady z Concept Cartoons mohou pomoci žákům formulovat další vlastní hypotézy a alternativní nápady. Podle výzkumu Samkové (2020) bylo možné pozorovat, že při využití metody Concept Cartoons se diskuse účastnili i žáci, kteří se jinak zdráhali promluvit a sdílet svůj názor. Zároveň Concept Cartoon umožňuje žákům svést chyby na prohlášení postavy a tím pomoci s obavami ze selhání (Naylor & Keogh, 2015).

1.2.2 Získání pozornosti

Zapojením žáků do diskuse můžeme získat pozornost snáze než pouze výkladem. A jak tvrdí Naylor a Keoghová (2015), tak jedním ze způsobů, jak zvýšit pozornost žáků, je přimět je, aby mluvili a debatovali o tom, co si myslí. Metoda Concept Cartoon přímo podněcuje diskusi a zároveň vizuálně obohacuje výuku, tedy i usnadňuje získání pozornosti žáků.

1.2.3 Sdílení vědomostí

Při debatě nad Concept Cartoon si žáci navzájem vyměňují své názory. Tato výměna názorů a informací podporuje kolaborativní učení, kdy se žáci učí navzájem od ostatních žáků, a ne jenom od učitele.

1.2.4 Podporuje kritické myšlení

Concept Cartoon prezentuje jak správné odpovědi, tak i běžné chyby. Žáci tedy musí přemýšlet a ideálně debatovat nad tím, která z uvedených prohlášení jsou správná a proč.

1.3 Využití Concept Cartoons

Metoda Concept Cartoons využívá dřívější vědomosti žáků a ty pak následně rozšiřuje. Nejčastěji se tak setkáme s Concept Cartoons na prvním a druhém stupni základních škol, kde často využívá obecné znalosti žáků.

Keoghová a Naylor využili metodu Concept Cartoons prvně při výuce přírodovědných předmětů (Samková, 2020), kde metoda využívala obecné znalosti žáků o tom, že něco existuje, nebo že se něco děje a následně tyto znalosti rozšiřovala o to, proč se to tak děje.

Př.: Concept Cartoon ukazuje postavy diskutující, proč předměty padají na zem.

1) Předmět padá, protože je těžší než vzduch.
2) Předmět padá, protože je přitahován gravitací.
3) Předmět padá, protože ho přitahuje země.

Učitel může takový Concept Cartoon použít, aby zahájil diskusi o gravitaci a následně by navázal třeba praktickou ukázkou toho, že nehledě na váhu předmětu padají všechny předměty stejně rychle.

Dále pak byly využity Concept Cartoons později při výuce matematiky (Dabell, 2008), anglického jazyka (Turner et al., 2013) a dalších předmětů.

1.4 Limitace metody concept cartoons

1.4.1 Omezená hloubka

Metoda Concept Cartoons se hodí pro podněcování diskuse a zaměřování se na časté chyby, které žáci dělají, ale často neposkytují dostatek informací pro komplexní pochopení tématu. Slouží jako úvod a pro plné prozkoumání tématu je třeba doplnit metodu Concept Cartoons o další aktivity a materiály.

1.4.2 Utvrzení mylných představ

Concept Cartoons jsou sice navrženy, aby řešily mylné představy žáků, avšak existuje riziko, že někteří žáci mohou špatně pochopit některé myšlenky, pokud není diskuse správně vedena učitelem. Je nezbytné, aby učitel diskusi vedl a případné chyby opravoval.

1.4.3 Závislost na dovednostech učitele

Efektivita Concept Cartoons je silně závislá na schopnostech učitele vést diskusi, klást správné otázky a navést žáky ke správnému porozumění dané látky. Učitel musí mít dovednosti v řízení diskuse a řešení různých reakcí žáků. Jak tvrdí Naylor a Keoghová (2015), může dojít k divoké debatě a není-li učitel připraven hrozí, že dojde k přílišnému vyhrocení situace.

1.4.4 Pozornost žáků

Ne všem žákům musí metoda Concept Cartoons nezbytně vyhovovat. Pro některé žáky může být přínosnější využít spíš praktické aktivity, přímou výuku nebo digitální nástroje. Je důležité mít přehled o tom jaké jsou preference žáků a používat podle toho příslušné výukové metody. Pokud učitel nezvládá řídit diskusi může dojít k situaci, kdy se žáci baví mezi sebou a nevěnují pozornost tématu (Birisci et al, 2010).

1.4.5 Přílišné upřednostňování diskuse

I když je diskusní forma výuky cenná, měla by být vyvážena i jinou formou výuky, jako například zkoumáním nebo praktickým učením. Je možné, že přílišný důraz na diskusi zapříčiní nedostatek hlubších znalostí.

1.4.6 Časové omezení

Čas výuky je omezený a podrobná diskuse způsobená metodou Concept Cartoons mnohdy zabere značnou část hodiny. Učitel musí efektivně plánovat aktivity při výuce, aby pokryl veškerý potřebný obsah.

2 Využití metody Concept Cartoons při výuce kombinatoriky a způsob zadávání úloh

2.1 Důvod využití metody Concept Cartoons

Velká část kombinatorických úloh lze řešit více než jen jedním postupem. Chce-li učitel pokrýt co nejvíce možných postupů pro řešení dané úlohy a zároveň zabránit žákům v dělání častých chyb, pak je tu možnost využít diskusní formy výuky. V tomto případě žáci mohou sami přijít na vlastních postup, jak řešit danou úlohu a pokud je diskuse efektivně vedena učitelem, pak jsou schopni společně vyřešit úlohu jako kolektiv. Jak podotýkají Novotná & Brousseau (2012) ve svém výzkumu při hře kdo řekne 20, tak žáci kladně reagovali na výuku diskusní metodou, která je nutila přemýšlet, aniž by se stala monotónní.

Jak bylo již dříve zmíněno, jedním z hlavních benefitů metody Concept Cartoons je podněcování a vyvolávání diskuse. A jak říkají i Naylor a Keoghová (2015), jejich hlavním cílem při tvorbě metody Concept Cartoons byla podpora diskuse při výuce. Z tohoto důvodu tedy usuzuji, že je metoda Concept Cartoons vhodná pro výuku kombinatoriky na středních školách.

2.2 Struktura úloh v této sbírce

Všechny úlohy v této sbírce jsou zadány pomocí metody Concept Cartoons. Úlohy tvoří slovy Jana Kopky (2016) úlohové hrozny. Je tedy přítomna základní úloha a případně dále její obměny. Obměny neboli doplňující úlohy, rozšiřují základní úlohu o další otázky a jsou určené k prohloubení poznatků ze základní úlohy. Každá základní i doplňující úloha je zadána textovým zadáním a komiksem Concept Cartoon. Concept Cartoon se skládá z hlavního obrázku, ilustrujícího úlohu a diskusních bublin.

Úlohy jsou podle dělení, které uvádí Samková (2020) ve své knize převážně aplikační bez vnějšího vlivu a některé aplikační s vnějším vlivem. Z hlediska otevřenosti se jedná o úlohy s otevřeným postupem řešení a úlohy s postupem řešení o více krocích.

Diskusní bubliny potom předkládají možné postupy řešení dané úlohy. Ve všech případech je zahrnuta alespoň jedna bublina obsahující postup vedoucí na správné řešení. Mnohdy je obsaženo bublin se správným postupem více a v případě úlohy 6 a) navrhují všechny bubliny správný postup. Postup obsažený v bublinách není vždy kompletní a je potřeba jej občas dokončit. Některé z bublin obsahují kromě postupu i výsledek.

2.3 Řazení úloh v této sbírce

Úlohy tvořící jeden úlohový hrozen jsou vždy řazeny za sebou. Nejprve je uvedena základní úloha a pak její doplňující úlohy, jelikož doplňující úlohy vychází z postupů uvedených v úloze základní. Jednotlivé hrozny úloh jsou pak řazeny podle obtížnosti. Tato struktura pomáhá žákům postupně rozvíjet své dovednosti a porozumění danému tématu. Díky tomuto řazení se mohou žáci lépe orientovat v postupně náročnějších úlohách. Pečlivé čtení zadání je klíčové zejména u složitějších úloh, kde drobná nepozornost může vést k chybnému pochopení zadání a nesprávnému řešení. Jak ve své knize zdůrazňuje Lev Vygotsky (1978), učení je efektivnější, když jsou úlohy uspořádány tak, aby žáci postupně řešili složitější problémy s pomocí učitele nebo zkušenějších spolužáků.

3 Analýza a priori

Jak uvádí Novotná et al. (2006), analýza a priori je důležitým nástrojem při učitelově přípravě na výuku. Učitel jí provádí před průběhem vyučovací hodiny. Na základě studijního plánu se učitel snaží připravit plán aktivit a odhadnout průběh hodiny. Analýza a priori sestává z následujících částí:

1) Časový plán hodiny
2) Příprava na reakce žáků a příprava vlastních odpovědí
3) Příprava strategií řešení problémů, které se mohou během výuky vyskytnout
4) Příprava nezbytných vědomostí a poznatků pro danou látku

Cílem analýzy a priori je tedy příprava učitele na vyučovací hodinu. Analýza a priori se zvlášť zaměřuje na možné obtíže, se kterými se žáci setkají při řešení úloh.

3.1 Struktura analýzy a priori

V této sbírce je pak analýza a priori aplikována na jednotlivé úlohy. Analýza a priori je prováděna po vzoru Novákové (2015). Bude tedy mít následující strukturu:

3.1.1 Cíl úlohy

Cíle rozlišujeme matematické a didaktické. Matematickým cílem je najít správný postup k vyřešení úlohy, tento postup správně aplikovat a dojít tak ke správnému výsledku či řešení. Didaktickým cílem je, co se žáci řešením úlohy naučí, co si procvičí a případně co si připomenou.

3.1.2 Charakter zadání

Rozlišujeme dva hlavní způsoby zadání úlohy, a to vizuální a slovní. Vizuální zadání zahrnuje zadání formou textu, rovnice nebo obrázku. Slovní zadání pak znamená přečtení úlohy učitelem.

Poslední částí charakteru zadání jsou možné obtíže s jeho pochopením.

3.1.3 Tematický celek

Do jakého tematického celku lze úlohu zařadit a v jakém ročníku se dá tato úloha využít.

3.1.4 Čas věnovaný úloze

Jaký je předpokládaný čas, který je třeba úloze věnovat.

3.1.5 Způsob práce

Doporučený způsob vypracovávání úlohy. Zda je úloha vhodná pro skupinovou či samostatnou práci. Popřípadě zda je úloha vhodná pro využití v rámci písemné práce.

3.1.6 Pomůcky

Jaké pomůcky jsou povolené nebo nezbytné pro vypracování úlohy.

3.1.7 Předchozí znalosti

Nezbytné znalosti potřebné k vyřešení úlohy. Typicky se jedná o předem probranou látku z minulých let studia, kterou by žáci měli ovládat.

3.1.8 Postoje a reakce žáků

Předpokládané reakce žáků po zadání úlohy. Co pravděpodobně padne za otázky po zadání a co může nejspíše žáky překvapit.

Na základě nedostatku zkušeností s výukou nebude tato část analýzy a priori obsažena v rozboru úloh této bakalářské práce. Cílem bakalářské práce

3.1.9 Postoje a reakce učitelů

Jak lze předpokládat, že na úlohu zareagují učitelé. Zda a proč by se úloha učitelům mohla líbit a popřípadě proč by se jim naopak líbit nemusela.

Na základě nedostatku zkušeností s výukou nebude tato část analýzy a priori obsažena v rozboru úloh této bakalářské práce.

3.1.10 Správné strategie řešení

Podrobný rozbor co možná největšího počtu správných řešení. Za ideálních podmínek by analýza a priori měla pokrýt všechny možné správné postupy.

3.1.11 Nesprávné strategie řešení

Podrobný rozbor předpokládaných nesprávných řešení úlohy. Doplněný o návrhy reakcí učitele na jednotlivé chyby.

3.1.12 Hodnocení

Jaké je doporučené ohodnocení úlohy. Případné odměna za zdařilé řešení úlohy, popřípadě tresty za nesprávné řešení úlohy.

3.2 Využití analýzy a priori

Jak říká Nováková (2015) analýza a priori umožnuje učitelům předem se připravit na výuku a dopředu si rozmyslet různé možné reakce žáků na danou úlohu. Tedy jak na správné, tak i na nesprávné návrhy řešení, které žáci mohou zmínit. Učitel tak může být lépe připraven na chyby a mylné představy, které žáci mohou mít, a díky tomu jim může tyto chyby efektivněji opravit.

Díky analýze a priori dokáže učitel lépe identifikovat obtížné části úloh, ve kterých je pravděpodobné, že žáci narazí na problémy. Tímto způsobem může učitel lépe strukturovat své vysvětlení a poskytnout tak žákům dostatečnou podporu tam kde je jí nejvíce třeba.

Dále pak umožňuje analýza a priori učiteli lépe plánovat výuku. Poskytuje učiteli předběžný přehled o tom, kolik času, která úloha zabere a dále o tom, jestli je úloha vhodná pro skupinovou či naopak spíše individuální práci. Zároveň analýza a priori nabízí učiteli nástroj pro efektivní vedení diskuse ve třídě. Učitel si může předem promyslet otázky, které žáky povedou k hlubšímu zamyšlení se nad problémem a k diskusi o různých strategiích řešení.

Učitelé, kteří jsou dobře připraveni na různé situace, které mohou ve třídě nastat, dokážou vést výuku s větší sebedůvěrou. To může pozitivně ovlivnit jejich výkonnost a také atmosféru ve třídě. Analýza a priori je tedy obzvláště cenný nástroj pro méně zkušené učitele, kterým poskytuje při výuce oporu.

4 Strategie řešení úloh z kombinatoriky

U mnoho úloh v matematice lze k jejich řešení přistupovat více způsoby. Obzvláště je to pak pravda u kombinatorických úloh.

4.1 Před řešením kombinatorických úloh

Na základě sbírky úloh Petákové (2011) lze říci, že před řešením kombinatorických úloh je třeba projít několik pravidel a definic využívaných v kombinatorice a ideálně představit jejich význam. Patří mezi ně faktoriál, kombinační číslo, pravidlo kombinačního součinu a pravidlo kombinačního součtu. Při řešení úloh v této sbírce předpokládám, že jsou žáci obeznámeni s těmito definicemi a pravidly, avšak za nezbytně důležité považuji jen pravidla kombinatorického součtu a součinu.

4.1.1 Faktoriál

Definice: Faktoriál čísla *n* je číslo rovné součinu všech přirozených čísel menších nebo rovných číslu *n*, pokud *n* je kladné, a rovno 1 pro $n = 0$. Faktoriál čísla *n* je podle značení zavedeného Krampem v roce 1808 značen jako $n!$

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k \text{ pro } n > 0 + \; n! = 1 \text{ pro } n = 0$$

Faktoriál čísla *n* je definován pouze pro kladná celá čísla a nulu.

Faktoriál má v kombinatorice zvláštní význam. Hledám-li množství permutací množiny *M* o *n* prvcích, pak těchto permutací bude právě $n!$.

4.1.2 Kombinační číslo

Definice: Kombinační číslo je matematická funkce. Značí se $\binom{n}{k}$ (čte se *n* nad *k*) a má pro každé *n* přirozené větší než *k* přirozené hodnotu $\frac{n!}{k! \times (n-k)!}$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \text{ pro } n \geq k \geq 0; \text{ jinak } \binom{n}{k} = 0$$

$$\binom{0}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Kombinatorickým výrazem kombinačního čísla $\binom{n}{k}$ je, že udává počet kombinací tedy způsobů, jak vybrat k-prvkovou podmnožinu z n-prvkové množiny.

Kombinační čísla se dále v matematice vyskytují v binomické větě a v Pascalově trojúhelníku.

4.1.3 Pravidlo kombinatorického součtu

Definice: Jsou-li $A_1, A_2, \cdots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \cdots, p_n$ prvků a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků jejich sjednocení $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$(Stančíková, 2013).

Příklad: Chceme-li spočíst všechna trojciferná čísla dělitelná pěti můžeme využít pravidla kombinatorického součtu. Číslo dělitelné pěti končí na nulu nebo pětku. Spočteme čísla končící na nulu tedy: $100, 110, \cdots, 990$, těch bude 90. Spočteme čísla končící na pětku: $105, 115, \cdots, 995$, těchto čísel bude rovněž 90. A podle kombinatorického pravidla součtu nám stačí tyto výsledky sečíst a dostaneme, že trojciferných čísel dělitelných pěti je 180.

4.1.4 Pravidlo kombinatorického součinu

Definice: Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru předcházejících členů n_k způsoby, je roven součinu $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$(Stančíková, 2013).

Příklad: Chceme-li spočíst všechna trojciferná čísla dělitelná pěti můžeme využít pravidla kombinatorického součinu. Číslo dělitelné pěti končí na nulu nebo pětku. Hledáme trojciferná čísla, první cifra tedy nemůže být nulou. Existuje tedy 9 možností pro první cifru. Pro druhou cifru není omezení a existuje pro ni 10 možností. Třetí cifra musí být pět anebo nula, to jsou 2 možnosti. Podle pravidla kombinatorického součinu tedy existuje $2 \times 9 \times 10 = 180$ různých trojciferných čísel dělitelných pěti.

4.2 Variace bez opakování

Definice variace: Variace k-té třídy z n prvků je každá uspořádaná k-tice vytvořená z celkového výběru n prvků, přičemž při výběru záleží na pořadí prvků. Rozlišujeme variace s opakováním a bez opakování.

Počet k členných variací z n prvků lze vyjádřit jako:

$$V_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ pro } k \leq n$$

4.3 Čtyři vzorce

Při standartní výuce kombinatoriky na gymnáziích se spoléhá na řešení úloh pomocí čtyř vzorců. Jsou to následující:

1) Permutace P o n prvcích:

$$P(n) = n!$$

2) Kombinace k prvků z množiny o n prvcích:

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

3) Variace k-té třídy z n prvků s opakováním

$$V_k'(n) = n^k$$

4) Variace k-té třídy z n prvků bez opakování

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Dle výzkumu Hejného (1990) je jedním ze základních problémů výuky kombinatoriky právě to, že se žáci naučí tyto čtyři vzorce a velice rychle zapomenou který vzorec kdy a jak využít. Kombinatorika je jako sportka. „Nikdy nevím či vzít vzorec na kombinace, variace nebo permutace“ poznámka jednoho z posluchačů Hejného výzkumu.

4.4 Kombinatorický součin a součet

Považuji tedy za zajímavý způsob výuky pokusit se vyučovat kombinatoriku, pouze pomocí pravidel o kombinatorickém součtu a součinu.

Cílem této sbírky je poskytnout úlohy pro výuku formou diskuse. Tedy jde o konstruktivistický způsob výuky, kdy se učitel snaží, přimět žáky, aby na správné řešení přišli sami. Za předpokladu, že znají kombinatorické pravidlo součtu a součinu, by měli být schopni přijít na správné řešení každé z úloh v této sbírce. Tuto metodu výuky kombinatoriky využívají také právě Stančíková (2013) a Hejný (1990).

4.5 Další strategie řešení kombinatorických úloh

Přestože všechny úlohy v této sbírce lze řešit pomocí kombinatorického pravidla součtu a součinu, je zde stále mnoho dalších strategií, jak k těmto úlohám přistupovat.

4.5.1 Strategie výpočtu od nejvíce podmíněného členu

Při základní aplikaci pravidla o kombinatorickém součinu se postupuje od prvního prvku směrem k poslednímu prvku. Může však nastat případ, kdy se vyskytne zvláštní podmínka pro jiný než první člen. V takovémto případě se pravidlo o kombinatorickém součinu používá od podmíněného členu. Není nutno tedy aplikovat pravidlo o kombinatorickém součinu nezbytně od prvního členu po poslední člen, ani od posledního po první člen. Pořadí řešených členů lze volit libovolně, avšak ideálně od nejvíce podmíněného členu po členy nepodmíněné.

