Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Slovní úlohy na objemy a povrchy těles

Word problems on volumes and surfaces of solid figures

Tereza Dragounová

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jarmila Novotná CSc.

Studijní program: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Studijní obor: B M 20

2024

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Slovní úlohy na objemy a povrchy těles potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Příbram 11.7.2024

Ráda bych poděkovala své vedoucí práce prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za cenné rady, velmi vstřícný přístup a za rychlé reakce v průběhu tvorby mé bakalářské práce. Dále bych chtěla poděkovat mým nejbližším za obrovskou podporu a velkou míru trpělivosti.

ABSTRAKT

Tato práce je zaměřena na slovní úlohy o objemu a povrchu těles. Cílem práce je roztřídit, uspořádat a zpřehlednit slovní úlohy z oblasti objemů a povrchů těles, vyskytující se ve vybraných učebnicích středních škol, pro potřeby řešitelů a pedagogů. Práce je rozdělena do tří kapitol. Úvodní část je věnována zavedení základních pojmů. V další části práce jsou klasifikována geometrická tělesa a zavedeny výpočty jejich objemů a povrchů. V poslední části práce jsou slovní úlohy na objemy a povrchy těles rozřazeny do dvou hlavních podkapitol: matematické kombinace a fyzikální kombinace. Obě kapitoly jsou dále rozděleny na několik skupin podle přidruženého učiva. Ke každé skupině jsou přiřazeny konkrétní úlohy, které jsou vybrány z učebnic Matematika pro gymnázia a jsou uvedeny s řešením.

KLÍČOVÁ SLOVA

Slovní úloha, objem, povrch

ABSTRACT

This work is focused on word problems about the volume and surface of solid figures. The aim of the work is to sort out, organize and clarify word problems in the area of volumes and surfaces of solid figures, found in selected high school textbooks, for the needs of researchers and educators. The work is divided into three chapters. The introductory part is devoted to the introduction of basic terms. In the next part of the work, solid figures are classified and calculations of their volumes and surfaces are introduced. In the last part of the work, word problems on volumes and surfaces of solid figures are divided into two main subsections: mathematical combinations and physical combinations. Both chapters are further divided into several groups according to the associated curriculum. Each group is assigned a pair of specific problems, which are selected from Matematika pro gymnázia textbooks and are presented with solutions.

KEYWORDS

Word problem, volume, surface

Obsah

Úvod

Slovní úlohy na objemy a povrchy těles představují významnou součást vzdělávání na středních školách. Tyto úlohy rozvíjí geometrické znalosti a prostorovou představivost žáků, mají také široké využití v reálném životě. Slovní úlohy tohoto typu často vyžadují nejen znalost základních geometrických vzorců, ale také schopnost aplikovat další dovednosti a znalosti z různých oblastí, což bylo mou hlavní motivací při psaní této práce.

Cílem práce je roztřídit, uspořádat a zpřehlednit slovní úlohy z oblasti objemů a povrchů těles, vyskytující se ve vybraných učebnicích středních škol, pro potřeby řešitelů a pedagogů. Práce je zaměřena na úlohy, které kombinují slovní úlohy na objemy a povrchy těles s dalším učivem střední školy. V práci se zjišťuje, v jakém množství a v jaké kombinaci se tyto úlohy v učebnicích vyskytují. Úlohy jsou vybrány z různých řad učebnic Matematika pro gymnázia. Zaměřila jsem se na tuto řadu učebnic, protože jsem s ní na střední škole pracovala. Úlohy jsou systematicky rozřazeny do skupin podle přidruženého učiva a každá z nich je doplněna autorským řešením.

Práce je strukturována do tří kapitol. První dvě kapitoly jsou teoretického charakteru, třetí je především praktická. První kapitola se věnuje základním pojmům z oblasti slovních úloh na objemy a povrchy těles. Druhá kapitola se zaměřuje na konkrétní výpočty objemů a povrchů různých typů těles, jako jsou mnohostěny a rotační tělesa. Třetí kapitola je věnována slovním úlohám na objemy a povrchy těles v kombinaci s dalším učivem střední školy, které se vyskytují v učebnicích pro střední školy. Tato kapitola je rozdělena do dvou hlavních podkapitol: matematické kombinace a fyzikální kombinace. Každá podkapitola obsahuje několik skupin, které jsou věnovány jednotlivým kombinacím. V každé podkapitole jsou uvedeny vybrané úlohy a jejich řešení.

1 Slovní úlohy na objemy a povrchy těles – základní pojmy

1.1 Slovní úloha

Slovní úlohy považuji za jednu z nejdůležitějších součástí školní matematiky. Důvodem je jejich velmi široké praktické využití v reálném životě. Mnoho žáků považuje matematická témata za zbytečná a nepotřebná. Slovní úlohy nám však ukazují, že se s matematikou setkáváme na každodenní bázi. Slovní úlohy na objemy a povrchy těles jsou jedním z mnoha typů slovních úloh, na které v našem životě narazíme. Propojením matematiky s praktickými aspekty života můžeme u žáků probudit zájem a motivaci k jejímu hlubšímu pochopení.

Stejně jako Dlouhá (2012) uvádí ve své práci, i v mém případě se ukázalo jako velmi obtížné najít přesnou definici slovní úlohy. Různí autoři v odborné literatuře tento pojem definují odlišně nebo vůbec. Dlouhá (2012) uvádí definici podle Kuřiny, Vyšína, Divíška, či Knížete.

„Slovní úlohy, v nichž je obvykle popsána určitá reálná situace (např. s ekonomickou, přírodní, fyzikální, společenskou či jinou tématikou) a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky.“ (Kuřina, 1990, s. 61)

„Slovními úlohami bývají zpravidla nazývány úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoli matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozřešen aritmetické nebo algebraické úlohy.“ (Vyšín, 1972, s. 107)

„Slovní úlohou rozumíme obvykle úlohu z praxe, ve které je popsána určitá reálná situace, která vyúsťuje v problém. Předložený problém je možné řešit buď v realitě, nebo matematicky.“ (Divíšek, 1989, s. 123)

„Slovní úlohou nazýváme požadavek určit číselnou hodnotu nějakého souboru věcí nebo veličiny ze známých číselných hodnot jiných souborů nebo veličin, které jsou určitým způsobem závislé mezi sebou a hodnotou hledanou.“ (Kníže, 1966, s. 5)

Společné pro tyto úlohy je, že slovní úlohy jsou matematické úlohy, které jsou popsány slovně místo použití matematických symbolů. Může se jednat o aritmetické nebo algebraické problémy, ale i o praktické situace, jejichž řešení vyžaduje aplikaci odpovídajících aritmetických, algebraických nebo geometrických principů, případně konstrukčních postupů.

V této práci chápu slovní úlohy jako Dlouhá (2012). Slovní úlohy jsou úlohy vyjádřené slovy, které vychází z praxe a popisují reálné situace, objekty nebo jevy. Tyto úlohy vedou k problému, který je třeba identifikovat a následně vyřešit.

1.1.1 Slovní úlohy ve výuce

Jedním z hlavních problémů tradičního způsobu výuky matematiky je nadměrné zaměření na memorování velkého množství faktů a osvojení si algoritmických dovedností. Tento přístup však zanedbává rozvoj schopnosti kreativně využívat získané znalosti v různých kontextech, a to jak v matematice samotné, tak i v každodenním životě. Skutečné využívání matematiky spočívá v tom, že člověk umí rozpoznat, kdy, kde a jak aplikovat své poznatky. To není jen otázka pamatování si informací, ale také schopnosti tvořit nové modely, formulovat nové problémy, konstruovat a interpretovat jazyk matematiky, budovat a propojit abstraktní pojmy, a přitom využívat své předchozí zkušenosti. Důležitou součástí je také diskuze o zjištěních, sdílení názorů a argumentace. Jedním z efektivních prostředí, kde lze tento přístup k matematice aplikovat, jsou slovní úlohy. (Novotná, 2004)

Slovní úlohy poskytují prostor pro praktické uplatnění teoretických znalostí a podporují rozvoj kritického myšlení. Umožňují žákům nejen řešit konkrétní problémy, ale také tvořivě přemýšlet o různém matematickém učivu a jeho využití v reálném světě. Tímto způsobem se matematika stává nejen nástrojem pro řešení úloh, ale také prostředkem pro rozvoj myšlení, který má široké uplatnění v mnoha různých oblastech života. V konečném důsledku taková výuka podporuje hlubší porozumění matematice a zvyšuje schopnost žáků využívat matematické dovednosti v různých situacích. (Novotná, 2004)

1.1.2 Proces řešení úloh

V odborné literatuře je proces řešení slovních úloh rozdělován na různý počet fází. Vybrala jsem rozdělení, které z mého pohledu nejlépe odpovídá procesu řešení slovních úloh na objemy a povrchy těles. Rozhodla jsem se, dle Novotné (2004), proces rozdělit do tří základních kroků:

Uchopení zadání slovní úlohy: Tento krok zahrnuje získání všech dat a vztahů, které jsou nezbytné pro vytvoření vhodného matematického modelu, a samotné vytvoření tohoto modelu. Jde o klíčovou fázi, ve které se žák seznamuje s problémem a identifikuje všechny relevantní informace a jejich vzájemné vztahy. Uchopení zadání úlohy zahrnuje několik hlavních činností:

a) **Identifikace objektů**: Žák musí rozpoznat všechny objekty, které jsou v úloze zmíněny. To může zahrnovat fyzické objekty, osoby, místa, nebo abstraktní pojmy.
b) **Identifikace vztahů mezi objekty**: Žák musí pochopit, jaké jsou vztahy mezi jednotlivými objekty. To může zahrnovat kvantitativní vztahy, jako jsou velikosti nebo množství, nebo kvalitativní vztahy, jako jsou příčiny a důsledky.
c) **Identifikace otázky**: Je důležité, aby žák jasně rozpoznal, jaká je hlavní otázka nebo problém, který má být vyřešen. To zahrnuje pochopení, co je cílem úlohy a jaký výsledek je požadován.
d) **Nalezení sjednocujícího pohledu**: Žák musí najít způsob, jak všechny identifikované objekty a vztahy propojit do jednoho celkového pohledu na úlohu. To zahrnuje hledání souvislostí a vytvoření celkového rámce pro řešení úlohy.
e) **Získání vhledu do struktury slovní úlohy a vytvoření matematického modelu**: Žák musí vytvořit matematický model, který správně odráží identifikované objekty a vztahy. To vyžaduje pochopení struktury úlohy a schopnost přeložit reálný problém do matematického jazyka.

Tato fáze vyžaduje aktivní zapojení žáka. Aktivní zapojení znamená, že žák musí samostatně přemýšlet, analyzovat informace, tvořit hypotézy a ověřovat jejich platnost. Bez aktivního zapojení by nebyl schopen úlohu vyřešit.

Vyřešení matematického modelu: V tomto kroku žák pracuje s vytvořeným matematickým modelem a hledá řešení úlohy v rámci matematického prostředí. Tento krok zahrnuje také provedení zkoušky správnosti výsledku příslušné matematické úlohy, ověření, že matematické výpočty a postupy byly správně provedeny. Tento krok probíhá bez ohledu na konkrétní kontext slovní úlohy, zaměřuje se čistě na matematickou správnost.

Návrat ke kontextu slovní úlohy a ověření správnosti výsledku: V posledním kroku se žák vrací k původnímu kontextu slovní úlohy a ověřuje, zda nalezené matematické řešení odpovídá zadání a dává smysl v reálném světě. Tento krok je důležitý pro zajištění, že matematické řešení je prakticky použitelné a správné v kontextu problému.

Novotná (2004) dále uvádí, že proces řešení nemusí probíhat přesně v uvedeném pořadí. Žák se může k některým činnostem vracet, některé kroky mohou probíhat současně nebo v jiném pořadí. Důležité je, aby žák pochopil podstatu problému a dokázal vytvořit a ověřit vhodný matematický model.

1.2 Geometrické těleso

Každý žák má zřejmě nějakou představu o tom, co je geometrické těleso. To může být podmíněno tím, že právě geometrická tělesa se nachází všude kolem nás. Žáci jsou zvyklí na trojrozměrný prostor, ve kterém se denně pohybují, proto by pro ně nemělo být složité pochopit problematiku prostorových těles.

Je více možností, jak definovat geometrické těleso. Zvolila jsem definici z učebnice Matematika pro gymnázia: Stereometrie (Pomykalová, 2013). Důvodem je, že úlohy, které jsou v druhé části práce, jsou také z této řady učebnic.

"Geometrické těleso je prostorový omezený souvislý geometrický útvar. Jeho hranicí nazývanou také povrchem je uzavřená plocha." (Pomykalová, 2013, s.123)

Tělesa mohou být konvexní a nekonvexní. V této práci se zaměříme na tělesa konvexní. Geometrické těleso nazýváme konvexním, pokud úsečka spojující jakékoli jeho dva body také náleží tomuto tělesu.

U libovolného geometrického tělesa můžeme vypočítat objem a povrch. V řadě učebnic, kterou jsem zvolila pro tuto práci, se pracuje s mnohostěny a rotačními tělesy. U těchto těles jsme schopni odvodit přesné vzorce pro výpočet jejich objemů a povrchů.

Pro přesnou definici objemu a povrchu jsem ze stejného důvodu jako u definice geometrického tělesa zvolila učebnici Matematika pro gymnázia: Stereometrie (Pomykalová, 2013).

1.2.1 Objem

Objem tělesa obecně vyjadřuje, jak velkou část prostoru geometrické těleso zaujímá.

"Objem tělesa je kladné reálné číslo přiřazené tělesu tak, že platí:

1) Shodná tělesa mají objemy sobě rovné.

2) Jestliže je těleso složeno z několika nepronikajících se těles, je jeho objem roven součtu objemů těchto těles.

3) Objem krychle, jejíž hrana má délku 1 (m, cm, ...), je roven 1 (m^3, cm^3, ...)." (Pomykalová, 2013, s.149)

Dále Pomykalová (2013) specifikuje, že nepronikající tělesa jsou taková tělesa, která vzájemně neobsahují vnitřní body.

V učebnici Matematika pro gymnázia: Stereometrie (Pomykalová, 2013) se značí objem písmenem V. Stejně tak je objem značený i v této práci.

1.2.2 Povrch

Povrch tělesa obecně vyjadřuje celkový obsah plochy, který zaujímá vnější obal tělesa. Jinými slovy, jde o součet obsahů všech vnějších stěn tělesa.

"Povrchem S tělesa rozumíme obsah jeho hranice." (Pomykalová, 2013, s. 150)

V učebnici Matematika pro gymnázia: Stereometrie (Pomykalová, 2013) se značí povrch písmenem S. Stejně tak je povrch značený i v této práci.

2 Výpočet objemů a povrchů těles

Ve slovních úlohách na objemy a povrchy těles se využívají vzorce pro jejich výpočet. Nepovažuji však za efektivní se jednotlivé vzorce učit zpaměti. U slovních úloh je užitečné umět si odvodit vzorce pro výpočet objemů a povrchů těles. Slovní úloha totiž může být zadána tak, že je potřeba vzorci pro výpočet objemu a povrchu rozumět. Vzorce tedy zavádím pouze obecným způsobem, pomocí obsahu podstavy, pláště a výšky. Odvození těchto vzorců neuvádím, protože považuji za podstatné si vzorce tímto obecným způsobem pamatovat.

