Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Polymina ve výuce matematiky na 2. stupni základní školy

Polyominos at lower secondary school mathematics education

Adéla Fidrmucová

Vedoucí práce: Mgr. David Janda, Ph.D.

Studijní program: Matematika se zaměřením na vzdělávání

2024

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Polymina ve výuce matematiky na 2. stupni základní školy potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha 11. července 2024

Ráda bych poděkovala vedoucímu mé bakalářské práce Mgr. Davidu Jandovi, Ph.D. za čas, který mi věnoval, a za cenné rady a připomínky, které mi poskytoval. Dále děkuji rodině a přátelům za jejich pomoc a podporu.

ABSTRAKT

Bakalářská práce je zaměřena na úlohy, ve kterých se setkáváme s polyminy. Jejím cílem je zhodnotit potenciál polymin pro školskou matematiku, konkrétně pro matematiku na 2. stupni základní školy. Bakalářská práce je rozdělena na tři základní části. První z těchto částí se zaměřuje na základní informace o polyminech. Obsahuje vymezení pojmu polymino, historii polymin, jejich třídění a také vymezení polyform jako zobecnění polymin. Druhá část práce popisuje, čemu se věnují úlohy s polyminy, které se objevují ve vybraných učebnicových řadách pro 2. stupeň základní školy, a částečně i v jakém množství se úlohy v jednotlivých učebnicových řadách vyskytují. Poslední část je věnována dalším typům úloh a aktivitám s polyminy, které by bylo možné do výuky zařadit. Závěrem této bakalářské práce je, že polymina mají potenciál pro výuku matematiky na 2. stupni základní školy především proto, že úlohy s nimi pokrývají mnoho témat, polymina mají názorný a jednoduchý tvar a lze s nimi řešit úlohy i pomocí manipulace. Nejvíce úloh s polyminy můžeme najít v učebnicích nakladatelství H-mat, nejméně v učebnicích Fraus, Prometheus a SPN. Vzhledem k tomu, že žáci se s polyminy během studia na 2. stupni základní školy setkávají minimálně v podobě sítí krychle, tak je škoda s nimi žáky neseznámit už dříve a nezařadit je i do dalších témat, kde mohou učitelům pomoct k naplnění jejich vzdělávacích cílů.

KLÍČOVÁ SLOVA

polymino, rovinná geometrie, parkety

ABSTRACT

Bachelor thesis is focused on problems in which we encounter polyominoes. Its aim is to evaluate the potential of polyominoes for school mathematics, specifically for mathematics at lower secondary school. The bachelor thesis is divided into three main parts. The first of these parts focuses on general information about polyominoes. It includes the definition of the term polyominoes, the history of polyominoes, their classification and also the definition of polyforms as a generalization of polyominoes. The second part of the thesis describes what the tasks with polyominoes that appear in selected textbook series for lower secondary school are devoted to, and partly the number of tasks that appear in each textbook series. The last section is devoted to other types of tasks and activities with polyominoes that could be included to the education. The conclusion of this thesis is that polyominoes have a potential for lower secondary school mathematics, mainly because polynomials cover many topics, polynomials have an illustrative and simple form, and we can solve problems by manipulation with them. The most problems with polynomials can be found in the textbooks of the H-mat publishing house, the least in the Fraus, Prometheus and SPN textbooks. Given that pupils encounter polyominoes at least in the form of cube networks during their studies at lower secondary school, it is a pity not to introduce them to pupils earlier and to include them in other topics where they can help teachers to meet their educational goals.

KEYWORDS

polyomino, plain geometry, tiles

Obsah

Úvod

Pro psaní své bakalářské práce jsem si zvolila téma polymina, konkrétně Polymina ve výuce matematiky na 2. stupni základní školy. Toto téma jsem si vybrala, protože já sama jsem se s pojmem polymino setkala až na vysoké škole a i pro mnoho mých spolužáků šlo o neznámý pojem. Všichni jsme znali pouze sítě krychle. A tak bych chtěla zjistit, jak moc se polymina objevují v různých úlohách v učebnicích, protože jde o téma, se kterým lze pracovat již na základní škole, a to nejen jako se sítěmi krychle.

První kapitola práce se zabývá vymezením pojmu polymino. Kromě vysvětlení tohoto pojmu obsahuje kapitola dvě podkapitoly. První z nich popisuje historii polymin, kde se zabývám hlavně tím, jak se úlohy s polyminy postupně rozšiřovaly mezi lidi. Druhá ukazuje výsledky dlouholeté mapovací práce, kdy byly zkoumány typy polymin a zjišťovány jejich počty pro jednotlivé velikosti polymin.

Druhá kapitola se zaměřuje na zobecnění polymin, kterým jsou polyformy. Kromě polymin zde zmiňuji ještě tři další polyformy, kterými jsou polyiamondy, polyhexy a polykostky. Můžeme je totiž v úlohách využít v kombinaci s polyminy nebo jako náročnější úroveň k úlohám s polyminy.

Třetí kapitola je nejobsáhlejší kapitolou této práce a obsahuje úlohy s polyminy ze šesti učebnicových řad pro 2. stupeň základní školy. Jde o řady Didaktis, Fraus, H-mat, Prometheus, SPN a Taktik. Jsou zde obsaženy typy úloh, které jsem v učebnicích našla. Kapitola také ukazuje, v jaké míře se úlohy v učebnicích vyskytují. Tato kapitola je rozdělena do pěti podkapitol, z nichž první čtyři seskupují úlohy podobného typu. Jde o úlohy na pokrývání, shodná zobrazení, propojení 2D a 3D a výpočet obsahu a obvodu. Poslední podkapitola je tvořena z typů úloh, které se v učebnicích objevují minimálně.

Poslední kapitola práce tvoří mé návrhy na další využití polymin na 2. stupni základní školy. V návrzích jsem se inspirovala úlohami, které jsem našla v jiných zdrojích, než jsou učebnice.

Hlavním cílem mé bakalářské práce je ukázat možnosti využití polymin ve výuce na 2. stupni základní školy.

Dílčími cíli mé bakalářské práce je:

- vymezit pojem polymino,
- představit a kategorizovat úlohy, které se objevují v učebnicích pro 2. stupeň základní školy,
- shrnout, v jaké míře se úlohy v jednotlivých učebnicových řadách vyskytují,
- navrhnout další typy úloh, které se v analyzovaných učebnicích vyskytují minimálně nebo vůbec.

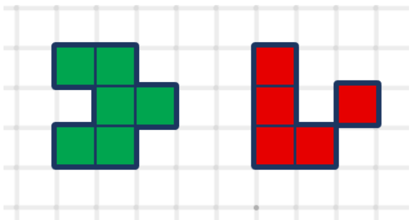
K naplnění cílů, kterých chci ve své práci dosáhnout, jsem zvolila analýzu vybraných učebnicových řad a jiných zdrojů, kde bych se mohla inspirovat dalšími úlohami pracujícími s polyminy.

1 Polymina

Polymino je rovinný geometrický útvar skládající se ze stejně velkých čtverců. Každý z těchto čtverců má alespoň jednu stranu společnou s jiným čtvercem polymina, nemůže být připojen pouze vrcholem. Například geometrický útvar na obrázku 1 vlevo je polymino, konkrétně jde o hexamino, oproti tomu útvar vpravo polymino není. Nejjednodušším polyminem je monomino, které je tvořeno pouze jedním čtvercem. Dále se polymina podle počtu čtverců nazývají domino – ze dvou čtverců, trimino – ze tří, tetramino – ze čtyř, pentamino – z pěti, hexamino – ze šesti, heptamino – ze sedmi čtverců a tak dále (Stehlíková & Tejkalová, 2009). Někdy se místo těchto názvů používá označení n-polymino, kde n je počet čtverců, ze kterých se polymino skládá. Tedy například 3-polymino místo trimino nebo 10-polymino místo dekamino (Weisstein, ©1999–2024a). Polymina bývají někdy zakreslována ve čtvercová síti pro rychlejší a snadnější zaznamenávání.

Obrázek 1

Co je a není polymino



1.1 Historie polymin

První problémovou úlohu s pentaminy, konkrétní skupinou polymin, publikoval v knize Canterbury Puzzles roku 1907 britský tvůrce hádanek a matematických her Henry Ernest Dudeney (Golomb, 1994). Zadáním úlohy bylo sestavit zpět rozbitou šachovnici z navzájem různých úlomků, z nichž dvanáct bylo tvořeno z pěti čtverců a jeden ze čtyř čtverců – dnes bychom úlomky nazvali jako pentamina a tetramina (Dudeney, 2008). Ve 30. a 40. letech 20. století se hodně psalo o polyminech v časopise Fairy Chess Review. Úlohy s polyminy zde byly pojmenovávány jako „dissection problems“[1].

Pojem polymino[2] poprvé použil až v roce 1953 Solomon W. Golomb, americký matematik, inženýr a profesor elektrotechniky na Univerzitě v Jižní Kalifornii, při přednášce

[1] Volně by se daly tyto problémy přeložit jako „problémy s dělením útvarů“ – vlastní překlad.
[2] Někdy též polyomino.

Harvardskému matematickému klubu. Jeho práce byla o rok později publikována v časopise American Mathematical Monthly, kde vyvolala zájem řady profesionálních matematiků. Pozornost široké veřejnosti si však polymina získala až po otištění několika materiálů v populárně vědeckém časopise Scientific American (Golomb, 1994). Od roku 1958 se součástí tohoto časopisu stala slavná rubrika Mathematical Games, kde americký matematik Martin Gardner dvacet pět let popularizoval nové matematické koncepty včetně problémových úloh s polyminy (Henle & Hopkins, 2012).

1.2 Volná, jednostranná a pevná polymina, polymina s otvorem

Polymina jsou pro mnoho matematiků už dlouhá léta lákavou oblastí plnou nevyřešených matematických problémů. Jedním z nich je například určení počtu polymin velikosti n bez toho, že bychom znali počet polymin velikosti $n-1$ (Demaine et al., 2001). K tomu, abychom mohli zjišťovat počty polymin, je potřeba si upřesnit, jak polymina rozlišujeme.

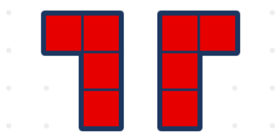
Někteří autoři uvádí dva způsoby rozlišování polymin (Redelmeier, 1981), jiní tři (Weisstein, ©1999–2024a). Pokud bychom rozlišovali pouze dva typy polymin, šlo by o polymina volná a pevná, u rozdělení na tři typy přibývají k volným a pevným polyminům ještě jednostranná.

Volná polymina

Pro volná polymina platí pravidlo, že jsou shodná, i když jsou jinak otočená nebo zrcadlově překlopená (Weisstein, ©1999–2024a). Takto pracuje s polyminy například desková hra Ubongo[3]. Na základě těchto pravidel jsou polymina na obrázku 2 shodná.

Obrázek 2

Shodná volná polymina



Jednostranná polymina

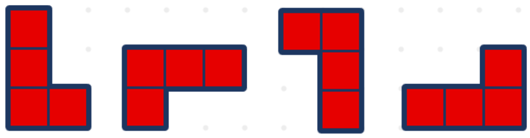
U jednostranných polymin již nemůžeme polymino vzít a překlopit ho. Stále ho ale můžeme libovolně otáčet. Platí tedy, že shodná polymina na sebe můžeme zobrazit posunutím a otočením (Weisstein, ©1999–2024a). Jednostranná polymina můžeme například vidět

[3] Hra je popsána v kapitole 4.4.

využita v některých úlohách v učebnicích nakladatelství H-mat v rámci didaktického prostředí Parkety[4], kde *elko* a *okle* jsou dvě různé parkety. *Elko* a *okle* jsou na obrázku 2 a jsou dvěma různými jednostrannými polyminy. Oproti tomu na obrázku 3 můžeme vidět podle těchto pravidel shodná polymina. Pokud rozlišujeme pouze dva typy polymin, patří jednostranná polymina do pevných polymin (Redelmeier, 1981).

Obrázek 3

Shodná jednostranná polymina

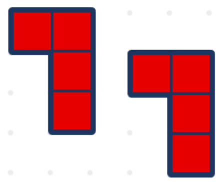


Pevná polymina

Poslední variantou pravidel, jak rozlišovat polymina, je považovat za různá ta, která jsou jinak překlopená, i ta, která jsou jinak otočená (Weisstein, ©1999–2024a). Jediná shodná polymina by pak byla taková, která se na sebe zobrazí posunutím. Tudíž polymina na obrázku 2 i polymina na obrázku 3 by pak byla různá polymina a shodná pevná polymina jsou až na obrázku 4.

Obrázek 4

Shodná pevná polymina



Pokud není specifikován typ polymina, o kterém se mluví, obvykle předpokládáme, že jde o polymina volná.

V tabulce 1 jsou uvedeny počty všech volných, jednostranných a pevných polymin pro jednotlivé velikosti polymin do $n = 15$. Můžeme v ní vidět, že počet všech typů polymin se velice rychle zvyšuje. Nejrychleji samozřejmě narůstají pevná polymina a nejpomaleji volná. Ale už u polymina o velikosti 15 jde o miliony možností pro všechny tři typy polymin.

[4] O Parketách více v kapitole 3.1 Úlohy zaměřené na pokrývání.

Tabulka 1

Počty jednotlivých typů polymin

n	Název	Volná	Jednostranná	Pevná	S otvorem
1	monomino	1	1	1	0
2	domino	1	1	2	0
3	trimino	2	2	6	0
4	tetramino	5	7	19	0
5	pentamino	12	18	63	0
6	hexamino	35	60	216	0
7	heptamino	108	196	760	1
8	oktamino	369	704	2725	6
9	nonamino	1285	2500	9910	37
10	dekamino	4655	9189	36446	195
11	11-polymino	17073	33896	135268	979
12	12-polymino	63600	126759	505861	4663
13	13-polymino	238591	476270	1903890	21474
14	14-polymino	901971	1802312	7204874	96496
15	15-polymino	3426576	6849777	27394666	425449

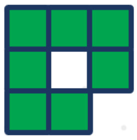
(Weisstein, ©1999–2024a)

Počet polymin dané velikosti n lze zjistit, pokud známe počet polymin velikosti $n-1$. Nejsnáze postupujeme tak, že vybereme jedno z polymin velikosti $n-1$ a označíme čísly všechna jeho sousední pole, kde může ležet další čtverec polymina. Tím získáme počet všech pevných polymin velikosti n, která z daného polymina $n-1$ mohou vzniknout. Pokud hledáme počet všech volných polymin, jednotlivá řešení postupně evidujeme a vynecháváme ta polymina, která jsou shodná s některým již zaznamenaným. Totéž opakujeme s dalšími polyminy velikosti $n-1$. Existují možnosti, jak postup zefektivnit, abychom se během něj co nejvíce vyhnuli tvoření shodných polymin. Efektivnější postup uvádí například Klarner (1981).

V tabulce 1 je ještě poslední sloupec, který ukazuje počty polymin s otvorem. Jde o taková polymina, v nichž čtverec, který není součástí polymina, obklopují ze všech stran čtverce tvořící polymino. Nejmenším polyminem s otvorem je heptamino, které je na obrázku 5.

Obrázek 5

Polymino s otvorem



2 Polyformy

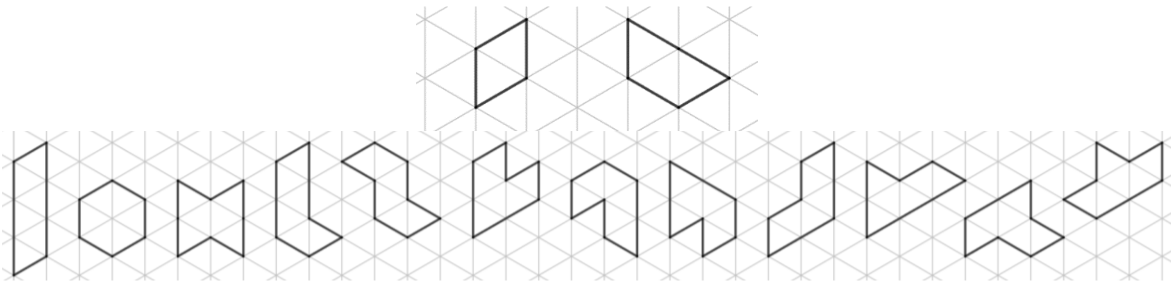
Ve své práci se věnuji hlavně polyminům, tedy geometrickým útvarům složeným ze čtverců. Ovšem tímto způsobem k sobě nemusíme skládat pouze čtverce, ale může jít i o jiné útvary. Obecně tak vznikají různé polyformy. Ty bychom mohli popsat jako rovinné geometrické obrazce nebo prostorová seskupení (tělesa) vzniklá spojením několika stejných geometrických útvarů. Kromě polymin bych ráda zmínila hlavně polyiamondy, polyhexy a polykostky[5], protože ty jsou nejčastější (Weisstein, ©1999–2024b).