Příklad: Je za úkol seřadit 5 barevných kuliček ale je nám známa podmínka, že fialová kulička nesmí být poslední.

V takovémto případě by byl standartní postup podle pravidla pro kombinatorický součin zdlouhavý. Bylo by nutno řešit odděleně čtyři různé situace, podle toho na kolikáté pozici je umístěna fialová kulička. Při použití strategie výpočtu od podmíněného členu, existují 4 možnosti kuliček na poslední pozici, 4 na předposlední pozici, 3 na třetí pozici, 2 na druhé a nakonec 1 na první pozici. Výsledek tedy bude $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$.

4.5.2 Strategie opačného výpočtu

V některých úlohách může dojít k tomu, že existuje více podmíněných pozic než jen jedna. V těchto případech může být obtížné postupovat podle strategie výpočtu od nejvíce podmíněného členu. Existuje však postup, v rámci kterého, namísto výpočtu možností splňující všechny podmínky, lze se spočítají všechny možnosti, aniž by se braly v potaz podmínky jako takové a následně se od nich odečtou všechny možnosti, které podmínkám nevyhovují.

Příklad: Je za úkol seřadit 5 barevných kuliček, ale fialová nesmí být poslední a červená nesmí být první.

V tomto případě je možné spočítat kolika způsoby lze seřadit 5 kuliček, aniž bych bral ohled na podmínky. Kuličky lze seřadit $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ způsoby. Následně je už důležité řešit jen, kolik existuje možností, které nevyhovují podmínkám. Možností končících fialovou je $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Možností začínajících na červenou je $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Avšak pozor tyto množiny možností obsahují některé prvky dvakrát. Je tedy nutné odečíst ty, které jsou dvakrát obsaženy. To budou možnosti splňující obě podmínky zároveň. Takových možností bude $3 \times 2 \times 1 = 6$. Celkový výsledek je tedy $120 - (2 \times 24 - 6) = 78$.

4.5.3 Heuristické strategie řešení

Na základě článku Novotné et. al. (2014) je důležité vzít v potaz také heuristické strategie řešení úloh. Z heuristických strategií jsou pak pro matematiku důležité hlavně tyto čtyři:

1) Strategie systematického experimentování
2) Strategie pokus – omyl
3) Strategie odhad, ověření a oprava
4) Strategie grafického znázornění

Často žáky využívanou strategií je tedy strategie systematického experimentování. Tento způsob je vhodný v případě, že je možné úlohu nějak zjednodušit, vyzkoušet si několik experimentů na zjednodušené úloze a v případě jejich osvědčení je aplikovat na originální úlohu.

Jak tvrdí Kopka (2016), je vhodné postupovat třeba následovně:

Matematická situace (nebo úloha) – experimentování – hypotéza (domněnka) – ověření hypotézy – důkaz hypotézy – matematická věta (nebo odpověď k úloze)

Důkaz hypotézy lze mnohdy vynechat, obzvlášť na středoškolské úrovni matematiky.

Příklad: Kolik existuje lichých trojciferných čísel?

Nejmenší trojciferné číslo je 100, nevětší 999. Celkem je tedy 900 trojciferných čísel. Kdyby se řešilo to samé na číslech 0-9 bude existovat 10 možností. Z toho je 5 lichých a to 1, 3, 5, 7, 9. Lze tedy vyslovit několik hypotéz. Třeba tuto „existuje-li seznam po sobě jdoucích čísel začínající na číslo sudé, pak každé druhé číslo je vždy liché“. Z toho lze usoudit, že když je seznam 900 po sobě jdoucích čísel, který začíná na 100, tak lichých z nich bude 450.

Dále je pak důležité zmínit strategii grafického znázornění. Ta lze použít třeba pro ilustraci pravidla kombinatorického součinu, aby si žáci dokázali situaci představit a pochopit, jak přesně kombinatorický součin funguje.

Existují ještě další strategie, které nebudou v této práci dál rozebrané. Dopodrobna se Strategiemi řešení úloh zabývá George Polya (2004) ve své knize How to solve it.

5 Sbírka úloh

5.1.1 Hodnocení

Vzhledem k řešení úloh formou diskuse nelze efektivně hodnotit výsledky. Namísto toho je vhodné pozitivně hodnotit přínosy do diskuse a ochotu spolupracovat.

Vzhledem ke shodné formě řešení všech úloh diskusí, a tedy i hodnocení jednotlivých úloh nebude hodnocení součástí analýzy a priori jednotlivých úloh.

5.1.2 Pomůcky

Nezbytnými pomůckami pro řešení úloh jsou psací potřeby a papír/sešit. Vzhledem k postačujícímu výsledku ve tvaru součinu není nezbytně kalkulačka potřebná k řešení úloh.

Všechny úlohy v této sbírce sdílí stejné pomůcky potřebné k jejich vypracování, z toho důvodu nebudou pomůcky součástí analýzy a priori jednotlivých úloh.

5.1.3 Tematický celek

Sbírka úloh zahrnuje pouze úlohy z kombinatoriky. Konkrétněji jde o úlohy z variací bez opakování. Úlohy by mohly být uvedeny v třetím nebo čtvrtém ročníku střední školy při výuce variací bez opakování.

Vzhledem k tomu, že všechny úlohy spadají do jednoho tematického celku, tak nebude tematický celek součástí analýzy a priori jednotlivých úloh.

5.2 Úloha 1 a

Kolik hesel může mít trezor se zámkem na čtyřciferný kód, kde se žádné dvě cifry neopakují?

Obrázek 1 Concept Cartoon pro úlohu 1 a

5.2.1 Analýza úlohy 1 a

Cíl úlohy

Matematický: Žáci mají za úkol správně spočítat množství kódů pro trezor za podmínek, že se žádné dvě cifry neopakují a že kód má délku čtyř cifer. Žáci se učí řešit slovní kombinatorické úlohy z variací bez opakování a najít vhodnou strategii pro řešení úlohy bez dodatečných podmínek. Po žácích je vyžadován výsledek v součinovém tvaru.

Didaktický: Úloha rozvíjí schopnost žáků samostatně, ale i skupinově řešit problémy a volit vhodné způsoby řešení. Dále rozvíjí kritické myšlení potřebné pro vyvrácení chybných hypotéz, a nakonec zlepšuje komunikativní schopnosti žáka.

Charakter zadání

Úloha je založená na metodě Concept Cartoons a je tedy nezbytné ji zadat vizuálně. Toho lze dosáhnout třeba promítnutím úlohy na tabuli, nebo rozdáním vytisknuté úlohy mezi žáky.

Typická chyba, která může nastat při nepozorném přečtení zádní je přehlídnutí podmínky neopakujících se cifer. Někteří žáci by mohli přemýšlet z jakých znaků se kód může skládat, či pouze z číslic nebo i z písmen nebo jiných znaků. Další možný problém by byl nepřipuštění nuly na první pozici.

Čas věnovaný úloze

Čas věnovaný této úloze závisí na několika faktorech. Na ochotě žáků diskutovat, na předchozích zkušenostech s podobnými úlohami a na schopnostech učitele vést diskusi. Úloha při řešení diskusní metodou zabere alespoň deset minut.

Způsob práce

Vzhledem k zadání úlohy pomocí metody Concept Cartoons se bude úloha řešit diskusní metodou. Po zadání úlohy dá učitel žákům pár minut na přečtení úlohy a k ní přiřazených hypotéz a pak zahájí diskusi nejprve v menších skupinách, tedy po zhruba čtyřech žácích a potom diskusi v rámci celé třídy.

Předchozí znalosti

Kombinatorický součin, kombinatorický součet, faktoriál

Správné strategie řešení

1) Řešení pomocí pravidla kombinatorického součinu:

   Úloha neobsahuje žádné podmíněné členy. Je tedy možné přímo aplikovat pravidlo kombinatorické součinu, kde se počet možností pro každý další člen bude snižovat, jelikož není povoleno opakování cifer. Tímto způsobem lze spočítat, že existuje $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\ 040$ možných kódů trezoru.

2) Řešení vzorcem:

   Jsou-li žáci obeznámeni se čtyřmi kombinatorickými vzorci mohou použít vzorec pro variace bez opakování. V tomto případě jde o variaci čtvrté třídy z desíti prvků. Tedy použitím tohoto vzorce dostávám: $\frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\ 040.$

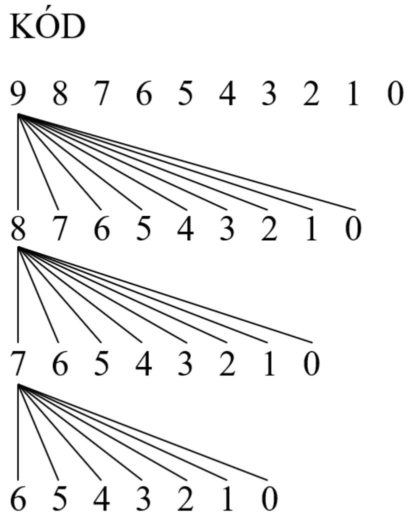
   Existuje tedy 5 040 různých kódu pro zámek trezoru.

3) Řešení experimentem:

   Nechť máme jednociferný zámek. Do jednociferného zámku můžeme zadat libovolnou z 10 cifer a tím pádem existuje 10 možností. Nechť máme dvojciferný zámek, pak do něj mohu zadat dvakrát čísla od 0 do 99. Ale v některých z těchto čísel dochází k opakování cifer. Tato čísla si mohu vypsat: 00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. tedy řešením je $100 - 10 = 90 = 10 \times 9$ možností. Pro tříciferný zámek lze obdobně přijít na řešení $10 \times 9 \times 8$ a odhadnout řešení pro čtyřciferný zámek jako: $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\ 040$.

4) Grafické řešení:

   Lze postupovat kreslením takzvaného stromového diagramu. Vzhledem k množství řešení by bylo rozumné rozkreslit detailně jen jednu větev a prohlásit, že další větve budou vypadat obdobně.



Obrázek 2 Stromový diagram 1

V případě řešení pomocí stromového diagramu viz obrázek 2, by žáci postupovali třeba následovně. Začnou zakreslením počátečního bodu v tomto případě označeného kód a z něj pak zakreslují možnosti pro první pozici, kterých je deset. Vyberou libovolnou z těchto možností, v tomto případě devět a zakreslí možnosti pro druhou pozici kódu za předpokladu, že cifra devět je na první pozici. Obdobně pak dále žák rozšiřuje diagram, dokud se nedostaneme k možnostem pro čtvrtou a poslední pozici. Lze říct, vzhledem k absenci podmínek pro konkrétní pozici v kódu, že všechny nerozkreslené větve budou vypadat podobně jako tato jedna rozkreslená. Tedy pro každou z možností pro první cifru existuje devět možností pro druhou, osm možností pro třetí a sedm pro čtvrtou. Z toho plyne, že možností bude celkem $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$.

Nesprávné strategie řešení

1) Nesprávné využití kombinatorických pravidel:

   Žák může dojít ke správnému závěru, že pro pozice jedna až čtyři je postupně 10, 9, 8 a nakonec 7 možností. Avšak poté namísto využití pravidla o kombinatorickém součinu tyto možnosti sečíst. A dostat tímto způsobem $10 + 9 + 8 + 7 = 34$ možných kódů.

   Učitel navrhne žákovi, aby si vypsal několik možností, dokud si žák neuvědomí, že možností bude víc než 34.

2) Počítání s opakováním:

   Žák může nedočíst zadání a zahrnout možnosti s opakováním cifer. Tím pádem dojít k výsledku $10^4 = 10\ 000$.

   V tomto případě může učitel pobídnout žáka k přečtení zadání znovu.

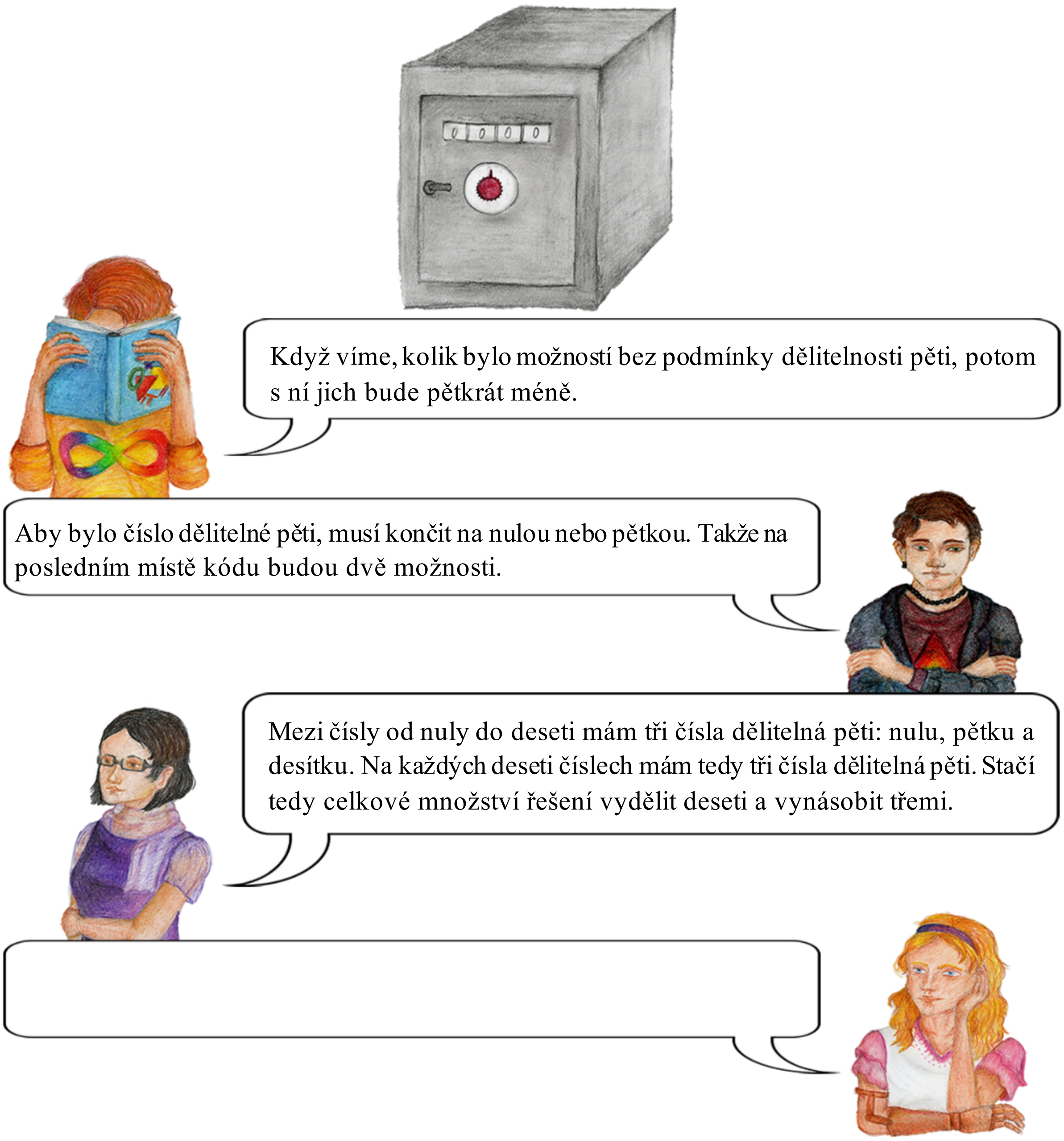
3) Vynechání nuly z první pozice:

   Může se stát, že žák se rozhodne nezahrnout možnost nuly na první pozici. V tomto případě by žák došel k výsledku $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4\ 536$.

   Učitel nadnese vypuštění nuly v případě kódu k číselnému zámku jako téma k diskusi.

5.3 Úloha 1 b

Máme trezor se zámkem na čtyřciferný kód, kde se žádné dvě cifry neopakují. Kolik existuje takovýchto kódů dělitelných pěti?



Obrázek 3 Concept Cartoon pro úlohu 1 b

5.3.1 Analýza úlohy 1 b

Cíl úlohy

Matematický: Žáci mají za úkol správně spočítat množství kódů pro trezor za podmínek, že se žádné dvě cifry neopakují a že kód má délku čtyř cifer. Avšak oproti základní úloze je tato doplňující úloha obohacena o podmíněnou poslední pozici. Žáci se učí řešit slovní kombinatorické úlohy z variací bez opakování, najít vhodnou strategii pro řešení úlohy s podmíněným posledním členem. Po žácích je vyžadován výsledek v součinovém tvaru.

Didaktický: Úloha rozvíjí schopnost žáků samostatně, ale i skupinově řešit problémy a volit vhodné způsoby řešení. Dále rozvíjí kritické myšlení potřebné pro vyvrácení chybných hypotéz, a nakonec zlepšuje komunikativní schopnosti žáka.

Charakter zadání

Úloha je založená na metodě Concept Cartoons a je tedy nezbytné ji zadat vizuálně. Toho lze dosáhnout třeba promítnutím úlohy na tabuli, nebo rozdáním vytisknuté úlohy mezi žáky.

Typická chyba, která může nastat při nepozorném přečtení zadání je přehlédnutí podmínky neopakujících se cifer. Dále by pak někteří žáci mohli přemýšlet z jakých znaků se kód může skládat, či pouze z číslic nebo i z písmen nebo jiných znaků. A v posledním případě by mohlo dojít k vypuštění nuly z první pozice.

Čas věnovaný úloze

Čas věnovaný této úloze závisí na několika faktorech. Na ochotě žáků diskutovat, na předchozích zkušenostech s podobnými úlohami a na schopnostech učitele vést diskusi. Úloha řešená diskusí bude zabírat nejméně deset minut.

Způsob práce

Obdobně jako u základní úlohy i úloha doplňující bude řešena diskusní metodou. Po zadání úlohy dá učitel žákům pár minut na přečtení úlohy a k ní přiřazených hypotéz a pak zahájí diskusi nejprve v menších skupinách o zhruba čtyřech žácích a potom diskusi v rámci celé třídy.

Předchozí znalosti

Kombinatorický součin, kombinatorický součet, faktoriál, dělitelnost

Správné strategie řešení

1) Řešení pomocí pravidla kombinatorického součinu:

   Úloha obsahuje podmínku pro poslední člen. Ten může nabývat hodnot nula nebo pět. Existují pro něj 2 možnosti. V tomto takovém případě je možné aplikovat pravidlo kombinatorického součinu od konce. Výsledkem je $2 \times 9 \times 8 \times 7 = 1\ 008$ možných kódu trezoru.

2) Řešení pomocí pravidla kombinatorického součtu:

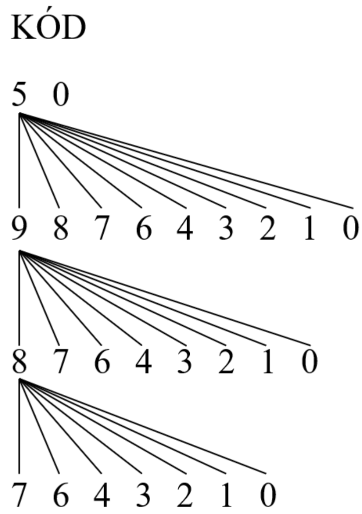
   Číslo, které je dělitelné pěti musí končit nulou nebo pětkou. Zaměříme se nejprve na možnost, že končí nulou Takových případů tedy existovat $9 \times 8 \times 7 = 504$. Druhá možnost je že bude končit pětkou. Takových případů existuje $9 \times 8 \times 7 = 504$. Výsledkem je pak součet těchto čísel $504 + 504 = 1\ 008$.