Před zavedením vzorců pro výpočet objemů a povrchů definuji zkratky, které dále používám:

S_p – Obsah podstavy tělesa.

S_{pl} – Obsah pláště tělesa.

v – Výška tělesa, tj. vzdálenost mezi základnami u kolmých těles nebo vzdálenost od základny k vrcholu u špičatých těles.

Pomykalová (2013) tělesa pro výpočet objemů a povrchů rozděluje takto:

2.1 Mnohostěny

Mnohostěny jsou geometrická tělesa. Jejich stěny jsou tvořeny mnohoúhelníky, z nichž žádné dva neleží ve stejné rovině. Každá strana mnohoúhelníku je současně stranou jiného mnohoúhelníku, který je také stěnou mnohostěnu.

Mnohoúhelníky jsou v této práci v souladu s učebnicí Matematika pro gymnázia: Stereometrie (Pomykalová, 2013) rozděleny na tělesa hranolového a jehlanového typu.

2.1.1 Tělesa hranolového typu

Tělesa hranolového typu, jako je krychle, kvádr nebo hranol, nemají vrchol, který není v rovině základny. Má tedy dvě podstavy.

Povrch těles hranolového typu vypočítáme takto:

$$S = 2 \cdot S_p + S_{pl}.$$

Objem těles hranolového typu vypočítáme takto:

$$V = S_p \cdot v.$$

2.1.2 Tělesa jehlanového typu

Tělesem jehlanového typu je jehlan, ten má vrchol, který není v rovině základny. Má tedy pouze jednu podstavu.

Jehlan

Povrch jehlanu vypočítáme takto:

$$S = S_p + S_{pl}.$$

Objem jehlanu vypočítáme takto:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v.$$

2.1.3 Komolá tělesa

Z těles jehlanového typu vznikají komolá tělesa. Pokud těleso jehlanového typu protne rovina rovnoběžná s rovinou podstavy, rozdělí těleso na dvě tělesa. Jedno z těchto těles bude opět jehlanového typu a druhé bude komolé.

Komolé těleso má dvě podstavy. Obsahy těchto podstav označme S_1 a S_2.

Povrch komolých těles vypočítáme takto:

$$S = S_1 + S_2 + S_{pl}.$$

Objem komolých těles vypočítáme takto:

$$V = \frac{1}{3} \cdot v \cdot \left({S_1}^2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + {S_2}^2\right).$$

2.2 Rotační tělesa

Rotační tělesa vznikají rotací rovinných útvarů kolem jejich osy. Mezi rotační tělesa v této práci řadíme válec, kužel a kouli.

Co se týče objemu a povrchu rotačního válce a rotačního kužele, vzorec pro jejich výpočet lze odvodit pomocí obecných vzorců pro tělesa hranolového a jehlanového typu.

Rotační válec

Povrch rotačního válce vypočítáme takto:

$$S = 2 \cdot S_p + S_{pl}.$$

Objem rotačního válce vypočítáme takto:

$$V = S_p \cdot v.$$

Rotační kužel

Povrch rotačního kužele vypočítáme takto:

$$S = S_p + S_{pl}.$$

Objem rotačního kužele vypočítáme takto:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v.$$

Koule

Koule vzniká rotací půlkruhu kolem přímky. Tato přímka obsahuje průměr půlkruhu. Střed půlkruhu *S* je středem koule a obdobně poloměr *r* půlkruhu je i poloměrem koule. Hranici koule tvoří kulová plocha.

Povrch koule, tj. obsah kulové plochy, vypočítáme takto:

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2.$$

Objem koule vypočítáme takto:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3.$$

Dále by do této skupiny patřily i části koule, nicméně v práci jsem se na takové úlohy nezaměřovala.

2.3 Kosá a kolmá tělesa

Při studiu geometrických těles je užitečné rozlišovat mezi tělesy kolmými a kosými. Kolmá tělesa mají podstavu, která je kolmá k jejich výšce, zatímco kosá tělesa mají podstavu, která není kolmá k jejich výšce.

Pro výpočet objemů a povrchů kosých těles se často využívá Cavalieriho princip. Tento princip říká, že dva objekty mají stejný objem, pokud každou rovinou rovnoběžnou s podstavou vytvářejí stejné průřezy. Cavalieriho princip tak umožňuje přenést výpočty objemů z kolmých na kosá tělesa. (Pomykalová, 2013, s. 150)

3 Slovní úlohy na objemy a povrchy těles v kombinaci s jiným učivem

Slovní úlohy na objemy a povrchy těles se často nevyskytují v literatuře pouze jako úlohy vyžadující pouhé dosazení do vzorce. Dále například v přijímacích zkouškách na různé stupně škol bývají zařazeny i úlohy, v nichž pouhé dosazení do správně vybraného vzorce nestačí. Žáky úlohy tohoto typu obvykle překvapí, protože nejsou na takové úlohy z výuky zvyklí.

Tato úvaha mě inspirovala k vytvoření přehledu slovních úloh na objemy a povrchy těles v kombinaci s nějakým dalším učivem, které se vyskytují v učebnicích pro střední školy.

Rozdělení úloh

Pro zpracování této práce jsem prohlédla učebnice z řady Matematika pro gymnázia a vyhledala úlohy, které propojují slovní úlohy na objemy a povrchy těles s jiným učivem. Tyto úlohy jsem následně rozdělila podle mnou stanovených kritérií. Hlavním záměrem bylo uspořádat úlohy podle toho, na co dalšího kromě výpočtů objemů a povrchů těles cílí. Úlohy jsem rozdělila do dvou hlavních podkapitol podle předmětu, do kterého spadá přidružené učivo:

Matematické kombinace:

- Úlohy, které kromě výpočtů objemů a povrchů těles zahrnují i jiné učivo matematiky, jako je například algebra, geometrie, trigonometrie a další.

Fyzikální kombinace:

- Úlohy, které využívají učivo fyziky, jako je především hustota, nebo pohyb kapalin, a aplikují je na výpočty objemů a povrchů těles.

Tyto dvě podkapitoly dále dělím na skupiny dle přidruženého učiva. Skupiny jsou uspořádány s ohledem na jejich tematické návaznosti vzhledem k ostatním. V každé skupině je uvedeno, jaké úlohy se v ní nachází a co žáci při řešení úloh z dané skupiny procvičují. Také je specifikováno, ve které učebnici a kapitole se úlohy nachází. Kromě toho je popsáno, čím jsou vybrané úlohy specifické nebo co o nich lze říci.

Do většiny skupin jsem zařadila dvě úlohy, které ji nejlépe reprezentují. Ve třech případech jsem v učebnicích nalezla pouze jednu úlohu. V jedné ze skupin je úloh více, protože měly v učebnicích široké zastoupení. Úlohy jsem vybírala tak, aby obsahovaly výpočty objemů a povrchů různých těles a měly různou obtížnost.

Každá úloha obsahuje informaci o zdroji, ze kterého byla převzata. Úlohy jsem uvedla s autorským řešením. Pro zajištění přehlednosti provádím řešení bez jednotek, ty jsou uvedeny vždy až na konci výpočtu. Inspirovala jsem se tím ve zdrojových učebnicích. U některých řešení jsou obrázky, ty jsou pouze ilustrativní. Vzdálenosti ani poměry v nich neodpovídají skutečnosti, jeden obrázek je převzat z učebnice.

3.1 Matematické kombinace

V této podkapitole jsou zařazeny slovní úlohy na objemy a povrchy těles, ve kterých žáci musí prokázat schopnost využití dalších matematických znalostí a dovedností. V těchto úlohách žáci řeší komplexní úlohy, které propojují dvě různá učiva matematiky.

Při analýze každé úlohy jsem identifikovala nejvýraznější přidružené učivo matematiky, které úloha obsahuje, a na základě toho ji přiřadila do skupiny. Uvědomovala jsem si však, že není možné dosáhnout dokonalé klasifikace, neboť některé úlohy mohou vyžadovat více různých matematických znalostí a dovedností. Zejména u komplexnějších úloh se často vyskytuje překrývání požadovaných znalostí.

Podkapitolu dělím na 13 skupin, které jsem pojmenovala podle přidruženého učiva.

3.1.1 Nejmenší společný násobek

V této skupině jsou slovní úlohy, které kromě základních výpočtů objemů a povrchů těles vyžadují také použití nejmenšího společného násobku (NSN).

Žáci při řešení úloh z této skupiny procvičují výpočty objemů a povrchů těles, ale také si upevňují a připomínají elementární aritmetiku.

V učebnici Matematika pro gymnázia: Základní poznatky z matematiky (Bušek & Calda, 2011) jsem našla jednu úlohu tohoto typu, byla zařazena v kapitole Elementární teorie čísel. Tato úloha je specifická tím, že zahrnuje nutnost určit nejmenší společný násobek více čísel.

Úloha 1

V krabici tvaru kvádru jsou ve čtyřech vrstvách uloženy čtyři druhy krychlí. V první vrstvě jsou krychle s hranou délky 12 cm. V každé následující vrstvě je délka hrany krychle o 2 cm menší než délka hrany krychle v předcházející vrstvě. Za předpokladu, že mezi stěnami krabice a krychlemi i mezi krychlemi navzájem nejsou žádné mezery, vypočítejte

a) jaké jsou nejmenší možné vnitřní rozměry krabice,
b) kolik krychlí jednotlivých druhů je v této nejmenší možné krabici.

(Bušek & Calda, 2011, s. 119)

Řešení:

a)

Ze zadání víme, že krychle v 1. vrstvě mají hranu délky $a_1 = 12$ cm, ve 2. vrstvě mají hranu délky $a_2 = 10$ cm, ve 3. vrstvě mají hranu délky $a_3 = 8$ cm a ve 4. vrstvě mají hranu délky $a_4 = 6$ cm.

Výšku *v* krabice zjistíme jako součet délek hran krychlí nad sebou:

$$v = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$

$$v = (12 + 10 + 8 + 6)\ \text{cm},$$

$$v = 36\ \text{cm}.$$

Minimální šířku a délku krabice vypočítáme pomocí nejmenšího společného násobku čísel 12, 10, 8, 6:

$$\text{NSN}(12, 10, 8, 6) = 120.$$

Nejmenší možné rozměry krabice jsou 120 cm, 120 cm, 36 cm.

b)

Počet krychlí v 1. vrstvě:

$$\frac{120}{12} \cdot \frac{120}{12} \cdot 1 = 10 \cdot 10 \cdot 1 = 100.$$

Počet krychlí ve 2. vrstvě:

$$\frac{120}{10} \cdot \frac{120}{10} \cdot 1 = 12 \cdot 12 \cdot 1 = 144.$$

Počet krychlí ve 3. vrstvě:

$$\frac{120}{8} \cdot \frac{120}{8} \cdot 1 = 15 \cdot 15 \cdot 1 = 225.$$

Počet krychlí ve 4. vrstvě:

$$\frac{120}{6} \cdot \frac{120}{6} \cdot 1 = 20 \cdot 20 \cdot 1 = 400.$$

V nejmenší možné krabici je 100 krychlí v první vrstvě, 144 krychlí ve druhé vrstvě, 225 krychlí ve třetí vrstvě a 400 krychlí ve čtvrté vrstvě.

3.1.2 Zlomky

Tato skupina slovních úloh se zaměřuje na výpočty objemů a povrchů těles ve spojení s prací se zlomky.

Žáci při řešení úloh z této skupiny procvičují výpočty objemů a povrchů těles, ale také si upevňují a připomínají dovednosti při práci se zlomky.

V učebnici Matematika pro gymnázia: Stereometrie (Pomykalová, 2013) jsem našla jednu úlohu tohoto typu, byla zařazena v kapitole Tělesa. Tato úloha konkrétně připomíná práci se smíšenými čísly.

Úloha 1

Vypočítejte výšku kolmého trojbokého hranolu s objemem $V = 200\ \mathrm{cm}^3$, jehož podstavné hrany mají délky $4\frac{1}{3}$ cm, 10 cm, $12\frac{1}{3}$ cm. (Pomykalová, 2013, s. 162)

Řešení:

Délky hran jsou v zadání vyjádřené smíšenými čísly. Nejprve tato čísla převedeme na zlomky a zjistíme tak délky stran trojúhelníku v podstavě:

$$a = 4\frac{1}{3}\ \mathrm{cm} = \frac{13}{3}\ \mathrm{cm},$$

$$b = 10 \text{ cm},$$

$$a = 12\frac{1}{3} \text{ cm} = \frac{37}{3} \text{ cm}.$$

Výšku *v* hranolu vyjádříme pomocí objemu, kde S_p je obsah podstavy hranolu:

$$V = S_p \cdot v,$$

$$v = \frac{V}{S_p}.$$

Potřebujeme zjistit obsah podstavy. Podstavou je trojúhelník, jehož délky stran známe. Pokud chceme vypočítat obsah trojúhelníku pomocí jeho stran, použijeme Heronův vzorec:

$$S_p = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}.$$

(Pomykalová, 2018, s. 66)

Potřebujeme určit hodnotu *s*. Tuto hodnotu zjistíme jako polovinu obvodu tohoto trojúhelníku, tedy:

$$s = \frac{a+b+c}{2},$$

$$s = \frac{\frac{13}{3} + 10 + \frac{37}{3}}{2} \text{ cm},$$

$$s = \frac{40}{3} \text{ cm}.$$

Nyní dosadíme do Heronova vzorce a vypočítáme obsah podstavy:

$$S_p = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)},$$

$$S_p = \sqrt{\frac{40}{3} \cdot \left(\frac{40}{3} - \frac{13}{3}\right) \cdot \left(\frac{40}{3} - 10\right) \cdot \left(\frac{40}{3} - \frac{37}{3}\right)} \text{ cm}^2,$$

$$S_p = \sqrt{\frac{40}{3} \cdot \frac{27}{3} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{3}} \text{ cm}^2,$$

$$S_p = \sqrt{400} \text{ cm}^2,$$

$$S_p = 20 \text{ cm}^2.$$

Výšku v jsme vyjádřili v jednom z předchozích kroků. Dosadíme a vypočítáme ji:

$$v = \frac{200}{20} \text{ cm},$$

$$v = 10 \text{ cm}.$$

Výška v kolmého trojbokého hranolu je 10 cm.

3.1.3 Výrazy

Tato skupina zahrnuje slovní úlohy, které kromě výpočtů objemů a povrchů těles vyžadují také práci s algebraickými výrazy.

Žáci při řešení úloh z této skupiny procvičují výpočty objemů a povrchů těles, ale také manipulaci s algebraickými výrazy, což může zahrnovat i úpravy výrazů.

V učebnici Matematika pro gymnázia: Základní poznatky z matematiky (Bušek & Calda, 2011) jsem našla pouze jednu úlohu tohoto typu, byla zařazena v kapitole Mnohočleny. Tato úloha propojuje porozumění textu s výrazy a následně si žáci osvojují vzorec pro výpočet objemu.