Polyiamond

Polyiamond je obrazec, který se skládá z n stejně velkých rovnostranných trojúhelníků, z nichž každý je k ostatním připojen alespoň jednou celou stranou. Jinak by šlo polyiamond popsat jako sadu trojúhelníků vyříznutých z izometrické sítě. Pomocí stejných předpon jako u polymin dostáváme názvy jednotlivých druhů polyiamondů – diamond pro obrazec ze dvou, triamond pro obrazec ze tří nebo hexiamond pro obrazec ze šesti rovnostranných trojúhelníků (Clarke, *n.d.*). Jako příklady uvádím na obrázku 6 níže výčet všech variant pro tyto tři druhy polyiamondů umístěných do izometrické sítě.

Obrázek 6

Diamond, triamond a hexiamondy



Počet volných polyiamondů je po řadě 1, 1, 1, 3, 4, 12, 24, 66, 160, 448, … a počet jednostranných polyiamondů je 1, 1, 1, 4, 6, 19, 43, 121, atd. První polyiamond s otvorem je z devíti trojúhelníků a je pouze jeden. Jejich počet se dále zvyšuje od $n = 9$ na 1, 4, 25, 108, 450, atd (Weisstein, ©1999–2024c).

S polyiamondy můžeme řešit podobné úlohy jako s polyminy. Pokrývaná plocha je v tomto případě výřezem izometrické sítě. Sítě těles, kterými jsou polyiamondy, má čtyřstěn, osmistěn a dvacetistěn.

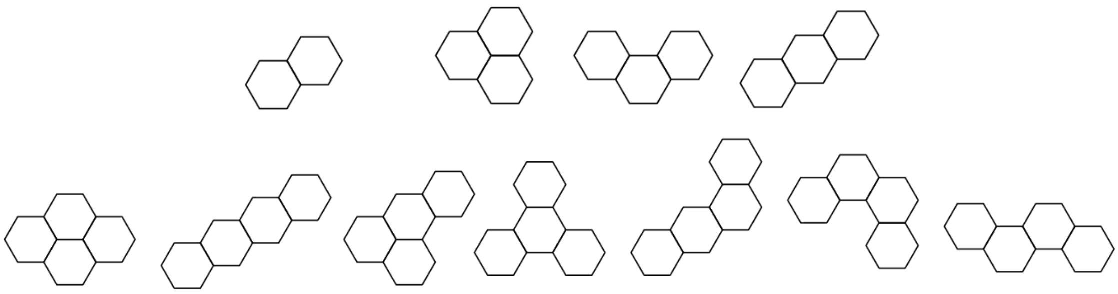
[5] Překlad slov polyiamonds, polyhexes a polycubes jsem přejala z knihy Hlavolamikon (Pelánek, 2014).

Polyhex

Polyhex je geometrický obrazec skládající se z n pravidelných shodných šestiúhelníků. Opět zde platí, že se každý šestiúhelník musí dotýkat některého z ostatních šestiúhelníků obrazce alespoň jednou stranou. Polyhexy můžeme také brát jako obrazce, které vznikly jako výřezy šestiúhelníkové sítě (Weisstein, ©1999–2024d). Pomocí předpon odvozujeme názvy jednotlivých druhů polyhex podobně jako u polymin a polyiamondů – dihex ze dvou šestiúhelníků, trihex ze tří a tetrahex ze čtyř. Pro představu uvádím na obrázku 7 výčet všech variant těchto druhů polyhex (Černohorská, 2006).

Obrázek 7

Dihex, trihexy, tetrahexy



(Weisstein, ©1999–2024d)

Počet variant pro jednotlivé druhy volných polyhex se zvyšuje mnohem rychleji než u polymin a polyiamondů, je jich 1, 1, 3, 7, 22, 82, 333, 1448, 6572, 30490, 143552, … Počty jednostranných polyhex jsou 1, 1, 3, 10, 33, 147, 620, 2821, 12942, 60639, atd. Otvor má jeden hexahex, dva heptahexy, třináct oktahex a tak dále (Weisstein, ©1999–2024d).

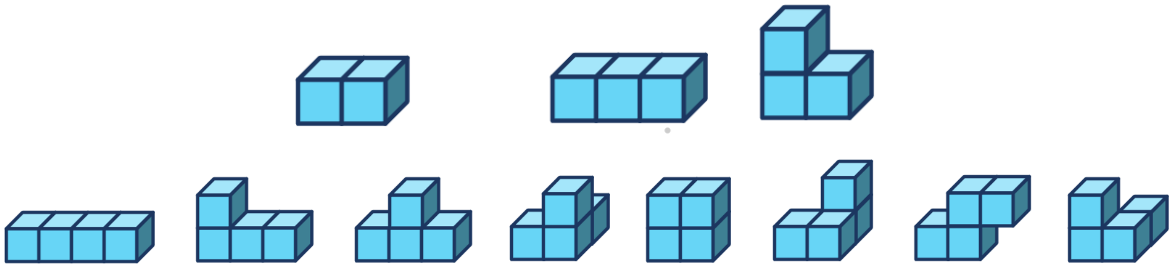
S polyhexy by šly opět pokrývat plochy v šestiúhelníkové síti, tvořit sítě dvanáctistěnu a řešit další úlohy. Dlážděním polyiamondy a polyhexy se podrobněji zabývá ve své práci Černohorská (2006).

Polykostka

Polykostka, matematicky možná lépe polykrychle, je těleso sestavené z několika stejných krychlí, z nichž je každá k tělesu připojena alespoň jednou stěnou. Jde vlastně o trojrozměrnou variantu polymin. Opět můžeme jednotlivé druhy polykostek nazvat pomocí předpon (Weisstein, ©1999–2024e). Polykostky známe v češtině častěji pod názvem krychlová tělesa. Protože je tento pojem v češtině využívanější, budu ve své práci používat spíše ten. Příklady všech variant krychlových staveb ze dvou, tří a čtyř krychlí jsou na obrázku 8.

Obrázek 8

Krychlové stavby ze dvou, tří a čtyř krychlí



Různých krychlových staveb z n krychlí můžeme postavit od $n = 1$ po řadě 1, 1, 2, 8, 29, 166, 1023, … (Weisstein, ©1999–2024e). U krychlových staveb nelze mluvit o stejných typech úloh jako pro rovinné polyformy, lze ovšem najít úlohy podobné. Například místo pokrývání jde o složení daných krychlových těles do sebe tak, aby vytvořila krychli nebo kvádr určitých rozměrů. S tím pracuje i hlavolam Soma kostky, kde je základní úlohou poskládat sedm různých krychlových těles do sebe tak, aby vytvořila krychli $3 \times 3 \times 3$ (Pelánek, 2014).

Kromě čtyř zmiňovaných polyform existuje ještě mnoho dalších. Informace o nich je možné najít buď na webové stránce Polyform (Weisstein, ©1999–2024b) nebo se polyformám věnují celé weby The Poly Pages (Clarke, *n.d.*) a Peter's Puzzle and Polyform Pages (*n.d.*).

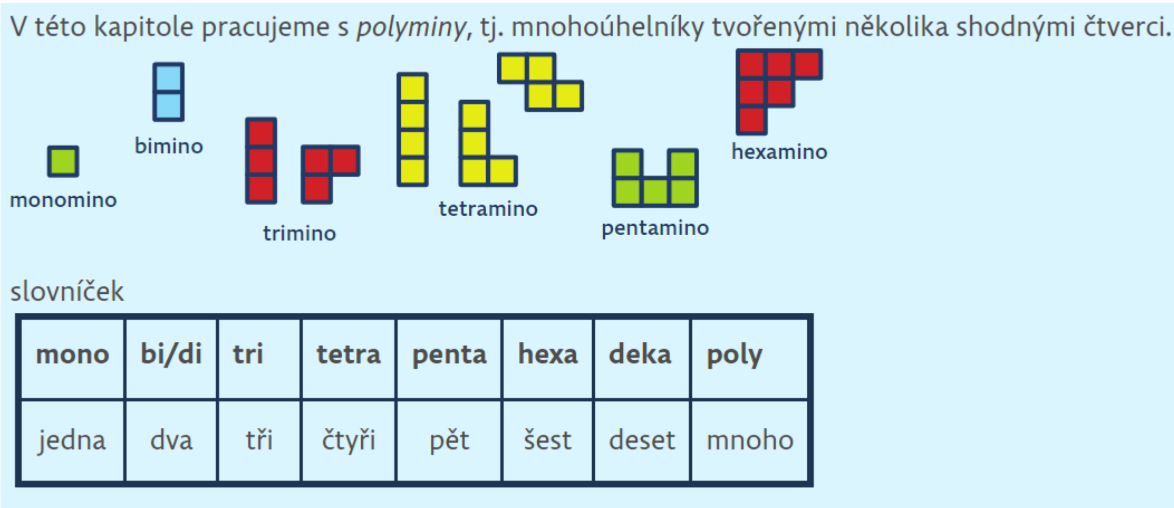
3 Využití polymin ve školské matematice

V rámci této kapitoly uvedu, jaké úlohy s polyminy můžeme nalézt v několika vybraných řadách učebnic pro 2. stupeň základní školy. Při hledání úloh jsem prošla učebnicové řady od nakladatelství Didaktis, Fraus, H-mat, Prometheus, SPN a Taktik.

Jediná řada učebnic, ve které se žáci přímo setkávají s pojmy polymino, trimino, pentamino a podobně, je od nakladatelství H-mat (viz obrázek 9). V ostatních učebnicích jsou polymina pojmenována jako obrazce, obrázky nebo útvary.

Obrázek 9

Vysvětlení pojmu polymino v učebnici H-mat



mono	bi/di	tri	tetra	penta	hexa	deka	poly
jedna	dva	tři	čtyři	pět	šest	deset	mnoho

(Hejný et al., 2016, s. 26)

Úlohy s polyminy se ve vybraných řadách učebnic zaměřují převážně na čtyři oblasti, které jsem pojmenovala pokrývání, shodná zobrazení, propojení rovinné a prostorové geometrie a výpočet obvodu a obsahu. Do nich jsem rozdělila nalezené úlohy. Jedna úloha někdy pokrývá i více oblastí, ovšem snažila jsem se úlohy zařadit podle toho, která oblast převažuje. Úlohy, které nepatřily ani do jedné z výše uvedených oblastí a kterých se v učebnicích objevuje minimum, jsem zařadila na konec do jedné společné podkapitoly Různé. U každé úlohy uvádím klíčová slova a matematické poznatky, které s danou úlohou souvisejí, aby se v úlohách dalo lépe orientovat a vyhledávat vhodné úlohy do výuky.

3.1 Úlohy zaměřené na pokrývání

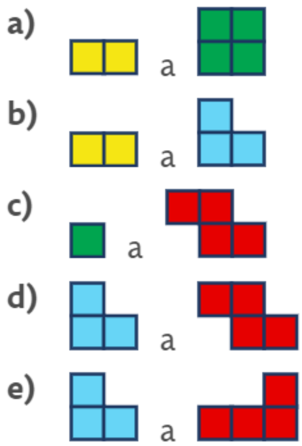
Úlohy, které se věnují pokrývání, jsou pro polymina nejtypičtější. Úkolem řešitele je vyplnit nějakou vymezenou plochu v rovině zadanými polyminy. Podmínkou je, že se polymina nesmí překrývat a zároveň nesmí žádné pole zůstat nepokryté. Při řešení těchto úloh se žák rozvíjí v oblasti kombinatoriky, zejména v hledání organizačních principů. To je, jak uvádí Vondrová (2024), spolu s využíváním vhodných reprezentací a porozuměním textu, což se v některých těchto úlohách též rozvíjí, jádrem kombinatoriky. Ve většině úloh jde o kombinatorické skupiny s opakováním, pouze v malém množství úloh bez opakování. Úlohy na pokrývání mohou mít velmi různou náročnost od těch, které zvládne pomocí manipulace vyřešit žák prvního ročníku základní školy až po velmi náročné, případně dosud nevyřešené. Některé z těch dosud nevyřešených jsou uvedené například v publikaci Some Open Problems in Polyomino Tilings (Winslow, 2018). Různou náročnost těchto úloh způsobuje velikost a tvar pokrývané plochy a počet a druh polymin, kterými se má plocha pokrýt. Porovnejme následující úlohy.

Úloha 1

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, propedeutika kombinatoriky, diofantická rovnice, hledání více řešení

Obdélník 20×2 *pokryjte několika parketami:*



Kolik kterých parket jste použili? Hledejte více řešení.

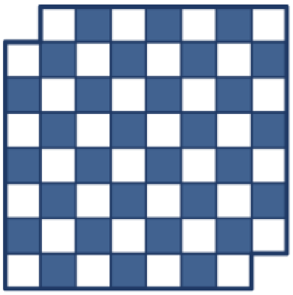
(Hejný et al., 2015a, s. 43)

Úloha 2

Cílový ročník: 9.

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, manipulace, propedeutika kombinatoriky, úloha nemá řešení, zdůvodnění neexistence řešení, šachovnice

Ze šachovnice 8 × 8 *jsou vyříznuta dvě protilehlá rohová pole. Pokryjte ji pouze parketami* .



(Hejný et al., 2017, s. 48)

V první úloze se pokrývá plocha dvěma polyminy a v druhé pouze jedním. Liší se i velikost a tvar pokrývané plochy. Lze si také všimnout, že v první uvedené úloze má žák nalézt více řešení, oproti tomu druhá úloha nemá řešení vůbec, protože každé umístění parkety pokryje jedno bílé a jedno modré pole. Vzhledem k tomu, že modrých polí je méně než bílých, nelze celou podlahu pokrýt. Počet řešení též mění náročnost dané úlohy. Úlohy, kde má žák hledat více řešení nebo které naopak nemají řešení, jsem našla převážně jen v učebnicích nakladatelství H-mat.

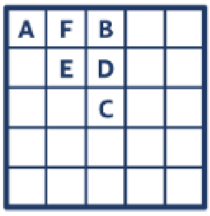
Někdy může mít úloha ještě doplňující podmínku, která mění její náročnost, jako například úloha 3.

Úloha 3

Cílový ročník: 9.

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, manipulace, propedeutika kombinatoriky, hledání více řešení, úloha s doplňující podmínkou

Pomocí jednoho  *a několika*  *pokryjte čtverec* 5 × 5 *tak, že*  *položíte na pole*



a) A b) B c) C.

(Hejný et al., 2017, s. 48)

V učebnicích nakladatelství H-mat pro 2. stupeň se úlohy na pokrývání objevují převážně v dílech A a E, po jedné nebo dvou úlohách jsem našla i v dílech B a C[6]. Některé jsem už využila výše a některé další z nalezených úloh zde ještě zmíním.

V těchto učebnicích jsou polymina součástí didaktického prostředí[7] Parkety, ve kterém žáci řeší úlohy s polyminy již od prvního ročníku. *Parketami* jsou v tomto prostředí právě polymina. Těmi pokrývají plochu, která se zde nazývá *podlaha* (H-mat, o.p.s., ©2018). Toto pojmenování nabízí žákům možnost propojit si řešené úlohy s reálnou situací. V úlohách je vždy žákům nabídnuta *Galerie* neboli soubor polymin, které mohou nebo musí při řešení použít (Malcová, 2016). Učebnice postupně zavádí devět druhů parket. Jejich výčet a pojmenování v učebnicích je na obrázku (viz obrázek 10). V některých úlohách je navíc použita parketa *okle*, která je osově souměrná s parketou *elko*.

Obrázek 10

Výčet parket

(H-mat, o.p.s., ©2018)

Žáci při řešení úloh využívají i manipulativní didaktickou pomůcku, kterou tvoří parkety ze dřeva, nebo jiného pevného materiálu, a čtvercová deska s naznačenou čtvercovou sítí o stejné velikosti čtverců jako ty, ze kterých jsou parkety vytvořeny. Díky tomu mohou žáci hledat řešení úloh pomocí manipulace a snadněji najdou i více řešení zadané úlohy.

Úloha 4

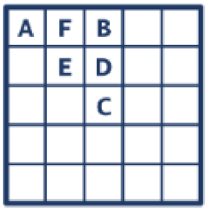
Cílový ročník: 9.

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, manipulace, propedeutika kombinatoriky, úloha nemá řešení, zdůvodnění neexistence řešení, šachovnice

[6] Sada učebnic pro 2. stupeň základní školy nakladatelství H-mat nemá učebnice číslované po ročnících, ale je tvořena díly A až F, které na sebe postupně navazují. Jedna učebnice však zpravidla nepokrývá celý ročník.