3) Vyřazování podmínce nevyhovujících možností:

   Jestliže víme, že celkem možností čtyřciferného kódu bez opakování cifer je $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\ 040$, pak stačí řešit, které z těchto možností splňují podmínku dělitelnosti pěti. Uvědomme si, že čísla dělitelná pěti musí končit na nulu nebo pětku, zatímco kódy obsažené v námi spočítaných 5 040 končí na libovolnou z deseti cifer. Z toho plyne, že podmínce vyhovují $\frac{2}{10}$ z 5 040 kódů. To znamená, že existuje $\frac{2}{10} \times 5\ 040 = 1\ 008$ kódů dělitelných pěti.

4) Grafické řešení

Lze postupovat kreslením takzvaného stromového diagramu. Vzhledem k množství řešení by bylo rozumné rozkreslit detailně jen jednu větev a prohlásit, že další větve budou vypadat obdobně.



Obrázek 4 Stromový diagram 2

V případě řešení pomocí stromového diagramu viz obrázek, 4 by žáci postupovali třeba následovně. Začnou zakreslením počátečního bodu v tomto případě označeného kód a z něj pak zakreslují možnosti pro poslední pozici, které jsou dvě. Vyberou libovolnou z těchto možností, v tomto případě pět a zakreslí možnosti pro předposlední pozici kódu za předpokladu, že cifra pět je na poslední pozici. Obdobně pak dále žák rozšiřuje diagram, dokud se nedostaneme k možnostem pro druhou a první pozici. Lze říct, že všechny nerozkreslené větve budou vypadat podobně jako tato jedna rozkreslená. Tedy pro každou z možností pro poslední cifru existuje devět možností pro třetí, osm možností pro druhou a sedm pro první. Z toho plyne, že možností bude celkem $2 \times 9 \times 8 \times 7 = 1\ 008$.

Nesprávné strategie řešení

1) Počítání s opakováním:

   Pokud si žák správně nepřečetl zadání, může opomenout podmínku o neopakování cifer. V tomto případě pak dojde k výsledku $\frac{10^4}{5} = 2\ 000$.

   V tomto případě učitel přiměje žáky k opětovnému přečtení zadání.

2) Nepovolení nuly na první pozici:

   Při řešení úlohy může žák nesprávně určit, že na první pozici nesmí být nula a díky tomu dostat výslednou situaci $8 \times 8 \times 7 + 8 \times 8 \times 7 = 896$.

   Učitel zahájí diskusi ohledně fungování zámku a zda nula může být na prvním místě.

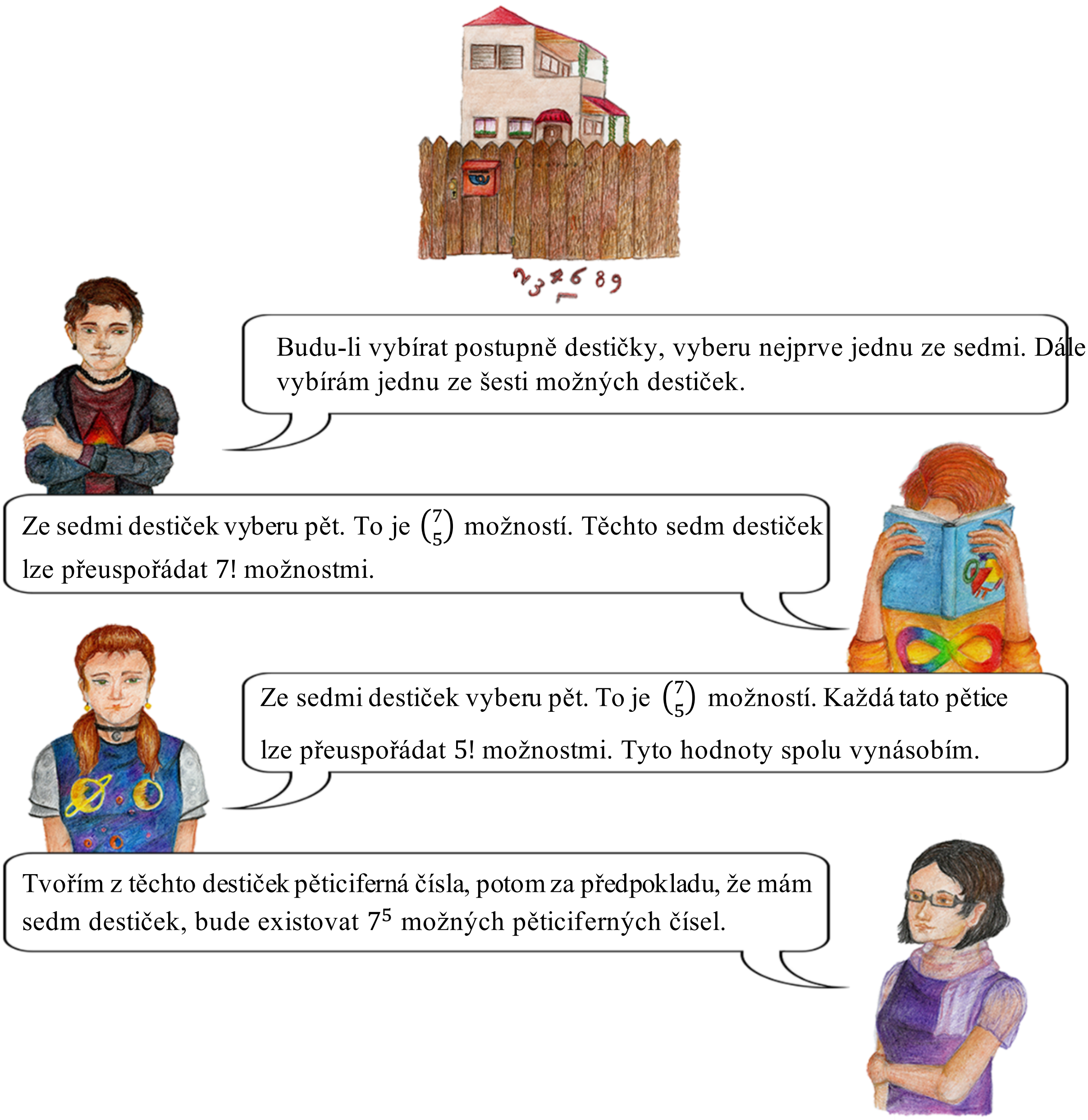
3) Nesprávné využití kombinatorických pravidel:

   Žák může správně určit množství možností pro jednotlivé pozice kódu, ale místo vynásobení je sečíst a dojít tak k výsledku: $8 + 9 + 10 + 2 = 29$.

   Učitel navrhne žákovi použití stromového diagramu nebo ho přiměje vypsat několik konkrétních možností.

5.4 Úloha 2 a

Máme sedm destiček. Na každé je jedno z následujících čísel 2, 3, 4, 6, 7, 8 a 9. Z pěti těchto destiček vytvoříme číslo popisné domu. Kolik takových čísel mohu získat?



Obrázek 5 Concept Cartoon pro úlohu 2 a

5.4.1 Analýza úlohy 2 a

Cíl úlohy

Matematický: Žáci mají za úkol kolektivně najít správné řešení úlohy a zjistit přesný počet popisných čísel, která jdou sestavit. Žáci se učí řešit slovní kombinatorické úlohy z variací bez opakování, najít vhodnou strategii pro řešení úlohy, kde možnostmi nejsou všechny přirozené cifry. Po žácích je vyžadován výsledek v součinovém tvaru.

Didaktický: Úloha rozvíjí schopnost žáků samostatně, ale i skupinově řešit problémy a volit vhodné způsoby řešení. Dále rozvíjí kritické myšlení potřebné pro vyvrácení chybných hypotéz, a nakonec zlepšuje komunikativní schopnosti žáka.

Charakter zadání

Úloha je založená na metodě Concept Cartoons a je tedy nezbytné ji zadat vizuálně. Toho lze dosáhnout třeba promítnutím úlohy na tabuli, nebo rozdáním vytisknuté úlohy mezi žáky.

Může dojít k chybnému pochopení zadání. Jelikož není v zadání specificky řečeno, že se cifry nemohou opakovat, žáci si tedy nemusí obzvlášť při spěšném přečtení zadání uvědomit, že opakování cifer není přípustné.

Čas věnovaný úloze

V závislosti na předchozí zkušenosti žáků s kombinatorickými úlohami se může časová náročnost této úlohy drasticky měnit. Úloha řešená diskusí zabere nejméně deset minut.

Způsob práce

Vzhledem k zadání úlohy pomocí metody Concept Cartoons se bude úloha řešit diskusní metodou. Po zadání úlohy dá učitel žákům pár minut na přečtení úlohy a k ní přiřazených hypotéz a pak zahájí diskusi nejprve dvojicích a potom diskusi v rámci celé třídy.

Předchozí znalosti

Kombinatorický součin, kombinatorický součet, faktoriál

Správné strategie řešení

1) Využití vzorce:

   Pokud ho žáci znají mohou využít vzorec pro variace bez opakování. Tímto způsobem lze spočítat variaci páté třídy ze sedmi prvků s opakováním následovně: $\frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2\ 520.$

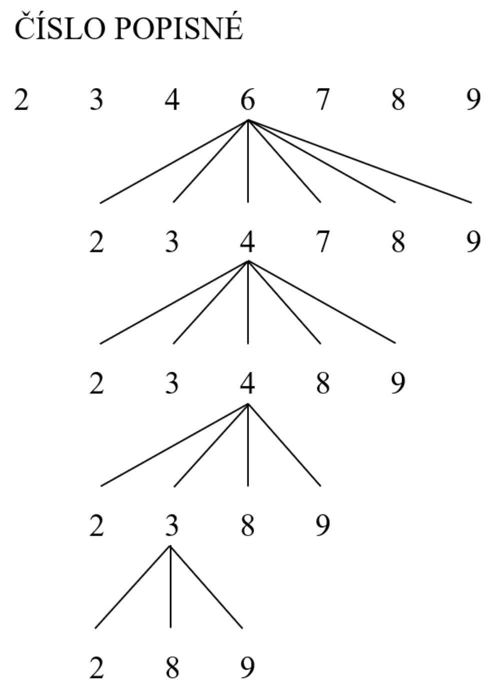
2) Řešení pomocí pravidla kombinatorického součinu:

   Je-li sedm různých destiček a z nich se skládají sedmice, pak je možné postupovat podle pravidla kombinatorického součinu. Jelikož se destičky nemohou opakovat bude se počet možností na každé pozici o jedna snižovat. Lze spočítat celkové množství popisných čísel následovně: $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2\ 520.$

3) Využití kombinačního čísla:

   Znají-li žáci kombinační čísla a jejich kombinatorický význam, mohou je v této úloze využít. Vybrat ze sedmi destiček pět je možné $\binom{7}{5}$ různými způsoby. A poté stačí zjistit kolika způsoby lze permutovat vybraných pět destiček. Což je možno 5! způsoby. Celkové řešení je tedy $\binom{7}{5} \times 5! = \frac{7!}{5! \times 2!} \times 5! = \frac{7!}{2!} = 2\ 520.$

4) Grafické řešení:



Obrázek 6 Stromový diagram 3

V případě řešení pomocí stromového diagramu viz obrázek 6, by žáci postupovali třeba následovně. Začnou zakreslením počátečního bodu v tomto případě označeného Číslo popisné a z něj pak zakreslují možnosti pro první pozici, kterých je sedm. Vyberou libovolnou z těchto možností, v tomto případě šest a zakreslí možnosti pro druhou pozici popisného čísla za předpokladu, že destička šest je na první pozici. Obdobně pak dále žák rozšiřuje diagram, dokud se nedostaneme k možnostem pro pátou a poslední pozici. Jelikož jde vytvořit obdobné větve z každé možnosti, tak celkem bude možných popisných čísel $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2\ 520$.

Nesprávné strategie řešení

1) Nesprávné využití kombinačního čísla:

   Budou-li se žáci pokoušet využít kombinační číslo pro výpočet této úlohy, je možné, že dojde k chybě při násobení permutací prvků. Zaprvé mohou udělat chybu a permutaci prvků přičíst namísto vynásobení $\binom{7}{5} + 5! = 141$ a zadruhé mohou násobit permutací všech prvků a nejen vybraných $\binom{7}{5} \times 7! = 105\ 840$.

   V prvním z těchto případů učitel navrhne žákovi využít stromový diagram k ověření výsledku. V druhém případě pak učitel navrhne ověření výsledku pomocí pravidla kombinatorického součinu nebo také stromového diagramu.

2) Počítání s opakováním:

   Žáci mohou při špatném pochopení zadání počítat úlohu s opakováním. V takovém případě by došli k výsledku $7^5 = 16\ 807$.

   Učitel navrhne k diskusi, zda se destičky mohou opakovat.

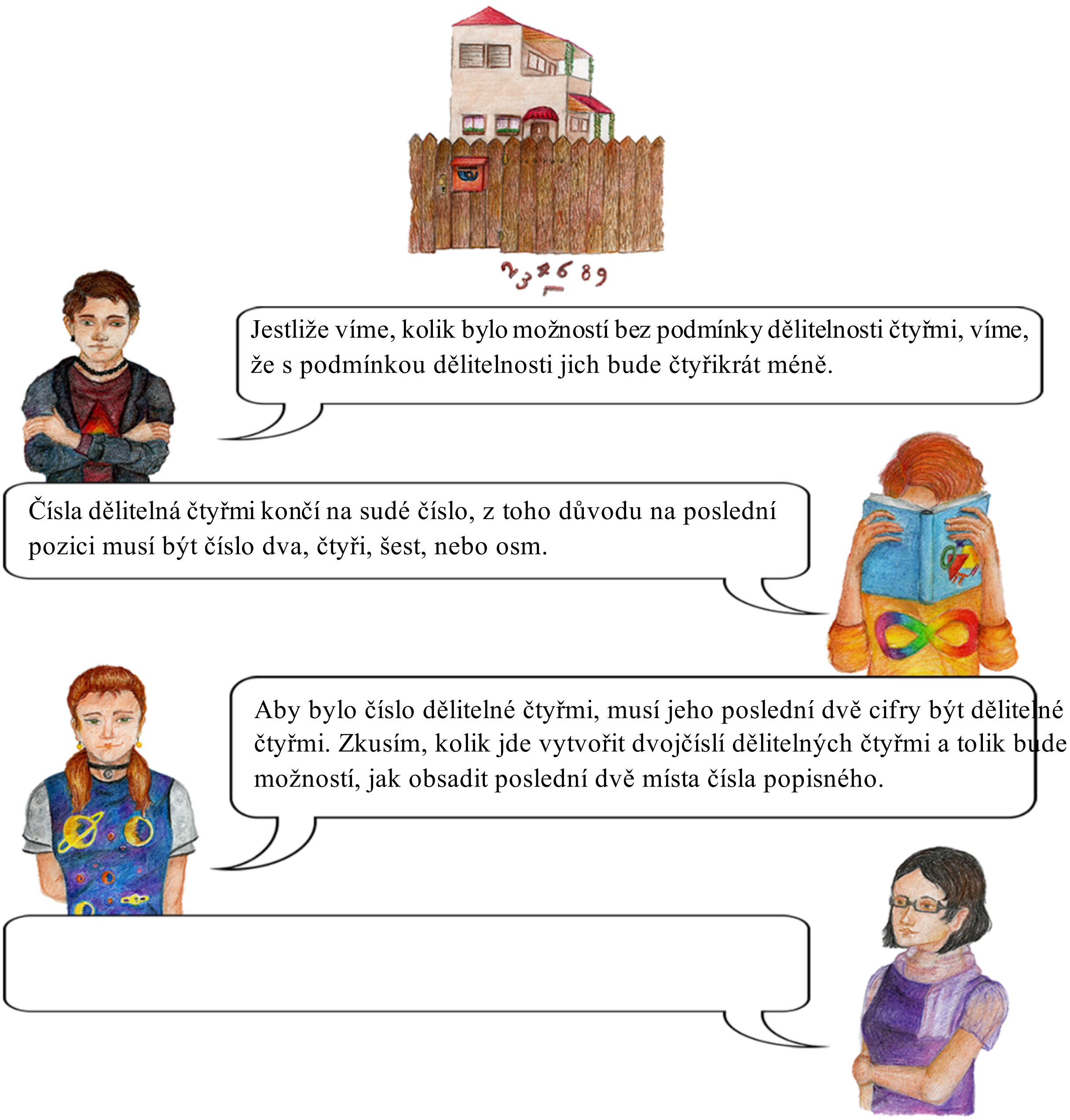
3) Nezohlednění pořadí destiček:

   Žák by mohl neřešit různá pořadí destiček a řešit tedy úlohu jako kdyby se jednalo o kombinaci a nikoliv variaci. V tomto případě by pak dospěl k výsledku $\binom{7}{5} = 21$.

   Učitel přiměje žáka vybrat konkrétních pět čísel a následně diskutovat o jejich pořadí a jestli na pořadí záleží.

5.5 Úloha 2 b

Máme sedm destiček. Na každé je jedno z následujících čísel 2, 3, 4, 6, 7, 8 a 9. Z pěti těchto destiček vytvoříme číslo popisné domu. Kolik z těchto pětic bude dělitelných čtyřmi?



Obrázek 7 Concept Cartoon pro úlohu 2 b

5.5.1 Analýza úlohy 2 b

Cíl úlohy

Matematický: Žáci mají za úkol kolektivně najít správné řešení úlohy a zjistit přesný počet popisných čísel, která jdou sestavit za předpokladu, že přidám podmínku pro poslední 2 členy. Žáci se učí řešit slovní kombinatorické úlohy z variací bez opakování, najít vhodnou strategii pro řešení úlohy, kde možnostmi nejsou všechny přirozené cifry s přidanou podmínkou pro poslední dva členy. Po žácích je vyžadován výsledek v součinovém tvaru.

Didaktický: Úloha rozvíjí schopnost žáků samostatně, ale i skupinově řešit problémy a volit vhodné způsoby řešení. Dále rozvíjí kritické myšlení potřebné pro vyvrácení chybných hypotéz, a nakonec zlepšuje komunikativní schopnosti žáka.

Charakter zadání

Úloha je založená na metodě Concept Cartoons a je tedy nezbytné ji zadat vizuálně. Toho lze dosáhnout třeba promítnutím úlohy na tabuli, nebo rozdáním vytisknuté úlohy mezi žáky.

Může dojít k chybnému pochopení zadání. Jelikož není v zadání specificky řečeno, že se cifry nemohou opakovat, žáci si tedy nemusí obzvlášť při spěšném přečtení zadání uvědomit, že opakování cifer není přípustné.

Čas věnovaný úloze

V závislosti na předchozí zkušenosti žáků s kombinatorickými úlohami se může časová náročnost této úlohy drasticky měnit. Úloha řešená diskusí zabere nejméně patnáct minut.

Způsob práce

Obdobně jako u základní úlohy i úloha doplňující bude řešena diskusní metodou. Po zadání úlohy dá učitel žákům pár minut na přečtení úlohy a k ní přiřazených hypotéz a pak zahájí diskusi nejprve ve dvojicích a potom diskusi v rámci celé třídy.