Úloha 1

Zapište pomocí vhodně zvolených proměnných slovní popis výpočtu objemu komolého jehlanu se čtvercovými podstavami, který pochází ze starověkého textu: „Objem useknuté pyramidy“ – tj. objem zmíněného komolého jehlanu – „vypočítáš tak, že změříš stranu dolního čtverce, stranu horního čtverce a svislou vzdálenost obou čtverců. První dvě čísla vynásob navzájem a ještě každé s ním samotným, ty tři výsledky sečti a co vyjde, vynásob třetinou třetího čísla, které jsi změřil.“ (Bušek & Calda, 2011, s. 133)

Řešení:

Volba proměnných:

a = délka strany čtverce v dolní podstavě,

b = délka strany čtverce v horní podstavě,

v = výška komolého jehlanu.

Nyní vyjádříme dle slovního popisu objem komolého jehlanu:

$$V = \frac{v}{3} \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2).$$

3.1.4 Vyjádření neznámé ze vzorce

Tato skupina zahrnuje slovní úlohy, které kromě výpočtů objemů a povrchů těles vyžadují také vyjádření neznámé ze vzorce.

Žáci při řešení úloh z této skupiny procvičují výpočty objemů a povrchů těles, ale také práci s algebraickými vzorci. Musí je například upravit tak, aby vyjádřili konkrétní neznámou.

V učebnici Matematika pro gymnázia: Základní poznatky z matematiky (Bušek & Calda, 2011) jsem našla několik úloh tohoto typu, které byly zařazeny v kapitole Lomené výrazy. Do této skupiny jsem zařadila čtyři úlohy. První z nich přímo pracuje s objemem tělesa. Zbývající tři úlohy jsou poměrně snadné a nejsou přímo zaměřeny na výpočet objemů a povrchů těles, nicméně pracují se vzorci pro jejich výpočet. Žáci se při řešení těchto úloh seznamují s konkrétními vzorci, proto je považuji za důležité.

Úloha 1

Určete výšku pravidelného čtyřbokého jehlanu, je-li jeho objem $V = 800\ \mathrm{cm}^3$ a délka jeho podstavné hrany je $a = 10$ cm. (Bušek & Calda, 2011, s. 160)

Řešení:

Objem čtyřbokého jehlanu s obsahem podstavy S_p a výškou v se počítá podle vzorce:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v.$$

Podstavou pravidelného čtyřbokého jehlanu je čtverec. Hodnoty ze zadání bychom mohli dosadit do vzorce $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v$ a úlohu dořešit pomocí rovnice. Tento způsob řešení zřejmě není očekávaný, protože se úloha nachází v kapitole zaměřené na vyjádření neznámé ze vzorce. Očekávaný způsob řešení bude pravděpodobně takový, že:

$$v = \frac{3 \cdot V}{a^2},$$

$$v = \frac{3 \cdot 800}{10^2} \text{ cm},$$

$$v = 24 \text{ cm}.$$

Výška pravidelného čtyřbokého jehlanu je 24 cm.

Úloha 2

Určete, jaký poloměr *r* musí mít koule, aby její objem byl roven *V*. (Bušek & Calda, 2011, s. 162)

Řešení:

Abychom našli poloměr *r* pro daný objem *V*, musíme vyjádřit *r* ze vzorce pro výpočet objemu koule:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3.$$

Vyjádříme *r* z tohoto vzorce:

$$r^3 = \frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi},$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}}.$$

Úloha 3

Ze vzorce pro povrch válce $S = 2\pi r(r + v)$ vyjádřete *v*. (Bušek & Calda, 2011, s. 162)

Řešení:

$$S = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v,$$

$$S - 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v,$$

$$v = \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot r^2}{2 \cdot \pi \cdot r}.$$

Úloha 4

Ze vzorce pro povrch kvádru $S = 2(ab + ac + bc)$ vyjádřete *a*. (Bušek & Calda, 2011, s. 162)

Řešení:

$$S = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c,$$

$$S - 2 \cdot b \cdot c = a \cdot (2 \cdot b + 2 \cdot c),$$

$$a = \frac{S - 2 \cdot b \cdot c}{2 \cdot b + 2 \cdot c}.$$

3.1.5 Soustavy lineárních rovnic s více neznámými

Tato skupina zahrnuje slovní úlohy, které kombinují výpočty objemů a povrchů těles s řešením soustav lineárních rovnic s více neznámými.

Žáci při řešení úloh z této skupiny procvičují výpočty objemů a povrchů těles, ale také formulaci, řešení a interpretaci soustav lineárních rovnic s více neznámými. Tento typ úloh rozvíjí schopnost aplikovat algebraické postupy v kontextu geometrických problémů.

V učebnici Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice (Charvát et. al., 2010) jsem našla pouze jednu úlohu tohoto typu, nacházející se v kapitole Lineární rovnice a nerovnice s více neznámými. Dále jsem jednu úlohu objevila i v učebnici Matematika pro gymnázia: Stereometrie (Pomykalová, 2013). V obou těchto úlohách se pomocí rovnic hledají délky hran tělesa.

Úloha 1

Prodloužíme-li každou hranu kvádru o 2 cm, zvětší se obsah jedné stěny o $36\ \mathrm{cm}^2$, druhé o $42\ \mathrm{cm}^2$ a třetí o $46\ \mathrm{cm}^2$. Určete délky hran kvádru. (Charvát et. al., 2010, s. 116)

Řešení:

Délky hran kvádru označíme *a*, *b*, *c*. Po prodloužení každé hrany o 2 cm budou mít hrany nové délky:

$$a' = a + 2,$$

$$b' = b + 2,$$

$$c' = c + 2.$$

Obsah jedné stěny S_1 před prodloužením je $S_1 = a \cdot b$ a obsah stěny $S_1{}'$ po prodloužení $S_1' = (a + 2) \cdot (b + 2)$.

Ze zadání víme, o kolik se stěna zvětší. Vyjádříme, jaký je rozdíl mezi obsahem původní stěny a obsahem nové stěny s prodlouženými hranami:

$S_1' - S_1 = (a+2)\cdot(b+2) - \ a\cdot b = a\cdot b + 2\cdot a + 2\cdot b + 4 - a\cdot b = 2\cdot a + 2\cdot b + 4.$

Tento rozdíl je roven 36 cm^2:

$$2\cdot a + 2\cdot b + 4 = 36,$$

$$2\cdot a + 2\cdot b = 32,$$

$$a + b = 16.$$

Obsah druhé stěny S_2 před prodloužením je $S_2 = b\cdot c$ a obsah stěny S_2' po prodloužení $S_2' = (b+2)\cdot(c+2)$.

Ze zadaní víme, o kolik se stěna zvětší. Vyjádříme, jaký je rozdíl mezi obsahem původní stěny a obsahem nové stěny s prodlouženými hranami:

$S_2' - S_2 = (b+2)\cdot(c+2) - \ b\cdot c = b\cdot c + 2\cdot b + 2\cdot c + 4 - b\cdot c = 2\cdot b + 2\cdot c + 4.$

Tento rozdíl je roven 42 cm^2:

$$2\cdot b + 2\cdot c + 4 = 42,$$

$$2\cdot b + 2\cdot c = 38,$$

$$b + c = 19.$$

Obsah třetí stěny S_3 před prodloužením je $S_3 = a\cdot c$ a obsah stěny $S_3{}'$ po prodloužení $S_3{}' = (a+2)\cdot(c+2)$.

Ze zadaní víme, o kolik se stěna zvětší. Rozdíl mezi obsahem původní stěny a obsahem nové stěny s prodlouženými hranami je:

$S_3' - S_3 = (a+2)\cdot(c+2) - \ a\cdot c = a\cdot c + 2\cdot a + 2\cdot c + 4 - a\cdot c = 2\cdot a + 2\cdot c + 4.$

Tento rozdíl je roven 46 cm^2:

$$2\cdot a + 2\cdot c + 4 = 46,$$

$$2\cdot a + 2\cdot c = 42,$$

$$a + c = 21.$$

Nyní vyřešíme tuto soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$a + b = 16,$$

$$b + c = 19,$$

$$a + c = 21.$$

Možností postupu řešení existuje více. Já jsem ve svém postupu zvolila odečtení první rovnice od druhé:

$$(b + c) - (a + b) = 19 - 16,$$

$$c - a = 3.$$

Vyjádříme proměnnou *c*:

$$c = a + 3.$$

Dosadíme proměnnou *c* do třetí rovnice a dořešíme rovnici:

$$a + (a + 3) = 21,$$

$$2 \cdot a + 3 = 21,$$

$$2 \cdot a = 18,$$

$$a = 9 \text{ cm}.$$

Dosadíme $a = 9$ cm do první rovnice:

$$9 + b = 16,$$

$$b = 7 \text{ cm}.$$

Dosadíme $a = 9$ cm do třetí rovnice:

$$9 + c = 21,$$

$$c = 12 \text{ cm}.$$

Délky hran kvádru jsou $a = 9$ cm, $b = 7$ cm, $c = 12$ cm.

Úloha 2

Obsahy tří stěn kvádru, které mají společný vrchol, jsou 72 cm^2, 96 cm^2 a 108 cm^2. Vypočtěte objem kvádru. (Pomykalová, 2013, s. 151)

Řešení:

Označme délky hran kvádru a, b, c. Ze zadání víme, že obsahy stěn S_1, S_2, S_3 jsou:

$$S_1 = a \cdot b = 72 \text{ cm}^2,$$

$$S_2 = b \cdot c = 96 \text{ cm}^2,$$

$$S_3 = c \cdot a = 108 \text{ cm}^2.$$

Vyřešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých. Nejprve vyjádříme z první rovnice *a* a z druhé rovnice *c*:

$$a = \frac{72}{b},$$

$$c = \frac{96}{b}.$$

Dosadíme vyjádřené *a* a *c* do třetí rovnice a vyřešíme rovnici o jedné neznámé. Zjistíme délku hrany *b*:

$$\frac{96}{b} \cdot \frac{72}{b} = 108,$$

$$6912 = 108 \cdot b^2,$$

$$b^2 = 64 \text{ cm}^2,$$

$$b = 8 \text{ cm}.$$

Řešením rovnice $b^2 = 64 \text{ cm}^2$ je $b = -8 \text{ cm}$ a $b = 8 \text{ cm}$. Vzhledem k tomu, že se jedná o délku hrany, výsledkem je pouze $b = 8 \text{ cm}$. Pomocí *b* dopočítáme i délky hran *a* a *c*:

$$a = \frac{72}{b} = \frac{72}{8} \text{ cm} = 9 \text{ cm},$$

$$c = \frac{96}{b} = \frac{96}{8} \text{ cm} = 12 \text{ cm}.$$

Nyní známe všechny délky hran kvádru. Objem kvádru s podstavou S_p a výškou *v* počítáme pomocí vzorce:

$$V = S_p \cdot v.$$

Podstavou kvádru je obdélník s délkami stran a a b a výška kvádru je *c*. Objem tedy počítáme tak, že:

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

$$V = 9 \cdot 8 \cdot 12 \text{ cm}^3,$$

$$V = 864 \text{ cm}^3.$$

Objem kvádru je 864 cm^3.

3.1.6 Poměr

Tato skupina slovních úloh se zaměřuje na výpočty objemů a povrchů těles v kombinaci s využitím poměru.

Žáci při řešení úloh z této skupiny procvičují výpočty objemů a povrchů těles, ale také své znalosti o poměrech veličin a jejich vztahu k objemům a povrchům těles.

V učebnici Matematika pro gymnázia: Stereometrie (Pomykalová, 2013) jsem našla několik úloh tohoto typu, které byly zařazeny v kapitole Tělesa. Vybrala jsem dvě úlohy, které představují různé aplikace poměrů v kontextu geometrických výpočtů. Tyto úlohy žáky vedou k porozumění, jak se poměry vztahují k objemům a povrchům geometrických těles.

Úloha 1

Kvádr má objem 810 cm^3. Jeho rozměry jsou v poměru $2 : 3 : 5$. Vypočtěte jeho povrch. (Pomykalová, 2013, s. 151)

Řešení:

Označme *k* koeficient podobnosti. Kvádr má délky hran a, b, c v poměru 2:3:5. To znamená, že délky hran kvádru můžeme vyjádřit v závislosti na koeficientu podobnosti *k*:

$$a = 2 \cdot k,$$

$$b = 3 \cdot k,$$

$$c = 5 \cdot k.$$

Objem kvádru s podstavou S_p a výškou *v* vypočítáme podle vzorce:

$$V = S_p \cdot v.$$

Podstavou kvádru je obdélník a jeho výška je *c*, tedy:

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

$$V = 2 \cdot k \cdot 3 \cdot k \cdot 5 \cdot k,$$

$$V = 30 \cdot k^3.$$

Dosazením objemu ze zadání zjistíme hodnotu koeficientu *k*:

$$30 \cdot k^3 = 810,$$

$$k^3 = \frac{810}{30},$$

$$k = \sqrt[3]{27},$$

$$k = 3.$$

Vrátíme se zpět k prvnímu kroku a vypočteme skutečné délky hran kvádru:

$$a = 2 \cdot k = 2 \cdot 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm},$$

$$b = 3 \cdot k = 3 \cdot 3 \text{ cm} = 9 \text{ cm},$$

$$c = 5 \cdot k = 5 \cdot 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}.$$

Skutečné délky hran kvádru jsou $a = 6$ cm, $b = 9$ cm a $c = 15$ cm. Nyní vypočítáme povrch kvádru. Povrch kvádru tvoří šest obdélníků, z nichž každé dva protější jsou shodné. Povrch tedy vypočítáme tak, že:

$$S = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c),$$

$$S = 2 \cdot (6 \cdot 9 + 9 \cdot 15 + 6 \cdot 15) \text{ cm}^2,$$

$$S = 2 \cdot 279 \text{ cm}^2,$$

$$S = 558 \text{ cm}^2.$$

Povrch kvádru je $558\ \mathrm{cm}^2$.