[7] Pojem používán v souladu s pojetím Hejného (např. Práce v prostředích: učíme se opakovanou návštěvou, ©2024)

Vysvětlete, proč není možné takové parketování uskutečnit, když  *leží na poli a) D b) E c) F.*



(Hejný et al., 2017, s. 48)

Úloha 4 navazuje na úlohu 3 a pracuje s obrázkem, který je její součástí. Pro přehlednost jsem zde obrázek zařadila znovu. V této úloze jde o snahu dokázat nebo spíše vyvrátit všechny možnosti položení *růžku*. Jinak by se dalo říct, že žák má vždy najít pole, které nelze pokrýt *růžkem*. K řešení úlohy by mohlo také pomoct znázornění podlahy jako šachovnice. To je v učebnici až za touto úlohou, ale možná to někdo z žáků odhalí už zde.

Úloha 5

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, manipulace, propedeutika kombinatoriky, diofantická rovnice, hledání více řešení

Obdélník 7×2 *pokryjte pouze parketami*  *a* . *Kolik kterých parket použijete? Hledejte více řešení co do počtu použitých parket.*

(Hejný et al., 2015a, s. 42)

Pátá úloha se zdá na první pohled jako běžná úloha na pokrývání. Její potenciál je ale mnohem větší. Zajímavé je zaměřit se na to, kolik kterých druhů parket můžeme při řešení úlohy využít. Toto zkoumání může vést až k diofantické rovnici ve tvaru $3x + 2y = 7 \cdot 2$. Rovnice vyjadřuje, že parketa *3I* zabírá tři pole, parketa *duo* dvě pole a dohromady to musí dát počet polí, kterými je tvořena podlaha, tedy čtrnáct. Poté ověřujeme, zda lze pomocí dané kombinace parket *3I* a *duo* podlahu pokrýt (Hejný et al., 2015c). Podobně můžeme postupovat i při řešení úlohy 1 výše.

Úloha 6

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, manipulace, propedeutika kombinatoriky, hledání více řešení, argumentace, šachovnice, souměrnost

Jedinou parketou  *a čtyřmi*  *pokrývejte čtverec* 3×3. *Vyjasněte, na kterém poli čtverce může ležet* .

(Hejný et al., 2015a, s. 42)

Další úloha a jí podobné, které po ní v učebnici následují, připravují žáka na složitější úlohy, které se pak objevují v díle E, případně na další zajímavé úlohy založené na stejném principu. V prvních úlohách, jako je tato, se očekává, že je budou žáci řešit experimentálně. Postupně ale nejspíš budou přicházet na nějaká pravidla. K tomu bude později pomáhat znázornění podlahy jako šachovnice, jak tomu bylo v úloze 2. Důležité je zde slovo *vyjasněte*, které naznačuje, že úloha rozvíjí argumentaci žáků, kdy budou muset obhájit před spolužáky, kde parketa *mono* ležet může a kde naopak ne.

Úloha 7

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, propedeutika kombinatoriky, hledání více řešení, argumentace, zobecňování, šachovnice, souměrnost

Pomocí jednoho  *a několika*  *pokrývejte čtverec: a)* 4×4 *b)* 8×8 *c)* 16×16 *d)* 32×32. *Vyjasněte, na kterém poli čtverce může ležet mono.*

(Hejný et al., 2015a, s. 43)

Jednou z úloh, které postupně navazují na předchozí, je úloha 7. Jedná se o úlohu, která cílí na zobecňování získaných poznatků. Opět úloha pracuje také s argumentací žáků.

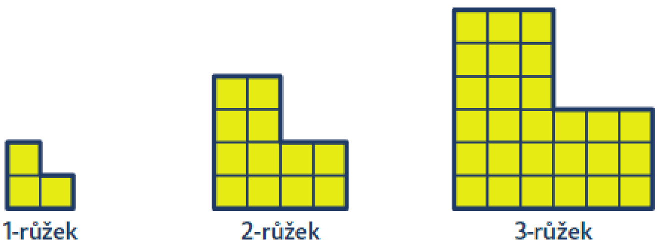
Podobnou úlohou, i když se to na první pohled možná nezdá, je úloha 8 z dílu C.

Úloha 8

Cílový ročník: 7. – 8.

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, argumentace, propedeutika kombinatoriky, gradace, zobecňování

Parketu růžek nazveme též 1-růžek. Na obrázku jsou n*-růžky pro* $n = 1, 2, 3$.



a) Pokryjte 2-růžek několika 1-růžky.

b) Totéž řešte pro 3-růžek i 4-růžek.

c) Dá se z 225 1-růžků vytvořit nějaký n-růžek? Jaké bude n?

d) Jaký největší n-růžek můžete vytvořit, když máte 263000 1-růžků?

(Hejný et al., 2016, s. 79)

Tato úloha pracuje ještě více se zobecňováním a s pochopením principu. Zadání a) až d) jsou v této úloze postupně gradovaná, takže žák může postupovat podle svých schopností a není nutné, aby vyřešil vše. Zadání c) a d) se od prvních dvou liší v tom, že nemáme zadanou podlahu a nehledáme počet potřebných *1-růžků* na pokrytí, ale naopak máme zadaný počet *1-růžků* a zjišťujeme, zda jimi lze pokrýt nějaký větší *růžek*.

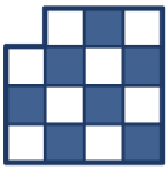
Úloha 9

Cílový ročník: 9.

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, manipulace, propedeutika kombinatoriky, argumentace, hledání všech řešení, šachovnice, souměrnost

a) Jedním  *a sedmi*  *pokryjte šachovnici 4×4, ze které je vyříznuto rohové pole.*

b) Najděte všechna pole, na která je možné položit .



(Hejný et al., 2017, s. 48)

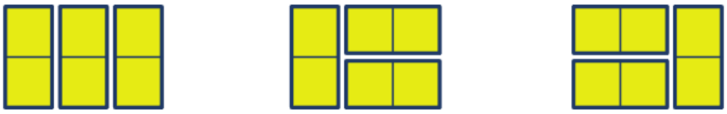
Úloha 9 částečně navazuje na úlohu 6. Ovšem poprvé se zde v učebnici zobrazuje podlaha jako šachovnice. Žáci díky tomu, možná s pomocí učitele, přijdou na to, že parketa *mono* může ležet pouze na bílých polích, ale z nich na kterémkoliv. Pro zaplnění zbylé plochy parketami *duo* je totiž nutné mít stejný počet bílých a černých polí. Tento objev je důležitý pro řešení některých složitějších úloh zaměřených na pokrývání plochy polyminy.

Úloha 10

Cílový ročník: 6. – 7.

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, propedeutika kombinatoriky, hledání všech řešení, zobecňování, Fibonacciho posloupnost, evidence řešení

Obdélník 3×2 *lze třemi různými způsoby pokrýt parketami*  *(viz obrázky).*



Zjistěte, kolika různými způsoby se dá parketami  *pokrýt obdélník:*

a) 4×2 *b)* 5×2 *c)* 6×2 *d)* 7×2.

(Hejný et al., 2015b, s. 36)

Podstatou úlohy 10 je najít všechny možnosti, jak plochu pokrýt danými polyminy. Úloha cílí nejen na hledání všech řešení, ale také směřuje na hledání vhodného záznamu nalezených řešení. Na tuto úlohu navazuje úloha v dílu E (Hejný et al., 2017), kde se dále zvětšují obdélníky na 8×2, 9×2 atd. až po 14×2. Součástí té úlohy je i tabulka, kam žáci zapisují počet možných pokrytí. Žáci v ní nejspíše brzy objeví pravidelnost, že se počet všech pokrytí zvyšuje podle Fibonacciho posloupnosti (nejde o pojmenování, ale o vysvětlení pravidla posloupnosti). S výsledky pak pracuje úloha v pracovním sešitě, kde žáci počítají pravděpodobnost různých druhů pokrytí (Hejný et al., 2019).

Posledním typem úloh, které jsem v učebnicích našla a které bych zařadila k pokrývání, se zaměřují na rozdělení plochy na daný počet shodných částí. Zajímavost úloh je v tom, že v zadání není napsané, jak mají tyto části vypadat. Těmito částmi je nakonec vždy nějaké polymino. Úlohy tohoto typu lze jako jediné v souvislosti s pokrýváním najít i v jiných učebnicích než v učebnicích H-mat.

Úloha 11

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, není zadaný tvar parkety, úloha s doplňující podmínkou

HLAVOLAM

Čtverec na obrázku rozděl na čtyři části stejného tvaru i velikosti tak, aby každá část obsahovala dvě hvězdičky.

(Brlicová et al., 2021a, s. 18)

V této úloze z učebnice Didaktis má žák rozdělit plochu na čtyři shodné části tak, aby všechny obsahovaly stejný počet hvězdiček, tedy dvě. Spolu s tím si musí uvědomit, že každý díl bude obsahovat celkem čtyři čtverce. Poté už, nejspíše experimentálně, hledá řešení úlohy. V úloze není sice slovo *pokrývat*, nýbrž *rozdělovat*, ale podstata je stejná. Stejné je to v další úloze.

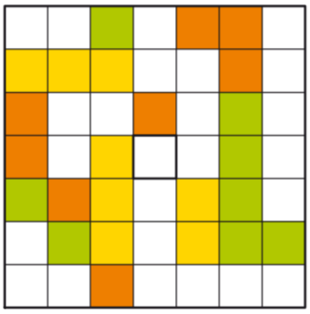
Úloha 12

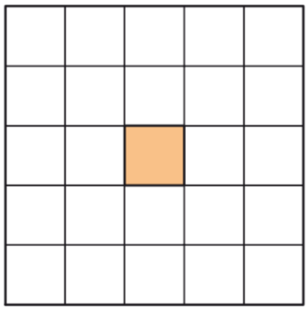
Cílový ročník: 8.

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, není zadaný tvar polymin, úloha s doplňující podmínkou

Čtvercovou mozaikovou dlaždici rozdělte na 4 shodné části tak, aby v každé z částí byl stejný počet žlutých, oranžových a zelených dlaždiček. Prostřední čtvereček vynechejte.

Plochu s 24 políčky rozdělte na 6 shodných částí. Prostřední čtvereček vynechejte.





(Binterová et al., 2009, s. 8)

Podobná úloha, jako je úloha 11, je i v učebnici Fraus nalevo. V úloze má však každá část místo hvězd obsahovat stejný počet čtverců od každé barvy, tedy dva žluté, dva oranžové a dva zelené. Napravo jde o běžnější úlohu na pokrývání, kde má žák rozdělit plochu na šest shodných částí bez nějaké doplňující podmínky.

Obě tyto úlohy jsou v učebnicích uvedeny tak trochu navíc jako hlavolamy, logické hádanky, čímž se jejich využití liší od toho v učebnicích H-mat, kde jde o systematickou dlouhodobou práci.

Úloha 13

Cílový ročník: 6. – 7.

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, není zadaný tvar polymin, podlaha není umístěna v mříži

Rozdělte růžek na 4 shodné části.

(Hejný et al., 2015b, s. 33)

V úloze 13 z učebnice H-mat dělíme velký *růžek* na čtyři shodné části. Žák zjistí, že těmito částmi jsou opět *růžky*. Vyšší náročnost oproti předchozí úloze je v tom, že velký růžek není umístěn do čtvercové mříže, takže žáci netuší, že řešením budou polymina/parkety. Naopak zde ale není žádná doplňující podmínka. Tato úloha je o učebnici dál než úloha 7, ale zase o učebnici dříve než úloha 8. Žáci tedy mohou využít to, na co už přišli dříve, a zároveň objev z této úlohy jim může pomoct při řešení dalších úloh. Postupně tak žáci získávají poznatky, které jim pomáhají řešit úlohy stále více systematičtěji. Stejná úloha, ovšem umístěná do mříže, je v učebnici Taktik pro 6. ročník základní školy (Nováková et al., 2019).

3.2 Úlohy zaměřené na shodná zobrazení

Do druhé skupiny jsem zařadila úlohy z učebnic, které se věnují shodnosti útvarů. V rámci učebnic matematiky se jedná o častěji zařazované úlohy, než je tomu u úloh na pokrývání. Důvodem je pravděpodobně přímočařejší souvislost s konkrétními požadovanými výstupy v rámci výuky matematiky. V učebnicových řadách SPN a Taktik jsou úlohy tohoto typu přítomny zpravidla jen ve velmi malém počtu. Dohromady ovšem nalezené úlohy pokrývají různé shodnosti a ukazují tedy, jak široké mají polymina v této oblasti využití.

V učebnici Didaktis nenajdeme žádnou úlohu s polyminy, která by cílila na učivo o shodných útvarech. Polymino je zde pouze použito jako znázornění přímé shodnosti. Pro ukázku shodnosti nepřímé už byl využit jiný útvar. Takže využití právě polymina v první části bylo nejspíš nezáměrné, jen autorovi tento tvar přišel názorný (Brlicová et al., 2021b).

K procvičování přímé a nepřímé shodnosti jsou polymina využita ve dvou úlohách v učebnicích nakladatelství SPN. V obou jsou znázorněny útvary v mříži a jde v nich o rozhodnutí, která polymina jsou shodná přímo a která nepřímo. U první v učebnici pro

6. ročník základní školy je to rovnou napsáno, že má žák rozhodnout, které obrazce jsou shodné přímo a které nepřímo (Půlpán & Čihák, 2019a). Do této práce jsem zařadila zajímavější úlohu 14 z učebnice pro 7. ročník základní školy, kde přímá a nepřímá shodnost nejsou přímo pojmenovány.

Úloha 14

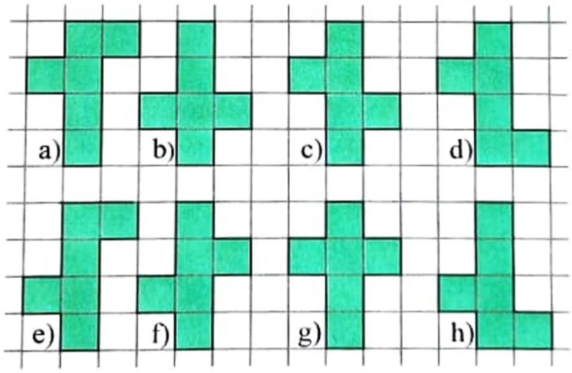
Cílový ročník: 7.

Klíčová slova a matematické poznatky: přímá a nepřímá shodnost, manipulace

Prohlédněte si obrázek. Jednotlivé obrazce postupně překreslete na průsvitku a přikládáním těchto kopií na další obrazce zjistěte, které z nich jsou shodné.
Shodné obrazce vyhledávejte dvěma způsoby:

a) *Průsvitku s okopírovaným obrazcem nepřeklápějte na rub, ale jen ji vhodně posunujte nebo otáčejte.*
b) *Průsvitku s okopírovaným obrazcem překlopte na rub a potom ji vhodně posunujte a otáčejte.*

Vypište dvojice obrazců, u nichž jste zjistili shodnost postupem a) a postupem b).



(Půlpán & Čihák, 2008, s. 15)

Jde o manipulativní úlohu, která by šla výborně využít k objevování přímé a nepřímé shodnosti. Díky manipulaci žáci lépe pochopí rozdíl mezi oběma shodnostmi. Zde úloha trochu nešťastně následuje až po první zmíněné ve chvíli, kdy už žáci přímou a nepřímou shodnost znají. Potenciál úlohy zde tedy není naplno využit.

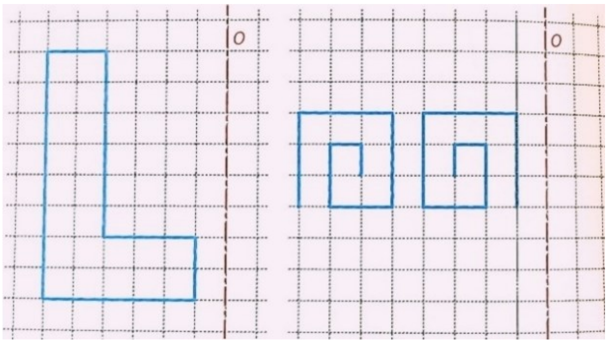
Pro pochopení přímé a nepřímé shodnosti lze manipulaci využít i při hledání více řešení v úlohách na pokrývání. Protože žáci brzy narazí na diskuzi o tom, zda se jejich řešení počítá jako nové, když je stejné jako už vytvořené, ale otočené nebo překlopené. Tím narážíme na rozdíl mezi jednotlivými typy polymin.

Úloha 15

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: osová souměrnost, nutnost překreslení zadání do sešitu, využití čtvercové sítě

Nakresli obrázky do čtvercové sítě a zobraz je v osové souměrnosti s osou o.