Předchozí znalosti

Kombinatorický součin, kombinatorický součet, faktoriál, dělitelnost

Správné strategie řešení

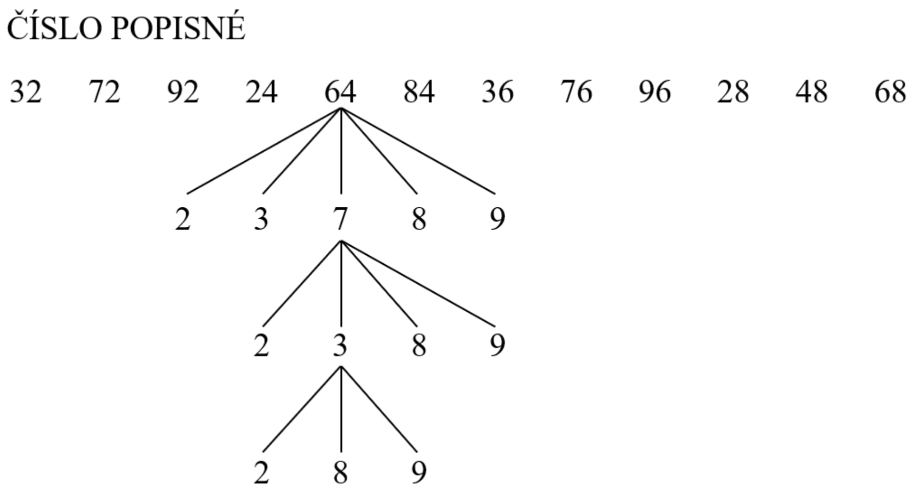
Celkem je možných 42 dvojčíslí, z toho jsou čtyřmi dělitelná následující: 32, 72, 92, 24, 64, 84, 36, 76, 96, 28, 48, 68. Existuje 12 dvojčíslí dělitelných čtyřmi. Libovolné číslo je dělitelné čtyřmi právě tehdy když je jeho poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi

1) Řešení pomocí pravidla kombinatorického součinu:

   Pro řešení pomocí kombinatorického součinu je nezbytné nejprve vyřešit poslední dvojčíslí. Je-li vyřešeno poslední dvojčíslí je možné postupovat podle pravidla kombinatorického součinu odzadu, přičemž poslední dvojčíslí se bude brát jako jedna pozice. Existuje tedy dvanáct možností pro poslední dvojčíslí, pět možností pro třetí pozici, čtyři pro druhou a tři pro první. Řešení pak bude vypadat následovně $12 \times 5 \times 4 \times 3 = 720$.

2) Grafické řešení:

   Lze postupovat kreslením stromového diagramu. Vzhledem k množství řešení by bylo rozumné rozkreslit detailně jen jednu větev a prohlásit, že další větve budou vypadat obdobně.



Obrázek 8 Stromový diagram 4

V případě řešení pomocí stromového diagramu viz obrázek 8, by žáci postupovali třeba následovně. Začnou zakreslením počátečního bodu v tomto případě označeného Číslo popisné a z něj pak zakreslují možnosti pro poslední dvě pozice, kterých je dvanáct. Vyberou libovolnou z těchto možností, v tomto případě šedesát čtyři a zakreslí možnosti pro třetí pozici popisného čísla za předpokladu, že dvojčíslí šedesát čtyři je na posledních dvou pozicích. Obdobně pak dále žák rozšiřuje diagram, dokud se nedostaneme k možnostem pro první pozici. Jelikož jde vytvořit obdobné větve z každé možnosti, tak celkem bude možných popisných čísel $12 \times 5 \times 4 \times 3 = 720$.

Nesprávné strategie řešení

1) Nesprávný předpoklad dělitelnosti

   Žák může velice jednoduše využít úvahy, že každé čtvrté číslo je dělitelné čtyřmi a z tohoto důvodu stačí celkové množství možností bez podmínky dělitelnosti vydělit čtyřmi. V takovém případě by žák došel k výsledku $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{4} = 7 \times 6 \times 5 \times 3 = 630$.

   Učitel přiměje žáka vypsat několik po sobě jdoucích popisných čísel vyhovujících podmínkám úlohy ideálně od toho nejmenšího 23 467, 23 468, 23 469, 23 476, 23 478, 23 479, 23 486, 23 487, 23 489. A zeptá se, zda opravdu každé čtvrté je dělitelné čtyřmi.

2) Neznalost kritéria dělitelnosti

   Žáci, kteří si nepamatují kritérium dělitelnosti čtyřmi. Mohou zkoušet najít jiné způsoby, jak určit, která čísla jsou dělitelná čtyřmi. Například by mohli říct, že to budou právě čísla sudá. Pak by spočítali podle pravidla kombinatorického součinu $4 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 1\,440$.

   Učitel připomene kritérium dělitelnosti čtyřmi buď sám, nebo navrhne dělitelnost čtyřmi jako téma k diskusi.

5.6 Úloha 2 c

Máme sedm destiček. Na každé je jedno z následujících čísel 2, 3, 4, 6, 7, 8 a 9. Z pěti těchto destiček vytvoříme číslo popisné domu. Kolik popisných čísel bude lichých?

Obrázek 9 Concept Cartoon úlohy 2 c

5.6.1 Analýza úlohy 2 c

Cíl úlohy

Matematický: Žáci mají za úkol kolektivně najít správné řešení úlohy a zjistit přesný počet popisných čísel, která jdou sestavit za podmínky, že poslední číslo je liché. Žáci se učí řešit slovní kombinatorické úlohy z variací bez opakování, najít vhodnou strategii pro řešení úlohy, kde možnostmi nejsou všechny přirozené cifry a zároveň je poslední pozice podmíněná. Po žácích je vyžadován výsledek v součinovém tvaru.

Didaktický: Úloha rozvíjí schopnost žáků samostatně, ale i skupinově řešit problémy a volit vhodné způsoby řešení. Dále rozvíjí kritické myšlení potřebné pro vyvrácení chybných hypotéz, a nakonec zlepšuje komunikativní schopnosti žáka.

Charakter zadání

Úloha je založená na metodě Concept Cartoons a je tedy nezbytné ji zadat vizuálně. Toho lze dosáhnout třeba promítnutím úlohy na tabuli, nebo rozdáním vytisknuté úlohy mezi žáky.

Může dojít k chybnému pochopení zadání. Jelikož není v zadání specificky řečeno, že se cifry nemohou opakovat, žáci si tedy nemusí obzvlášť při spěšném přečtení zadání uvědomit, že opakování cifer není přípustné.

Čas věnovaný úloze

V závislosti na předchozí zkušenosti žáků s kombinatorickými úlohami se může časová náročnost této úlohy drasticky měnit. Úloha řešená diskusí zabere nejméně deset minut.

Způsob práce

Obdobně jako u základní úlohy i úloha doplňující bude řešena diskusní metodou. Po zadání úlohy dá učitel žákům pár minut na přečtení úlohy a k ní přiřazených hypotéz a pak zahájí diskusi nejprve v menších skupinách o zhruba čtyřech žácích a potom diskusi v rámci celé třídy.

Předchozí znalosti

Kombinatorický součin, kombinatorický součet, faktoriál, sudost lichost

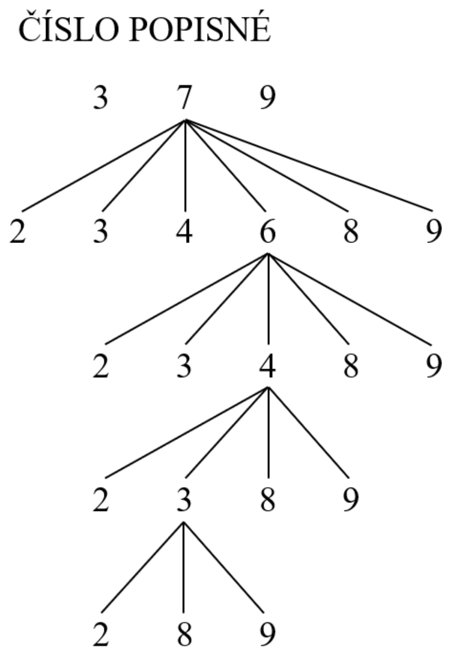
Správné strategie řešení

1) Řešení pomocí pravidla kombinatorického součinu:

   Lze použít pravidlo kombinatorického součinu od poslední pozice, která je podmíněná podmínkou lichého čísla. V tomto případě existují tři možné destičky, které mohou být na poslední pozici. Kombinatorický součin bude tedy vypadat následovně $3 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 1\,080$.

2) Grafické řešení:

   Lze postupovat kreslením stromového diagramu. Vzhledem k množství řešení by bylo rozumné rozkreslit detailně jen jednu větev a prohlásit, že další větve budou vypadat obdobně.



Obrázek 10 Stromový diagram 5

V případě řešení pomocí stromového diagramu viz obrázek 10, by žáci postupovali třeba následovně. Začnou zakreslením počátečního bodu v tomto případě označeného Číslo popisné a z něj pak zakreslují možnosti pro poslední pozici, které jsou tři. Vyberou libovolnou z těchto možností, v tomto případě sedm a zakreslí možnosti pro předposlední pozici popisného čísla za předpokladu, že destička sedm je na poslední pozici. Obdobně pak dále žák rozšiřuje diagram, dokud se nedostaneme k možnostem pro první pozici. Jelikož jde vytvořit obdobné větve z každé možnosti, tak celkem bude možných popisných čísel $3 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 1\,080$.

3) Využití poměru lichých a sudých čísel

   Jelikož jsou destičky v poměru tři liché na čtyři sudé budou v tomto poměru i poslední cifry popisných čísel. Z toho plyne, že tři díly možností budou liché a čtyři díly sudé. Lze tedy spočítat množství lichých popisných čísel jako $\frac{3}{7} \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 3 = 1\,080$.

Nesprávné strategie řešení

1) Nesprávný předpoklad lichosti:

   Žák si může myslet, že jelikož je každé druhé číslo liché tak stačí celkové množství možností existujících pro základní úlohu vydělit dvěma. V takovém případě by žák dostal výsledek $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{2} = 7 \times 6 \times 5 \times 3 \times 2 = 1\,260$.

   Učitel přiměje žáka vypsat několik po sobě jdoucích popisných čísel vyhovujících podmínkám úlohy ideálně od toho nejmenšího <u>23 467</u>, 23 468, <u>23 469</u>, 23 476, 23 478, <u>23 479</u>, 23 486, <u>23 487</u>, <u>23 489</u>. A zeptá se, zda opravdu platí, že každé druhé je liché.

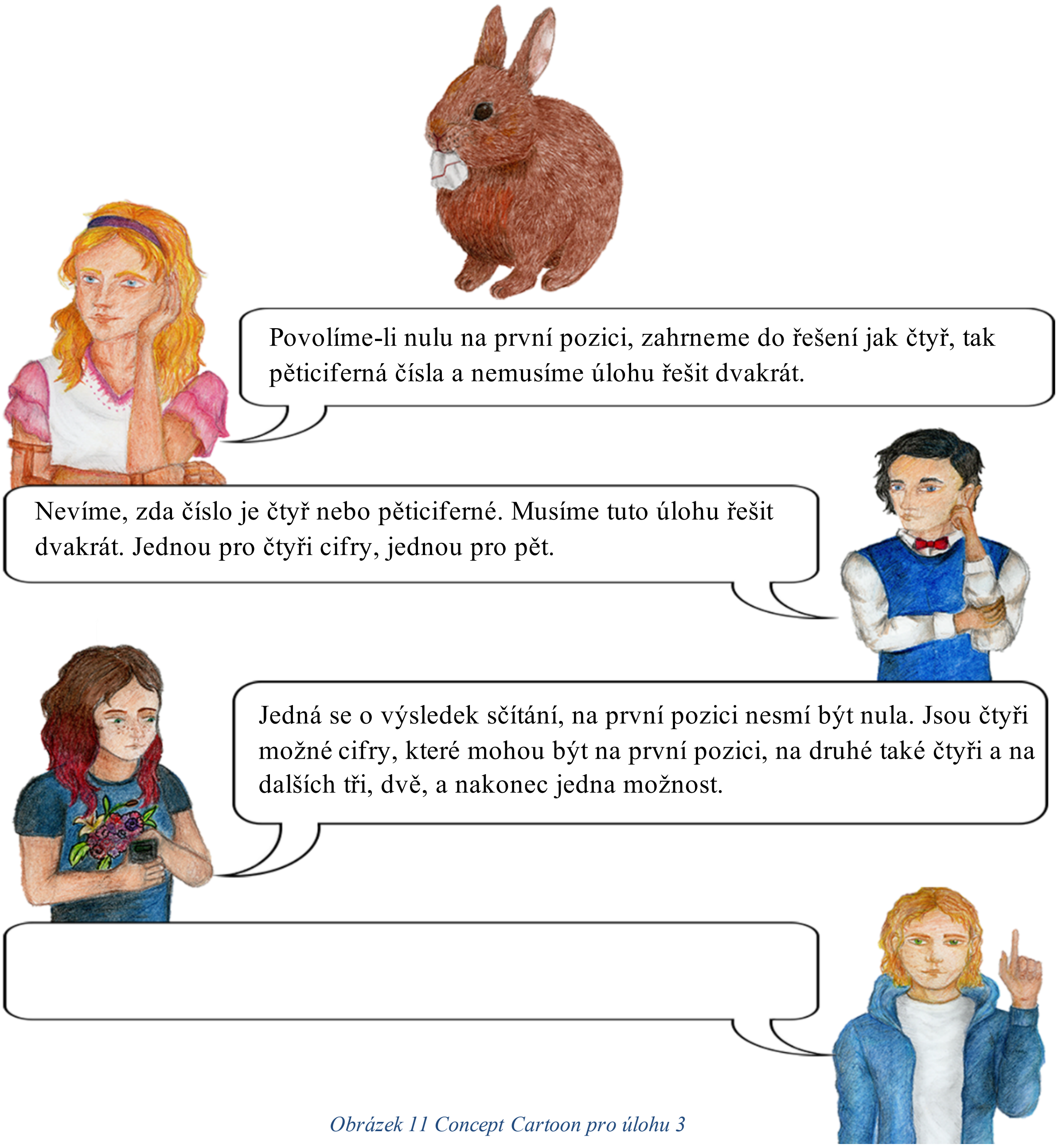
2) Jiný nesprávný předpoklad lichosti:

   Žák by mohl uvažovat, že jestliže jsou tři ze sedmi čísel v zadání lichá pak třetina celkového množství možností bude lichá. V takovém případě by žáka dostal výsledek $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{3} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

   Učitel přiměje žáka k přednesení tohoto řešení k diskusi.

5.7 Úloha 3

Na jedné farmě v jižních Čechách probíhalo sčítání králíků. Bohužel papír s finálním počtem rozžvýkal králík. Naštěstí dali zaměstnanci dohromady, že králíků je aspoň tisíc. Na zbytcích papíru našli čísla 1, 3, 4, 6 a 0. Z těchto cifer se tedy musel skládat počet králíků. Žádná z cifer se neopakovala. Kolik je možných výsledků sčítání králíků?



Obrázek 11 Concept Cartoon pro úlohu 3

5.7.1 Analýza úlohy 3

Cíl úlohy

Matematický: Žáci mají za úkol kolektivně najít správné řešení úlohy a zjistit přesný počet možných výsledků sčítání králíků na základě zadaných podmínek. Žáci se učí řešit slovní kombinatorické úlohy z variací bez opakování, najít vhodnou strategii pro řešení úlohy a tuto strategii aplikovat. V tomto případě se pak setkávají s komplexní úlohou, kde existuje spousta kritických míst, na která si musejí dát pozor. Po žácích je vyžadován výsledek v součinovém tvaru.

Didaktický: Úloha rozvíjí schopnost žáků samostatně, ale i skupinově řešit problémy a volit vhodné způsoby řešení. Dále rozvíjí kritické myšlení potřebné pro vyvrácení chybných hypotéz, a nakonec zlepšuje komunikativní schopnosti žáka.

Charakter zadání

Úloha je založená na metodě Concept Cartoons a je tedy nezbytné ji zadat vizuálně. Toho lze dosáhnout třeba promítnutím úlohy na tabuli, nebo rozdáním vytisknuté úlohy mezi žáky.

Zadání je relativně složité a při částečně slovním zadání úlohy je možné, že žáci nezaregistrují některou z podmínek.

Čas věnovaný úloze

V závislosti na předchozí zkušenosti žáků s kombinatorickými úlohami se může časová náročnost této úlohy drasticky měnit. Úloha řešená diskusí zabere nejméně dvacet pět minut.

Způsob práce

Vzhledem k zadání úlohy pomocí metody Concept Cartoons se bude úloha řešit diskusní metodou. Po zadání úlohy dá učitel žákům pár minut na přečtení úlohy a k ní přiřazených hypotéz a pak zahájí diskusi v rámci celé třídy.

Předchozí znalosti

Kombinatorický součin, kombinatorický součet, faktoriál

Správné strategie řešení

Úlohu je nezbytné řešit zvlášť pro možnost pěticiferného čísla a zvlášť pro možnost čtyřciferného čísla.

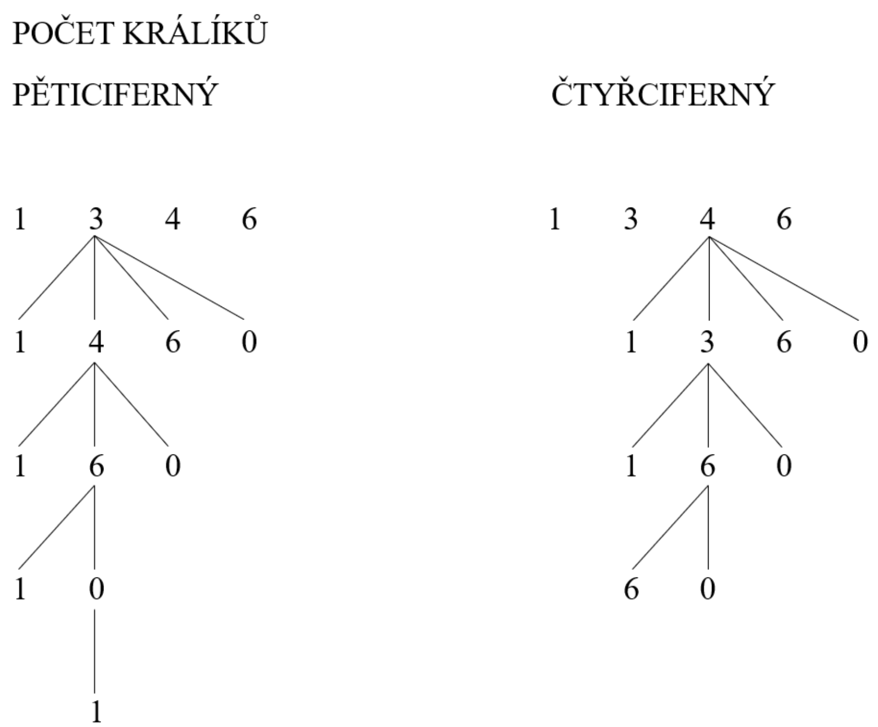
1) Řešení pomocí pravidla kombinatorického součinu a součtu:

   V případě pěticiferného čísla existují čtyři možnosti pro první cifru. Nula nesmí být na první pozici. Na druhé pozici pak mohou být čtyři různá čísla, na třetí tři, na čtvrté dvě a na poslední jedno číslo. Celkem tedy existuje $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$ pěticiferných výsledků sčítání.

   V případě čtyřciferného čísla pak obdobně určíme, že existuje $4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$ čtyřciferných výsledků sčítání. Sečtením čtyř a pěticiferných výsledků vyjde celkové množství výsledků sčítání $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 4 \times 4 \times 3 \times 2 = 4^3 \times 3 = 192$.

2) Grafické řešení:

   Lze postupovat kreslením stromového diagramu. Vzhledem k množství řešení by bylo rozumné rozkreslit detailně jen jednu větev diagramu a prohlásit, že další větve digramu budou vypadat obdobně.



Obrázek 12 Stromový diagram 6

V tomto případě žáci musí zakreslit dva stromové diagramy viz obrázek 12, jeden pro čtyř a jeden pro pěticiferné výsledky. Digramy kreslí od první pozice kvůli podmínce zakázaného výskytu nuly na první pozici.