Úloha 2

Určete objem a povrch kvádru, jehož tělesová úhlopříčka má délku u a jehož stěny, které procházejí týmž vrcholem, mají obsahy v poměru $1 : 2 : 3$. (Pomykalová, 2013, s. 151)

Řešení:

Označme *k* koeficient podobnosti. Označme délky hran kvádru a, b, c. Obsahy stěn kvádru, které procházejí týmž vrcholem, jsou $a \cdot b$, $a \cdot c$, $b \cdot c$ a jsou v poměru $1 : 2 : 3$. To znamená, že obsahy stěn kvádru můžeme vyjádřit v závislosti na koeficientu *k*:

$$a \cdot b = k,$$

$$a \cdot c = 2 \cdot k,$$

$$b \cdot c = 3 \cdot k.$$

Z těchto vztahů vyjádříme všechny délky hran v závislosti na délce hrany *a* a koeficientu *k*:

$$c = \frac{2 \cdot k}{a},$$

$$b = \frac{3 \cdot k}{c} = \frac{3 \cdot k}{\frac{2 \cdot k}{a}} = \frac{3 \cdot a}{2}.$$

Potřebujeme nalézt vzorec pro výpočet tělesové úhlopříčky *u*. Nejprve najdeme délku stěnové úhlopříčky ve stěně určené délkami hran *a* a *b* pomocí Pythagorovy věty. Poté tuto délku použijeme k nalezení délky tělesové úhlopříčky spolu s výškou *c*. Délka tělesové úhlopříčky *u* kvádru je dána vztahem:

$$u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Dosadíme do tohoto vztahu a vyjádříme délku tělesové úhlopříčky:

$$u = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3 \cdot a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot k}{a}\right)^2},$$

$$u = \sqrt{a^2 + \frac{9 \cdot a^2}{4} + \frac{4 \cdot k^2}{a^2}}.$$

Abychom mohli pokračovat, potřebujeme dosadit *k* vyjádřené pomocí *a*:

$$k = a \cdot b,$$

$$k = a \cdot \frac{3 \cdot a}{2} = \frac{3 \cdot a^2}{2}.$$

Nyní můžeme dále pokračovat ve vyjadřování délky tělesové úhlopříčky:

$$u = \sqrt{a^2 + \frac{9 \cdot a^2}{4} + \frac{4 \cdot \left(\frac{3 \cdot a^2}{2}\right)^2}{a^2}},$$

$$u = \sqrt{a^2 + \frac{9 \cdot a^2}{4} + \frac{9 \cdot a^4}{a^2}},$$

$$u = \sqrt{a^2 + \frac{9 \cdot a^2}{4} + 9 \cdot a^2},$$

$$u = \sqrt{a^2 + \frac{45 \cdot a^2}{4}},$$

$$u = \sqrt{\frac{49 \cdot a^2}{4}},$$

$$u = \frac{7 \cdot a}{2}.$$

Z tohoto vztahu můžeme vyjádřit délku hrany *a* v závislosti na délce úhlopříčky *u*. Dále pak využít předchozích vztahů a vyjádřit i délky hran *b* a *c*:

$$a = \frac{2 \cdot u}{7},$$

$$b = \frac{3 \cdot a}{2} = \frac{3 \cdot \frac{2 \cdot u}{7}}{2} = \frac{3 \cdot u}{7},$$

$$c = \frac{2 \cdot k}{a} = \frac{2 \cdot \frac{3 \cdot a^2}{2}}{a} = 3 \cdot a = 3 \cdot \frac{2 \cdot u}{7} = \frac{6 \cdot u}{7}.$$

Pro vyjádření objemu a povrchu zbývá pouze dosadit do vzorce. Objem kvádru s obsahem podstavy S_p a výškou v vypočítáme podle vzorce:

$$V = S_p \cdot v.$$

Podstavou kvádru je obdélník s délkami stran a a b, jeho výška je c, tedy:

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

$$V = \frac{2 \cdot u}{7} \cdot \frac{3 \cdot u}{7} \cdot \frac{6 \cdot u}{7},$$

$$V = \frac{36 \cdot u^3}{343}.$$

Povrch kvádru je tvořen šesti obdélníky, z nichž každé dva protější jsou shodné. Povrch tedy vyjádříme tak, že:

$$S = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c),$$

$$S = 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot u}{7} \cdot \frac{3 \cdot u}{7} + \frac{3 \cdot u}{7} \cdot \frac{6 \cdot u}{7} + \frac{2 \cdot u}{7} \cdot \frac{6 \cdot u}{7}\right),$$

$$S = 2 \cdot \left(\frac{6 \cdot u^2}{49} + \frac{12 \cdot u^2}{49} + \frac{18 \cdot u^2}{49}\right),$$

$$S = \frac{72 \cdot u^2}{49}.$$

Objem kvádru v závislosti na úhlopříčce u je $\frac{36 \cdot u^3}{343}$ a povrch $\frac{72 \cdot u^2}{49}$.

3.1.7 Procenta

Tato skupina slovních úloh se zaměřuje na výpočty objemů a povrchů těles ve spojení s procenty.

Žáci při řešení úloh z této skupiny procvičují výpočty objemů a povrchů těles, ale také musí aplikovat své znalosti o procentech při řešení geometrických problémů.

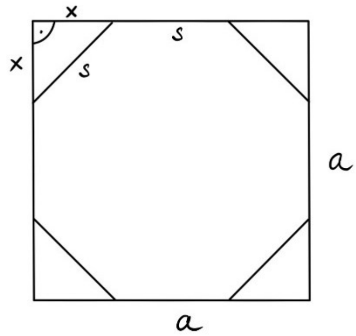
V učebnici Matematika pro gymnázia: Stereometrie (Pomykalová, 2013) jsem našla pouze dvě úlohy tohoto typu, které byly zařazeny v kapitole Tělesa. Obě tyto úlohy jsou propojené s praktickým využitím.

Úloha 1

Dřevěný sloup tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavnou hranou délky *a* a výškou *v* se ohoblováním upraví na sloup, který má tvar pravidelného osmibokého hranolu. O kolik procent se zmenší

a) objem,
b) plášť

původního sloupu? (Pomykalová, 2013, s. 163)



Obr. 1 Podstava sloupu, vlastní obrázek

Řešení:

a)

Objem hranolu s obsahem podstavy S_p a výškou *v* vypočítáme podle vzorce:

$$V = S_p \cdot v.$$

Oba hranoly mají stejnou výšku, takže úbytek objemu závisí na obsahu podstavy.

Podstavou pravidelného čtyřbokého hranolu je čtverec se stranou délky *a*. Opracujeme ho na pravidelný osmiboký hranol s podstavou osmiúhelníku. V podstavě si to představme tak, že do čtverce vepíšeme osmiúhelník (viz Obr. 1). Potřebujeme si vyjádřit délku strany čtverce a osmiúhelníku v závislosti na stejné proměnné. Představme si, že odřízneme ze čtverce čtyři rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky. Označme délku ramene tohoto trojúhelníku *x*. Pomocí Pythagorovy věty vyjádříme délku strany *s* osmiúhelníku v závislosti na *x*:

$$s = \sqrt{x^2 + x^2},$$

$$s = \sqrt{2 \cdot x^2},$$

$$s = x \cdot \sqrt{2}.$$

Délku hrany čtverce vyjádříme jako součet dvou částí délky *x* a délky *s*:

$$a = 2 \cdot x + s,$$

$$a = 2 \cdot x + x \cdot \sqrt{2}.$$

Obsah podstavy $S_{pč}$ pravidelného čtyřbokého hranolu vyjádříme pomocí vzorce pro výpočet obsahu čtverce:

$$S_{pč} = a^2,$$

$$S_{pč} = (2 \cdot x + x \cdot \sqrt{2})^2,$$

$$S_{pč} = 6 \cdot x^2 + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2.$$

Obsah podstavy S_{po} osmibokého hranolu vyjádříme tak, že od obsahu čtvercové podstavy odečteme čtyřikrát obsah rovnoramenného trojúhelníku S, který jsme odřízli. Nejprve vyjádříme obsah těchto čtyř trojúhelníků:

$$S = 4 \cdot \frac{x^2}{2},$$

$$S = 2 \cdot x^2.$$

Nyní vyjádříme obsah podstavy osmibokého hranolu:

$$S_{po} = S_{pč} - S,$$

$$S_{po} = 6 \cdot x^2 + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x^2,$$

$$S_{po} = 4 \cdot x^2 + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2.$$

Například pomocí trojčlenky zjistíme, na kolik procent y z původního objemu se zmenšil objem hranolu:

$$y = \frac{S_{po}}{S_{pč}} \cdot 100\ \%,$$

$$y = \frac{4 \cdot x^2 + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2}{6 \cdot x^2 + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2} \cdot 100\ \%,$$

$$y = \frac{x^2 \cdot (4 + 4 \cdot \sqrt{2})}{x^2 \cdot (6 + 4 \cdot \sqrt{2})} \cdot 100\ \%,$$

$$y = \frac{4 + 4 \cdot \sqrt{2}}{6 + 4 \cdot \sqrt{2}} \cdot 100\ \%,$$

$$y \approx 83\ \%.$$

V zadání je ale otázka, o kolik procent se zmenšil objem původního sloupu.

Objem původního sloupu se zmenšil o 17 %.

b)

Obdobně jako u objemu můžeme postupovat i při výpočtu obsahu pláště S_{pl} hranolu. Když spojíme všechny útvary, které se nachází v plášti, dostaneme obdélník, jehož rozměry budou obvod podstavy *o* a výška hranolu *v*. Obsah pláště pak vypočítáme pomocí vzorce:

$$S_{pl} = o \cdot v.$$

Výška je v obou hranolech stejná, takže obsah pláště závisí na obvodu obou útvarů v podstavě.

Určíme obvod čtverce $o_č$:

$$o_č = 4 \cdot a,$$

$$o_č = 4 \cdot \left(2 \cdot x + x \cdot \sqrt{2}\right),$$

$$o_č = 8 \cdot x + 4 \cdot x \cdot \sqrt{2}.$$

Nyní určíme obvod osmiúhelníku o_o:

$$o_o = 8 \cdot s,$$

$$o_o = 8 \cdot x \cdot \sqrt{2},$$

$$o_o = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot x.$$

Například pomocí trojčlenky zjistíme, na kolik procent *z* z původního obsahu pláště se zmenšil obsah pláště hranolu:

$$z = \frac{o_o}{o_s} \cdot 100\ \%,$$

$$z = \frac{8 \cdot \sqrt{2} \cdot x}{8 \cdot x + 4 \cdot x \cdot \sqrt{2}} \cdot 100\ \%,$$

$$z = \frac{8 \cdot \sqrt{2} \cdot x}{x \cdot (8 + 4 \cdot \sqrt{2})} \cdot 100\ \%,$$

$$z = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{8 + 4 \cdot \sqrt{2}} \cdot 100\ \%,$$

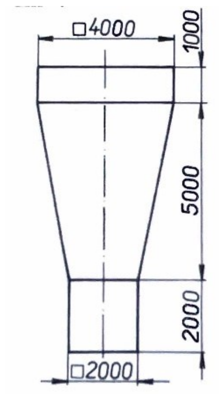
$$z \approx 83\ \%.$$

V zadání je ale otázka, o kolik procent se zmenšil obsah pláště původního sloupu.

Obsah pláště původního sloupu se zmenšil o 17 %.

Úloha 2

Násypný koš z ocelového plechu se skládá z plášťů dvou pravidelných čtyřbokých hranolů a pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu (obr. 2 – rozměry jsou v mm). Kolik m^2 plechu se spotřebuje k jeho zhotovení, jestliže se na záhyby a odpad ve výrobě počítá 10 % materiálu? (Pomykalová, 2013, s.165)



Obr. 2 (Pomykalová, 2013, s. 165)

Řešení:

Povrch celého násypného koše S vypočítáme jako součet obsahů plášťů spodního hranolu S_{pls}, horního hranolu S_{plh} a komolého jehlanu S_{plj}, tedy:

$$S = S_{pls} + S_{plj} + S_{plh}.$$

Vypočítáme obsah pláště S_{pls} spodního pravidelného hranolu, který má všechny hrany délky $a = 2\ 000\ \mathrm{mm} = 20\ \mathrm{dm}$. Plášť tohoto hranolu se skládá ze čtyř čtverců s délkou strany a:

$$S_{pls} = 4 \cdot a^2,$$

$$S_{pls} = 4 \cdot 20^2\ \mathrm{dm}^2,$$

$$S_{pls} = 4 \cdot 400\ \mathrm{dm}^2,$$

$$S_{pls} = 1\ 600\ \mathrm{dm}^2.$$

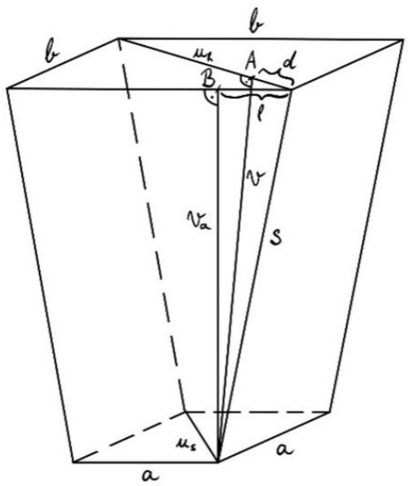
Podobným způsobem vypočítáme i obsah pláště S_{plh} horního hranolu, který má hrany délky $b = 4\ 000\ \mathrm{mm} = 40\ \mathrm{dm}$ a $c = 1\ 000\ \mathrm{mm} = 10\ \mathrm{dm}$. V plášti se nachází čtyři shodné obdélníky s délkami stran *b* a *c*, obsah pláště tedy vypočítáme tak, že:

$$S_{plh} = 4 \cdot b \cdot c,$$

$$S_{plh} = 4 \cdot 40 \cdot 10\ \mathrm{dm}^2,$$

$$S_{plh} = 1\ 600\ \mathrm{dm}^2.$$

Plášť komolého jehlanu tvoří čtyři lichoběžníky s dolní základnou délky $a = 20$ dm a horní základnou délky $b = 40$ dm. K výpočtu obsahu lichoběžníku potřebujeme znát jeho výšku v_a, ze zadání známe jen výšku celého komolého jehlanu $v = 5\ 000\ \mathrm{mm} = 50\ \mathrm{dm}$. Výška *v* je kolmá na úhlopříčku u_h v horní podstavě a protne ji v bodě *A* (viz Obr. 3). Úhlopříčku ve čtverci zjistíme pomocí vztahu $u = a \cdot \sqrt{2}$, v tomto případě tedy:



Obr. 3 Komolý jehlan, vlastní obrázek

$$u_h = 40 \cdot \sqrt{2}\ \mathrm{dm}.$$

Pomocí stejného vztahu zjistíme i délku úhlopříčky v dolní podstavě u_s. Podstavou je čtverec, tedy:

$$u_s = 20 \cdot \sqrt{2}\ \mathrm{dm}.$$

Když odečteme od délky úhlopříčky v horní podstavě délku úhlopříčky ve spodní podstavě a výsledek vydělíme dvěma, dostaneme délku *d*. Tato délka je vzdálenost bodu *A* od nejbližšího vrcholu horní podstavy, platí tedy:

$$d = \frac{u_h - u_s}{2},$$

$$d = \frac{40 \cdot \sqrt{2} - 20 \cdot \sqrt{2}}{2}\ \mathrm{dm},$$

$$d = 10 \cdot \sqrt{2}\ \mathrm{dm}.$$

Tuto délku můžeme využít k výpočtu ramene *s* lichoběžníku. Využijeme zde Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku daném částí úhlopříčky *d*, výškou *v* a ramenem *s*:

$$s = \sqrt{v^2 + d^2},$$

$$s = \sqrt{50^2 + (10 \cdot \sqrt{2})^2} \text{ dm},$$

$$s = 30\sqrt{3} \text{ dm}.$$

Výška v_a lichoběžníku je kolmá na horní základnu a protne ji v bodě *B (*viz Obr. 3). Když odečteme délku spodní základny od horní základny a vydělíme výsledek dvěma, dostaneme délku *l*. Tato délka je vzdálenost bodu *B* od nejbližšího vrcholu horní podstavy, platí tedy:

$$l = \frac{b - a}{2},$$

$$l = \frac{40 \ - 20}{2} \text{ dm},$$

$$l = 10 \text{ dm}.$$

Délku *s* můžeme využít k výpočtu výšky v_a lichoběžníku. Využijeme opět Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku daném tentokrát částí délky horní základny *l*, výškou v_a a ramenem *s*:

$$v_a = \sqrt{s^2 - l^2},$$

$$v_a = \sqrt{(30\sqrt{3})^2 - 10^2} \text{ dm},$$

$$v_a = 10\sqrt{26} \text{ dm}.$$

Obsah pláště S_{plj} komolého jehlanu vypočítáme tak, že:

$$S_{plj} = 4 \cdot \frac{(a + b\ )}{2} \cdot v_a,$$

$$S_{plj} = 4 \cdot \frac{(20 + 40)}{2} \cdot 10\sqrt{26} \text{ dm}^2,$$

$$S_{plj} = 1\,200\sqrt{26}\ \mathrm{dm}^2.$$

Nyní známe všechny obsahy plášťů a vypočítáme celkový obsah pláště *S*:

$$S = S_{pls} + S_{plj} + S_{plh},$$

$$S = 1\,600 + 1\,200\sqrt{26} + 1\,600\ \mathrm{dm}^2,$$

$$S = 3\,200 + 1\,200\sqrt{26}\ \mathrm{dm}^2.$$

V zadání je požadováno připočíst 10 % materiálu na záhyby a odpad. Povrch tedy zvětšíme na 110 % původního povrchu:

$$1{,}1 \cdot \left(3\,200 + 1\,200\sqrt{26}\right)\ \mathrm{dm}^2 \approx 10\,250{,}68\ \mathrm{dm}^2.$$

V zadání se požaduje výsledek v metrech, tedy:

$$10\,250{,}68\ \mathrm{dm}^2 \approx 102{,}5\ \mathrm{m}^2.$$

Ke zhotovení pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu se spotřebuje přibližně $102{,}5\ \mathrm{m}^2$ ocelového plechu.