(Nováková et al., 2019, s. 94)

Polymina se v některých řadách učebnic využívají i pro výuku osové souměrnosti na 1. stupni základní školy. Na 2. stupni jsou takové úlohy již pouze výjimečně, což je škoda. Takové úlohy jsem našla v učebnici Taktik, kde jsou tři podobné úlohy. V uvedené úloze 15 je polymino pouze to nalevo. Žák si musí útvar a osu nejprve správně překreslit do sešitu, a poté ho zobrazuje v osové souměrnosti.

Úloha 16

Cílový ročník: 9.

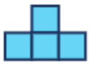
Klíčová slova a matematické poznatky: středová souměrnost, pokrývání, zdůvodnění neexistence řešení

Zjistěte, zda existuje středově souměrné pokrytí

a) *čtverce* 8×8 *jedním monem*  *a několika růžky* 

b) *čtverce* 8×8 *několika elky* 

c) *čtverce* 6×6 *několika elky* 

d) *čtverce* 8×8 *jednou čtyřkou* *, několika elky*  *a několika parníky* .

(Hejný et al., 2017, s. 33)

Využití polymin v souvislosti s tématem středové souměrnosti jsem našla po jedné úloze v učebnicích Taktik pro 7. a 8. ročník základní školy, kde jde pouze o nakreslení středově souměrného útvaru v mříži (Danihelová et al., 2020; Homola et al., 2021), a ve dvou úlohách v učebnicích H-mat. V těchto dvou úlohách jde opět o pokrývání, ovšem s cílem naučit žáky, co je to středová souměrnost. Z těchto úloh jsem vybrala úlohu 16, protože v ní nejde jen o to pokrýt podlahu středově souměrně. Pro žáka je úloha o něco obtížnější, protože musí rozhodnout, zda lze vůbec středově souměrně podlahu se zadanými parketami pokrýt a v nejlepším případě své tvrzení zdůvodnit. Žáci se tedy opět setkávají i s úlohami, které nemají řešení. Ty jsou přínosné právě pro budování schopnosti dokazovat tvrzení. Aby mohl žák dokázat neřešitelnost některého z uvedených zadání, musí si uvědomit princip středové souměrnosti. Ke každému vzoru totiž potřebuje jeho obraz, tedy počet stejných parket musí být sudý. V opačném případě musí být lichá parketa sama středově souměrná a její střed musí ležet ve středu souměrnosti. Na základě těchto poznatků lze již snadno rozhodnout o řešitelnosti uvedených zadání.

Úloha patřící do této kapitoly je ještě v učebnici Taktik pro 6. ročník základní školy (Nováková et al., 2019), kde jsou na obrázku polymina a žák má na čtverečkovaný papír nakreslit útvary shodné s těmi na obrázku. Vzhledem k tomu, že zde není uvedeno, o jakou shodnost jde, má úloha mnoho řešení. Myslím si ale, že žáci zvolí nejsnazší variantu a polymina překreslí identicky s těmi na obrázku. U této úlohy by bylo vhodné, aby učitel chtěl po žáci více řešení, čímž by úlohu více využil.

3.3 Úlohy zaměřené na propojení 2D a 3D

Tuto kapitolu jsem se rozhodla rozdělit na dvě podkapitoly. První z nich ukazuje polymina v učebnicích jako sítě krychle a druhá pracuje s polyminy jako půdorysem, nárysem a bokorysem krychlového tělesa.

3.3.1 Polymina jako sítě krychle

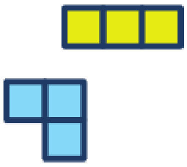
V mnoha učebnicích se polymina nejčastěji objevují ve spojení s tělesy, převážně s krychlí. Všechny sítě krychle jsou totiž hexamina. Obráceně, že by všechna hexamina byla sítě krychle, to ale neplatí, což žáci zjistí nejsnáze pomocí manipulace. Tomu se věnují některé úlohy v učebnicích H-mat. Na objevování různých sítí krychle se zaměřuje první skupina úloh této podkapitoly.

Úloha 17

Cílový ročník: 7. – 8.

Klíčová slova a matematické poznatky: sítě krychle, manipulace, přímá a nepřímá shodnost, hledání více řešení, prostorová představivost

Najděte síť krychle, kterou lze vytvořit ze dvou: a) žlutých trimin b) modrých trimin. Hledejte více řešení.



(Hejný et al., 2016, s. 27)

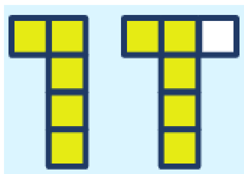
V úloze 17 žáci hledají různé sítě krychle spojováním polymin. Podobných úloh je v učebnicích více a cílí na to, aby žáci postupně našli všechny sítě krychle a uměli vysvětlit, že jsou opravdu všechny. Nejspíš to budou vysvětlovat tak, že vezmou všechna hexamina, jejichž součástí je parketa *4I*, a budou rozhodovat, zda jsou sítěmi krychle. Totéž pak udělají s hexaminy obsahujícími parketu *3I*, ale ne *4I* a nakonec s hexaminy s parketou *duo*, ale ne *3I* ani *4I*. Buď si mohou vytvořené hexamino vystřihnout a složit, aby se přesvědčili, zda je to síť krychle, nebo už to zvládají pomocí představy bez manipulace.

Úloha 18

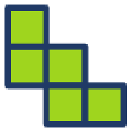
Cílový ročník: 7. – 8.

Klíčová slova a matematické poznatky: sítě krychle, manipulace, přímá a nepřímá shodnost, hledání více řešení, prostorová představivost

Na obrázku je pentamino a síť krychle, která z něj vznikla přiložením jednoho čtverce.



a) *Přiložením jednoho čtverce ke žlutému pentaminu lze vytvořit další 3 sítě krychle. Najděte je.*



b) *Přiložením jednoho čtverce k zelenému pentaminu lze vytvořit síť krychle čtyřmi způsoby. Najděte je.*

Vzniknou tak dvě různé sítě krychle.

(Hejný et al., 2016, s. 26)

Ve fázi hledání všech sítí je důležitá diskuze, kdy žáci řeší, které z nalezených sítí jsou stejné, což vede spolu s dalšími úlohami k porozumění přímé a nepřímé shodnosti. Například v úloze 18 v části b) žáci najdou síť krychle přiložením jednoho čtverce na čtyři různá místa. Vzniknou tak ale pouze dvě různé sítě krychle.

Úloha 19

Cílový ročník: 7. – 8.

Klíčová slova a matematické poznatky: sítě krychle, manipulace, zadání se slovesem v záporu, argumentace nemožnosti z daného polymina vytvořit síť krychle

a) *Najděte pentamino, ze kterého nelze vytvořit síť krychle přiložením jednoho čtverce.*
b) *Najděte tetramino, ze kterého nelze vytvořit síť krychle přiložením dvou čtverců.*

(Hejný et al., 2016, s. 26)

Ve většině těchto úloh je důležitá argumentace. V úloze 19 mají žáci oproti předchozí úloze najít polymino, ze kterého síť krychle vytvořit nejde. Zaprvé tím poznávají, že ne z každého teramina a pentamina lze vytvořit síť krychle. Zadruhé se učí obhájit své tvrzení, protože argumentovat, proč to nejde, je mnohem náročnější než ukázat, že to jde. A zatřetí rozvíjí schopnost pozorně číst zadání, protože pracují se zadáním se záporem, což není tak obvyklé.

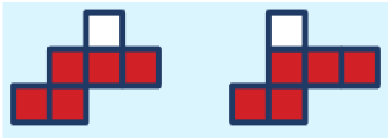
Další úroveň, ke které mohou sloužit úlohy výše a jim podobné, je dokázat, že třída našla všechny sítě krychle. Pokud už i to se žákům podařilo, mohou v dalších úlohách sadu sítí efektivně využít k řešení úloh. Příkladem je následující úloha 20.

Úloha 20

Cílový ročník: 7. – 8.

Klíčová slova a matematické poznatky: souvislosti mezi sítěmi krychle, hledání více řešení, tranzitivita

Na obrázku jsou dvě různé sítě krychle, které byly vytvořeny ze stejného pentamina. Takové sítě krychle nazveme 5-příbuzné.



Najděte tři různé sítě krychle X, Y, Z tak, aby:

- *síť X byla 5-příbuzná se sítí Y;*
- *síť Y byla 5-příbuzná se sítí Z;*

a navíc aby:

a) *síť Z byla 5-příbuzná se sítí X*

b) *síť Z nebyla 5-příbuzná se sítí X.*

(Hejný et al., 2016, s. 27)

V úloze 20 se pracuje s pojmem 5-příbuzné sítě krychle. Vysvětlení tohoto pojmu pomocí obrázku je součástí úlohy – jde o sítě, které vznikly ze stejného pentamina přidáním jednoho čtverce. Žáci pozorují sadu všech sítí krychle, na které už přišli, a zaznamenávají si, které z nich jsou navzájem 5-příbuzné. Díky tomu mohou snadno vyřešit úlohu. Pokud ještě všechny sítě nemají, může jim tato úloha pomoct najít další. Také je může navést k tomu, jak ukázat, že našli už všechny sítě, pokud si tím ještě nejsou jistí. V úloze možná bude pro žáky zajímavé, že existují skupiny, pro které neplatí a), tedy tranzitivita. Pokud si toho nevšimnou, může je na to pomocí otázek přivést učitel. V souvislosti s tím si mohou ukázat, že například u relací „být větší než" nebo „být dělitelem" tento vztah platí.

Ve většině sad učebnic, které jsem procházela, žáci sítě krychle neobjevují. Buď jim je rovnou předložen výčet sítí[8], nebo se v učebnicích pracuje pouze s některými sítěmi. Někdy je to tím, že sítím krychle se žáci věnovali na 1. stupni základní školy a zde už jde pouze o jejich připomenutí několika úlohami před navázáním sítěmi ostatních těles.

Úloha 21

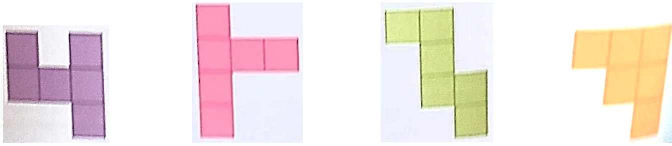
Cílový ročník: 7.

Klíčová slova a matematické poznatky: sítě krychle, argumentace, prostorová představivost, výběr z možností

[8] Například v učebnicích nakladatelství Didaktis.

Na kterém z obrázků není *síť krychle?*
Pozorně si prohlédni sítě na obrázcích A-D.

a) *Rozhodni, ze kterých obrázků A-D je možné poskládat krychli.*
b) *Dokážeš dokreslit na stěny krychle oka (puntíky) tak, aby vznikla hrací kostka? Nápověda: Zjisti, jaký je součet počtu ok na protějších stranách hrací kostky.*



(Danihelová et al., 2020, s. 112)

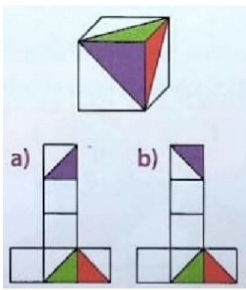
Často je v učebnicích úloha podobná úloze 21, kde mají žáci rozhodnout, které polymino je sítí krychle. Kromě učebnice Taktik je i v učebnicích Didaktis a Prometheus. Konkrétně v této úloze žáci nejen rozhodují, které polymino je sítí krychle, ale navíc mají síť doplnit puntíky, aby vznikla hrací kostka. V úloze v učebnici Prometheus (Odvárko & Kadleček, 2023a) žáci pracují se zadáním v záporu, takže hledají, které z polymin není síť krychle. V tomto případě to mají zjednodušené, protože je slovo v záporu zvýrazněné, aby si toho snáze všimli.

Ve druhé skupině úloh zaměřené na sítě krychle žák propojuje určité sítě s konkrétními krychlemi. Žák si v nich představí, jak krychli ze sítě složí, a na základě toho rozhodne, která síť patří ke krychli.

Úloha 22
Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: propojení krychle a její sítě, argumentace, prostorová představivost, výběr z možností

HLAVOLAM
Která ze sítí odpovídá krychli na obrázku?



(Brlicová et al., 2021a, s. 123)

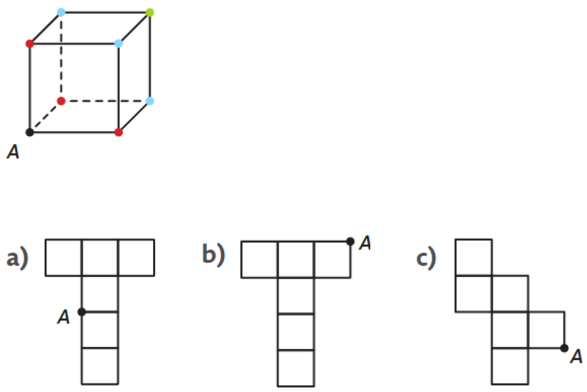
V úloze 22 přiřazuje žák síť ke krychli podle toho, která část stěny krychle je obarvena fialovou barvou. Žák vlastně hledá vrchol, který bude mít horní čtverec sítě společný se zeleným i červeným trojúhelníkem.

Úloha 23

Cílový ročník: 7. – 8.

Klíčová slova a matematické poznatky: propojení krychle a její sítě, úhlopříčky krychle, vlastnosti krychle, prostorová představivost

Podle obrázku obarvěte příslušnými barvami body na síti krychle.



(Hejný et al., 2016, s. 28)

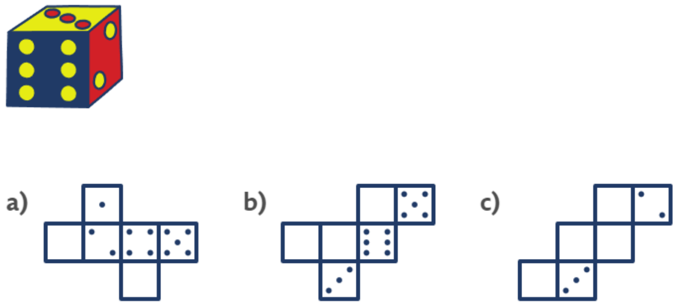
V úloze 23 žák obarvuje stejnou barvou vrcholy sítě podle toho, který vrchol krychle tvoří. V této úloze i v úloze 21Úloha 21 si mohou žáci s větší či menší pomocí učitele uvědomit pravidlo, že v jednom vrcholu se vždy stýkají právě tři hrany krychle. Tato úloha ale cílí i na vztahy mezi vrcholy. Pokud si žák uvědomí, že červené vrcholy s bodem A spojují hrany, modré body stěnové úhlopříčky a zelený bod tělesová úhlopříčka, stačí, aby si do sítě zakreslil všechny vrcholy, kde bude bod A, a poté si vyznačil, kudy budou vést spojující hrany a úhlopříčky.

Úloha 24

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: propojení krychle a její sítě, prostorová představivost

Doplňte puntíky do prázdných polí tak, aby vznikla síť hrací kostky. Počty puntíků na protilehlých stěnách dávají součet 7.



(Hejný et al., 2015a, s. 7)

Poslední úloha této kapitoly se v různých obměnách často objevuje i jako hlavolam v časopisech pro děti. Jde o dokreslení puntíků do sítě hrací kostky. Obtížnost úlohy je v tom, že nestačí správně rozhodnout, na které straně bude jaké číslo, ale je třeba ještě zjistit, jak mají být puntíky u některých čísel natočeny. V řešení této úlohy může žákům pomoct manipulace – vystřižení sítě a její skládání. Úlohy na doplňování puntíků i jiných ornamentů do sítě hrací kostky jsou i v učebnicích Taktik pro 6. a 7. ročník základní školy (Nováková et al., 2019; Danihelová et al., 2020). V učebnici pro 6. ročník je i úloha, v níž má žák rozhodnout, která ze tří nabízených sítí zobrazuje správně hrací kostku, a svou odpověď zdůvodnit.

Jednodušší variantu úlohy lze nalézt v učebnici Didaktis (Brlicová et al., 2021a), kde nejde o čísla, ale jen o barvu strany krychle, takže žák nemusí řešit natočení. Rozdíl v úlohách je dále ten, že ve zmíněné úloze se nedoplňuje síť podle krychle, jako je tomu v úloze 24, ale krychle podle sítě.

Z této podkapitoly je zřejmé, že úlohy na sítě krychle jsou v učebnicích časté, ale pouze učebnice nakladatelství H-mat na ně žáky důsledně systematicky připravují. To může souviset s tím, jak je vnímána prostorová představivost. Je možné, že žáci vzdělávaní podle učebnic H-mat by řešili úlohy v ostatních učebnicích lépe a efektivněji.

3.3.2 Polymina jako průměty

V této části budou polymina tvořit kolmé průměty krychlového tělesa do roviny – při pohledu shora na těleso půdorys, při pohledu zboku bokorys a při pohledu zepředu nárys. Jde o jeden z jazyků popisu krychlového tělesa. „Jazyk je obtížný tím, že představu o tělese je nutno vytvořit z jeho tří průmětů. Domníváme se, že právě tato reprezentace krychlového tělesa významně přispívá ke kultivaci prostorové představivosti.“ (Jirotková, 2010, s. 72)

Úloha 25

Cílový ročník: 6.