Z diagramu pak lze vyčíst množství čtyřciferných řešení $4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$ a množství pěticiferných řešení $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$. Množství pěticiferných a čtyřciferných řešení pak stačí sečíst.

$4 \times 4 \times 3 \times 2 + 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4^3 \times 3 = 192$

Nesprávné strategie řešení

1) Povolení nuly na první pozici:

   Žák by se mohl domnívat, že povolí-li nulu na první pozici, tak pokryjí jak čtyř, tak pěticiferná řešení. V takovém případě by žák počítal permutaci pěti prvků. Permutací páté třídy existuje $5! = 120$.

   Učitel navrhne zdánlivě náhodné čtyřciferné řešení, které obsahuje nulu na jiné než první pozici, třeba 1306. Následně se žáka zeptá, zda by takové řešení mohl jeho postupem získat.

2) Opomenutí čtyřciferných možností:

   V případě opomenutí čtyřciferných čísel by žák řešil pouze čísla pěticiferná. Pro ty platí, že existují čtyři možnosti pro první cifru. Nula nesmí být na první pozici. Na druhé pozici pak mohou být čtyři různá čísla, na třetí tři, na čtvrté dvě a na poslední jedno číslo. Celkem tedy existuje $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$ pěticiferných výsledků.

   Učitel zahájí diskusi, zda mohou existovat čtyřciferná řešení úlohy.

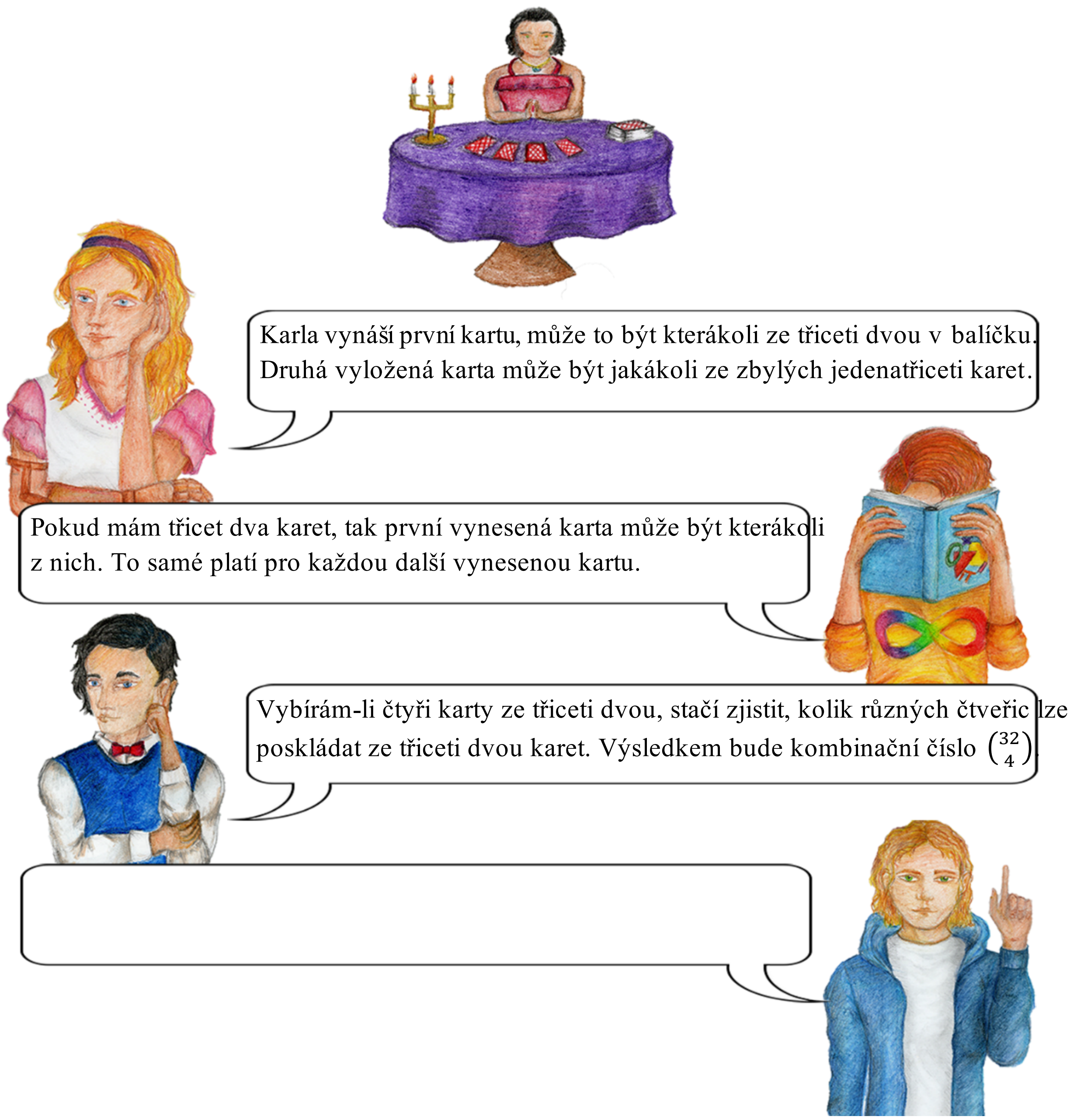
3) Vynásobení čtyř a pěticiferných řešení:

   Žák, který se dopočítal množství čtyřciferných $4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$ a pěticiferných $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$ možností může nesprávně tyto počty vynásobit namísto sečtení. Tím žák získá $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4^5 \times 3^2 = 9\,216$ možností.

   Učitel připomene pravidla kombinatorického součtu a součinu a kdy se dají použít.

5.8 Úloha 4 a

Karla věští z mariášových karet (32 různých karet). Věštění probíhá tak, že Karla postupně otočí čtyři karty z balíčku. Na pořadí otočených karet záleží. Kolik takových věšteb může Karla celkem provést?



Obrázek 13 Concept Cartoon pro úlohu 4 a

5.8.1 Analýza úlohy 4 a

Cíl úlohy

Matematický: Žáci mají za úkol kolektivně najít správné řešení úlohy a zjistit přesný počet možných věšteb, které může Karla provést. Žáci se učí řešit slovní kombinatorické úlohy z variací bez opakování, najít vhodnou strategii pro řešení úlohy a tuto strategii aplikovat. V tomto případě se pak setkávají se základní úlohou bez podmíněných pozic. Po žácích je vyžadován výsledek v součinovém tvaru.

Didaktický: Úloha rozvíjí schopnost žáků samostatně, ale i skupinově řešit problémy a volit vhodné způsoby řešení. Dále rozvíjí kritické myšlení potřebné pro vyvrácení chybných hypotéz, a nakonec zlepšuje komunikativní schopnosti žáka.

Charakter zadání

Úloha je založená na metodě Concept Cartoons a je tedy nezbytné ji zadat vizuálně. Toho lze dosáhnout třeba promítnutím úlohy na tabuli, nebo rozdáním vytisknuté úlohy mezi žáky.

Může dojít ke zmatení, zda Karla vrací karty do balíčku po vyložení či ne.

Čas věnovaný úloze

V závislosti na předchozí zkušenosti žáků s kombinatorickými úlohami se může časová náročnost této úlohy drasticky měnit. Úloha řešená diskusí zabere nejméně deset minut.

Způsob práce

Vzhledem k zadání úlohy pomocí metody Concept Cartoons se bude úloha řešit diskusní metodou. Po zadání úlohy dá učitel žákům pár minut na přečtení úlohy a k ní přiřazených hypotéz a pak zahájí diskusi nejprve ve dvojicích a potom diskusi v rámci celé třídy.

Předchozí znalosti

Kombinatorický součin, kombinatorický součet, faktoriál

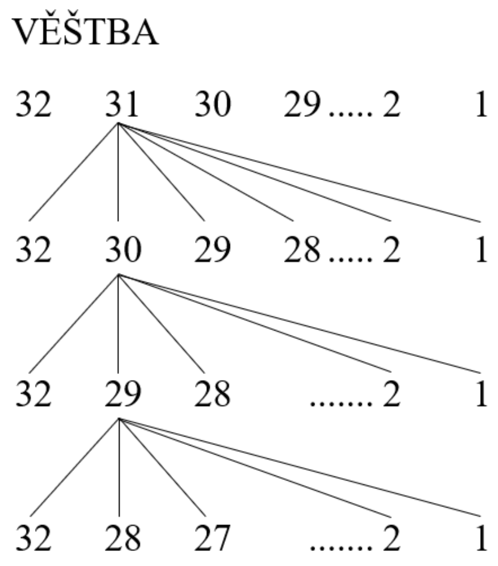
Správné strategie řešení

1) Řešení pomocí pravidla kombinatorického součinu:

   Úloha neobsahuje žádnou podmíněnou pozici, lze tedy použít pravidlo kombinatorického součinu, a to od libovolného členu. Například od prvního. V tomto případě může Karla vyložit nejprve jednu ze 32 karet na první pozici, pak jednu ze 31 karet na druhou pozici, jednu ze 30 na třetí a jednu ze 29 na čtvrtou. Celkem tedy existuje $32 \times 31 \times 30 \times 29 = 863\ 040$ různých věšteb, které Karla může vynést.

2) Grafické řešení:

   Lze postupovat kreslením stromového diagramu. Vzhledem k množství řešení by bylo rozumné rozkreslit detailně jen jednu větev a prohlásit, že další větve budou vypadat obdobně.



Obrázek 14 Stromový diagram 7

V případě řešení pomocí stromového diagramu viz obrázek 14, by žáci postupovali třeba následovně. Začnou zakreslením počátečního bodu v tomto případě označeného Věštba a z něj pak zakreslují možnosti pro první pozici, kterých je 32. Vyberou libovolnou z těchto možností, v tomto případě 31 a zakreslí možnosti pro druhou pozici za předpokladu, že 32 je na první pozici. Obdobně pak dále žák rozšiřuje diagram, dokud se nedostaneme k možnostem pro poslední pozici. Jelikož jde vytvořit obdobné větve z každé možnosti, tak celkem bude možných popisných čísel $32 \times 31 \times 30 \times 29 = 863\ 040$.

3) Řešení pomocí kombinačního čísla:

   Zná-li žák kombinační čísla a jejich využití může je zde použít. Výběr čtyř karet ze 32 jde vyjádřit jako kombinační číslo $\binom{32}{4}$.Toto kombinační číslo je třeba vynásobit množstvím permutací čtyř prvků 4!. Celkový počet možných věšteb tedy bude: $\binom{32}{4} \times 4! = \frac{32!}{4! \times 28!} \times 4! = \frac{32!}{28!} = 32 \times 31 \times 30 \times 29 = 863\ 040$.

Nesprávné strategie řešení

1) Nesprávné využití kombinačního čísla

   Žák by mohl jako řešení nabídnout kombinační číslo $\binom{32}{4} = 35\ 960$.

   Učitel žáka upozorní, že kombinační číslo se používá na výběr *k*-tice z *n* prvků, kde nezáleží na pořadí prvků. Případně se doptá, zda v této úloze na pořadí záleží nebo ne.

2) Předpoklad, že se karty mohou opakovat

   V případě, že žák špatně pochopí zadání a bude si myslet, že Karla vrací každou kartu po vyložení do balíčku, tak by mohl dojít k výsledku $32^4 = 1\ 048\ 576$.

   Učitel zahájí diskusi na téma, zda Karla vrací karty do balíčku, či zda je nechává vyložené na stole.

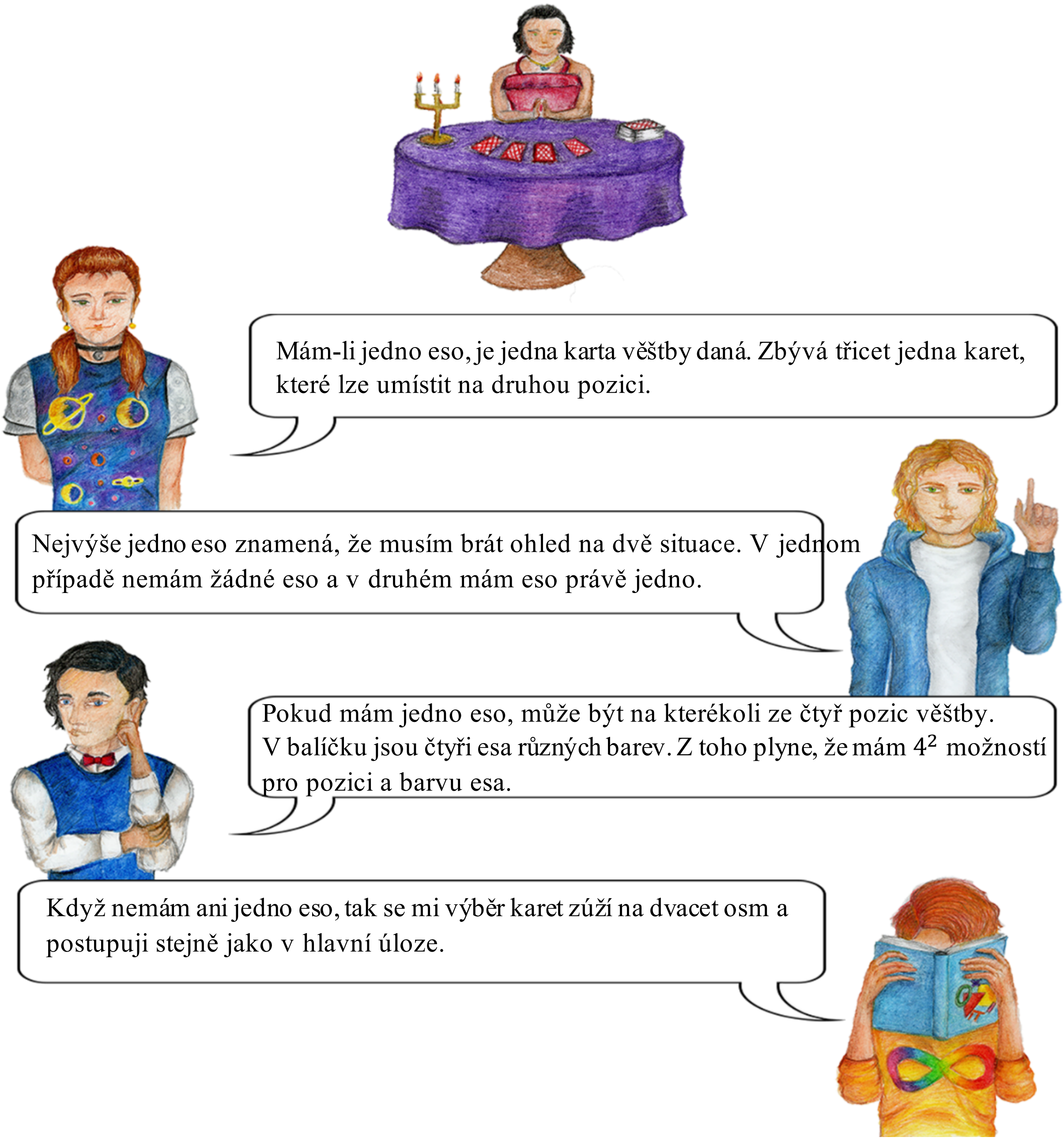
3) Předpoklad, že věštby existují zároveň:

   Žák vydělí 32 karet čtyřmi (počet karet ve věštbě). $\frac{32}{4} = 8$ věšteb

   Učitel vyzve všechny žáky, aby každý napsal osm věšteb. Následně je učitel vyzve, aby své věštby navzájem porovnali. Předpoklad je, že najdeme víc než osm různých věšteb.

5.9 Úloha 4 b

Karla věští z mariášových karet (32 různých karet). Věštění probíhá tak, že Karla postupně otočí čtyři karty z balíčku. Na pořadí otočených karet záleží. Kolik existuje věšteb, které obsahují nejvýše jedno eso?



Obrázek 15 Concept Cartoon pro úlohu 4 b

5.9.1 Analýza úlohy 4 b

Cíl úlohy

Matematický: Žáci mají za úkol kolektivně najít správné řešení úlohy a zjistit přesný počet možných věšteb, které může Karla provést. Žáci se učí řešit slovní kombinatorické úlohy z variací bez opakování, najít vhodnou strategii pro řešení úlohy a tuto strategii aplikovat. V tomto případě se pak setkávají se základní úlohou s podmíněným výskytem jednoho prvku. Po žácích je vyžadován výsledek v součinovém tvaru.

Didaktický: Úloha rozvíjí schopnost žáků samostatně, ale i skupinově řešit problémy a volit vhodné způsoby řešení. Dále rozvíjí kritické myšlení potřebné pro vyvrácení chybných hypotéz, a nakonec zlepšuje komunikativní schopnosti žáka.

Charakter zadání

Úloha je založená na metodě Concept Cartoons a je tedy nezbytné ji zadat vizuálně. Toho lze dosáhnout třeba promítnutím úlohy na tabuli, nebo rozdáním vytisknuté úlohy mezi žáky.

Může dojít k chybnému pochopení výrazu nejvýše jedno eso. Někteří žáci by ho mohli pochopit jako právě jedno. Dále může dojít ke zmatení, zda Karla vrací karty do balíčku po vyložení či ne.

Čas věnovaný úloze

V závislosti na předchozí zkušenosti žáků s kombinatorickými úlohami se může časová náročnost této úlohy drasticky měnit. Úloha řešená diskusí zabere nejméně dvacet pět minut.

Způsob práce

Vzhledem k zadání úlohy pomocí metody Concept Cartoons se bude úloha řešit diskusní metodou. Po zadání úlohy dá učitel žákům pár minut na přečtení úlohy a k ní přiřazených hypotéz a pak zahájí diskusi nejprve ve dvojicích a potom diskusi v rámci celé třídy.

Předchozí znalosti

Kombinatorický součin, kombinatorický součet, faktoriál

Správné strategie řešení

1) Řešení pomocí pravidla kombinatorického součinu a součtu:

   V úloze se vyskytuje podmíněný prvek. Tímto prvkem je jedno ze čtyř es v balíčku. To se ve věštbě objeví buď jen jednou, anebo vůbec. Pokud se objeví jednou pak se může objevit na jakékoliv ze čtyř pozic věštby. Zbylé tři pozice pak nesmí být obsazeny žádným z es. Z toho plyne že možných věšteb s esem bude celkem $4 \times 4 \times 28 \times 27 \times 26 = 314\,496$. Dále je nutné spočítat množství věšteb bez jediného esa. Vybírám tedy jen z 28 karet. Takových věšteb je tedy možných $28 \times 27 \times 26 \times 25 = 491\,400$. Ještě je třeba tyto možnosti sečíst a výsledek je $4 \times 4 \times 28 \times 27 \times 26 + 28 \times 27 \times 26 \times 25 = 805\,896$.