3.1.8 Pythagorova věta

Tato skupina slovních úloh kombinuje výpočty objemů a povrchů těles s aplikací Pythagorovy věty.

Žáci při řešení úloh z této skupiny procvičují výpočty objemů a povrchů těles, ale také své znalosti o pravoúhlých trojúhelnících a vztahu mezi jejich stranami.

V učebnici Matematika pro gymnázia (Pomykalová, 2013) jsem našla mnoho úloh tohoto typu, především v kapitole Tělesa. Vybrala jsem dvě úlohy. Často jsou v učebnici propojené s trigonometrií, což lze pozorovat i v následujících úlohách. Vzhledem k velkému zastoupení těchto úloh v učebnicích jsem tyto dvě skupiny oddělila.

Úloha 1

Podstavou kolmého hranolu je rovnoramenný trojúhelník, jehož základna má délku $a = 10$ cm a úhel při základně má velikost $\alpha = 40°20'$. Vypočítejte objem tohoto hranolu, je-li obsah jeho pláště roven součtu obsahů jeho podstav. (Pomykalová, 2013, s. 162)

Řešení:

K výpočtu objemu hranolu je třeba znát obsah podstavy S_p a výšku v hranolu. Ze zadání víme, že podstavou kolmého hranolu je rovnoramenný trojúhelník, známe také délku základny a a velikost úhlu α při základně.

Nejdříve vypočítáme výšku v_a trojúhelníkové podstavy. Rozdělíme trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky, abychom mohli využít goniometrické funkce. Délka základny se zmenší na $\frac{a}{2}$.

V tomto pravoúhlém trojúhelníku využijeme funkci tangens a vyjádříme v:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_a}{\frac{a}{2}},$$

$$v_a = \frac{a \cdot \operatorname{tg}\alpha}{2},$$

$$v_a = \frac{10 \cdot \operatorname{tg} 40°20'}{2}\ \text{cm},$$

$$v_a = 5 \cdot \operatorname{tg} 40°20'\ \text{cm}.$$

Nyní vypočítáme obsah podstavy:

$$S_p = \frac{a \cdot v_a}{2},$$

$$S_p = \frac{10 \cdot 5 \cdot \operatorname{tg} 40°20'}{2}\ \text{cm}^2,$$

$$S_p = 25 \cdot \operatorname{tg} 40°20'\ \text{cm}^2.$$

Ze zadání víme, že obsah pláště S_{pl} hranolu je roven součtu obsahů jeho podstav. Platí vztah:

$$2 \cdot S_p = S_{pl}.$$

Potřebujeme vyjádřit obsah pláště. Plášť je tvořen třemi obdélníky. Podstavou je rovnoramenný trojúhelník, takže dva obdélníky jsou shodné. Jedna z délek stran třetího obdélníku je základnou a trojúhelníku v podstavě. Vyjádříme pomocí Pythagorovy věty délku ramene *s* rovnoramenného trojúhelníku, kterou následně využijeme k výpočtu obsahu pláště:

$$s = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + {v_a}^2},$$

$$s = \sqrt{(5)^2 + (5 \cdot \mathrm{tg}\, 40°20')^2}\ \mathrm{cm},$$

$$s = \sqrt{25 + (5 \cdot \mathrm{tg}\, 40°20')^2}\ \mathrm{cm}.$$

Obsah pláště vyjádříme jako součet obsahů výše zmíněných tří obdélníků. Každé dva obdélníky mají jednu délku strany *v*:

$$S_{pl} = 2 \cdot (s \cdot v) + a \cdot v,$$

$$S_{pl} = v \cdot (2 \cdot s + a),$$

$$S_{pl} = v \cdot \left(2 \cdot \sqrt{25 + (5 \cdot \mathrm{tg}\, 40°20')^2} + 10\right) \mathrm{cm}^2.$$

Využijeme vztahu mezi obsahem podstavy a obsahem pláště a vyjádříme *v*:

$$2 \cdot S_p = S_{pl},$$

$$2 \cdot 25 \cdot \mathrm{tg}\, 40°20' = v \cdot \left(2 \cdot \sqrt{25 + (5 \cdot \mathrm{tg}\, 40°20')^2} + 10\right),$$

$$v = \frac{50 \cdot \mathrm{tg}\, 40°20'}{\left(2 \cdot \sqrt{25 + (5 \cdot \mathrm{tg}\, 40°20')^2} + 10\right)}\ \mathrm{cm},$$

Nyní se vrátíme zpět k výpočtu objemu hranolu:

$$V = S_p \cdot v,$$

$$V = 25 \cdot \mathrm{tg}\, 40°20' \cdot \frac{50 \cdot \mathrm{tg}\, 40°20'}{2 \cdot \sqrt{25 + (5 \cdot \mathrm{tg}\, 40°20')^2} + 10} \mathrm{cm}^3.$$

$$V \approx 39\ \mathrm{cm}^3.$$

Objem hranolu je přibližně 39 cm^3.

Úloha 2

Vypočítejte objem pravidelného pětibokého jehlanu, mají-li podstavné hrany délku $a = 5{,}2$ cm a odchylka rovin bočních stěn a roviny postavy je $\varphi = 38°$. (Pomykalová, 2013, s. 164)

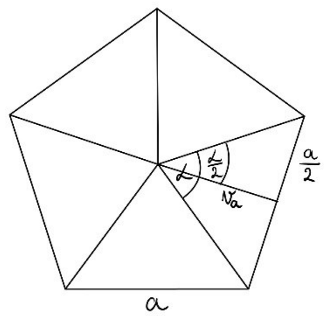
Řešení:

Objem pravidelného pětibokého jehlanu s podstavou S_p a výškou *v* počítáme podle vzorce:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v.$$

Je třeba vyjádřit obsah podstavy a výšku *v*. Podstavu pravidelného pětibokého jehlanu tvoří pravidelný pětiúhelník. Obsah pravidelného pětiúhelníku lze odvodit tak, že pětiúhelník rozdělíme na pět rovnoramenných trojúhelníků a vypočítáme jejich obsah. Velikost úhlu α při vrcholu těchto trojúhelníků je:

$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°.$$



Obr. 4 Podstava pětibokého jehlanu, vlastní obrázek

Dále rovnoramenný trojúhelník rozdělíme výškou v_a na dva pravoúhlé trojúhelníky. Velikost úhlu při vrcholu se zmenší na $\frac{\alpha}{2}$. Délka strany *a* se zmenší na $\frac{a}{2}$ (viz Obr. 4). V tomto trojúhelníku můžeme vypočítat výšku v_a pomocí funkce tangens:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{v_a},$$

$$v_a = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}},$$

$$v_a = \frac{5{,}2}{2 \cdot \operatorname{tg} 36°} \text{ cm}.$$

Nyní vyjádříme obsah podstavy, protože umíme vypočítat obsah rovnoramenného trojúhelníku v podstavě:

$$S_p = 5 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2},$$

$$S_p = 5 \cdot \frac{5{,}2 \cdot \frac{5{,}2}{2 \cdot \mathrm{tg}\, 36°}}{2}\ \mathrm{cm}^2.$$

K výpočtu objemu pravidelného pětibokého jehlanu potřebujeme znát jeho výšku *v*. Využitím odchylky $\varphi = 38°$ a délky *s* můžeme výšku vypočítat pomocí trojúhelníku, kde *s* je vzdálenost mezi vrcholem pětiúhelníku a středem pětiúhelníku, φ je velikost úhlu, který svírá boční hrana a podstava. Nejprve tedy zjistíme délku *s* pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku v podstavě:

$$s = \sqrt{(v_a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}\ ,$$

$$s = \sqrt{\left(\frac{5{,}2}{2 \cdot \mathrm{tg}\, 36°}\right)^2 + \left(\frac{5{,}2}{2}\right)^2}\ \mathrm{cm}.$$

Nyní už můžeme využít funkci sinus v trojúhelníku určeném délkou *s* v podstavě a výškou *v* jehlanu:

$$\sin \varphi = \frac{v}{s},$$

$$v = s \cdot \sin \varphi,$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{5{,}2}{2 \cdot \mathrm{tg}\, 36°}\right)^2 + \left(\frac{5{,}2}{2}\right)^2} \cdot \sin 38°\ \mathrm{cm}.$$

Dále dopočítáme objem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{5{,}2 \cdot \frac{5{,}2}{2 \cdot \mathrm{tg}\, 36°}}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{5{,}2}{2 \cdot \mathrm{tg}\, 36°}\right)^2 + \left(\frac{5{,}2}{2}\right)^2} \cdot \sin\ 38°\ \mathrm{cm}^3,$$

$$V \approx 42\ \mathrm{cm}^3.$$

Objem pravidelného pětibokého jehlanu je přibližně $42\ \mathrm{cm}^3$.

3.1.9 Trigonometrie

Tato skupina slovních úloh spojuje výpočty objemů a povrchů těles s aplikacemi trigonometrie.

Žáci při řešení úloh z této skupiny procvičují výpočty objemů a povrchů těles, ale také musí využít své znalosti o goniometrických funkcích a vlastnostech trojúhelníků.

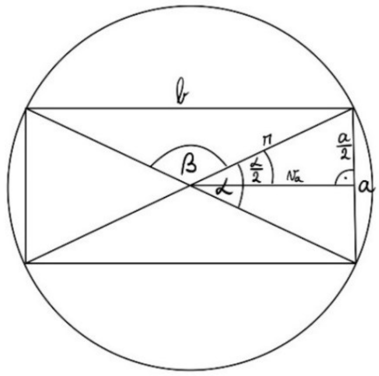
V učebnici Matematika pro gymnázia: Stereometrie (Pomykalová, 2013) jsem našla mnoho úloh tohoto typu, především v kapitole Tělesa. Vybrala jsem dvě úlohy. Tyto úlohy vyžadují znalost vlastností úhlů a aplikaci goniometrických funkcí.

Úloha 1

Podstavou kvádru je obdélník vepsaný do kruhu s poloměrem $r = 8$ cm; kratší straně obdélníku přísluší středový úhel o velikosti $68°40'$. Vypočítejte objem kvádru, je-li obsah jeho pláště $120\ \mathrm{cm}^2$. (Pomykalová, 2013, s. 151)

Řešení

Kratší délce strany a obdélníku přísluší středový úhel velikosti $\propto = 68°40'$. Pokud úhlopříčkami rozdělíme obdélník na čtyři rovnoramenné trojúhelníky, dva z nich mají základnu délky a. Všechny tyto trojúhelníky mají ramena délky r. Pokud tento trojúhelník rozdělíme výškou v_a, velikost úhlu α při vrcholu trojúhelníku se zmenší na $\frac{\propto}{2}$ (viz Obr. 5). S využitím funkce sinus můžeme vypočítat délku strany a:



Obr. 5 Podstava hranolu, vlastní obrázek

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r},$$

$$a = 2 \cdot r \cdot \sin\frac{\alpha}{2},$$

$$a = 2 \cdot 8 \cdot \sin\frac{68°40'}{2}\ \mathrm{cm},$$

$$a = 16 \cdot \sin 34°20' \text{ cm}.$$

Velikost úhlu β, který je proti delší straně b, můžeme dopočítat doplněním do 180°, tedy:

$$\beta = 180° - 68°40' = 111°20'.$$

Pro výpočet delší strany b obdélníku využijeme stejný vztah jako pro výpočet kratší strany:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{r},$$

$$b = 2 \cdot r \cdot \sin\frac{\beta}{2},$$

$$b = 2 \cdot 8 \cdot \sin\frac{111°20'}{2} \text{ cm},$$

$$b = 16 \cdot \sin 55°40' \text{ cm}.$$

Pro výpočet objemu kvádru potřebujeme jeho výšku v, kterou vypočítáme pomocí vzorce pro výpočet povrchu pláště. Ze zadání víme, že:

$$S_{pl} = 120 \text{ cm}^2.$$

Plášť je tvořen čtyřmi obdélníky. Každé dva protější obdélníky jsou shodné. Obdélníky, které jsou příslušné hraně délky a a jejich druhá strana má délku v. Obdobně obdélníky, které jsou příslušné hraně délky b a jejich druhá strana má délku v:

$$S_{pl} = 2 \cdot (a \cdot v) + 2 \cdot (b \cdot v),$$

$$S_{pl} = 2 \cdot v \cdot (a + b),$$

$$v = \frac{S_{pl}}{2 \cdot (a + b)},$$

$$v = \frac{120}{2 \cdot (16 \cdot \sin 34°20' + 16 \cdot \sin 55°40')} \text{ cm},$$

$$v = \frac{15}{4 \cdot (\sin 34°20' + \sin 55°40')} \text{ cm}.$$

Nyní vypočítáme objem kvádru s obsahem podstavy S_p a výškou v:

$$V = S_p \cdot v,$$

$$V = a \cdot b \cdot v,$$

$$V = 16 \cdot \sin 34°20' \cdot 16 \cdot \sin 55°40' \cdot \frac{15}{4 \cdot (\sin 34°20' + \sin 55°40')} \text{ cm}^3,$$

$$V \approx 322 \text{ cm}^3.$$

Objem kvádru je přibližně 322 cm^3.

Úloha 2

Podstavou rovnoběžnostěnu $ABCDA'B'C'D'$ je kosočtverec $ABCD$, $|AB| = a$, $|\sphericalangle BAD| = 60°$, boční hrany mají délku a a odchylka bočních hran a roviny podstavy je $60°$. Určete objem rovnoběžnostěnu. (Pomykalová, 2013, s. 162)

Řešení:

Objem rovnoběžnostěnu s podstavou S_p s výškou v počítáme podle vzorce:

$$V = S_p \cdot v.$$

Podstavou rovnoběžnostěnu je kosočtverec, jehož strany mají délku a a velikost úhlu mezi nimi je $60°$. Kosočtverec si představme jako dva trojúhelníky se stranou délky a. Obsah kosočtverce můžeme vypočítat jako obsah dvou trojúhelníků:

$$S_p = a^2 \cdot \sin 60°,$$

$$S_p = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2.$$

Dále určíme výšku v rovnoběžnostěnu. Boční hrany rovnoběžnostěnu mají délku a a odchylka těchto hran od roviny podstavy je $60°$. Použijeme funkci sinus v pravoúhlém trojúhelníku určeném výškou v, délkou hrany a velikostí úhlu $60°$:

$$\sin 60° = \frac{v}{a}$$

$$v = a \cdot \sin 60°,$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a.$$

Nyní vyjádříme objem rovnoběžnostěnu:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 \cdot a,$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^3.$$

Objem rovnoběžnostěnu *ABCDA′B′C′D′* o hraně délky *a* je $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^3$.