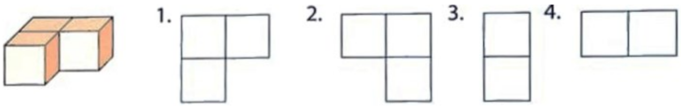
Klíčová slova a matematické poznatky: kolmé průměty krychlového tělesa do roviny, prostorová představivost, výběr z možností

Vyberte obrázek, který zobrazuje tři krychle.

a) zepředu

b) zprava

c) shora



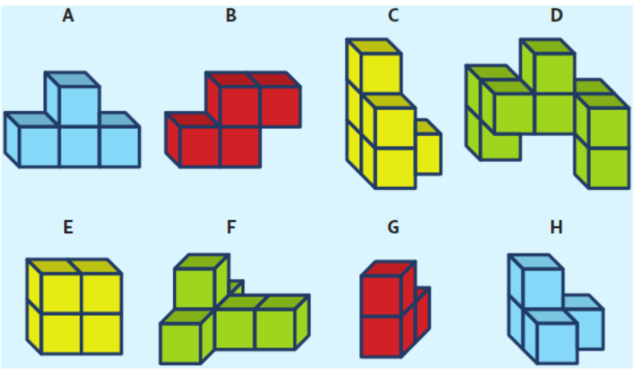
(Nováková et al., 2019, s. 153)

Úloha 25 je z úloh této podkapitoly nejjednodušší. Žák v ní má pouze vybrat z polymin to, které je jeho zobrazením zepředu, zprava a shora. Nemusí pohledy ani těleso sám vymýšlet. Zároveň úloha pracuje se zjednodušenými pojmy, než je půdorys, nárys a bokorys. Myslím si, že by bylo vhodné se u úlohy zastavit a zeptat se žáků i na pohled zleva. Pokud by měli k dispozici krychličky, dala bych jim za úkol postavit takové těleso, kde bude pohled zprava jiný než zleva. Po několika pokusech by zjistili, že to nejde, a mohli bychom si říct, že by v zadání klidně mohlo být *z boku* místo *zprava* a řešení by bylo stejné. Tím bych je postupně připravovala na pojem *bokorys*.

Úloha 26

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: kolmé průměty krychlového tělesa do roviny, prostorová představivost, výběr z možností, hra Sova



Dana: „Filipe, hádej, na které těleso z galerie osmi krychlových těles A až H myslím.“

Filip: „Je vytvořeno přesně z 4 krychlí?“

Dana: „Ne.“

Filip: „Můžu ho natočit tak, že ho vidím jako elko  *?“*

Dana: „Ano.“

Filip: „Je možné přemístěním jedné krychle vytvořit kvádr?“

Dana: „Ano.“

Filip: „Já už vím.“

Víte i vy?

(Hejný et al., 2015a, s. 39)

Úloha 26 vychází ze hry Sova, která se objevuje v učebnicích H-mat již od 1. stupně základní školy. Hra spočívá v tom, že jeden hráč si myslí nějaký objekt z galerie a druhý hádá pomocí otázek na ano/ne, který objekt si myslí. Zde jsem úlohu zařadila z důvodu druhé Filipovy položené otázky. Otázka je cílena na libovolný z kolmých průmětů tělesa do roviny, takže Dana si musí představit všechny pohledy, aby správně odpověděla. Na tuto úlohu navazuje další, kde je využita Filipova otázka, jen je vyměněno *elko* za jinou parketu. Žáci díky podobným otázkám postupně zjistí, že polymino jako pohled na krychlovou stavbu může vzniknout pouze ze šesti pohledů. Z nich vytřídí tři, které jim stačí k odpovědi na otázku.

V dalších úlohách žáci nevybírají řešení z nabídky, ale mají ho sami vytvořit.

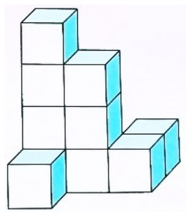
Úloha 27

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: kolmé průměty krychlového tělesa do roviny, rýsování průmětů, prostorová představivost

Na obrázku je těleso složené z 10 stejných krychliček o hraně 1 cm. Nakresli pohled na toto těleso:

- *zepředu (tzv. nárys)*
- *shora (tzv. půdorys)*
- *z boku zprava (tzv. pravý bokorys).*



(Brlicová et al., 2021a, s. 121)

V úloze 27 mají žáci nakreslit všechny tři pohledy na těleso. To už je náročnější než vybrat z nabídky a žák si musí umět dobře pohled představit. Zároveň se zde již objevují pojmy nárys, půdorys a bokorys, konkrétně pravý bokorys, ale opět můžeme mluvit s žáky o tom, zda je ta strana důležitá. Stejná úloha je i v učebnici Prometheus, jen jsou zde v zadání tři krychlové stavby místo jedné a nejsou uvedeny pojmy nárys, půdorys a bokorys (Odvárko & Kadleček, 2022).

Úloha 28

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: půdorys, propedeutika kombinatoriky, manipulace, hledání více řešení, argumentace nalezení všech řešení, prostorová představivost

Z 4 krychlí vytvořte krychlové těleso, které má půdorys ve tvaru růžku *. Najděte všechna taková tělesa.*

(Hejný et al., 2015a, s. 40)

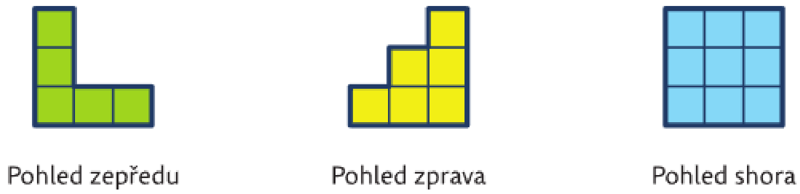
Úlohy, jako je úloha 28, ve kterých má žák podle jednoho průmětu postavit krychlové těleso z jistého počtu krychlí, propojují geometrii s kombinatorikou. „Zásluha na tom, že se tato oblast geometrie dostala do české učebnicové literatury, patří především F. Kuřinovi, který přinesl do školské geometrie celou sérii podnětů a zajímavých didaktických myšlenek." (Jirotková, 2010, s. 72) Opět jde zde hlavně o hledání klíče, podle kterého uspořádáme soubor možností.

Představit si těleso popsané pomocí tří průmětů je celkem náročné. K náročnosti přispívá i fakt, že zobrazení není jednoznačné. Úlohy, kde má žák postavit těleso zobrazené třemi průměty, jsem našla pouze v učebnicích H-mat. Nejspíše je to tím, že žáci mají k dispozici krychle, které využívají při řešení různých úloh.

Úloha 29

Cílový ročník: 6. – 7.

Klíčová slova a matematické poznatky: kolmé průměty krychlového tělesa do roviny, stavba tělesa podle průmětů, tvoření průmětů podle tělesa, manipulace, prostorová představivost *a) Těleso se skládá z 12 krychlí. Postavte jej.*



b) Těleso se skládá z 17 krychlí. Postavte jej.

Výzva: Postavte si své vlastní krychlové těleso a nakreslete jeho pohledy zepředu, z boku a shora. Dejte spolužákovi nakreslené pohledy. Jeho úkolem je postavit totéž těleso.

(Hejný et al., 2015b, s. 77)

V úloze 29Úloha 29 jsou pokaždé tři navzájem různé pohledy na těleso. Žák řeší úlohu pomocí manipulace. Pod úlohou je pro žáky výzva, že mohou zkusit postavit těleso, nakreslit jeho pohledy a ty dát spolužákovi, aby podle nich těleso postavil. Žáci se tím učí zakreslování pohledů i stavbu podle nich. Zároveň díky tomu mohou přijít na to, že tento jazyk není jednoznačný, protože může dojít k tomu, že řešitel postaví jiné těleso, než měl tvůrce na mysli, ale pohledy budou patřit k oběma tělesům.

Úloha 30

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: kolmé průměty krychlového tělesa do roviny, stavba tělesa podle průmětů, manipulace, hledání více řešení, prostorová představivost

Najděte tři různá tělesa, jejichž půdorys, bokorys i nárys jsou ve tvaru čtverce .

(Hejný et al., 2015a, s. 41)

Na to, že můžeme najít tělesa, jejichž popis pomocí tří průmětů vypadá úplně stejně, cílí úloha 30. Zde je navíc zajímavé, že jsou stejné i pohledy mezi sebou. Ideální je opět řešit úlohu pomocí manipulace.

Podobnou úlohu jsem s žáky sama ve výuce řešila. V ní měli přijít na krychlové těleso z co nejmenšího počtu krychlí, které odpovídalo zadaným průmětům. Nejdříve navrhli nejjednodušší variantu, kterou byl kvádr $3 \times 3 \times 2$. Poté ale někteří žáci navrhovali, že můžeme jednu krychličku odebrat. Ukazovali jsme si to tedy na kvádru z malých krychliček a žáci postupně přišli na řešení pomocí odebírání dalších krychliček.

3.4 Úlohy zaměřené na obvod a obsah

Polymina se často využívají i v úlohách, které se zaměřují na výpočet obvodu a obsahu rovinných útvarů. Nejčastěji jsou polymina v těchto úlohách umístěna do čtvercové sítě. U všech úloh na obsah a obvod by mohlo jít i o libovolný mřížový útvar, ovšem polymina se využívají nejčastěji, protože jsou nejvíce názorná.

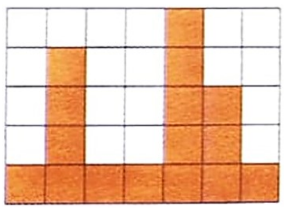
Jako první uvádím dvě úlohy z učebnice nakladatelství Didaktis – úloha 31 a úloha 32. Jsou si hodně podobné, liší se ve velikosti polymina a v délce strany jednoho čtverce. Velikost polymina a délka strany čtverce jsou parametry, kterými můžeme úlohy gradovat. V prvním případě měníme počet čtverců, ze kterých je polymino tvořeno. V druhém případě buď zvětšujeme délku strany čtverce s vedlejším cílem počítat s velkými čísly, nebo naopak délku zmenšujeme a cílíme úlohu, kromě na výpočet obsahu, na počítání s desetinnými čísly.

Úloha 31

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: obsah čtverce a polymina

Stavby významného architekta Antonia Gaudího můžeš potkat po celé Barceloně. Mezi jeho slavná díla patří i obytný dům Casa Mila s obrovskými byty. Rozlohu největšího bytu v tomto unikátním činžovním domě zjistíš, když vypočítáš obsah oranžového útvaru na obrázku (délka strany každého čtverce je 10 m).



(Brlicová et al., 2021a, s. 19)

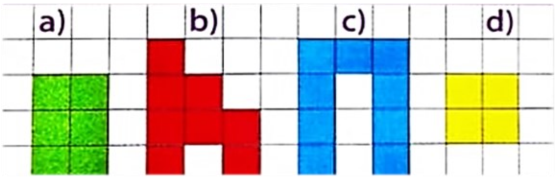
Zadání úlohy 31 nepovažuji za vhodně zvolené. Pokud by útvar na obrázku znázorňoval půdorys domu, bylo by zřejmé, že jde o úlohu, která má propojovat matematiku s poznatky z umění a učitel by s úlohou mohl dále pracovat. V této podobě je ale propojení umělé, neboť je zde zvolené náhodné polymino s obsahem, který odpovídá rozloze domu.

Úloha 32

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: obsah čtverce a polymina, převody jednotek obsahu

Urči, kolik cm² zabírají barevné obrazce ve čtvercové síti $1\ cm \times 1\ cm$. *Obsahy dále vyjádři v mm² a dm².*



(Brlicová et al., 2021a, s. 36)

Podobná úloha jako je výše je i v učebnici SPN pro 6. ročník základní školy (Půlpán & Čihák, 2019b) a Taktik pro 7. ročník základní školy (Danihelová et al., 2020).

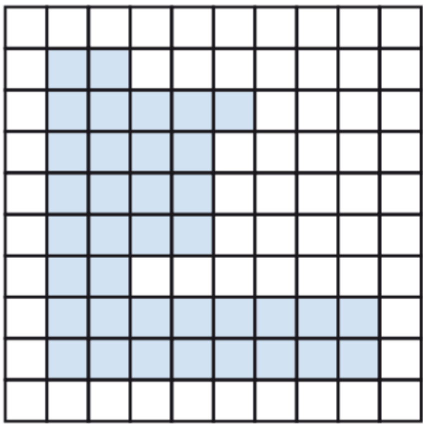
V učebnicích jsou také úlohy opačné (viz úloha 33), kde žák zná obsah celého polymina a má z něho zjistit délku strany čtverce. Z toho pak dále vypočítá obvod útvaru.

Úloha 33

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: obvod polymina z jeho obsahu

Ve čtvercové síti je vybarven obrazec, který má plochu 333 cm². Urči jeho obvod.



(Binterová et al., 2007, s. 81)

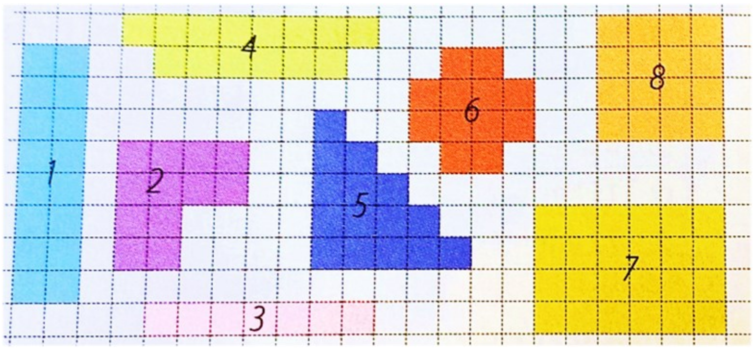
Úloha podobná úloze 33 je i v učebnici Taktik pro 8. ročník základní školy (Homola et al., 2021). Žák si musí úlohu pozorně rozebrat, co ví ze zadání a co má zjistit. Vhodná je pro řešení úlohy také znalost odmocnin. I když zde vyjde obsah jednoho čtverce 9 cm², takže i v případě, že by žák ještě odmocniny neznal, tak by číslo 9 mohl zvládnout rozložit na součin dvou stejných čísel.

Úloha 34

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: obvod polymina, odhad, porovnávání

Ve čtvercové síti s jednotkou 1 cm jsou vyznačeny různé geometrické obrazce. Odhadni, který obrazec má největší obvod. Vypočítej obvody všech obrazců a porovnej se svým odhadem.



(Nováková et al., 2019, s. 24)

Úloha 34 se liší od předchozích v tom, že kromě výpočtu chce po žácích i odhadnout, který z útvarů má největší obvod. Budovat u žáků schopnost odhadovat je také důležité a polymina lze k tomu dobře využít. V úloze je zajímavé, že může mít pravdu víc žáků se svým odhadem, protože je zde více útvarů se stejným největším obvodem. Možná tato skutečnost někoho z žáků napadne již při odhadování.

Další variantou úlohy na obvod je počítání délky lomené čáry, která tvoří právě obvod polymina. Takové úlohy jsou v učebnici SPN pro 6. ročník základní školy (Půlpán & Čihák, 2019b). Úloha na počítání obvodu polymina s délkou jednoho čtverečku a je v učebnici Taktik pro 8. ročník základní školy (Laubeová et al., 2021). Úloha je zde uvedena i s řešením a je na ní vysvětlováno sčítání a odčítání polynomů.

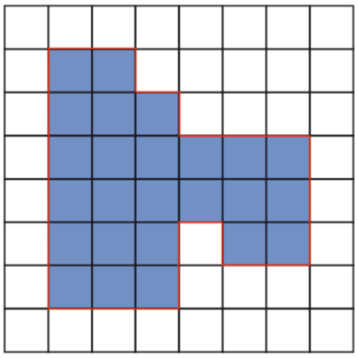
Úloha 35

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: obvod a obsah polymina, rýsování útvaru v mříži o daném obsahu

Vypočítejte obvod a obsah útvaru ve čtvercové síti, když víte, že čtvereček má obsah 1 cm^2.

Narýsujte geometrické útvary, které mají obsah 12 cm^2. *Použijte čtvercovou síť, ve které má jeden čtvereček obsah 1* cm^2.