2) Strategie opačného výpočtu

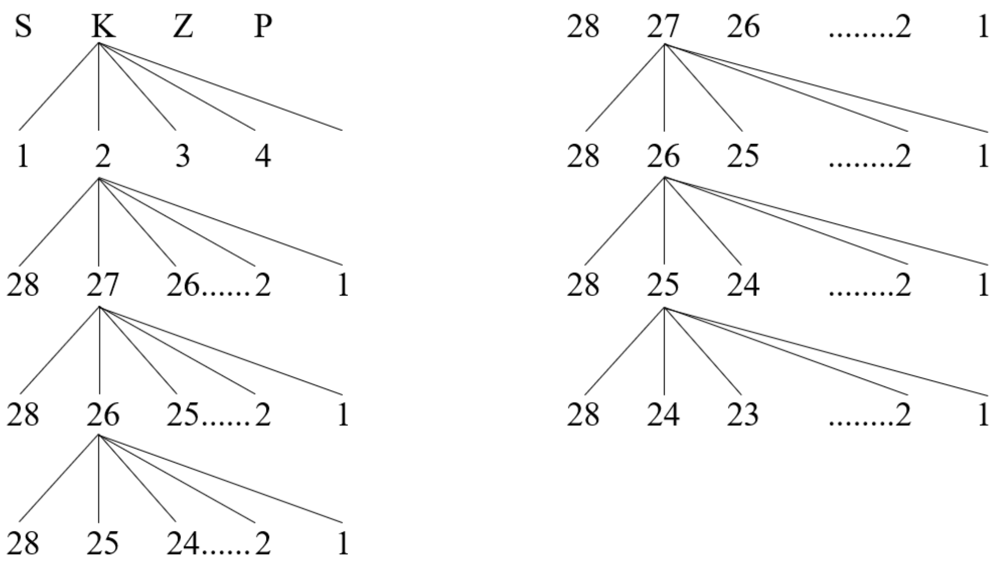
   Celkem existuje $32 \times 31 \times 30 \times 29 = 863\,040$. Od celkového počtu možných věšteb je třeba odečíst množství věšteb nevyhovujících podmínkám. Je třeba odečíst věštby s dvěma esy, třemi esy a čtyřmi esy. Věšteb o čtyřech kartách, kde každá je jedno ze čtyř možných es je $4! = 24$ Dále je třeba vyřešit věštby o třech esech. Jedna z možností, jak toto vyřešit je nejprve vybrat jednu kartu, která nebude eso. Tu mohu vybrat ze čtyř možných pozic. Pro tuto kartu existuje 28 možností. Pro zbylé tři karty, které vím že jsou esa, pak existuje $4 \times 3 \times 2$ možností. Celkem tedy existuje $4 \times 28 \times 4 \times 3 \times 2 = 2\,688$ věšteb o třech esech. Nakonec je třeba ještě spočítat věštby se dvěma esy. Nejprve je třeba určit na kterých pozicích budou esa. Esa mohou být na libovolných dvou ze čtyř pozic tedy na $\binom{4}{2} = 6$. Je třeba vybrat jedno ze 4 es a následně jedno ze 3. Na zbylých dvou pozicích věštby může být libovolná ze 28 karet a libovolná z 27. Celkem tedy věšteb o dvou esech je $\binom{4}{2} \times 4 \times 3 \times 28 \times 27 = 54\,432$. Po finálním odečtení tedy existuje celkem $863\,040 - 57\,144 = 805\,896$.

3) Grafické řešení

   Lze postupovat kreslením stromového diagramu. Vzhledem k množství řešení by bylo rozumné rozkreslit detailně jen jednu větev a prohlásit, že další větve budou vypadat obdobně.

VĚŠTBY

JEDNO ESO ŽÁDNÉ ESO



Obrázek 16 Stromový diagram 8

Je důležité použít dva stromové diagramy viz obrázek 16, jeden pro věštby s jedním esem a jeden pro věštby bez esa. Tvoří-li žák diagram pro věštbu s 1 esem, pak může postupovat takto. Žák začne diagram tvořit od volby barvy esa a pak přejde k volbě pozice esa.

Dále je důležité dořešit ostatní tři karty a ty žák postupně zapisuje do diagramu. V případě věštby bez esa pak diagram tvoří podle sestupujícího počtu dostupných karet od 28. Výsledky obou diagramů je pak nutné sečíst $4 \times 4 \times 28 \times 27 \times 26 + 28 \times 27 \times 26 \times 25 = 805\,896$.

Nesprávné strategie řešení

1) Neřešení pozice esa:

   Žák by mohl zapomenout řešit na které pozici je eso a došel by tak k výsledku $4 \times 28 \times 27 \times 26 + 28 \times 27 \times 26 \times 25 = 570\ 024$.

   Učitel se zeptá, na které pozici se může objevit eso.

2) Neřešení více es v balíčku:

   Žák, který nezná mariášové karty by nemusel vědět, že esa jsou v nich čtyři a mohl by tak opomenout zohlednit barvu esa ve výpočtu. Došel by tak k následujícímu výsledku: $4 \times 31 \times 30 \times 29 + 31 \times 30 \times 29 \times 28 = 863\ 040$.

   Učitel poukáže na to, že mariášové karty se skládají z osmi různých karet po čtyřech barvách. A tedy i eso je v balíčku čtyřikrát.

3) Nesprávné použití kombinatorických pravidel:

   Žák by mohl správně spočítat, že věšteb s jedním esem je $4 \times 4 \times 28 \times 27 \times 26 = 314\ 496$ a věšteb bez esa je $28 \times 27 \times 26 \times 25 = 491\ 400$. Pak by však tyto výsledky nesečetl, ale vynásobil. Došel by tak k výsledku $4 \times 4 \times 28 \times 27 \times 26 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25$.

   Učitel připomene pravidla kombinatorického součtu a součinu a kdy se dají použít.

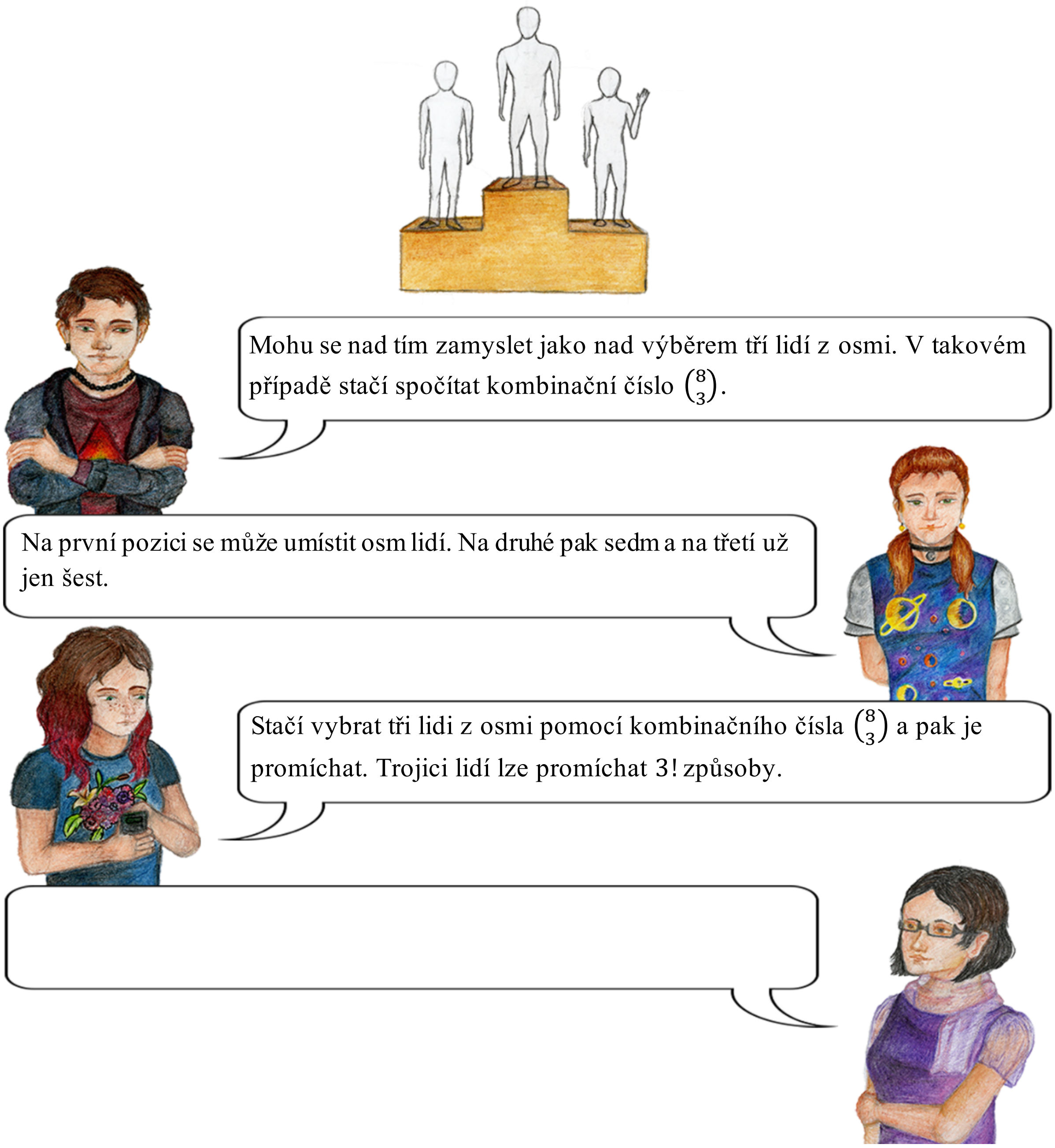
4) Nezahrnutí věšteb bez esa

   Žák bude řešit pouze situaci, kdy je ve věštbě právě jedno eso. Dojde k výsledku $4 \times 4 \times 28 \times 27 \times 26 = 314\ 496$.

   Učitel vyzve žáka k opětovnému přečtení zadání, případně zahájí diskusi nad tím, jaký je rozdíl mezi frází právě jedno, nejvýše jedno a aspoň jedno eso.

5.10 Úloha 5 a

Jindra, Matěj, Vojta, Adam, Řehoř, Eliška, Karel, Filoména se rozhodli uspořádat závod v běhu. Kolika způsoby budou obsazena první tři místa?



Obrázek 17 Concept Cartoon pro úlohu 5 a

5.10.1 Analýza úlohy 5 a

Cíl úlohy

Matematický: Žáci mají za úkol kolektivně najít správné řešení úlohy a zjistit přesný počet možných umístění závodníků na stupních vítězů. Žáci se učí řešit slovní kombinatorické úlohy z variací bez opakování, najít vhodnou strategii pro řešení úlohy a tuto strategii aplikovat. V tomto případě se pak setkávají se základní úlohou bez dodatečné podmínky. Po žácích je vyžadován výsledek v součinovém tvaru.

Didaktický: Úloha rozvíjí schopnost žáků samostatně, ale i skupinově řešit problémy a volit vhodné způsoby řešení. Dále rozvíjí kritické myšlení potřebné pro vyvrácení chybných hypotéz, a nakonec zlepšuje komunikativní schopnosti žáka.

Charakter zadání

Úloha je založená na metodě Concept Cartoons a je tedy nezbytné ji zadat vizuálně. Toho lze dosáhnout třeba promítnutím úlohy na tabuli, nebo rozdáním vytisknuté úlohy mezi žáky.

Někteří žáci by ze zadání nemuseli pochopit, že v úloze záleží na pořadí, a nejen na výběru prvních třech závodníků.

Čas věnovaný úloze

V závislosti na předchozí zkušenosti žáků s kombinatorickými úlohami se může časová náročnost této úlohy drasticky měnit. Úloha řešená diskusí zabere nejméně deset minut.

Způsob práce

Vzhledem k zadání úlohy pomocí metody Concept Cartoons se bude úloha řešit diskusní metodou. Po zadání úlohy dá učitel žákům pár minut na přečtení úlohy a k ní přiřazených hypotéz a pak zahájí diskusi nejprve v menších skupinách, tedy po zhruba čtyřech žácích a potom diskusi v rámci celé třídy.

Předchozí znalosti

Kombinatorický součin, kombinatorický součet, faktoriál

Správné strategie řešení

1) Využití kombinačního čísla:

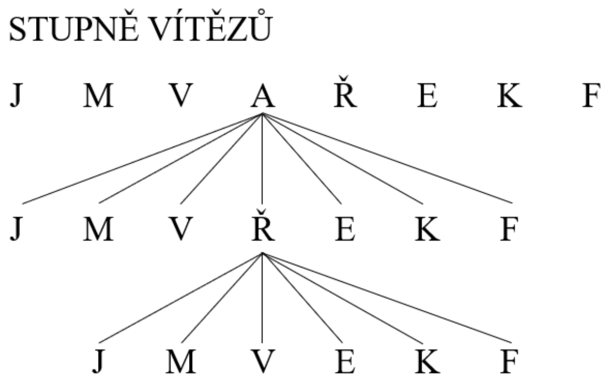
   Zná-li žák kombinační čísla a jejich využití může je zde použít. Výběr závodníků z osmi jde vyjádřit jako kombinační číslo $\binom{8}{3}$.Toto kombinační číslo je třeba vynásobit množstvím permutací tří prvků 3!. Celkový počet možných umístění na stupních vítězů bude: $\binom{8}{3} \times 3! = \frac{8!}{3! \times 5!} \times 3! = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336.$

2) Řešení pomocí pravidla kombinatorického součinu a součtu:

   Na prvním místě se může umístit jeden z osmi závodníků, na druhém jeden ze sedmi závodníků a na třetím jeden ze šesti závodníků. Celkem tedy bude existovat $8 \times 7 \times 6 = 336$ možných uspořádání stupňů vítězů.

3) Grafické řešení:

   Lze postupovat kreslením stromového diagramu. Vzhledem k množství řešení by bylo rozumné rozkreslit detailně jen jednu větev a prohlásit, že další větve budou vypadat obdobně.



Obrázek 18 Stromový diagram 9

Žák začne vypsáním prvních písmen jmen viz obrázek 18, které představují možnosti umístění na první pozici. Pokračuje výběrem jednoho z nich, v tomto případě A, a na něj navazuje možnosti pro druhou pozici. Obdobně pokračuje do třetí pozice. Z tohoto diagramu pak lze vyčíst, že možností existuje celkem $8 \times 7 \times 6 = 336$.

Nesprávné strategie řešení

1) Nesprávné využití kombinačního čísla

   Žák by mohl jako řešení nabídnout kombinační číslo $\binom{8}{3} = 56$.

   Učitel žáka upozorní, že kombinační číslo se používá na výběr *k*-tice z *n* prvků, kde nezáleží na pořadí prvků. Případně se doptá, zda v této úloze na pořadí záleží nebo ne.

2) Nesprávné použití kombinatorických pravidel

   Žák by správně určil, že na prvním místě může být osm lidí, na druhém sedm a na třetím šest. Následně možnosti namísto vynásobení sečte a dojde tak k výsledku $8 + 7 + 6 = 21$.

   Učitel navrhne žákovi, aby si nakreslil stromový diagram úlohy.

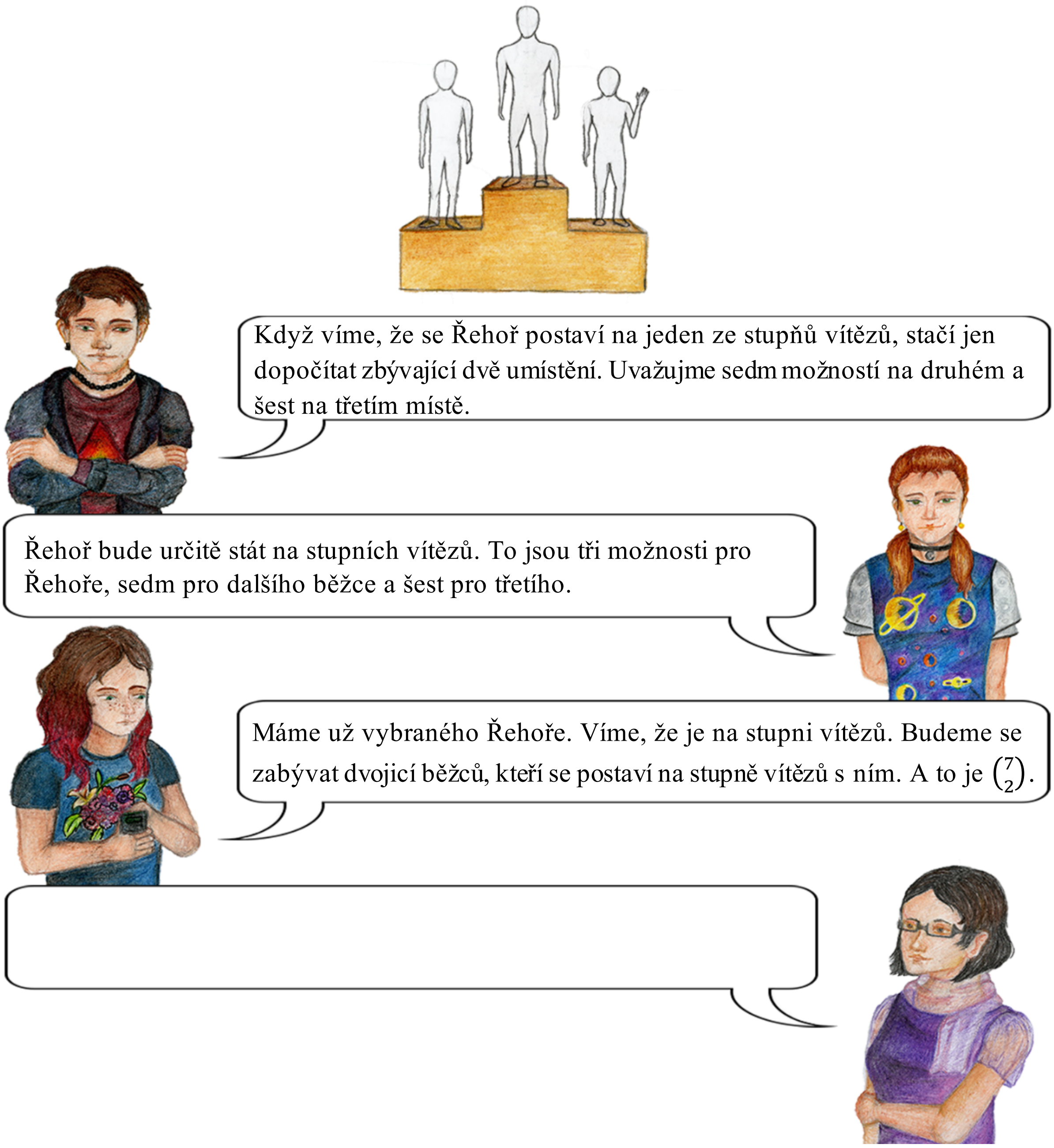
3) Uspořádání všech závodníků

   Žák nepozorně přečte zadání a namísto pořadí prvních třech závodníků bude řešit pořadí všech závodníků.

   Učitel požádá žáka, aby si znova přečetl úlohu.

5.11 Úloha 5 b

Jindra, Matěj, Vojta, Adam, Řehoř, Eliška, Karel, Filoména se rozhodli uspořádat závod v běhu. Kolika způsoby budou obsazena první tři místa, jestliže Řehoř je bývalý profesionální běžec a určitě se umístí na stupních vítězů?



Obrázek 19 Concept Cartoon pro úlohu 5 b

5.11.1 Analýza úlohy 5 b

Cíl úlohy

Matematický: Žáci mají za úkol kolektivně najít správné řešení úlohy a zjistit přesný počet možných umístění závodníků na stupních vítězů. Žáci se učí řešit slovní kombinatorické úlohy z variací bez opakování, najít vhodnou strategii pro řešení úlohy a tuto strategii aplikovat. V tomto případě se pak setkávají se úlohou, kde jeden konkrétní prvek má garantovaný výskyt, ale ne pozici. Po žácích je vyžadován výsledek v součinovém tvaru.

Didaktický: Úloha rozvíjí schopnost žáků samostatně, ale i skupinově řešit problémy a volit vhodné způsoby řešení. Dále rozvíjí kritické myšlení potřebné pro vyvrácení chybných hypotéz, a nakonec zlepšuje komunikativní schopnosti žáka.

Charakter zadání

Úloha je založená na metodě Concept Cartoons a je tedy nezbytné ji zadat vizuálně. Toho lze dosáhnout třeba promítnutím úlohy na tabuli, nebo rozdáním vytisknuté úlohy mezi žáky.

Někteří žáci by ze zadání nemuseli pochopit, že v úloze záleží na pořadí, a nejen na výběru prvních třech závodníků.

Čas věnovaný úloze

V závislosti na předchozí zkušenosti žáků s kombinatorickými úlohami se může časová náročnost této úlohy drasticky měnit. Úloha zabere řešená diskusí zabere nejméně patnáct minut.