3.1.10 Řezy rovinami

Tato skupina slovních úloh se zaměřuje na výpočty objemů a povrchů těles ve spojení s prací s řezy rovinami.

Žáci při řešení úloh z této skupiny procvičují výpočty objemů a povrchů těles, ale také zkoumají vnitřní strukturu a vlastnosti těles z jiného pohledu.

V učebnici Matematika pro gymnázia: Stereometrie (Pomykalová, 2013) jsem našla malé množství úloh, byly zařazeny v kapitole Tělesa. Tyto úlohy ukazují, jak se výpočty objemů a povrchů těles mohou propojit s pochopením řezů rovinami.

Úloha 1

Je dán kosý trojboký hranol, jehož boční hrany mají délku 24 cm. Normálovým řezem, tj. řezem rovinou kolmou k bočním hranám hranolu, je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek 12 cm a 35 cm. Vypočtěte obsah pláště hranolu. (Pomykalová, 2013, s. 162)

Řešení:

Abychom vypočítali obsah pláště kosého trojbokého hranolu, musíme nejdříve zjistit obvod podstavy. Podstavu tvoří pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek 12 cm a 35 cm. Následně vynásobíme tento obvod délkou boční hrany *s*, která je 24 cm. Označme délky odvěsen *a* a *b*, délku přepony *c*. Pomocí Pythagorovy věty zjistíme délku přepony *c*:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$c = \sqrt{12^2 + 35^2}\ \text{cm},$$

$$c = \sqrt{1\,369}\ \text{cm},$$

$$c = 37 \text{ cm}.$$

Obvod trojúhelníku v podstavě je:

$$o = a + b + c,$$

$$o = (12 + 35 + 37) \text{ cm},$$

$$o = 84 \text{ cm}.$$

Obsah pláště je dán vztahem:

$$S_{pl} = o \cdot s,$$

$$S_{pl} = 84 \cdot 24 \text{ cm}^2,$$

$$S_{pl} = 2\,016 \text{ cm}^2.$$

Obsah pláště kosého hranolu je tedy $2\,016 \text{ cm}^2$.

Úloha 2

Podstavou kolmého čtyřbokého jehlanu je obdélník s rozměry 6 m a 4 m, délka jeho boční hrany je 10 m. V jaké vzdálenosti od jeho vrcholu musíme vést rovinu řezu rovnoběžnou s rovinou podstavy, aby vznikla dvě tělesa se stejným objemem? (Pomykalová, 2013, s. 164)

Řešení:

Abychom našli vzdálenost od vrcholu jehlanu, ve které musíme vést rovinu řezu rovnoběžnou s rovinou podstavy tak, aby vznikla dvě tělesa se stejným objemem, můžeme využít vlastnosti podobnosti těles a objemu.

Objem jehlanu s obsahem podstavy S_p a výškou *v* je dán vztahem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v.$$

Podstavou je obdélník s délkami stran $a = 6$ m a $b = 4$ m. Obsah podstavy je tedy:

$$S_p = a \cdot b,$$

$$S_p = 6 \cdot 4 \text{ m}^2,$$

$$S_p = 24\ \mathrm{m}^2.$$

Délka boční hrany s je ze zadání 10 m, což je vzdálenost od vrcholu jehlanu k vrcholu podstavy. Tuto vzdálenost můžeme použít k nalezení výšky v jehlanu pomocí Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku, kde výška v je délka jedné z odvěsen, a polovina délky úhlopříčky podstavy je délka druhé odvěsny. Délka úhlopříčky podstavy u je:

$$u = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$u = \sqrt{6^2 + 4^2}\ \mathrm{m},$$

$$u = \sqrt{52}\ \mathrm{m},$$

$$u = 2 \cdot \sqrt{13}\ \mathrm{m}.$$

Polovina délky úhlopříčky je $\frac{u}{2}$. Nyní použijeme Pythagorovu větu k nalezení výšky v:

$$v = \sqrt{s^2 - \left(\frac{u}{2}\right)^2},$$

$$v = \sqrt{10^2 - \sqrt{13}^2}\ \mathrm{m},$$

$$v = \sqrt{87}\ \mathrm{m},$$

Abychom rozdělili jehlan na dvě tělesa se stejným objemem, rovina řezu musí být ve výšce, kde objem horního jehlanu je polovinou celkového objemu. Pokud je řez veden ve výšce v_1 od vrcholu jehlanu, pak objem horního jehlanu musí být polovinou objemu celkového jehlanu. Pro podobná tělesa platí, že poměr objemů je třetí mocninou poměru výšek. Délku výšky v známe, můžeme ji dosadit a dopočítat tak v_1:

$$\left(\frac{v_1}{v}\right)^3 = \frac{1}{2},$$

$$\frac{v_1}{v} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}},$$

$$v_1 = v \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}},$$

$$v_1 = \sqrt{87} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \text{ m},$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{87}}{\sqrt[3]{2}} \approx 7{,}4 \text{ m}.$$

Rovina řezu musí být vedena ve vzdálenosti přibližně 7,4 m od vrcholu jehlanu, aby vznikla dvě tělesa se stejným objemem.

3.1.11 Podobná zobrazení v prostoru

Tato skupina zahrnuje slovní úlohy, které kombinují výpočty objemů a povrchů těles s učivem podobnosti v prostoru.

Žáci při řešení úloh z této skupiny procvičují výpočty objemů a povrchů těles, ale také znalosti geometrické podobnosti, měřítka a proporcí k řešení úloh, které zahrnují prostorové transformace.

V učebnici Matematika pro gymnázia: Stereometrie (Pomykalová, 2013) jsem našla dvě úlohy tohoto typu, přímo v kapitole Zobrazení. Úlohy v této skupině ukazují, jak se podobnost mezi prostorovými objekty promítá do jejich objemů a povrchů.

Úloha 1

V podobnosti s poměrem podobnosti k jsou body A', B', C', D' obrazy bodů A, B, C, D neležících v jedné rovině. Určete poměr

a) obsahů trojúhelníků $A'B'C'$ a ABC,
b) objemů čtyřstěnů $A'B'C'D'$ a $ABCD$.

(Pomykalová, 2013, s. 121)

Řešení:

Poměr podobnosti je parametr, který určuje, jak moc je jeden objekt zvětšen nebo zmenšen oproti druhému objektu. Tento poměr má vliv na různé geometrické vlastnosti objektů, jako jsou délky, obsahy a objemy.

a)

Pokud jsou dva trojúhelníky ve vzájemném poměru podobnosti *k*, pak poměr podobnosti jejich obsahů je k^2.

Poměr obsahů trojúhelníků $A'B'C'$ a ABC je k^2.

b)

Obdobně pokud jsou dva čtyřstěny ve vzájemném poměru podobnosti *k*, pak poměr podobnosti jejich objemů je k^3.

Poměr objemů čtyřstěnů $A'B'C'D'$ a $ABCD$ je k^3.

Úloha 2

Je-li *V* objem tělesa a *S* jeho povrch, je poměr $S^3 : V^2$ stejný pro těleso i pro jeho obraz v libovolné podobnosti. Vypočtěte tento poměr pro krychli. (Pomykalová, 2013, s. 122)

Řešení:

Nejdříve je třeba si uvědomit, jak se změní povrch a objem tělesa v podobnosti s koeficientem *k*.

Povrch tělesa se změní dle vztahu $S' = k^2 \cdot S$.

Objem tělesa se změní dle vztahu $V' = k^3 \cdot V$.

Nyní vypočteme poměr $\frac{S^3}{V^2}$ pro krychli. Předpokládejme krychli s délkou hrany *a*.

Vzorec pro výpočet povrchu krychle umocníme na třetí:

$$S = 6 \cdot a^2,$$

$$S^3 = 216 \cdot a^6.$$

Vzorec pro výpočet objemu krychle umocníme na druhou:

$$V = a^3,$$

$$V^2 = a^6.$$

Poměr $\frac{S^3}{V^2}$ tedy bude:

$$\frac{S^3}{V^2} = \frac{216 \cdot a^6}{a^6} = \frac{216}{1},$$

$$\frac{S^3}{V^2} = \frac{216}{1}.$$

Poměr $S^3 : V^2$ pro krychli je 216:1.

Tento poměr bude stejný pro libovolnou podobnost krychle, protože při podobnosti se povrch a objem mění v závislosti na *k*. Poměr $S^3 : V^2$ zůstává nezměněný.

3.1.12 Podobnost

Tato skupina obsahuje slovní úlohy, které se zaměřují na objemy a povrchy těles a zároveň vyžadují znalost podobnosti.

Žáci při řešení úloh z této skupiny procvičují výpočty objemů a povrchů těles, ale také zlepšují porozumění, jak změna měřítka ovlivňuje geometrické vlastnosti těles.

V učebnici Matematika pro gymnázia: Stereometrie (Pomykalová, 2013) jsem našla poměrně velké množství úloh tohoto typu, především v kapitole Tělesa. Vybrala jsem z toho důvodu čtyři různé úlohy, které ilustrují různorodost problémů řešených pomocí principů podobnosti. Na první pohled mohou tyto úlohy vypadat podobně jako ty, které se nachází ve skupině týkající se podobných zobrazení. Rozhodla jsem se je ale odlišit, protože v učebnici nejsou explicitně zařazeny do kapitoly o zobrazeních.

Úloha 1

a) Kolikrát se zvětší objem kvádru s rozměry *a*, *b*, *c*, zvětší-li se tyto rozměry po řadě *k*-krát, *l*-krát, *m*-krát?
b) Co když je $k = l = m$? Jak se v tomto případě změní povrch kvádru?
c) Veďte středem kvádru tři roviny rovnoběžné s jeho stěnami. Na kolik shodných kvádrů se těmito rovinami kvádr rozdělí a proč?

(Pomykalová, 2013, s. 151)

Řešení:

a)

Původní objem kvádru s obsahem podstavy S_p a výškou *v* vypočítáme podle vzorce:

$$V = S_p \cdot v.$$

Podstavou kvádru je obdélník s délkami stran *a* a *b*. Výška kvádru je délka hrany *c*:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Pokud zvětšíme délky hran *a*, *b* a *c* po řadě *k*-krát, *l*-krát, *m*-krát, nové délky hran jsou:

$$a' = k \cdot a,$$

$$b' = l \cdot b,$$

$$c' = m \cdot c.$$

Nový objem kvádru je:

$$V' = a' \cdot b' \cdot c',$$

$$V' = (k \cdot a) \cdot (l \cdot b) \cdot (m \cdot c),$$

$$V' = k \cdot l \cdot m \cdot (a \cdot b \cdot c).$$

Odkud vidíme, že:

$$V' = k \cdot l \cdot m \cdot V.$$

Objem kvádru se zvětší $k \cdot l \cdot m$-krát.

b)

Pokud $k = l = m$, můžeme koeficient označit jednotně, například *n*, tedy $n = k = l = m$. Pokud zvětšíme délky hran *a*, *b* a *c* *n*-krát, nové délky hran budou:

$$a' = n \cdot a,$$

$$b' = n \cdot b,$$

$$c' = n \cdot c,$$

Objem kvádru s obsahem podstavy S_p a výškou *v* vypočítáme podle vzorce:

$$V = S_p \cdot v.$$

Podstavou kvádru je obdélník s délkami stran *a* a *b*. Výška kvádru je délka hrany *c*:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Nový objem kvádru je:

$$V' = a' \cdot b' \cdot c',$$

$$V' = (n \cdot a) \cdot (n \cdot b) \cdot (n \cdot c),$$

$$V' = n^3 \cdot (a \cdot b \cdot c).$$

Odkud vidíme, že:

$$V' = n^3 \cdot V.$$

Objem kvádru se zvětší n^3-krát.

Povrch kvádru vypočítáme jako součet obsahů šesti obdélníků. V kvádru jsou každé dva protější obdélníky shodné, tedy:

$$S = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c).$$

Nový povrch kvádru je:

$$S' = 2 \cdot (a' \cdot b' + b' \cdot c' + a' \cdot c'),$$

$$S' = 2 \cdot ((n \cdot a) \cdot (n \cdot b) + (n \cdot b) \cdot (n \cdot c) + (n \cdot a) \cdot (n \cdot c)),$$

$$S' = 2 \cdot (n^2 \cdot a \cdot b + n^2 \cdot b \cdot c + n^2 \cdot a \cdot c),$$

$$S' = n^2 \cdot 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c).$$

Odkud vidíme, že:

$$S' = n^2 \cdot S.$$

Povrch kvádru se zvětší n^2-krát.

c)

Představme si kvádr s délkami hran a, b, c. Vedeme tři roviny středem kvádru, každou rovnoběžnou s jednou z jeho stěn. Každá rovina rozdělí kvádr na dvě části:

1) Rovina rovnoběžná s úsečkami a a b rozdělí kvádr na dvě části.
2) Rovina rovnoběžná s úsečkami b a c rozdělí každý z těchto dvou kvádrů opět na dvě části, tedy celkem na čtyři části.
3) Rovina rovnoběžná s úsečkami a a c rozdělí každý z těchto čtyř kvádrů ještě jednou na dvě části, tedy celkem na osm částí.

Neboli početně:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Tedy výsledkem bude 8 shodných kvádrů.