(Binterová et al., 2007, s. 60)

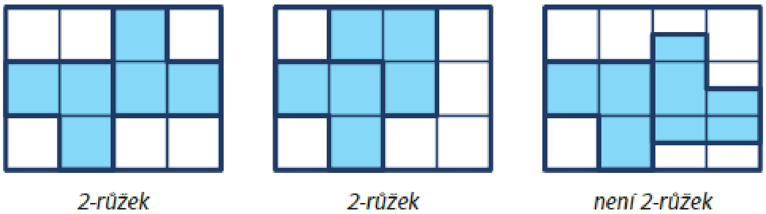
V úloze 35 je zadaný obsah jednoho čtverečku místo délky jeho strany, takže žák snadněji spočítá obsah polymina. Zároveň z něj ale musí umět zjistit délku strany čtverečku, aby mohl spočítat obvod. Žák v této úloze pouze nepočítá obsah nebo obvod, ale má ještě narýsovat útvar s daným obsahem do čtvercové sítě. Ne každý takto vzniklý útvar sice bude polymino, ale předpokládám, že většina ano. Žáci díky takovýmto úlohám brzy přijdou na to, že jakýkoliv útvar z daného počtu čtverců bude mít stejný obsah.

Úloha 36

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: spojování dvou stejných polymin, polymino s nejmenším a největším obvodem, propedeutika kombinatoriky, hledání všech řešení, zobecňování

Spojením dvou růžků vznikne 2-růžek. Růžky lze spojovat jedině stranou nebo více stranami čtverců.



a) *Nakreslete alespoň 5 dalších 2-růžků.*
b) *Najděte 2-růžek s nejmenším obvodem.*
c) *Najděte 2-růžek s největším obvodem.*
d) *Najděte všechny 2-růžky.*

Výzva:

e) *Najděte 4-růžek s nejmenším obvodem.*
f) *Najděte 4-růžek s největším obvodem.*
g) *Najděte 4-růžek s obvodem 23. (Jeden růžek má obvod 8.)*

(Hejný et al., 2015a, s. 78)

Úloha 36 se věnuje zkoumání toho, že vytvořené *2-růžky* ze stejných dílů mohou mít různý obvod, a toho, který z nich bude mít obvod nejmenší a který největší. Podobnou úlohou by mohlo být zkoumání polymin se stejným obvodem a porovnávání jejich obsahu. Pomocí těchto úloh si žáci uvědomí, že útvar s větším obvodem nemusí mít vždy větší obsah a naopak. Součástí úlohy je i otázka na hledání všech *2-růžků*. Tato úloha opět vyžaduje hledání organizačního principu.

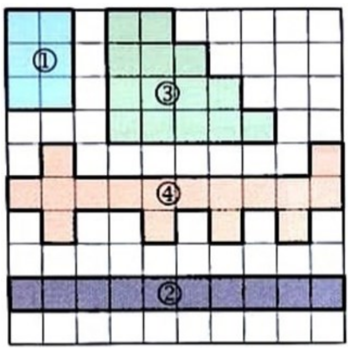
Zajímavé je využití obsahu polymin ke znázornění procent, desetinného čísla (viz úloha 37) nebo zlomku (viz úloha 39), eventuálně smíšeného čísla (viz úloha 38). Něco z toho se objevuje ve všech učebnicích. Názornost takovýchto úloh může pomoci žákům lépe pochopit například vztah mezi desetinným číslem a zlomkem.

Úloha 37

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: obsah polymina, znázornění setin

Čtverec je rozdělen na 100 stejných čtverečků. Obsah jednoho čtverečku je jedna setina čtverce. Zapiš, kolik setin obsahu čtverce tvoří obsahy obrazců 1, 2, 3, 4.



(Odvárko & Kadleček, 2023b, s. 8)

Podobně jako v úloze 37 se ilustrativnost obsahů polymin využívá v učebnicích pro lepší představu převodů jednotek obsahu. Úloha je podobná, jen je uvedeno, že délka strany velkého čtverce (celé plochy) je 1 m, takže jeden malý čtverec uvnitř má délku strany 1 dm.

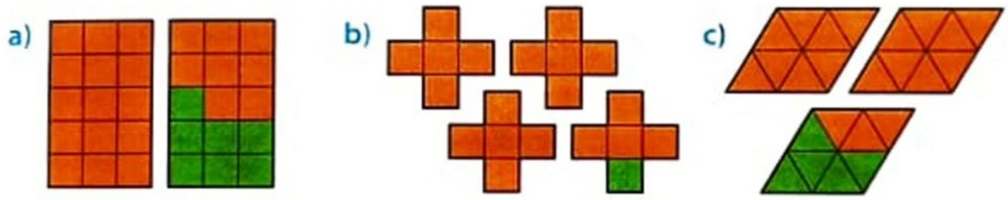
Obsah daného polymina žák vyjadřuje jak v decimetrech čtverečních, tak v metrech čtverečních, čímž vidí vztah mezi oběma jednotkami. Stejně lze ukázat i další převody jednotek obsahu a obdobně se poté pracuje i s převodem jednotek objemu, kde se využívají krychlová tělesa.

Úloha 38

Cílový ročník: 7.

Klíčová slova a matematické poznatky: obsah polymina a polyiamondu, vyjádření části smíšeným číslem

Každý obrazec představuje jeden celek. Urči smíšeným číslem, kolik obrazců je v následujících případech vybarveno oranžově.



(Brlicová et al., 2021b, s. 37)

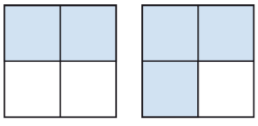
V úloze 38 vidíme využití nejen polymin, ale i polyiamondů jako jiný způsob znázornění. Podobné znázornění včetně polyiamondů můžeme vidět v úlohách v učebnici Fraus pro 7. ročník základní školy (Binterová et al., 2008). Zde je znázornění dále využito k ukázce sčítání zlomků, jak můžeme vidět v úloze 39.

Úloha 39

Cílový ročník: 7.

Klíčová slova a matematické poznatky: obsah polymina, znázornění zlomové části, smíšené číslo

V prvním čtverci tvoří modrá část $\frac{1}{2}$ *plochy, zatímco ve druhém čtverci* $\frac{3}{4}$*. Dohromady je to* $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{2+3}{4}=\frac{5}{4}=\frac{10}{8}$*. Na obou obrázcích je však celkem 8 čtverečků, z nichž 5 je vybarveno modře, tj.* $\frac{5}{8}$*, nikoli* $\frac{10}{8}$*. Kde se stala chyba?*



(Binterová et al., 2008, s. 63)

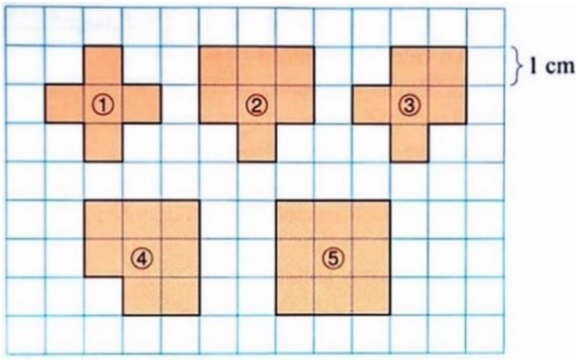
Tato úloha cílí na to, aby si žáci uvědomili, co je celek, ze kterého část počítají. Využití úlohy může být trochu rozporuplné, protože úloha možná některé žáky víc zmate, než by jim to ujasnila.

Úloha 40

Cílový ročník: 7.

Klíčová slova a matematické poznatky: obsah polymina, objem a povrch hranolu, odhad, porovnávání

Ve čtvercové síti vidíš podstavy pěti hranolů. (Obrázek je zmenšený.) Výška každého z nich je 10 cm.



a) *Odhadni, který hranol má největší objem.*
b) *Vypočítej objemy všech pěti hranolů.*
c) *Odhadni, který hranol má největší povrch.*
d) *Vypočítej povrchy všech pěti hranolů.*

(Odvárko & Kadleček, 2012, s. 84)

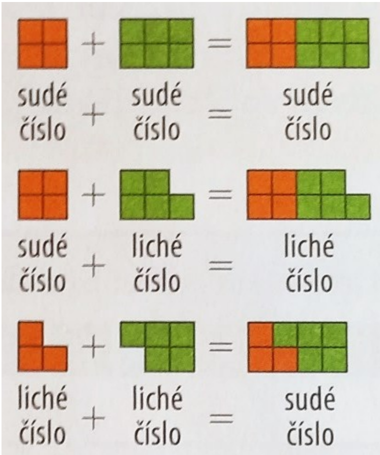
V poslední úloze 40 jsou polymina podstavy hranolů. Žák má odhadovat, který z nich má největší objem a který povrch a pak obojí spočítat u všech hranolů. Zajímavé zde může být s žáky diskutovat, z čeho vychází jejich odhad, protože při řešení úlohy mohou přijít na to, že jim stačí pracovat s obsahem polymin, pokud mají všechny hranoly stejnou výšku.

3.5 Různé

Do této podkapitoly jsem zařadila úlohy, které jsem našla v učebnicích a které bych ráda k polyminům ještě zmínila. Úlohy využívají zejména ilustrativnosti a jednoduchosti tvaru polymin.

Jako první zde ovšem neuvádím úlohu, ale pouze vysvětlení a grafické znázornění využívající polymina z učebnice Didaktis pro 6. ročník základní školy. Jeho cílem je ukázat, co platí pro součet sudých a lichých čísel. Díky tomu, že jednotlivá polymina do sebe zapadají a je na nich dobře vidět dělitelnost, je sudost a lichost čísla, které představují, ihned zřejmá.

Staří Řekové jako jedni z prvních začali rozlišovat sudá a lichá čísla. Dělili je podle toho, zda je lze uspořádat do dvou stejných řad. Pomocí této vlastnosti dokazovali, co platí pro součet sudých a lichých čísel.



(Brlicová et al., 2021a, s. 53)

Úloha 41

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: počet čtverců a obdélníků v obrazci, stavění z dřívek

Vytvořte ze dřívek obrazec podle obrázku. Kolik je na obrázku čtverců a kolik obdélníků?

(Hejný et al., 2015a, s. 23)

Úloha 41 se často objevuje i v různých kvízech. Žáka vede k větší pozornosti a k vnímání geometrických útvarů obecněji, v různých velikostech. Podobný typ úloh se v učebnicích nakladatelství H-mat objevuje častěji.

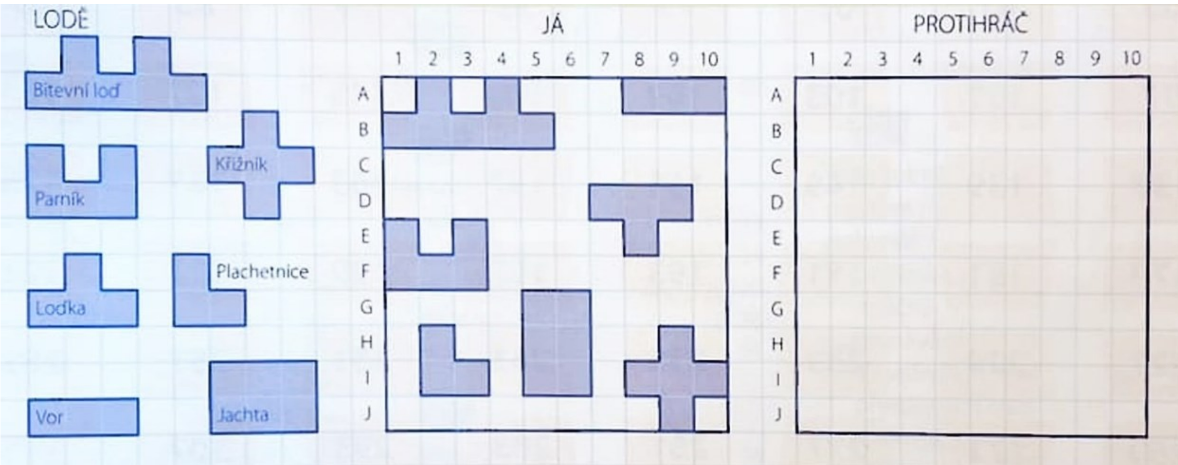
Nakonec zde zmíním ještě dvě hry, které jsem našla v učebnicích Didaktis. Součástí obou jsou polymina, ale u každé jiným způsobem.

Úloha 42

Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: hra Lodě, orientace v souřadnicové síti

Zahrajte si hru Lodě. Každý žák si na čtverečkovaném papíře vyznačí dvě hrací pole o rozměrech 10×10 *čtverečků a označí je pomocí písmen a čísel, vodorovně 1-10 a svisle A-J (viz obrázek). Na jedno hrací pole umístí od každého ze 7 typů jednu loď. Mohou být libovolně natočené, ale nesmí se dotýkat, a to ani vrcholem (rohem). Na druhé hrací pole si bude každý hráč vyznačovat platné a neplatné zásahy do lodí spoluhráče. První hráč tipne pole, o němž si myslí, že je na něm nějaká soupeřova loď. Protihráč oznámí „VODA“, pokud hráč mine, a „ZÁSAH“, pokud se trefí. Jedná-li se o poslední políčko lodě, zahlásí „ZÁSAH, LOĎ POTOPENA“. Hráči se střídají. Kdo jako první odhalí všechny protivníkovy lodě, vyhrává.*



(Brlicová et al., 2021a, s. 141)

První z nich je klasická hra Lodě. Tvary lodí jsou typickými příklady polymin. Zde jsou lodě dány v zadání, ale pro další hru si žáci mohou zvolit vlastní polymina, se kterými budou hrát. Ve školské matematice bych za hlavní cíl hry označila orientaci v souřadnicové síti. Plán hry ale můžeme využít i k dalším úlohám, například na již zmíněný obsah a obvod, zlomky nebo dál ke zkoumání různých tvarů polymin apod. V učebnici Taktik pro 7. ročník základní školy (Jarkovská et al., 2020) je například plán využit pro počítání zlomkové části bitevního pole, která je obsazená loděmi.

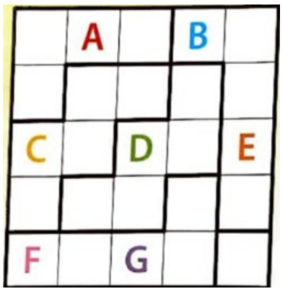
Úloha 43

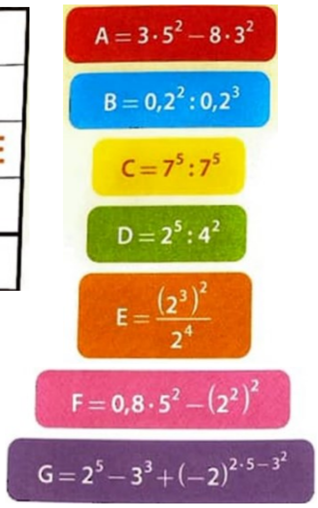
Cílový ročník: 6.

Klíčová slova a matematické poznatky: hra Suguru, početní úlohy s mocninami, hledání více řešení, upravení úlohy na úlohu s jediným řešením, tvoření vlastní varianty hry

Zahrajte si hru Suguru. Písmena v tabulce je třeba nejdříve nahradit hodnotami příslušných číselných výrazů a pak vyplnit všechna pole podle následujících pravidel hlavolamu Suguru:

- *každá tučně ohraničená část obsahuje čísla od jedné do n, kde n je počet buněk v této části,*
- *v žádných dvou sousedních buňkách – včetně diagonálních – nesmí být stejné číslo.*





a) Vyřeš Suguru hlavolam. Má tento hlavolam jen jedno řešení?

b) Pokud má hlavolam více řešení, uprav ho doplněním jedné číslice tak, aby měl pouze jedno řešení.

c) Zkuste ve dvojicích vymyslet své vlastní podobné Suguru.

(Brlicová et al., 2022, s. 62)

Druhá hra se jmenuje Suguru a je mnohem méně známá než první. Jde o dosazování čísel do polí podle určitých pravidel. Polymina zde pouze ohraničují pole, která mají být vyplněna čísly podle velikosti polymina. Úkolem je doplnit čísla tak, aby vedle sebe nebyla stejná, přičemž některá čísla jsou dána jako výsledky početních úloh.

Ze šesti řad učebnic pro 2. stupeň základní školy, které jsem v rámci této kapitoly prozkoumala, jsem nejméně úloh s polyminy našla v učebnicích Fraus, Prometheus a SPN. Přibližně šlo o jednotky úloh. Učebnicové řady Didaktis a Taktik obsahují nízké desítky takových úloh. Nejvíce úloh s polyminy je v učebnicích od nakladatelství H-mat, kde se polyminům věnují i celé kapitoly a pracuje s nimi v podobě Parket celé jedno didaktické prostředí. Pouze v těchto učebnicích můžeme najít úlohy ze všech výše jmenovaných oblastí. Polymina jsou zde využita systematicky s cílem budovat matematické koncepty. V ostatních učebnicích se vyskytují spíše náhodně. Ve všech učebnicích kromě učebnic nakladatelství H-mat se úlohy s polyminy objevují převážně v 6. a 7. ročníku základní školy. Polymina se v těchto učebnicových řadách totiž využívají hlavně pro jejich názorný a jednoduchý tvar a jako hlavolamy či logické hádanky a ne pro jejich matematický potenciál.