Způsob práce

Obdobně jako u základní úlohy i úloha doplňující bude řešena diskusní metodou. Po zadání úlohy dá učitel žákům pár minut na přečtení úlohy a k ní přiřazených hypotéz a pak zahájí diskusi nejprve v menších skupinách o zhruba čtyřech žácích a potom diskusi v rámci celé třídy.

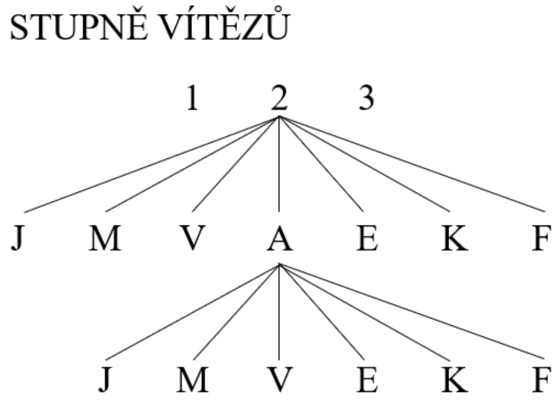
Předchozí znalosti

Kombinatorický součin, kombinatorický součet, faktoriál

Správné strategie řešení

1) Grafické řešení:

   Lze postupovat kreslením stromového diagramu. Vzhledem k množství řešení by bylo rozumné rozkreslit detailně jen jednu větev a prohlásit, že další větve budou vypadat obdobně.



Obrázek 20 Stromový diagram 10

   Žák začne vypsáním pozic viz obrázek 20, na kterých se může umístit Řehoř. Pokračuje výběrem jedné z nich, v tomto případě 2, a na něj navazuje možnostmi pro umístění lidí na další pozici. Obdobně pokračuje do poslední pozice. Z tohoto diagramu pak lze vyčíst, že možností existuje celkem $3 \times 7 \times 6 = 126$.

2) Řešení pomocí pravidla kombinatorického součinu a součtu:

   Řehoř se může umístit na libovolné ze 3 pozic. Spolu s ním se na stupni vítězů umístí ještě dva závodníci. Jednoho z nich mohu vybrat ze sedmi účastníků a druhého ze šesti. Celkem tedy bude existovat $3 \times 7 \times 6 = 126$ možných uspořádání stupňů vítězů.

Nesprávné strategie řešení

1) Řehoř obsadí první místo a žák nezohlední ostatní pozice:

   Žák by mohl zapomenout řešit na které prvních třech pozic se může Řehoř umístit a došel by tak k výsledku $7 \times 6 = 42$.

   Učitel navrhne žákovi, aby se zamyslel nad významem slov stupně vítězů.

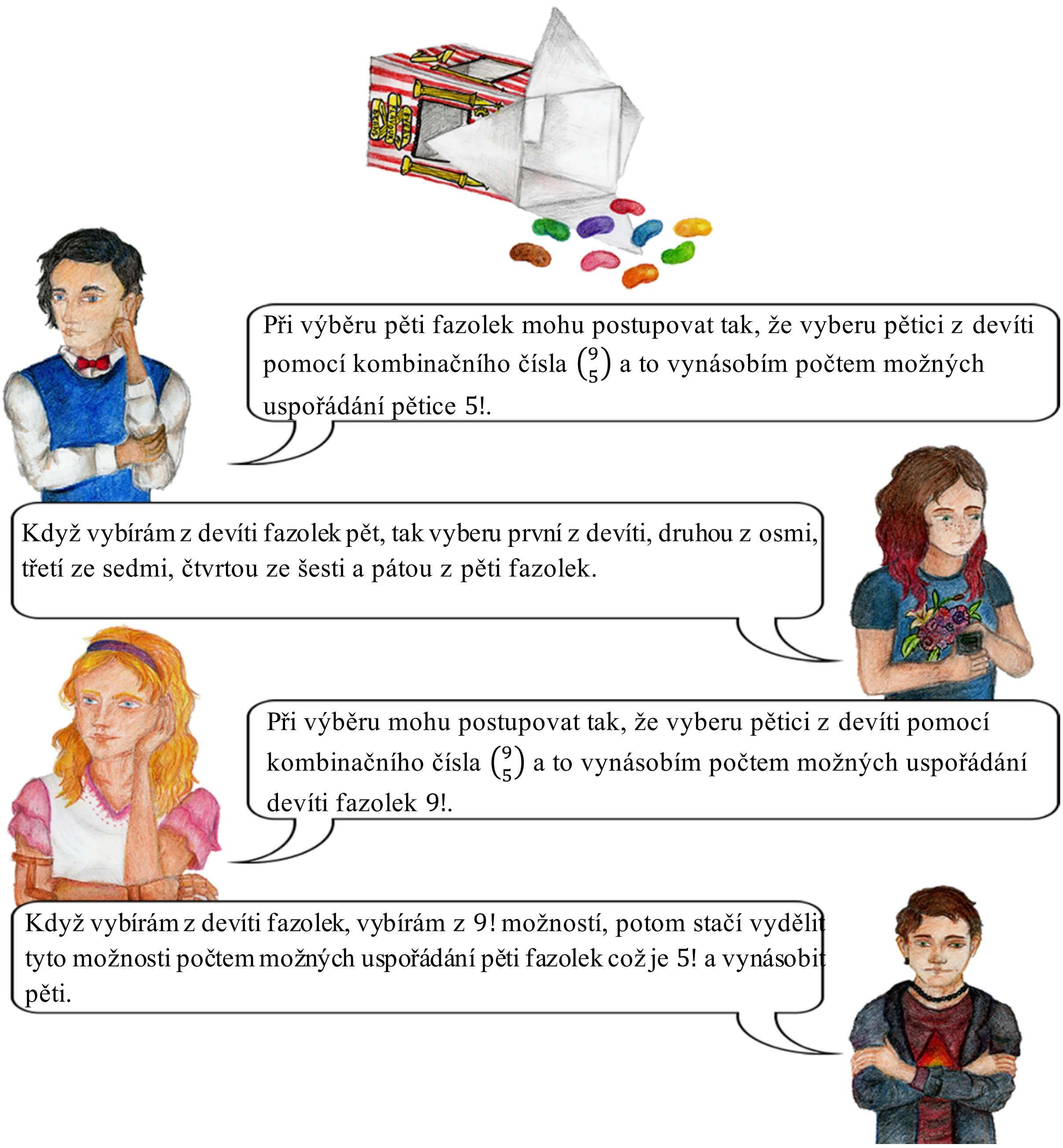
2) Nesprávné využití kombinačního čísla

   Žák správně určí tři možné pozice Řehoře na stupních vítězů. Zbylé dva závodníky vybere pomocí kombinačního čísla $\binom{7}{2}$. Dojde k výsledku $3 \times \binom{7}{2} = 63$.

   Učitel vyzve žáky, aby se zamysleli nad významem slova pořadí v této úloze.

5.12 Úloha 6 a

Ron mlsal ‚Bertíkovy fazolky tisíckrát jinak‘. V krabičce měl devět různých fazolek. Rozhodl se, že jich pět sní a zbytek si nechá na jindy. Aby si je vychutnal, tak jedl jednu po druhé. Kolika způsoby mohl sníst těchto pět fazolek?



Obrázek 21 Concept Cartoon pro úlohu 6 a

5.12.1 Analýza úlohy 6 a

Cíl úlohy

Matematický: Žáci mají za úkol kolektivně najít správné řešení úlohy a zjistit přesný počet možných pořadí v jakém Ron snědl fazolky. Žáci se učí řešit slovní kombinatorické úlohy z variací bez opakování, najít vhodnou strategii pro řešení úlohy a tuto strategii aplikovat. V tomto případě se pak setkávají se základní úlohou, bez dalších podmínek. Po žácích je vyžadován výsledek v součinovém tvaru.

Didaktický: Úloha rozvíjí schopnost žáků samostatně, ale i skupinově řešit problémy a volit vhodné způsoby řešení. Dále rozvíjí kritické myšlení potřebné pro vyvrácení chybných hypotéz, a nakonec zlepšuje komunikativní schopnosti žáka.

Charakter zadání

Úloha je založená na metodě Concept Cartoons a je tedy nezbytné ji zadat vizuálně. Toho lze dosáhnout třeba promítnutím úlohy na tabuli, nebo rozdáním vytisknuté úlohy mezi žáky.

Žáci nemusí ze zadání pochopit, že na pořadí jedení fazolek záleží.

Čas věnovaný úloze

V závislosti na předchozí zkušenosti žáků s kombinatorickými úlohami se může časová náročnost této úlohy drasticky měnit. Úloha řešená diskusí zabere nejméně deset minut.

Způsob práce

Vzhledem k zadání úlohy pomocí metody Concept Cartoons se bude úloha řešit diskusní metodou. Po zadání úlohy dá učitel žákům pár minut na přečtení úlohy a k ní přiřazených hypotéz a pak zahájí diskusi nejprve v menších skupinách, tedy po zhruba čtyřech žácích a potom diskusi v rámci celé třídy.

Předchozí znalosti

Kombinatorický součin, kombinatorický součet, faktoriál

Správné strategie řešení

1) Řešení pomocí pravidla kombinatorického součinu a součtu:

   První fazolka, kterou Ron sní může být libovolná z devíti možných. Pro druhou fazolku pak zbývá osm možností, pro třetí sedm, pro čtvrtou šest a pro pátou pět. Celkem existuje $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15\ 120$ různých pořadí v jakých může Ron sníst pět fazolek.

2) Použití vzorce:

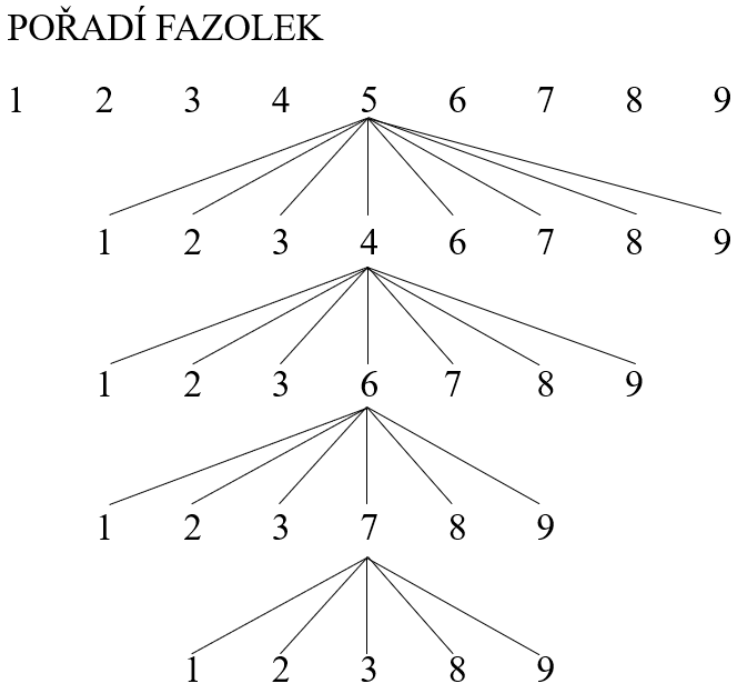
   Zná-li žák kombinatorické vzorce, může je v této úloze využít. Pokud si žák uvědomí, že úloha je variace bez opakování páté třídy z devíti prvků, může použít vzorec pro výpočet. V takovém případě by pak mohl dojít výsledku, že $V_5(9) = \frac{9!}{(9-5)!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15\ 120$.

3) Využití kombinačního čísla:

   Zná-li žák kombinační čísla a jejich využití, pak by je mohl využít. Úloha lze řešit výběrem pětice z devíti prvků $\binom{9}{5} = 126$ a vynásobením tohoto výběru permutací vybrané pětice $5! = 120$. Výsledkem takového řešení tedy bude celkové množství možných pořadí $\binom{9}{5} \times 5! = \frac{9!}{5! \times 4!} \times 5! = \frac{9!}{4!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15\ 120$.

4) Grafické řešení:

   Lze postupovat kreslením stromového diagramu. Vzhledem k množství řešení by bylo rozumné rozkreslit detailně jen jednu větev a prohlásit, že další větve budou vypadat obdobně.



Obrázek 22 Stromový diagram 11

Žák vytvoří diagram třeba následujícím způsobem viz obrázek 22. Nejprve vypíše devět možností pro první snědenou fazolku. Následně jednu fazolku odebere, třeba číslo pět a znovu vypíše možnosti pro druhou snědenou fazolku. Žák takto pokračuje, dokud nevytvoří diagram pro pět snědených fazolek. Kdyby žák pokračoval, dokud by nevytvořil všechny větve diagram, tak by větví bylo
$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15\ 120$.

Nesprávné strategie řešení

1) Nesprávné využití kombinačního čísla

   Žák by mohl jako řešení nabídnout kombinační číslo $\binom{9}{5} = 126$.

   Učitel žáka upozorní, že kombinační číslo se používá na výběr *k*-tice z *n* prvků, kde nezáleží na pořadí prvků. Případně se doptá, zda v této úloze na pořadí záleží nebo ne.

2) Uspořádání všech fazolek

   Žák nepozorně přečte zadání a namísto pořadí pěti fazolek bude řešit pořadí všech fazolek.

   Učitel požádá žáka, aby si znova přečetl zadání úlohy.

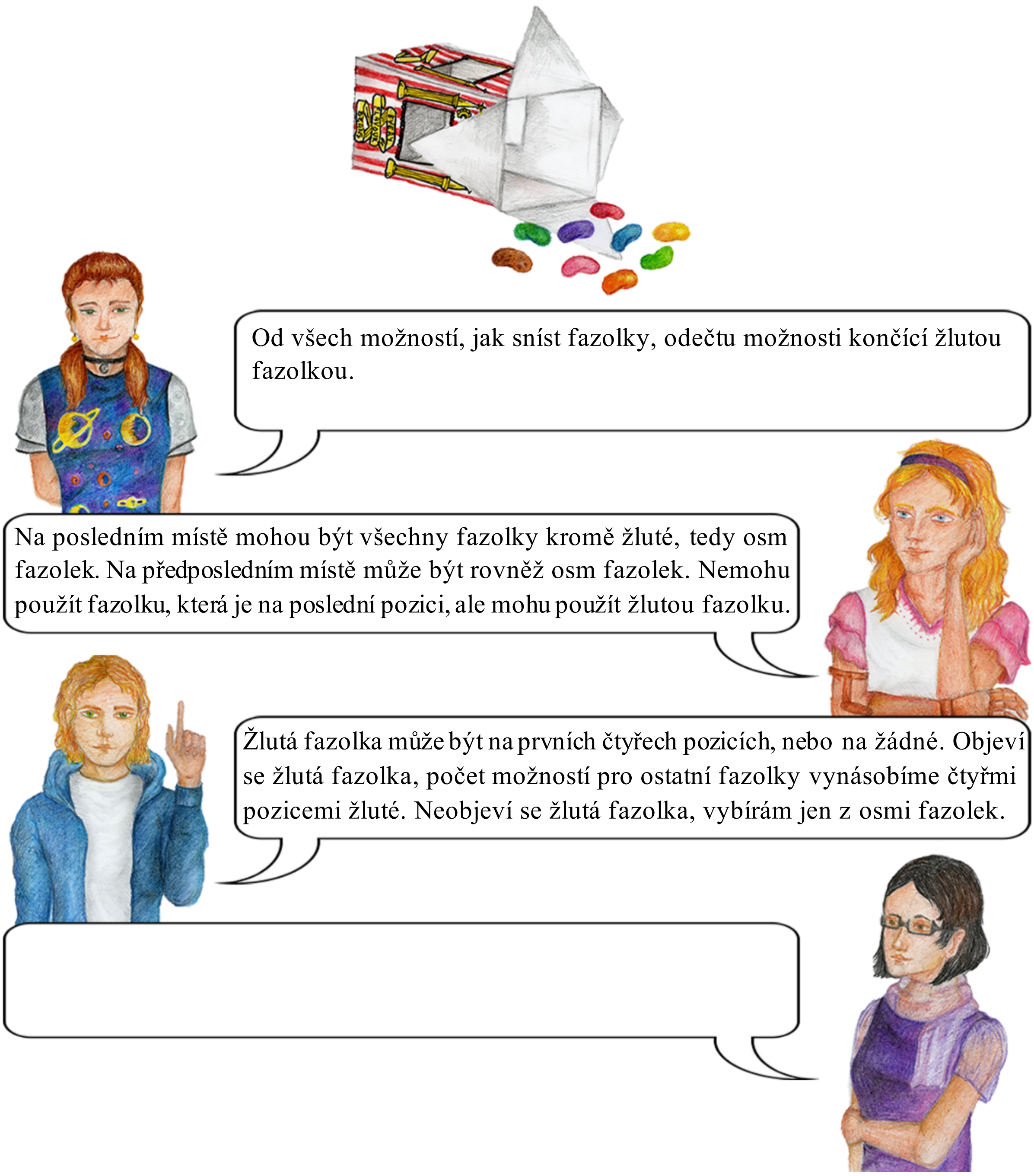
3) Nesprávné použití kombinatorických pravidel

   Žák by správně určil, že na prvním místě může být devět fazolek, na druhém osm, na třetím sedm, na čtvrtém šest a na pátém pět. Následně možnosti namísto vynásobení sečte a dojde tak k výsledku $8 + 7 + 6 = 21$.

   Učitel navrhne žákovi, aby si nakreslil stromový diagram úlohy.

5.13 Úloha 6 b

Ron mlsal ‚Bertíkovy fazolky tisíckrát jinak‘. V krabičce měl devět různých fazolek. Rozhodl se, že jich pět sní a zbytek si nechá na jindy. Aby si je vychutnal, tak jedl jednu po druhé. Ron si vzpomněl, že mu žlutá fazolka až tak moc nechutná. Nechce ji tedy jíst jako poslední. Kolika způsoby mohl snίst za této podmínky vybraných pět fazolek?



Obrázek 23 Concept Cartoon pro úlohu 6 b

5.13.1 Analýza úlohy 6 b

Cíl úlohy

Matematický: Žáci mají za úkol kolektivně najít správné řešení úlohy a zjistit přesný počet možných pořadí v jakém Ron snědl fazolky. Žáci se učí řešit slovní kombinatorické úlohy z variací bez opakování, najít vhodnou strategii pro řešení úlohy a tuto strategii aplikovat. V tomto případě se pak setkávají s úlohou, která obsahuje podmínku pro poslední prvek. Po žácích je vyžadován výsledek v součinovém tvaru.

Didaktický: Úloha rozvíjí schopnost žáků samostatně, ale i skupinově řešit problémy a volit vhodné způsoby řešení. Dále rozvíjí kritické myšlení potřebné pro vyvrácení chybných hypotéz, a nakonec zlepšuje komunikativní schopnosti žáka.

Charakter zadání

Úloha je založená na metodě Concept Cartoons a je tedy nezbytné ji zadat vizuálně. Toho lze dosáhnout třeba promítnutím úlohy na tabuli, nebo rozdáním vytisknuté úlohy mezi žáky.

Čas věnovaný úloze

V závislosti na předchozí zkušenosti žáků s kombinatorickými úlohami se může časová náročnost této úlohy drasticky měnit. Úloha zabere řešená diskusí zabere nejméně patnáct minut.

Způsob práce

Obdobně jako u základní úlohy i úloha doplňující bude řešena diskusní metodou. Po zadání úlohy dá učitel žákům pár minut na přečtení úlohy a k ní přiřazených hypotéz a pak zahájí diskusi nejprve v menších skupinách o zhruba čtyřech žácích a potom diskusi v rámci celé třídy.