Úloha 2

Určete přírůstek a) objemu kvádru, b) povrchu kvádru, jestliže všechny tři jeho rozměry a, b, c zvětšíme o hodnotu ε. Řešte pro hodnoty $a = 100$ cm, $b = 50$ cm, $c = 20$ cm, $\varepsilon = 10^{-3}$ cm. (Pomykalová, 2013, s. 151)

Řešení:

a)

Původní objem kvádru s obsahem podstavy S_p a výškou v vypočítáme podle vzorce:

$$V = S_p \cdot v.$$

Podstavou kvádru je obdélník s délkami stran a a b. Výška kvádru je délka hrany c, tedy:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Pokud všechny tři délky hran zvětšíme o hodnotu ε, nové délky hran jsou:

$$a' = a + \varepsilon,$$

$$b' = b + \varepsilon,$$

$$c' = c + \varepsilon.$$

Nový objem kvádru je:

$$V' = a' \cdot b' \cdot c',$$

$$V' = (a + \varepsilon) \cdot (b + \varepsilon) \cdot (c + \varepsilon).$$

Rozdíl mezi novým a původním objemem vytvoří přírůstek objemu ΔV:

$$\Delta V = V' - V.$$

Rozepíšeme nový objem a použijeme:

$$V' = (a + \varepsilon) \cdot (b + \varepsilon) \cdot (c + \varepsilon),$$

$$V' = a \cdot b \cdot c + \varepsilon \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c) + \varepsilon^2 \cdot (a + b + c) + \varepsilon^3.$$

Nyní dosadíme nový a původní objem do vyjádření přírůstku:

$$\Delta V = V' - V,$$

$$\Delta V = a \cdot b \cdot c + \varepsilon \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c) + \varepsilon^2 \cdot (a + b + c) + \varepsilon^3 - a \cdot b \cdot c.$$

Přírůstek objemu je:

$$\Delta V = \varepsilon \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c) + \varepsilon^2 \cdot (a + b + c) + \varepsilon^3.$$

Dosazením hodnot ze zadání $a = 100$ cm, $b = 50$ cm, $c = 20$ cm, $\varepsilon = 10^{-3}$ cm, zjistíme přibližný přírůstek:

$\Delta V =$

$$= 10^{-3} \cdot (100 \cdot 50 + 50 \cdot 20 + 100 \cdot 20) + (10^{-3})^2 \cdot (100 + 50 + 20) + (10^{-3})^3 \text{ cm}^3,$$

$$\Delta V \approx 8 \text{ cm}^3.$$

Přírůstek objemu kvádru je přibližně 8 cm^3.

b)

Původní povrch kvádru vypočítáme jako součet obsahů šesti obdélníků. V kvádru jsou každé dva protější obdélníky shodné, tedy:

$$S = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c).$$

Pokud všechny tři délky hran zvětšíme o hodnotu ε, nové délky hran budou obdobně jako u objemu:

$$a' = a + \varepsilon,$$

$$b' = b + \varepsilon,$$

$$c' = c + \varepsilon.$$

Nový povrch kvádru je:

$$S' = 2 \cdot (a' \cdot b' + b' \cdot c' + a' \cdot c'),$$

$$S' = 2 \cdot \big((a + \varepsilon) \cdot (b + \varepsilon) + (b + \varepsilon) \cdot (c + \varepsilon) + (a + \varepsilon) \cdot (c + \varepsilon)\big).$$

Rozdíl mezi novým a původním povrchem vytvoří přírůstek povrchu ΔS:

$$\Delta S = S' - S,$$

Rozepíšeme nový povrch a použijeme:

$$S' = 2 \cdot ((a + \varepsilon) \cdot (b + \varepsilon) + (b + \varepsilon) \cdot (c + \varepsilon) + (a + \varepsilon) \cdot (c + \varepsilon)),$$

$$S' = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot \varepsilon + b \cdot \varepsilon + \varepsilon^2 + b \cdot c + b \cdot \varepsilon + c \cdot \varepsilon + \varepsilon^2 + c \cdot a + c \cdot \varepsilon + a \cdot \varepsilon + \varepsilon^2),$$

$$S' = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c + 2 \cdot (a + b + c) \cdot \varepsilon + 3 \cdot \varepsilon^2),$$

$$S' = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c) + 4 \cdot (a + b + c) \cdot \varepsilon + 6 \cdot \varepsilon^2.$$

Nyní dosadíme nový a původní povrch do vyjádření přírůstku:

$$\Delta S = S' - S,$$

$$\Delta S = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c) + 4 \cdot (a + b + c) \cdot \varepsilon + 6 \cdot \varepsilon^2 - 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c).$$

Přírůstek povrchu je:

$$\Delta S = 4 \cdot (a + b + c) \cdot \varepsilon + 6 \cdot \varepsilon^2.$$

Dosazením hodnot ze zadání $a = 100$ cm, $b = 50$ cm, $c = 20$ cm, $\varepsilon = 10^{-3}$ cm zjistíme přibližný přírůstek:

$$\Delta S = 4 \cdot (a + b + c) \cdot \varepsilon + 6 \cdot \varepsilon^2,$$

$$\Delta S = 4 \cdot (100 + 50 + 20) \cdot 10^{-3} + 6 \cdot (10^{-3})^2 \text{ cm}^2,$$

$$\Delta S \approx 0{,}7\ \text{cm}^2.$$

Přírůstek povrchu kvádru je přibližně $0{,}7\ \text{cm}^2$.

Úloha 3

Prodlouží-li se hrana dané krychle o 5 cm, zvětší se její objem o $485\ \text{cm}^3$. Určete povrch původní i zvětšené krychle. (Pomykalová, 2013, s. 162)

Řešení:

Původní délku hrany krychle označme a, prodlouženou délku hrany krychle vyjádříme jako $a + 5$. Pokud se objem krychle zvětší o $485\ \text{cm}^3$, platí vztah:

$$V' - V = 485.$$

Potřebujeme vyjádřit původní objem V a zvětšený objem V'. Objem původní krychle s obsahem podstavy S_p a výškou *v* vypočítáme podle vzorce:

$$V = S_p \cdot v.$$

Podstavou krychle je čtverec se stranou *a* a výška krychle má hranu stejné délky, jako je délka strany čtverce v podstavě, tedy *a*:

$$V = a^3.$$

Stejně tak zjistíme i objem zvětšené krychle V'. Prodlouženou délku hrany krychle jsme vyjádřili jako $a + 5$. Objem zvětšené krychle je:

$$V' = (a + 5)^3.$$

Dosazením do vztahu $V' - V = 485$ a úpravou dostaneme kvadratickou rovnici. Vyřešením této rovnice zjistíme délku hrany *a*:

$$V' - V = 485,$$

$$(a + 5)^3 - a^3 = 485,$$

$$a^3 + 15 \cdot a^2 + 75 \cdot a + 125 - a^3 = 485,$$

$$15 \cdot a^2 + 75 \cdot a - 360 = 0,$$

$$a^2 + 5 \cdot a - 24 = 0.$$

Použijeme Viètovy vztahy k vyřešení této rovnice:

$$(a_1 - 3) \cdot (a_2 + 8) = 0.$$

Řešením této rovnice je $a_1 = 3$ cm, $a_2 = -8$ cm. Vzhledem k tomu, že jsme počítali délku hrany původní krychle, jediné řešení vyhovující podmínkám zadání je $a_1 = 3$ cm.

Dále vypočítáme povrch původní krychle. Povrch krychle tvoří šest shodných čtverců, pro povrch tedy platí:

$$S = 6 \cdot a^2,$$

$$S = 6 \cdot 3^2 \text{ cm}^2,$$

$$S = 54 \text{ cm}^2.$$

Povrch zvětšené krychle zjistíme obdobně. Délku hrany zvětšené krychle jsme vyjádřili jako $a + 5$:

$$S' = 6 \cdot (a + 5)^2,$$

$$S' = 6 \cdot (3 + 5)^2 \text{ cm}^2,$$

$$S' = 384 \text{ cm}^2.$$

Povrch původní krychle je 54 cm^2 a povrch zvětšené krychle je 384 cm^2.

Úloha 4

Délka všech hran pravidelného čtyřbokého jehlanu je 36 cm. Vypočtěte jeho objem a povrch. Jak se změní objem (povrch), jestliže hrany zmenšíme na polovinu? (Pomykalová, 2013, s. 164)

Řešení:

Objem jehlanu s obsahem podstavy S_p a výškou v vypočítáme podle vzorce:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v.$$

Podstavou je čtverec, obsah podstavy vypočítáme pomocí vzorce pro výpočet obsahu čtverce s délkou strany $a = 36$ cm:

$$S_p = a^2,$$

$$S_p = 36^2 \text{ cm}^2,$$

$$S_p = 1\,296 \text{ cm}^2.$$

Výšku zjistíme pomocí pravoúhlého trojúhelníku, který je tvořen polovinou délky úhlopříčky základny, hranou propojující vrchol jehlanu s vrcholem čtverce v podstavě a výškou *v*. Nejdříve zjistíme délku úhlopříčky čtverce v podstavě, respektive její polovinu. Pro délku úhlopříčky *u* ve čtverci platí vztah:

$$u = \sqrt{a^2 + a^2},$$

$$u = \sqrt{2 \cdot a^2},$$

$$u = a \cdot \sqrt{2},$$

$$u = 36 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}.$$

V trojúhelníku, který uvažujeme pro výpočet výšky *v* jehlanu je pouze polovina délky úhlopříčky *u*, tedy $\frac{u}{2}$:

$$\frac{u}{2} = \frac{36 \cdot \sqrt{2}}{2} = 18 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}.$$

V tomto trojúhelníku využijeme Pythagorovu větu a vypočítáme výšku *v* jehlanu:

$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{u}{2}\right)^2},$$

$$v = \sqrt{36^2 - (18 \cdot \sqrt{2})^2 \text{ cm}},$$

$$v = \sqrt{648} \text{ cm},$$

$$v = 18 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}.$$

Dále vypočítáme objem jehlanu:

$$V = \frac{1}{3} \cdot Sp \cdot v,$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 1\,296 \cdot 18 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}^3,$$

$$V = 7\,776 \cdot \sqrt{2}\ \text{cm}^3.$$

Objem jehlanu je $7\,776 \cdot \sqrt{2}\ \text{cm}^3$, což je přibližně $11\ \text{dm}^3$.

Povrch jehlanu s obsahem podstavy S_p a obsahem pláště S_{pl} vypočítáme podle vzorce:

$$S = S_p + S_{pl}.$$

Obsah podstavy známe, protože jsme ho využívali při výpočtu objemu:

$$S_p = 1\,296\ \text{cm}^2.$$

Plášť tohoto pravidelného čtyřbokého jehlanu tvoří čtyři shodné rovnostranné trojúhelníky. Použijeme vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku. Abychom mohli vypočítat obsah takového trojúhelníku, potřebujeme znát jeho výšku v_a. Použijeme Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku, který vznikne, když výškou v_a rozdělíme jednu boční stěnu na dva pravoúhlé trojúhelníky. Pythagorovu větu tedy aplikujeme v trojúhelníku určeném výškou v_a, hranou původního trojúhelníku *a* a polovinou délky základny $\frac{a}{2}$:

$$v_a = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

$$v_a = \sqrt{36^2 + 18^2}\ \text{cm},$$

$$v_a = \sqrt{972}\ \text{cm},$$

$$v_a = 18 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}.$$

Vypočítáme obsah pláště jako obsah čtyř trojúhelníků:

$$S_{pl} = 4 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2},$$

$$S_{pl} = 4 \cdot \frac{36 \cdot 18 \cdot \sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2,$$

$$S_{pl} = 1\ \ 296 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

Vrátíme se zpět ke vzorci pro výpočet povrchu a sečteme obsah podstavy a obsah pláště:

$$S = S_p + S_{pl},$$

$$S = 1\,296 + 1\,296 \cdot \sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2,$$

$$S = 1\,296 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)\ \mathrm{cm}^2.$$

Povrch jehlanu je $1\,296 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)\ \mathrm{cm}^2$, což je přibližně $35\ \mathrm{dm}^2$.

Poměr objemů podobných těles je roven třetí mocnině poměru délek hran těchto těles. Pokud zmenšíme délku hran na polovinu, každá z délek hran se zmenší na $\frac{1}{2}$ své původní hodnoty. Proto se nový objem jehlanu vypočítá jako původní objem vynásobený $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, což je $\frac{1}{8}$. To znamená, že nový objem je jedna osmina původního objemu.

Poměr povrchů podobných těles je roven třetí mocnině poměru délek hran těchto těles. Pokud zmenšíme délku hran na polovinu, každá z délek hran se zmenší na $\frac{1}{2}$ své původní hodnoty. Proto se nový povrch jehlanu vypočítá jako původní povrch vynásobený $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, což je $\frac{1}{4}$. To znamená, že nový povrch je jedna čtvrtina původního povrchu.

3.1.13 Posloupnosti

Tato skupina slovních úloh kombinuje výpočty objemů a povrchů těles s aritmetickou či geometrickou posloupností.

Žáci při řešení úloh z této skupiny procvičují výpočty objemů a povrchů těles, ale také své znalosti o posloupnostech.

V učebnici Matematika pro gymnázia: Posloupnosti a řady (Odvárko, 2021) jsem našla pouze dvě úlohy, konkrétně v kapitole Aritmetické a geometrické posloupnosti. Tyto úlohy sice nejsou přímo zaměřené na výpočet objemů a povrchů těles, ale práce s objemem a povrchem je klíčovou součástí řešení těchto úloh. Zároveň obě tyto úlohy mají i praktické využití.

Úloha 1

Část střechy domu má tvar lichoběžníku a je ji třeba pokrýt taškami. Víme, že do řady u hřebenu se vejde 85 tašek, do spodní řady při okapu 102 tašek. Přitom tašky budou srovnány do řad tak, že v každé následující řadě bude o jednu tašku více než v předchozí. Kolik je třeba tašek na pokrytí části střechy? (Odvárko, 2021, s. 45)

Řešení:

Pokud má část střechy tvar lichoběžníku a počet tašek v řadách se zvyšuje lineárně od hřebenu k okapu, můžeme určit celkový počet tašek pomocí součtu aritmetické posloupnosti. Víme, že v první řadě (u hřebenu) se nachází $a_1 = 85$ tašek. V poslední řadě (u okapu) $a_n = 102$ tašek. Počet tašek se zvyšuje lineárně o 1, to je diference *d*. Označme počet řad *n*. V aritmetické posloupnosti, kde každý následující člen je o 1 větší než předchozí, platí vztah pro poslední člen a_n:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d,$$

$$102 = 85 + (n - 1) \cdot 1.$$

Dořešíme rovnici pro *n*:

$$102 = 85 + n - 1,$$

$$102 = 84 + n,$$

$$n = 18.$$

Celkový počet tašek s_n je dán součtem aritmetické posloupnosti:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n),$$

$$s_n = \frac{18}{2} \cdot (85 + 102),$$

$$s_n = 9 \cdot 187,$$

$$s_n = 1\,638.$$

Na pokrytí části střechy ve tvaru lichoběžníku je třeba 1 683 tašek.

Úloha 2

Množství dřeva v jedné lesní oblasti je odhadnuto na $5{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{m}^3$, roční přírůstek je 2,3 %. Kolik krychlových metrů dřeva bude v této oblasti za 3 roky? S těžbou se nepočítá. (Odvárko, 2021, s. 65)

Řešení:

Jedná se geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 5{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{m}^3$ je počáteční množství dřeva, a_n je množství dřeva za n let. V tomto případě $n = 3$ a $r = 2{,}3\ \%$ je roční přírůstek v procentech. Chceme zjistit množství dřeva za *n* let, použijeme tedy vzorec pro *n*-tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n,$$

$$a_n = 5{,}5 \cdot 10^5 \cdot \left(1 + \frac{2{,}3}{100}\right)^3\ \mathrm{m}^3,$$

$$a_n = 5{,}5 \cdot 10^5 \cdot (1 + 0{,}023)^3\ \mathrm{m}^3,$$

$$a_n \approx 5{,}9 \cdot 10^5\ \mathrm{m}^3.$$

Za 3 roky bude v této lesní oblasti přibližně $5{,}9 \cdot 10^5\ \mathrm{m}^3$ dřeva.

3.2 Fyzikální kombinace

V této podkapitole jsou zařazeny slovní úlohy na objemy a povrchy těles, ve kterých žáci musí využít své znalosti z různých oblastí fyziky. V těchto úlohách žáci řeší komplexní úlohy, které propojují matematiku s fyzikou.