Úlohy z učebnic pokrývají různá témata, ale napadají mne ještě další, ke kterým jsem v učebnicích úlohy nenašla. Návrhy těchto aktivit uvedu v následující kapitole.

4 Další možné využití polymin ve školské matematice

Při procházení učebnic jsem našla mnoho zajímavých úloh s polyminy, které pokrývají širokou oblast školské matematiky. Polymina tím však rozhodně nejsou zcela vyčerpána. V této části bych ráda uvedla další typy úloh a aktivit s polyminy, které by šlo ve školské matematice na 2. stupni základní školy využít. Některé z nich jsem našla v jiných zdrojích, než jsou učebnice, a ostatní jsou vlastní, ale je možné, že lze podobné úlohy někde nalézt.

4.1 Kombinatorika – hledání všech polymin dané velikosti

Jedním ze základních typů úloh s polyminy je najít všechna polymina o daném počtu čtverců. Takové úlohy bychom mohli zařadit i do výuky na 2. stupni základní školy. K tomu, aby žáci mohli řešit těžší a těžší úlohy, je dobré si postupně vyjasnit pojem polymino. Tím ale určitě nemusíme začít. Můžeme začít úplně jednoduchými úlohami, kde mají žáci najít všechny útvary ze dvou čtverců. Mezi nimi se nejspíš objeví i takové, které nejsou polymina. Tedy takové, kde budou čtverce propojeny pouze částí strany nebo vrcholem, případně se budou čtverce překrývat. Učitel by pak měl žáky pomocí otázek přivést na to, že je těch variant nekonečně mnoho, pokud si neurčíme nějaká pravidla spojování čtverců. S žáky se poté domluví na pravidlech, která jim počet variant zmenší. Může zatím připustit i pravidlo, které ještě neodpovídá polyminům, a až postupně při hledání polymin z více čtverců si toto pravidlo změní, aby si snížili počet řešení a úlohu zjednodušili. Zároveň by měl učitel dávat žákům různé příklady přiložení čtverců k sobě nebo využít příklady žáků a ptát se jich, zda odpovídají jejich pravidlům, nebo ne. Postupně by tak společně vymezovali pojem polymino a učili se předejít tomu, že jejich vymezení bude zahrnovat i varianty, které nechtějí.

Další prostor k diskuzi při hledání všech polymin dané velikosti přijde jistě brzy, když žáci začnou řešit, zda se již vytvořená polymina shodují, pokud jsou jen jinak natočená nebo překlopená. Buď se tedy žáci s učitelem domluví na nějaké společné variantě, nebo budou hledat řešení pro více variant. Zároveň to dává učiteli výbornou příležitost k zavedení přímé a nepřímé shodnosti a k možnosti ukázat žákům, že existuje více variant pro vymezení shodných polymin.

Hledání všech polymin dané velikosti se nejvíce blíží úlohy v učebnicích H-mat. Souvisí s tím i hledání všech sítí krychle. Žáci, kteří se učí podle těchto učebnic, budou mít práci o něco jednodušší, protože s několika polyminy již mnohokrát pracovali v podobě Parket, takže jistě tuto zkušenost využijí. Na druhou stranu je v učebnici přímo vysvětleno, co jsou polymina, což bych žákům dala až po společném objevování, protože tím se učí sami vymezovat pojem a jeho vymezení zpřesňovat.

Úlohy na hledání všech polymin dané velikosti je pro žáky nejlepší, alespoň ze začátku, řešit pomocí manipulace. Buď si vystřihnou čtverce z papíru, ty slepují a zaznamenávají řešení nebo využijeme parkety, pokud jde o žáky pracující podle učebnic H-mat.

Tyto úlohy vedou žáky k systematizaci řešení při hledání všech možností, zaznamenávání si již nalezených možností a k argumentaci, že nalezené možnosti jsou opravdu všechny. Lze také s žáky hledat postup, jak najít všechna polymina dané velikosti. Předpokládám, že bude podobný tomu, který jsem uváděla na začátku této práce. Spolu s tím můžeme žákům pro zajímavost říct, že dodnes neexistuje žádný obecný vzorec pro určení počtu všech různých polymin dané velikosti. Jediná metoda vychází z té, jak hledají všechna polymina dané velikosti oni, tedy v postupné tvorbě polymin s n čtverci počínaje těmi, které jsou tvořeny $n-1$ čtverci (Polyominoes, © 2024).

Zajímavou související úlohu 44 jsem našla v soutěži Pangea.

Úloha 44

Cílový ročník: 7.

Klíčová slova a matematické poznatky: hledání všech polymin dané velikosti, pentamino[9], propedeutika kombinatoriky, výběr z možností

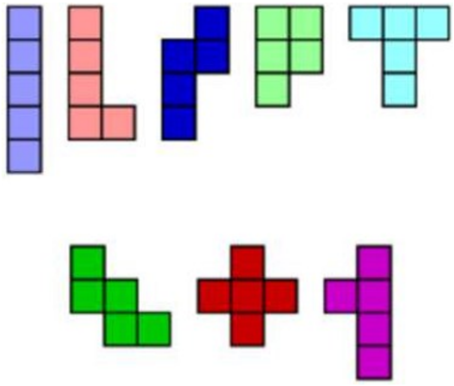
PENTOMINO

Pentomino se skládá z různých tvarů, které vzniknou poskládáním z pěti shodných čtverců. Čtverce se přitom nesmí překrývat a musí na sebe navazovat výhradně celými stranami. Dva útvary, které vzniknou jeden z druhého otočením nebo zobrazením v osové souměrnosti, nejsou považovány za různé. Na obrázku vidíte 8 tvarů Pentomina.

Kolik odlišných tvarů ještě chybí?

a) žádný *b) jeden* *c) dva* *d) tři* *e) čtyři*

[9] Někdy též pentomino.



(Pangea matematická soutěž, 2022)

Jde o hledání všech pentamin, což je jedna z nejznámějších úloh s polyminy. Součástí úlohy je i vysvětlení, co je pentamino. Pokud by chtěl tedy učitel úlohu využít, musí se rozhodnout, zda žákům vysvětlení přímo takto předloží, nebo se nejdříve s žáky pustí do objevování, jak jsem popisovala výše.

4.2 Pojmenování mnohoúhelníků a nekonvexnost

Další možností, jak využít polymina na 2. stupni základní školy, je pracovat s jejich tvarem. Polymina jsou mnohoúhelníky, z velké části mnohoúhelníky nekonvexní. Nekonvexnost se probírá v některých učebnicích pro 2. stupeň základní školy a k jejímu porozumění nám mohou pomoct díky svému tvaru i polymina. S nekonvexností se většinou začíná úlohami, kde hledáme dva body uvnitř mnohoúhelníku tvořícího místnost, kam se mohou dva lidé postavit tak, aby na sebe „neviděli". Postupně se dostáváme s žáky k tomu, že mnohoúhelník je nekonvexní, pokud spojnice jeho některých dvou bodů neleží celá uvnitř něj (Sixtová, 2019). Mnohoúhelníky, s kterými v takovýchto úlohách pracujeme, mohou být i polymina.

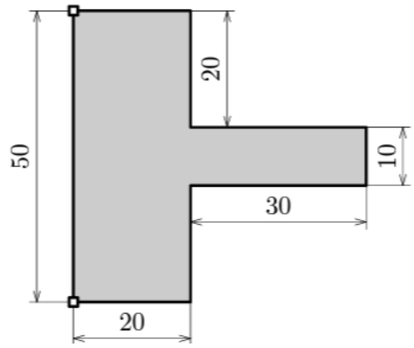
Příkladem takové úlohy je následující úloha 45Úloha 45 z Matematické olympiády.

Úloha 45

Cílový ročník: 7.

Klíčová slova a matematické poznatky: obsah polymina, nekonvexnost

Dva strážci dohlíží na pořádek v místnosti, jejíž půdorys a rozměry jsou znázorněny na obrázku. Každé dvě sousední stěny jsou navzájem kolmé, rozměry jsou uvedeny v metrech. Strážci stojí v rozích označených čtverečky. Jak velká je část místnosti, na kterou ze svého místa nedohlédne ani jeden ze strážců?



(E. Semerádová)

(Matematická olympiáda, 2022, s. 1)

V této úloze nemusí žák umět pojmenovat, že jde o nekonvexní útvar, ale pracuje zde s myšlenkou nekonvexnosti. Jde o úlohu na výpočet obsahu části polymina pomocí zadaných délek stran. Úlohu žák snadno vyřeší pomocí rozdělení polymina na čtverce a zakreslení si prostoru, který hlídači nevidí.

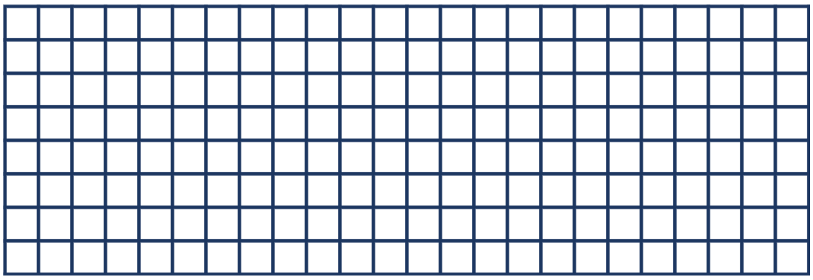
Příklad úlohy s polyminy, která též pracuje s nekonvexností, tentokrát ve spojení s pokrýváním, uvádím z pracovního sešitu nakladatelství H-mat. Zde se zavádí pojem nekonvexnost již v 5. ročníku základní školy.

Úloha 46

Cílový ročník: 5.

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, nekonvexnost, argumentace

- *a) Roztřiď všechny typy parket na konvexní a nekonvexní mnohoúhelníky.*
- *b) Ze dvou stejných konvexních parket pokryj nekonvexní mnohoúhelník. Zakresli ho do mříže.*
- *c) Ze dvou stejných nekonvexních parket pokryj konvexní mnohoúhelník. Zakresli ho do mříže.*
- *d) Najdi takovou nekonvexní parketu, pomocí níž nikdy nepokryješ konvexní mnohoúhelník.*



(Hejný, 2022, s. 24)

Poté, co žáci porozumí pojmu nekonvexnost, může učitel využít polymina k pojmenovávání mnohoúhelníků. Předloží žákům několik polymin a dá jim za úkol je pojmenovat. Nejspíše u toho vznikne diskuze o tom, zda vrchol, u kterého je nekonvexní úhel, také počítáme mezi vrcholy mnohoúhelníku. Tedy, zda jde například u trimina do tvaru parkety *růžek* o pětiúhelník nebo šestiúhelník. Pomocí návodných otázek učitel přivede žáky na to, že se počítá i tento vrchol, a jde tedy o nekonvexní šestiúhelník. Žáci potom mohou pracovat i ve dvojicích či menších skupinách, kdy jeden vytvoří vlastní polymino (případně vybere jednu z parket, pokud jde o žáky, kteří mají tuto pomůcku k dispozici) a ostatní ho pojmenovávají.

Jako výzvu můžeme nechat žáky zkoumat, jak budou vypadat všechna konvexní polymina – jistě brzy přijdou na to, že jde pouze o čtverce a obdélníky. Nebo mohou zjišťovat, zde budou všechna například tetramina stejné mnohoúhelníky, což se ukáže jako nepravda, neboť tetramina mohou být čtyřúhelníky, šestiúhelníky i osmiúhelníky.

Jako další úroveň těchto pozorování můžeme žákům představit jako zajímavost další polyformy, ukázat jim, že se s nimi dá pracovat velmi podobně jako s polyminy a dát jim možnost řešit s nimi nějaké podobné úlohy, jako znají s polyminy. Například úloha 47, kterou jsem našla v soutěži Matematický klokan, je vlastně zaměřena na pokrývání. Nejde v ní však o polymina, ale o polyiamondy. Tuto úlohu můžeme snadno rozšířit o pojmenovávání mnohoúhelníků.

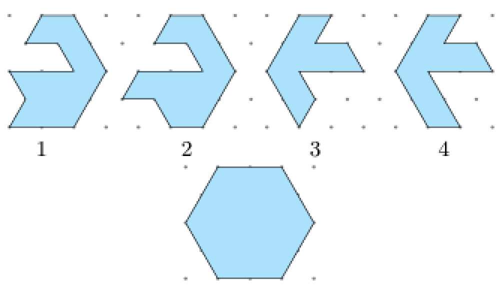
Úloha 47

Cílový ročník: 6. – 7.

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, polyiamond, výběr z možností

Na obrázku vidíš čtyři různé dílky stavebnice. Složením kterých dvou dílků dostaneme šestiúhelník?

a) 1 a 2 *b) 1 a 3* *c) 2 a 3* *d) 2 a 4* *e) 1 a 4*



(Hátle, 2023, s. 25)

4.3 Organizace souboru polymin

Další skupinu úloh s polyminy, kterou můžeme s žáky řešit, tvoří úlohy zaměřené na práci s daty. Jde o úlohy, které spočívají v hledání společných a rozdílných znaků galerie objektů, v našem případě galerie vybraných polymin. Tyto úlohy lze ještě rozdělit na dvě menší podskupiny podle toho, zda má žák sám rozdělit polymina v galerii do tříd o daném počtu polymin, nebo zda už jsou polymina nějakým způsobem rozdělena a žák hledá kritérium, podle kterého jsou rozdělena.

V první podskupině úloh můžeme žákům zadat takové úlohy, kde jim řekneme kritérium a oni podle něj rozdělí polymina do skupin. Příkladem takové úlohy může být rozdělit daná polymina podle počtu čtverců, ze kterých se skládají, podle počtu vrcholů, stran, případně podle toho, ze kterých polymin jdou složit – například jednu skupinu tvoří ta, která lze složit z několika domin, a druhou ta, která z nich složit nelze. V jiných úlohách žákům kritérium neřekneme, ale dáme jim za úkol rozdělit polymina z galerie do dvou skupin o daném počtu polymin. Jejich úkolem je vymyslet takové kritérium, podle něhož mohou takto polymina rozdělit. Řešení může být i více, takže každý žák může mít jiné kritérium. Žáci pak mohou zpětně hádat podle rozdělení polymin, jaké bylo kritérium některého z žáků.

Tím se dostavám ke druhé podskupině úloh na organizaci souboru polymin. Učitel nějakým způsobem rozdělí polymina do skupin a žáci hádají, podle čeho je rozdělil. Stejné úlohy si pak žáci mohou dávat ve skupině navzájem. Mohou také hledat více kritérií, podle kterých může být soubor rozdělen. Úlohy na organizaci souboru polymin cílí hlavně na hledání jejich společných a rozdílných vlastností.

S tím souvisí i hra, která se v učebnicích nakladatelství H-mat jmenuje Sova, ale pod různými názvy a s různými obměnami se objevuje i jinde. Princip hry Sova jsem již popisovala u úlohy 26. V rámci hry se žáci v těchto učebnicích učí hledat nejlepší strategii, aby uhodli objekt co nejdříve, což je vede k tomu vymýšlet takové otázky, které budou co nejvýhodnější, a neptat se na to první, co je napadne.

4.4 Hry s polyminy

Poslední skupinou aktivit s polyminy, které by šly do výuky zařadit, jsou různé hry. K některým z nich stačí pouze tužka a papír, jiné jsou deskové a některé lze hrát na internetu. U každé hry popíšu stručně pravidla a uvedu, k čemu by mohla vést ve výuce na 2. stupni základní školy.

Tetris

Klíčová slova a matematické poznatky: strategické myšlení, rychlý úsudek

Tetris je asi nejznámější z uvedených her. Jedná se o digitální hru. Úkolem je rovnat padající polymina do spodních řad herní plochy. Ve chvíli, kdy je nějaká řada celá zaplněná, zmizí a vše, co je nad ní, se posune o řadu níž. Padající polymina lze otáčet o 90° a posouvat do stran. V průběhu hry se padání polymin zrychluje. Hra končí ve chvíli, kdy se některé polymino dotkne horního okraje herní plochy (Matějek, 2011). Původní hra pracuje s tetraminy, dnes již existuje mnoho obměn této hry.

Fillomino

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, není zadaný tvar polymin, obsah polymin, logické myšlení

Fillomino je hra, ke které nám stačí na papíře zadání hry a tužka. Ideální je využít i pastelky, případně vystřižená polymina. Zadáním je většinou čtverec nebo obdélník s vyznačenou čtvercovou mříží. V některých polích mříže jsou zapsána čísla. Cílem hry je zanést do čtvercové mříže polymina tak, aby čísla uvnitř každého polymina označovala jeho velikost (2 – domino, 3 – trimino, …) a polymina se stejným obsahem se dotýkala maximálně vrcholem. Vybarvování polymina každé velikosti jinou barvou nám může pomoct s přehledností. Vystřižená polymina nám pomohou, abychom nemuseli gumovat (Hora et al., 2016).