Předchozí znalosti

Kombinatorický součin, kombinatorický součet, faktoriál

Správné strategie řešení

1) Řešení pomocí pravidla kombinatorického součinu a součtu:

   Poslední fazolka, kterou Ron sní není žlutá, vzhledem k tomu má na výběr z osmi různých fazolek. Za předposlední může vybrat libovolnou z osmi fazolek, jelikož do výběru přibyla žlutá. Za třetí může vybrat jednu ze sedmi fazolek, za čtvrtou jednu ze šesti a za pátou jednu z pěti. Celkem existuje $8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 13\,440$ možných pořadí, jak sníst pět fazolek.

2) Řešení opačným výpočtem

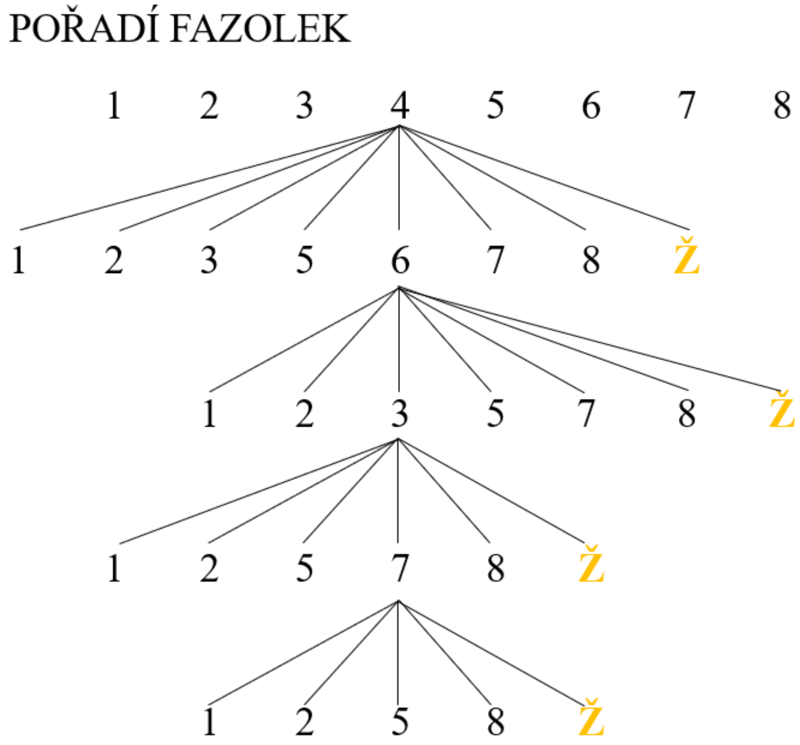
   Celkem existuje $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15\,120$ možných pořadí, jak může Ron fazolky sníst. Lze odebrat ty možnosti, u kterých je na poslední pozici žlutá fazolka. Takových možností bude $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1\,680$. Odečtením je možné získat výsledek $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 - 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 13\,440$.

3) Výčet možností žluté fazolky:

   Jedna z možností, jak tuto úlohu řešit je diskutovat pozici žluté fazolky. Ta může být na první až čtvrté pozici, nebo nikde. Pokud je na první až čtvrté pozici, není podstatné na které, jelikož výpočet pro první až čtvrtou pozici je stejný. Ve všech čtyřech případech je známa jedna pozice a čtyři další je nutno vyřešit. Celkem tedy existuje $4 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 6\,720$ pořadí obsahujících žlutou fazolku na jiné než poslední pozici. Pořadí žlutou fazolku neobsahujících existuje $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6\,720$. Po sečtení dostaneme, že možností neobsahujících žlutou fazolku na posledním místě je celkem $8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 13\,440$.

4) Grafické řešení

   Lze postupovat kreslením stromového diagramu. Vzhledem k množství řešení by bylo rozumné rozkreslit detailně jen jednu větev a prohlásit, že další větve budou vypadat obdobně.



Obrázek 24 Stromový diagram 12

Žák vytvoří diagram například následujícím způsobem, viz obrázek 24. Nejprve vypíše osm možností pro poslední snědenou fazolku. Následně jednu fazolku odebere, třeba číslo pět, ale přidá žlutou fazolku a znovu vypíše možnosti pro druhou snědenou fazolku. Žák takto pokračuje, dokud nevytvoří diagram pro pět snědených fazolek. Kdyby žák pokračoval, dokud by nevytvořil všechny větve diagram, tak by větví bylo $8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 13\ 440$.

Nesprávné strategie řešení

1) Vyloučení žluté fazolky z výběru

   Žák kompletně vyloučí žlutou fazolku z výběru pro jakoukoliv pozici. Dojde k výsledku $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6\ 720$.

   Učitel poukáže na fakt, že žluté fazolka je stále ve výběru. Nesmí být pouze na poslední pozici.

2) Žák řeší pouze žlutou fazolku na posledním místě

   Žák správně spočítá, že možností končících žlutou fazolkou je $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1\ 680$. Namísto odečtení od všech řešení toto uvede jako výsledek.

   Učitel upozorní žáka na to, že spočítal počet možností, kde žlutá fazolka je na posledním místě, ale měl počítat, že fazolka je na posledním místě. Učitel žáka upozorní, že i tak jeho výpočet lze využít a ať se nad tím zamyslí.

3) Nesprávné použití pravidla kombinatorického součinu

   Žák nesprávně použije pravidlo kombinatorické součinu a dojde k výsledku $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 1 = 3\ 024$.

   Učitel žáka upozorní, že musí postupovat od nejvíce podmíněného členu.

5.14 Úloha 6 c

Ron mlsal ‚Bertíkovy fazolky tisíckrát jinak‘. V krabičce měl devět různých fazolek. Rozhodl se, že jich pět sní a zbytek si nechá na jindy. Aby si je vychutnal, tak jedl jednu po druhé. Ronovi žlutá fazolka prostě nechutná. Nechce ji jíst poslední. Byl by schopen svou nechuť překonat, ale jen pokud sní jako první zelenou. Kolik možností by bylo za těchto podmínek?

Obrázek 25 Concept Cartoon pro úlohu 6 c

5.14.1 Analýza úlohy 6 c

Cíl úlohy

Matematický: Žáci mají za úkol kolektivně najít správné řešení úlohy a zjistit přesný počet možných pořadí v jakém Ron snědl fazolky. Žáci se učí řešit slovní kombinatorické úlohy z variací bez opakování, najít vhodnou strategii pro řešení úlohy a tuto strategii aplikovat. V tomto případě se pak setkávají s úlohou, která obsahuje podmínku pro první i poslední prvek. Po žácích je vyžadován výsledek v součinovém tvaru.

Didaktický: Úloha rozvíjí schopnost žáků samostatně, ale i skupinově řešit problémy a volit vhodné způsoby řešení. Dále rozvíjí kritické myšlení potřebné pro vyvrácení chybných hypotéz, a nakonec zlepšuje komunikativní schopnosti žáka.

Charakter zadání

Úloha je založená na metodě Concept Cartoons a je tedy nezbytné ji zadat vizuálně. Toho lze dosáhnout třeba promítnutím úlohy na tabuli, nebo rozdáním vytisknuté úlohy mezi žáky.

Žáci by mohli úlohu špatně pochopit a hledat pouze variantu, kdy Ron sní zelenou fazolku jako první a žlutou jako poslední.

Čas věnovaný úloze

V závislosti na předchozí zkušenosti žáků s kombinatorickými úlohami se může časová náročnost této úlohy drasticky měnit. Úloha zabere řešená diskusí zabere nejméně dvacet pět minut.

Způsob práce

Obdobně jako u základní úlohy i úloha doplňující bude řešena diskusní metodou. Po zadání úlohy dá učitel žákům pár minut na přečtení úlohy a k ní přiřazených hypotéz a pak zahájí diskusi nejprve v menších skupinách o zhruba čtyřech žácích a potom diskusi v rámci celé třídy.

Předchozí znalosti

Kombinatorický součin, kombinatorický součet, faktoriál

Správné strategie řešení

1) Řešení pomocí pravidla kombinatorického součinu a součtu:

   Úlohu je třeba rozdělit na tři situace v jedné je na prvním místě zelená v druhé je na posledním místě zelená a ve třetí není zelená na prvním ani posledním místě. Pokud je zelená fazolka na prvním místě není nutné řešit kde je žlutá, jelikož za této podmínky není omezený její výskyt. Počet možných pořadí začínajících zelenou fazolkou tak bude $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1\ 680$. Pokud je zelená fazolka poslední, není nutné řešit kde je žlutá, jelikož na poslední pozici už je zelená. Počet možných pořadí končících zelenou fazolkou tak bude $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1\ 680$. Pokud zelená není první ani poslední nemůže být žlutá na posledním místě. Na posledním místě tedy může být libovolná ze sedmi fazolek, na prvním libovolná taktéž ze sedmi, na druhém může být libovolná ze sedmi, na třetím ze šesti a na čtvrtém z pěti. Možností seřazení fazolek, aniž by zelená byla první či poslední a žlutá nebyla poslední je celkem $7 \times 7 \times 7 \times 6 \times 5 = 10\ 290$.

   Dohromady existuje $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 2 + 7 \times 7 \times 7 \times 6 \times 5 = 13\ 650$ možností, jak může Ron fazolky sníst.

2) Řešení opačným výpočtem

   Celkem Ron může sníst pět fazolek $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15\ 120$ způsoby. Stačí tedy odečíst všechny možnosti co nezačínají na zelenou a zároveň končí na žlutou. Nezačínají-li na zelenou, pak na první pozici může být sedm různých fazolek, na druhé pozici pak může být také sedm na třetí šest na čtvrté pět a na páté je žlutá fazolka. Takových možností bude $7 \times 7 \times 6 \times 5 \times 1 = 1\ 470$. To pak stačí odečíst od všech možností a výsledkem je $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 - 7 \times 7 \times 6 \times 5 = 13\ 650$.

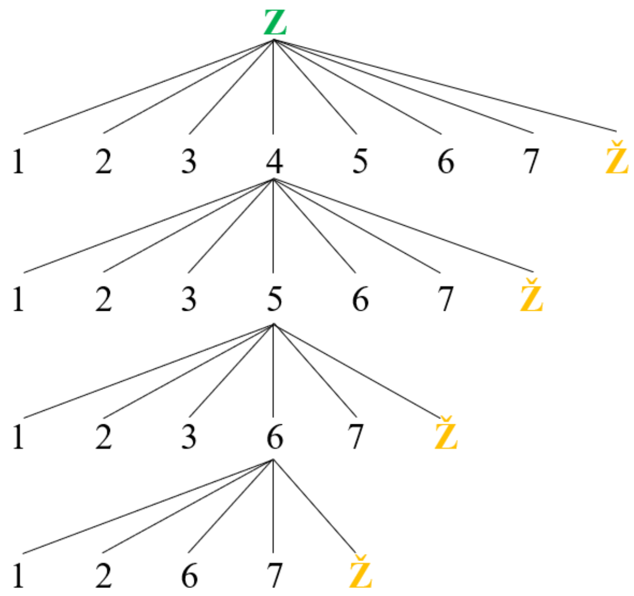
3) Grafické řešení

   Lze postupovat kreslením stromového diagramu. Vzhledem k množství řešení by bylo rozumné rozkreslit detailně jen jednu větev a prohlásit, že další větve budou vypadat obdobně.

   V tomto případě je nutné řešit úlohu na tři způsoby a je nutné vytvořit tři diagramy.

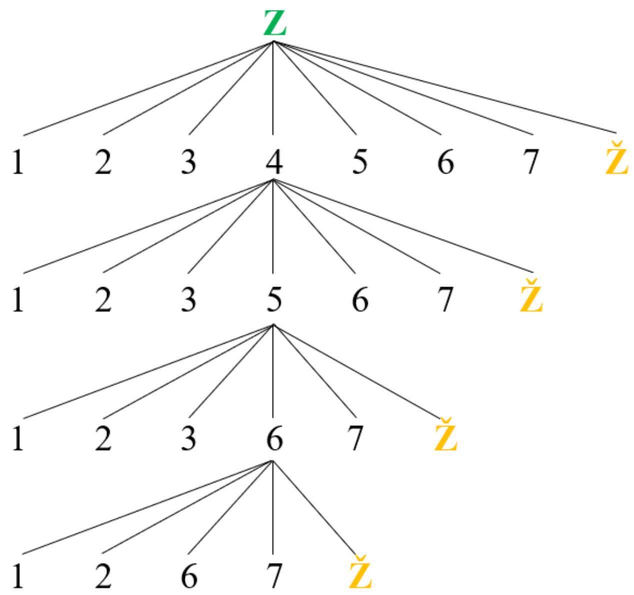
POŘADÍ FAZOLEK

ZAČÍNÁ ZELENOU

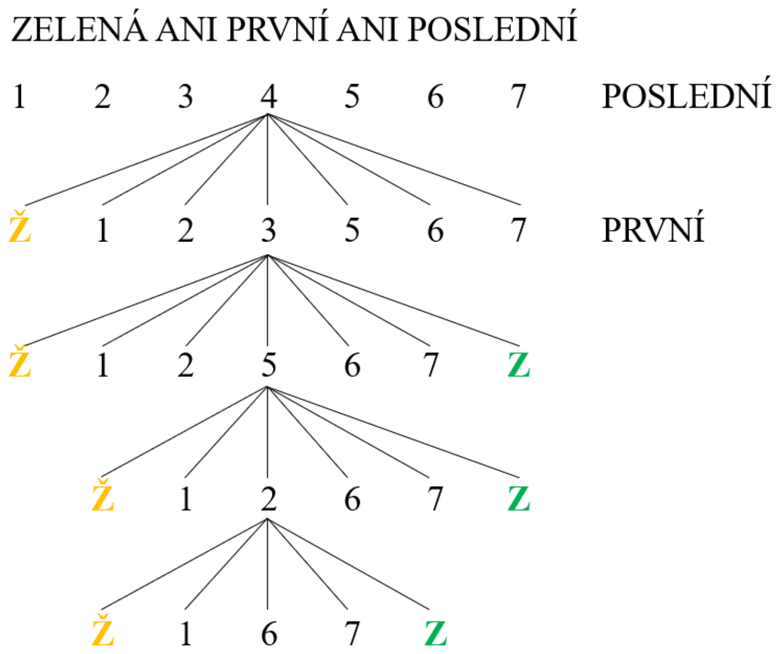


Obrázek 26 Stromový diagram 13

ZELENÁ POSLEDNÍ



Obrázek 27 Stromový diagram 14



Obrázek 28 Stromový diagram 15

Žák tvořící tyto diagramy by postupoval takto viz obrázky 26, 27, 28. Pokud je zelená první, žák jí poznamená na první pozici diagramu z ní pak rozvíjí možnosti pro druhou, třetí, čtvrtou a poslední pozici. Pokud je zelená poslední, žák jí poznamená na první pozici diagramu z ní pak rozvíjí možnosti pro čtvrtou, třetí, druhou a první pozici. Pokud není zelená první ani poslední, pak žák začíná vypsáním sedmi možností pro poslední pozici, pokračuje vypsáním sedmi možností pro první pozici, sedmi pro druhou šesti pro třetí a pěti pro čtvrtou. Spočtením počtu potenciálních větví zjistí výsledek

$8 \times 7 \times 6 \times 5 + 8 \times 7 \times 6 \times 5 + 7 \times 7 \times 7 \times 6 \times 5 = 13\,650.$

Nesprávné strategie řešení

1) Nesprávné použití pravidla kombinatorického součinu

   Žák nesprávně aplikuje pravidlo kombinatorického součinu a dojde tak k výsledku $1 \times 7 \times 6 \times 5 \times 1 = 210$.

   Učitel upozorní na chybné pochopení úloha. Zadání úlohy s žáky podrobně rozebere.

2) Nesprávné pochopení podmínek

   Žák bude řešit pouze situace, kde na první pozici je zelená a na poslední pozici žlutá fazolka.

   Učitel zahájí diskusi o tom, jaké možnosti jsou vzhledem k podmínkám přípustné.

3) Řešení pomocí pravidla kombinatorického součinu a součtu:

   Vzhledem ke složitosti úlohy je vysoce pravděpodobné, že žák při řešení úlohy tímto způsobem na nějakou možnost pořadí fazolek zapomene.

   Učitel doporučí jiný postup řešení.

Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit sbírku úloh z kombinatoriky, konkrétně na téma variace bez opakování a tuto sbírku rozšířit o aplikaci analýzy a priori a zadávání úloh pomocí metody Concept Cartoons. Jsem si jist, že byl tento cíl splněn. Práce obsahuje rozbor metody Concept Cartoons, důvod a způsob jejího využití při výuce kombinatoriky. Obsahuje rozbor analýzy a priori a taktéž důvod a způsob jejího využití. Dále bakalářská práce obsahuje některé strategie řešení kombinatorických úloh. Nakonec obsahuje i samotnou sbírku.

Za hlavní přínos své práce považuji právě sbírku příkladů využívajících metodu Concept Cartoons k podnícení diskuse nad nimi. Jsem si jist, že má práce poskytne učitelům další možnost pro výuku kombinatoriky a že podnítí výuku kombinatoriky pomocí diskuse. Metoda Concept Cartoons je doposud v České republice dost raritně využívána, obzvlášť na středních školách. Za další důležitý přínos své této práce považuji i pokus přinést metodu Concept Cartoons na střední školy, a to konkrétně do výuky kombinatoriky.

Tato práce je určena k využití při výuce kombinatoriky na středních školách. Učitelé mohou využít analýzy a priori, která obsahuje možné správné i nesprávné odpovědi, což jim umožní lépe se připravit na různé přístupy žáků k řešení úloh.

Bakalářkou práci by bylo možné rozšířit o průzkum využití úloh a o průzkumem sesbírané reakce žáků a učitelů.

Seznam použitých informačních zdrojů

Birisci, S., Metin, M., & Karakas, M. (2010). Pre-service elementary teachers' views on concept cartoons: a sample from Turkey. *Middle-East Journal of Scientific Research*, *5*(2), 91-97.

Brousseau, G., & Novotná, J. (2012). *Úvod do Teorie Didaktických situací V matematice*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Dabell, J. (2008). Using Concept Cartoons. *Mathematics teaching incorporating micromath*, *209*, 34-36.

Hejný, M. a spol (1990). *Teória vyučovania matematiky 2* (Druhé vydání). Slovenské pedagogické nakladateĺstvo.

Kopka, J. (2016). *Jak řešit matematické problémy*. Katedra matematiky PřF UJEP.

Naylor, S., & Keogh, B. (2015). Talking and thinking using concept cartoons: what have we learnt?. *Science, literacy and learning.–2015.–61–67 p*.

Nováková, H. (2015). Analýza a priori jako součást přípravy učitele na výuku. *Praha: Universita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky*.

Novotná, J., Eisenmann, P., Přibyl, J., Ondrušková, J., & Břehovský, J. (2014). Problem Solving in School Mathematics Based on Heuristic Strategies. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science*, 7(1), 1–6.

Novotná, J., Pelantová, A., Hrabáková, H., & Krátká, M. (2006). Příprava a analýza didaktických situací. *Praha: Společnost učitelů matematiky*.

Petáková, J. (2011). *MATEMATIKA příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Prometheus.

Polya, G. (2004). *How to solve it*. Princeton University Press.

Samková, L. (2020). *Metoda concept cartoons*. Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta.

Stančíková, M. (2013). *Základní Kombinatorická Pravidla*. Kombinatorika – webová učebnice pro žáky středních škol | Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity. http://www.stancikova.cz/kombinatorika2/pages/01-pravidla.html

Turner, J., Smith, C., Keogh, B. & Naylor, S. (2013). Concept Cartoons in English education. *Sandbach: Millgate House*.

Vygotskij, L. S., Cole, M., Stein, S., & Sekula, A. (1978). *Mind in society: The development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.