Ubongo

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, manipulace, postřeh, rychlost, paměť

Ubongo je desková hra, která obsahuje malé hrací desky, dvanáct barevných polymin pro každého hráče a přesýpací hodiny. Hrací desky jsou oboustranné a je na nich vždy polymino tvořící plochu k pokrývání a několik skupin polymin, každá s jiným symbolem. Hra spočívá v klasickém pokrývání danými polyminy, ovšem v časovém limitu. Jeden z hráčů hodí kostkou a otočí přesýpací hodiny. Na kostce padne symbol, podle něhož si každý hráč na své kartě vezme skupinu polymin, se kterými má plochu pokrýt. Každý hráč, který stihne pokrýt plochu, než se hodiny přesypou, zvolá „Ubongo!“ a vezme si drahokam. Dva nejrychlejší si vezmou ještě další drahokam. Hra končí po devíti kolech a vyhrává hráč s nejvíce drahokamy.

Ubongo je určené pro 1 až 4 hráče, ale pokud si vyrobíme vlastní polymina, můžeme ho hrát i s celou třídou. Případně můžeme vymyslet variantu pro týmy. Hru lze zjednodušit, že se hraje bez časového limitu nebo si hráči nejdříve vyberou správná polymina a až poté se otáčí přesýpací hodiny. Pro žáky 2. stupně základní školy bychom ovšem zjednodušení potřebovat nemuseli. Zde můžeme zařadit aktivitu, že žáci dostanou pouze polymina a budou sami tvořit hrací desky pro své spolužáky nebo dostanou i hrací desky a budou mít za úkol pokrýt plochu takovou skupinou polymin, která na desce není nabídnuta (Malcová, 2016; Šmídová, 2020).

Blokus

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, manipulace, strategické myšlení

Blokus je desková hra s hrací plochou ve tvaru čtverce o rozměrech 20×20 a sadami o 21 polyminech (monomina až pentamina) ve čtyřech různých barvách. Hra je určena pro 2 až 4 hráče, z nichž každý má polymina jedné barvy. Úkolem hráčů je pokládat na hrací plochu svá polymina s tím, že dvě polymina stejné barvy se mohou dotýkat nejvýše vrcholem a žádná polymina se nesmí překrývat. Hráči se po každém položení střídají. Cílem hráčů je položit svá polymina tak, aby tím zablokovali položení polymin soupeřů a zároveň položili co nejvíce svých polymin. Hra končí ve chvíli, kdy nikdo z hráčů již nemůže položit žádné polymino (Matějek, 2011).

Tučňáci na ledě

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, manipulace, doplňující podmínka

Tučňáci na ledě jsou desková hra obsahující hrací plochu ve tvaru čtverce s naznačenou čtvercovou mříží a polymina. Na některých čtvercích vybraných polymin stojí tučňáci. Cílem hry je umístit kry na hrací plochu tak, aby tučňáci stáli na polích podle plánku. Plánků je ke hře šedesát od snadných po obtížné (Šmídová, 2020).

Kvadrilion

Klíčová slova a matematické poznatky: pokrývání, manipulace některá pole nelze pokrýt

Kvadrilion je deskovou hrou, která je tvořena čtyřmi deskami tvaru čtverce o velikosti 4×4 a dvanácti polyminy, z nichž jedno je trimino, jedno tetramino a ostatní jsou pentamina. Polymina jsou zde tvořena z pevně spojených kuliček místo čtverců a hrací desky mají důlky, aby tam polymina držela. Na každé desce jsou některá pole, která nesmíme při pokrývání zaplnit. Hrací desky jsou oboustranné a lze je různě spojovat. Cílem je podle plánku v co nejkratším čase spojit správně desky a vyplnit je polyminy. Součástí hry je osmdesát plánků v pěti úrovních (Šmídová, 2020).

Na začátku kapitoly jsem psala, že se pokusím doplnit další možnosti využití polymin v matematice na 2. stupni základní školy. I když jsem se v této kapitole snažila uvést co nejvíce možností dalších aktivit, nemusí být ani tím využití polymin vyčerpáno a čtenáře možná napadnou ještě další způsoby, jak využít polymina k naplnění vzdělávacích cílů. Jak jsem ukázala, těmito aktivitami nemusí být jen různé úlohy, ale můžeme zařadit i hry, které žáky rozvíjí často nejen v matematických cílech. Her s polyminy bude jistě existovat mnohem více, než které jsem zde uvedla.

Závěr

V této bakalářské práci jsem ukázala, že polymina mají široké využití ve výuce na 2. stupni základní školy, neboť úlohy s nimi pokrývají mnoho témat, polymina mají názorný a jednoduchý tvar a lze s nimi řešit úlohy i pomocí manipulace.

Z mé bakalářské práce dále vyplývá, že:

- nejméně úloh s polyminy obsahují učebnice nakladatelství Fraus, Prometheus a SPN, kde jsou jednotky úloh,
- nejvíce se s polyminy pracuje v úlohách v učebnicích nakladatelství H-mat, kde jsou polymina využita systematicky k budování matematických konceptů,
- úlohy s polyminy se, kromě učebnic H-mat, objevují převážně v učebnicích pro 6. a 7. ročník základní školy, což nejspíš souvisí s tím, že jsou v nich úlohy s polyminy využity nesystematicky a využívají se zde hlavně jako sítě krychle, pro jejich názorný a jednoduchý tvar a jako úlohy k zamyšlení.

Cíle, které jsem si v úvodu práce stanovila, se mi podařilo naplnit, neboť jsem analyzovala úlohy s polyminy v učebnicích pro 2. stupeň základní školy a uspořádala je do skupin podle toho, čemu se věnují. Na základě toho jsem uvedla, v jaké míře se úlohy s polyminy v jednotlivých učebnicových řadách vyskytují a navrhla další typy úloh s polyminy, které by šlo ve výuce využít. Bylo by ovšem potřeba navržené úlohy kvalitně naformulovat a otestovat jejich zařazení do výuky.

Pro mě byla tato bakalářská práce přínosem především v tom, že jsem si uvědomila, že polymina mají mnohem širší využití, než jsem původně očekávala. Zároveň jsem se díky této práci více seznámila s učebnicemi pro 2. stupeň základní školy a jejich obsahem, což je pro mne jako budoucí učitelku užitečné. Nejen mě, ale každému učiteli, který by chtěl více využít polymina ve výuce, práce nabízí mnoho úloh s polyminy uspořádaných do kategorií a popsaných pomocí klíčových slov a matematických poznatků pro lepší orientaci, přehlednost a vyhledávání vhodné úlohy.

Další závěrečná práce by mohla zkoumat, zda úlohy s polyminy pomáhají žákům v pochopení daného probíraného tématu nebo pomocí vybraných úloh s polyminy zjišťovat úroveň kombinatorického myšlení žáků. Pokud bychom chtěli výzkum zaměřit na učitele, bylo by zajímavé zjistit, zda znají polymina a zda mají představu o šíři jejich možného využití ve výuce matematiky.

Seznam použitých informačních zdrojů

Binterová, H., Fuchs, E., & Tlustý, P. (2007). *Matematika 6: Geometrie*. Fraus.

Binterová, H., Fuchs, E., & Tlustý, P. (2008). *Matematika 7: Aritmetika*. Fraus.

Binterová, H., Fuchs, E., & Tlustý, P. (2009). *Matematika 8: Geometrie*. Fraus.

Brlicová, V., Cizlerová, M., Kočová, L., Lišková, H., Sládková, A., Tlusťáková, I., & Vach, P. (2021a). *Matematika pro život 6: Učebnice pro 6. ročník základních škol a víceletá gymnázia*. Didaktis.

Brlicová, V., Cizlerová, M., Mahel, M., Sedlák, J., Svobodová, J., Vobecká, B., & Žáková, L. (2021b). *Matematika pro život 7: Učebnice pro 7. ročník základních škol a víceletá gymnázia*. Didaktis.

Brlicová, V., Cizlerová, M., Mahel, M., Svobodová, J., Vach, P., Žák, L., & Žáková, L. (2022). *Matematika pro život 8: Učebnice pro 8. ročník základních škol a víceletá gymnázia*. Didaktis.

Clarke, A. *The Poly Pages*. Dostupné 20 červen 2024, z http://www.recmath.com/PolyPages/index.htm

Černohorská, E. (2006). *Zobecnění metod dláždění pro trojúhelníkovou a šestiúhelníkovou síť*. První české gymnázium v Karlových Varech.

Danihelová, S., Chytrý, V., Matasová, B., Šefcová, M., Vyškovská, J., & Janečková, M. (2020). *Hravá matematika 7 - Geometrie: Učebnice pro 7. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. Taktik International.

Demaine, E. D., Mitchell, J. S. B., & O'Rourke, J. (Ed.). (2001). *Problem 37: Counting Polyominoes*. The Open Problems Project. Dostupné 12 červen 2024, z https://topp.openproblem.net/p37#Epp

Dudeney, H. E. (2008). *The Canterbury Puzzles, and Other Curious Problems*. Project Gutenberg. https://www.gutenberg.org/ebooks/27635

Golomb, S. W. (1994). *Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems, and Packings - Revised and Expanded Second Edition* (2nd edition). Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9780691215051

H-mat, o.p.s. (©2018). *Parkety*. Blog O Hejného Metodě. Dostupné 11 duben 2024, z https://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/parkety

Hátle, J. (Ed.). (2023). *Matematický klokan*. Univerzita Palackého v Olomouci. https://matematickyklokan.upol.cz/wp-content/uploads/2024/03/sbornik2023.pdf

Hejný, M. (2022). *Matematika 5 I. díl: pracovní sešit pro 5. ročník ZŠ*. H-mat.

Hejný, M., Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J., & Sukniak, A. (2015a). *Matematika A: učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. H-mat.

Hejný, M., Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J., & Sukniak, A. (2015c). *Matematika AB: příručka učitele 2. stupně a víceletých gymnázií*. H-mat.

Hejný, M., Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J., & Sukniak, A. (2015b). *Matematika B: učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. H-mat.

Hejný, M., Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J., & Sukniak, A. (2016). *Matematika C: učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. H-mat.

Hejný, M., Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J., Kuřík Sukniak, A., Bomerová, E., & Eichlerová, K. (2019). *Matematika E: pracovní sešit pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. H-mat.

Hejný, M., Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J., Sukniak, A., & Bomerová, E. (2017). *Matematika E: učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. H-mat.

Henle, M., & Hopkins, B. (2012). *Martin Gardner in the twenty-first century*. Mathematical Association of America. https://cuni.primo.exlibrisgroup.com/view/action/uresolver.do?operation=resolveService&package_service_id=21847356230006986&institutionId=6986&customerId=6985&VE=true

Homola, J., Matasová, B., Mierva, T., Nádvorníková, P., Presová, J., & Janečková, M. (2021). *Hravá matematika 8 - Geometrie: Učebnice pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. Taktik International.

Hora, J., Honzík, L., Kašparová, M., & Kohout, V. (2016). *Popularizace vědy ve volnočasových aktivitách žáků SŠ: matematika*. Západočeská univerzita v Plzni. https://dspace5.zcu.cz/bitstream/11025/29413/1/Popularizace%20vedy.pdf

Jarkovská, D., Jelínek, J., Laubeová, A., Matasová, B., Presová, J., Šebestová, M., Vojta, J., Weinlich, R., Součková, M., & Janečková, M. (2020). *Hravá matematika 7 - Aritmetika: Učebnice pro 7. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. Taktik International.

Jirotková, D. (2010). *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie: výzkumný záměr Učitelská profese v měnících se požadavcích na vzdělávání*. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Klarner, D. A. (1981). My Life Among The Polyominoes. In D. A. Klarner (Ed.), *The Mathematical Gardner* (s. 243-262). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-6686-7_22

Laubeová, A., Matasová, B., Mierva, T., Nádvorníková, P., Presová, J., Weinlich, R., & Janečková, M. (2021). *Hravá matematika 8 - Algebra: Učebnice pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. Taktik International.

Malcová, M. (2016). *Didaktická hra jako prostředek otevírání geometrického světa* [Diplomová práce]. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky.

Matějek, V. (2011). *Polymina v práci s nadanými studenty* [Bakalářská práce]. Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, Katedra algebry a geometrie.

Matematická olympiáda. (2022). *72. ročník Matematické olympiády (2022/23): II. kolo kategorie Z7*. https://www.matematickaolympiada.cz/media/3518286/z72ii-7-r.pdf

Nováková, A., Šefcová, M., Weinlich, R., Matasová, B., Mlčůch, J., Vyškovská, J., Presová, J., & Součková, M. (2019). *Hravá matematika 6 - Geometrie: Učebnice pro 6. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. Taktik International.

Odvárko, O., & Kadleček, J. (2012). *Matematika pro 7. ročník základní školy: 3. díl* (3. přepracované vydání). Prometheus.

Odvárko, O., & Kadleček, J. (2022). *Matematika pro 6. ročník základní školy: 3. díl* (4. vydání). Prometheus.

Odvárko, O., & Kadleček, J. (2023a). *Matematika pro 6. ročník základní školy: 1. díl* (4. vydání). Prometheus.

Odvárko, O., & Kadleček, J. (2023b). *Matematika pro 6. ročník základní školy: 2. díl* (4. vydání). Prometheus.

Pangea matematická soutěž. (2022). *7. ročník: Soubor otázek – finále*. https://www.pangeasoutez.cz/files/test-files/2022_7_school_round_test.pdf

Pelánek, R. (2014). *Hlavolamikon: Sbírka hlavolamů, hádanek, šifer a logických úloh*. Computer Press.

Peter's Puzzle and Polyform Pages. Dostupné 20 červen 2024, z http://polyforms.eu/

Polyominoes. (© 2024). Eth Zurich. Dostupné 27 červen 2024, z https://library.ethz.ch/en/locations-and-media/platforms/virtual-exhibitions/Its-all-math-and-games/polyominoes.html

Práce v prostředích: učíme se opakovanou návštěvou. (©2024). Hejného Metoda: Zasloužená Radost Z Poznávání. Dostupné 9 květen 2024, z https://www.h-mat.cz/principy/prostredi

Půlpán, Z., & Čihák, M. (2008). *Matematika 7 pro základní školy: geometrie*. SPN – pedagogické nakladatelství.

Půlpán, Z., & Čihák, M. (2019b). *Matematika 6 pro základní školy: aritmetika* (2. vydání). SPN – pedagogické nakladatelství.

Půlpán, Z., & Čihák, M. (2019a). *Matematika 6 pro základní školy: geometrie* (2. vydání). SPN – pedagogické nakladatelství.

Redelmeier, D. H. (1981). Counting polyominoes: Yet another attack. *Discrete Mathematics*, *36*(2), 191-203. https://doi.org/10.1016/0012-365X(81)90237-5

Sixtová, H. (2019). *Nová matematika v kostce pro SŠ*. Fragment.

Stehlíková, N., & Tejkalová, L. (Ed.). (2009). *Dva dny s didaktikou matematiky 2009: sborník příspěvků* (Roč. 13). Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Šmídová, K. (2020). *Úlohy z prostředí Parkety pro děti na přechodu mezi MŠ a 1. ročníkem ZŠ* [Diplomová práce]. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky.

Vondrová, N. (2024). Kritická místa českých žáků a studentů v matematice aneb Čemu bychom měli věnovat ve výuce. https://www.youtube.com/watch?v=-PaEMQRPvyM

Weisstein, E. W. (©1999–2024e). *Polycube*. Mathworld-A Wolfram Web Resource. Dostupné 20 červen 2024, z https://mathworld.wolfram.com/Polycube.html

Weisstein, E. W. (©1999–2024b). *Polyform*. Mathworld-A Wolfram Web Resource. Dostupné 20 červen 2024, z https://mathworld.wolfram.com/Polyform.html

Weisstein, E. W. (©1999–2024d). *Polyhex*. Mathworld-A Wolfram Web Resource. Dostupné 20 červen 2024, z https://mathworld.wolfram.com/Polyhex.html

Weisstein, E. W. (©1999–2024c). *Polyiamond*. Mathworld-A Wolfram Web Resource. Dostupné 20 červen 2024, z https://mathworld.wolfram.com/Polyiamond.html

Weisstein, E. W. (©1999–2024a). *Polyomino*. Mathworld-A Wolfram Web Resource. Dostupné 12 červen 2024, z https://mathworld.wolfram.com/Polyomino.html

Winslow, A. (2018). Some Open Problems in Polyomino Tilings. In M. Hoshi & S. Seki (Ed.), *Developments in Language Theory* (s. 74-82). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-98654-8_6