Při analýze každé úlohy jsem identifikovala nejvýraznější přidružené učivo fyziky, které úloha obsahuje, a na základě toho ji přiřadila do skupiny. I u této kategorie jsem si uvědomovala, že není možné dosáhnout dokonalé klasifikace, protože některé úlohy mohou vyžadovat více různých fyzikálních znalostí a dovedností. Zejména u komplexnějších úloh se může vyskytnout překrývání požadovaných znalostí. Tato kategorie není příliš obsáhlá. Úlohy jsou vybírány z učebnic matematiky, kde se úlohy tohoto typu nevyskytují v takovém množství.

Podkapitolu dělím na 4 skupiny, které jsem pojmenovala podle přidruženého učiva.

3.2.1 Převody jednotek

Tato skupina slovních úloh se zaměřuje na výpočty objemů a povrchů těles ve spojení s převody jednotek.

Žáci při řešení úloh z této skupiny procvičují výpočty objemů a povrchů těles, ale také upevňují svou dovednost pracovat s různými jednotkami a převádět mezi nimi.

V učebnici Matematika pro gymnázia: Stereometrie (Pomykalová, 2013) jsem našla mnoho úloh tohoto typu, především v kapitole Tělesa. Převody jednotek jsou téma spadající do matematiky i fyziky. Tuto skupinu jsem zařadila do propojení s fyzikou, zejména proto, že převody jednotek využíváme ve většině učiv fyziky.

Úloha 1

Kolik m^3 zeminy je třeba přemístit při výkopu přímého 170 m dlouhého a 80 cm hlubokého vodního příkopu, jehož průřez má tvar rovnoramenného lichoběžníku se základnami délek 150 cm a 90 cm? (Pomykalová, 2013, s. 163)

Řešení:

Pro výpočet množství zeminy, které je třeba přemístit při výkopu příkopu, je třeba zjistit objem tohoto příkopu. Příkop má průřez ve tvaru rovnoramenného lichoběžníku a má délku $l = 170$ m. Pro výpočet objemu postupujeme tak, že nejprve určíme obsah průřezu. Průřezem je lichoběžník, se základnami délek $a = 150$ cm $= 1{,}5$ m, $c = 90$ cm $= 0{,}9$ m a výškou $v = 80$ cm $= 0{,}8$ m, takže použijeme vzorec pro výpočet jeho obsahu:

$$S = \frac{(a + c)}{2} \cdot v,$$

$$S = \frac{(1{,}5 + 0{,}9)}{2} \cdot 0{,}8\ \mathrm{m}^2,$$

$$S = 2{,}4 \cdot 0{,}4\ \mathrm{m}^2,$$

$$S = 0{,}96\ \mathrm{m}^2.$$

Nyní vypočítáme objem příkopu. Známe obsah průřezu a délku l příkopu. Podobně jako při běžném výpočtu objemu zde využijeme vztah, kde:

$$V = S \cdot l,$$

$$V = 0{,}96 \cdot 170\ \mathrm{m}^2,$$

$$V \approx 163\ \mathrm{m}^3.$$

Na výkop 170 m dlouhého a 80 cm hlubokého vodního příkopu, jehož průřez má tvar rovnoramenného lichoběžníku se základnami délek 150 cm a 90 cm, je třeba přemístit přibližně $163\ \mathrm{m}^3$ zeminy.

Úloha 2

Ve vodojemu tvaru kvádru je 1 500 hl vody, hloubka vody je 2,5 m. Vypočítejte rozměry dna, je-li jeden rozměr vodojemu o 4 m větší než druhý. (Pomykalová, 2013, s. 151)

Řešení:

Vodojem tvaru kvádru má objem 1 500 hl, což převedeme na metry krychlové, protože ostatní údaje v zadání jsou v metrech:

$$1\,500\ \mathrm{hl} = 150\,000\ \mathrm{l} = 150\ \mathrm{m}^3.$$

Objem je $V = 150\ \mathrm{m}^3$ a hloubka vody $h = 2{,}5$ m. Objem kvádru s obsahem podstavy S_p (v tomto případě obsahem dna) a výškou h vyjádříme ze vzorce pro výpočet objemu obsah podstavy:

$$V = S_p \cdot h,$$

$$S_p = \frac{V}{h},$$

$$S_p = \frac{150}{2{,}5}\ \mathrm{m}^2,$$

$$S_p = 60\ \mathrm{m}^2.$$

Označme jeden rozměr dna a (v metrech). Druhý rozměr je podle zadání o 4 metry větší než první, tedy $a + 4$. Podstavou vodojemu je obdélník a pro jeho obsah platí:

$$S_p = a \cdot (a + 4),$$

$$60 = a \cdot (a + 4),$$

$$60 = a^2 + 4 \cdot a,$$

$$a^2 + 4 \cdot a - 60 = 0.$$

Řešíme kvadratickou rovnici, využijeme Viètovy vztahy:

$$(a - 6) \cdot (a + 10) = 0.$$

Řešením této rovnice je tedy $a_1 = 6$ m a $a_2 = -10$ m. Vzhledem k tomu, že a je délka hrany, jediné řešení vyhovující podmínkám v zadání je $a = 6$ m. Druhý rozměr je o 4 m delší, tedy 10 m.

Rozměry dna vodojemu jsou 6 m a 10 m.

3.2.2 Hustota

Tato skupina slovních úloh se zaměřuje na výpočty objemů a povrchů těles ve spojení s hustotou. Hustota je fyzikální veličina, která se v těchto úlohách používá k propojení geometrických vlastností těles s fyzikálním učivem.

Žáci při řešení úloh z této skupiny procvičují výpočty objemů a povrchů těles, ale také své znalosti o hustotě a jejím výpočtu.

V učebnici Matematika pro gymnázia: Stereometrie (Pomykalová, 2013) jsem našla několik úloh, konkrétně v kategorii Tělesa. Vybrala jsem dvě úlohy na toto téma. Přestože je učebnice zaměřena na matematiku, překvapivě obsahuje poměrně dost úloh zahrnujících práci s hustotou.

Úloha 1

Jakou hmotnost má planeta Země, je-li její průměrná hustota $\rho = 5{,}52\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$? (Pomykalová, 2013, s. 182)

Řešení:

Abychom určili hmotnost planety Země při dané průměrné hustotě, můžeme použít vzorec pro výpočet hustoty pomocí hmotnosti *m* a objemu Země:

$$\rho = \frac{m}{V},$$

$$m = \rho \cdot V,$$

Země má přibližně tvar sféry, takže použijeme vzorec pro objem koule s poloměrem *r*, což je v tomto případě poloměr Země. Poloměr je přibližně $r \approx 6\,378\ \mathrm{km} = 6\,378\,000\ \mathrm{m}$. Objem koule vypočítáme podle vzorce:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3,$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6\,378\,000^3\ \mathrm{m}^3,$$

$$V = 8\,504\,000 \cdot 6\,378\,000^2 \cdot \pi\ \mathrm{m}^3,$$

Nyní převedeme jednotky průměrné hustoty Země ze zadání i objem koule, abychom počítali v odpovídajících si jednotkách:

$$\rho = 5{,}52\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}} = 5\,520\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

Dosadíme do vzorce pro výpočet hmotnosti pomocí hustoty a objemu, který jsme vyjádřili v prvním kroku:

$$m = \rho \cdot V,$$

$$m = 5\,520 \cdot 8\,504\,000 \cdot 6\,378\,000^2 \cdot \pi\ \mathrm{kg},$$

$$m \approx 5{,}999 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}.$$

Hmotnost Země je přibližně $5{,}999 \cdot 10^{24}$ kg.

Úloha 2

Komín tvaru dutého komolého kužele má výšku 32 m, dolní průměry 3,2 m a 2 m, horní průměry 1,7 m a 1,2 m. Jaká je jeho celková hmotnost, je-li hustota zdiva $\rho = 1\,600\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$? (Pomykalová, 2013, s. 181)

Řešení:

Abychom určili hmotnost *m* komína tvaru dutého komolého kužele, je potřeba vypočítat objem jeho materiálu a poté využít vzorec pro výpočet hustoty, který propojuje hmotnost a objem.

Vypočítáme nejprve objem vnějšího komolého kužele s průměrem dolní podstavy $D_1 = 3{,}2$ m a průměrem horní podstavy $D_2 = 1{,}7$ m. Poloměr je polovinou průměru, takže vnější komolý kužel má poloměr dolní podstavy $R_1 = 1{,}6$ m a poloměr horní podstavy $R_2 = 0{,}85$ m. Objem tohoto komolého kužele s výškou $v = 32$ m je dán vztahem:

$$V_R = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot v \cdot ({R_1}^2 + R_1 \cdot R_2 + {R_2}^2),$$

$$V_R = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 32 \cdot (1{,}6^2 + 1{,}6 \cdot 0{,}85 + 0{,}85^2)\ \mathrm{m}^3,$$

$$V_R = \frac{1\,238}{25} \cdot \pi\ \mathrm{m}^3.$$

Nyní vypočítáme objem vnitřního komolého kužele s průměrem dolní podstavy $d_1 = 2$ m a průměrem horní podstavy $d_2 = 1{,}2$ m. Poloměr je polovinou průměru, takže vnitřní komolý kužel má poloměr dolní podstavy $r_1 = 1$ m a poloměr horní podstavy $r_2 = 0{,}6$ m. Objem tohoto komolého kužele s výškou $v = 32$ m je dán vztahem:

$$V_r = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot v \cdot ({r_1}^2 + r_1 \cdot r_2 + {r_2}^2),$$

$$V_r = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 32 \cdot (1^2 + 1 \cdot 0{,}6 + 0{,}6^2)\ \mathrm{m}^3,$$

$$V_r = \frac{1\,568}{75} \cdot \pi\ \mathrm{m}^3.$$

Objem dutého komolého kužele zjistíme jako rozdíl objemu V_R vnějšího komolého kužele a objemu V_r vnitřního komolého kužele, tedy:

$$V = V_R - V_r,$$

$$V = \frac{1\,238}{25} \cdot \pi - \frac{1\,568}{75} \cdot \pi\ \mathrm{m}^3,$$

$$V = \frac{2\,146}{75} \cdot \pi\ \mathrm{m}^3.$$

Nyní využijeme vzorec pro výpočet hustoty a zjistíme hmotnost dutého komolého kužele:

$$\rho = \frac{m}{V},$$

$$m = \rho \cdot V,$$

$$m = 1\,600 \cdot \frac{2\,146}{75} \cdot \pi \text{ kg},$$

$$m \approx 143\,826{,}3 \text{ kg},$$

$$m \approx 143{,}8 \text{ t}.$$

Celková hmotnost zdiva komína, který má tvar dutého komolého kužele, je přibližně 143,8 t.

3.2.3 Archimédův zákon

Tato skupina slovních úloh se zaměřuje na výpočty objemů a povrchů těles ve spojení s Archimédovým zákonem. Tento zákon je základem hydrostatiky.

Žáci při řešení úloh z této skupiny procvičují výpočty objemů a povrchů těles, ale také upevňují své porozumění Archimédovu zákonu.

V učebnici Matematika pro gymnázia: Stereometrie (Pomykalová, 2013) jsem nalezla více úloh týkající se Archimédova zákona, konkrétně v kapitole Tělesa. Tyto úlohy jsem se rozhodla zařadit do samostatné části, protože představují unikátní propojení geometrie a fyziky, které přesahuje běžné úlohy na hustotu.

Úloha 1

Vypočítejte tloušťku ledové kry tvaru hranolu, která vyčnívá 6 cm nad vodou, je-li hustota ledu $\rho = 0{,}92 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Předpokládejte, že kra má svislé stěny a rovnoběžné podstavy. (Pomykalová, 2013, s. 163)

Řešení:

Chceme zjistit tloušťku ledové kry, která představuje výšku hranolu *v*. Objem hranolu s obsahem podstavy S_p vypočítáme podle vzorce:

$$V = S_p \cdot v.$$

Při řešení této úlohy využíváme vzorec pro výpočet hustoty ρ pomocí hmotnosti *m* a objemu *V*:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Ze zadání víme, že hustota ledu je $\rho = 0{,}92\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$, neznáme však hmotnost kry, ani její objem. Vyjádříme hmotnost ledové kry pomocí hustoty ledu a jejího objemu:

$$\rho = \frac{m}{V},$$

$$m = \rho \cdot V,$$

$$m = 0{,}92 \cdot S_p \cdot v.$$

V této rovnosti máme stále dvě neznámé, potřebujeme tedy sestavit další rovnici. Nyní využijeme Archimédův zákon, který říká, že objem tělesa ponořeného do kapaliny se rovná objemu kapaliny tělesem vytlačené. Jinými slovy, část kry, která je ponořená ve vodě, má stejný objem jako voda, která stoupla vzhůru ponořením kry. Uvažujeme pouze ponořenou část kry, výška bude tedy $v - 6$. Hustota vody je $\rho_v = 1\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$, protože jeden metr krychlový vody váží jeden kilogram. Platí tedy vztah:

$$\rho_v = \frac{m}{V},$$

$$m = \rho_v \cdot V,$$

$$m = 1 \cdot S_p \cdot (v - 6).$$

Dvěma způsoby jsme vyjádřili *m* a obě vyjádření se rovnají:

$$0{,}92 \cdot S_p \cdot v = S_p \cdot (v - 6),$$

$$0{,}92 \cdot v = v - 6,$$

$$0{,}8 \cdot v = 6,$$

$$v = 7{,}5\ \mathrm{m}.$$

Tloušťka ledové kry tvaru hranolu je 7,5 m.

Úloha 2

Dutá železná koule se ponoří do vody svou polovinou. Jaká je tloušťka její stěny, je-li vnější průměr koule 1 m a hustota železa $7{,}8\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$? (Pomykalová, 2013, s. 182)

Řešení:

Vypočítáme objem vnější koule s průměrem 1 m. Její poloměr R je polovinou průměru, tedy $R = 0{,}5$ m. Vypočítáme její objem V_R:

$$V_R = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3,$$

$$V_R = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}5^3 \text{ m}^3,$$

$$V_R = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}125 \text{ m}^3,$$

$$V_R = \frac{5}{30} \cdot \pi \text{ m}^3.$$

Dále vypočítáme objem vytlačené vody V_v koulí. Víme, že voda sahá do poloviny koule, tedy platí:

$$V_v = \frac{V_R}{2},$$

$$V_v = \frac{\frac{5}{30} \cdot \pi}{2} \text{ m}^3,$$

$$V_v = \frac{5}{60} \cdot \pi \text{ m}^3.$$

Když známe objem vytlačené vody, zjistíme pomocí vzorce pro výpočet hustoty i její hmotnost m. To nám pomůže vypočítat hmotnost duté železné koule, protože hmotnost vytlačené vody je dle Archimédova zákona stejná jako hmotnost duté železné koule, která ji vytlačila. Použijeme tedy vzorec pro výpočet hustoty vody, kde $\rho_v = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} =$ $= 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$:

$$\rho_v = \frac{m}{V_v},$$

$$m = \rho_v \cdot V_v,$$

$$m = 1\,000 \cdot \frac{5}{60} \cdot \pi \text{ kg},$$

$$m = \frac{500}{6} \cdot \pi \text{ kg}.$$

Nyní dle předchozí úvahy víme, že i hmotnost duté železné koule je $m = \frac{5}{60} \cdot \pi$ g. Pomocí vzorce pro výpočet hustoty železa vypočítáme objem duté koule *V*. Hustotu železa známe ze zadání, ale vzhledem k tomu, že se pohybujeme v jiných jednotkách, musíme převést na $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$:

$$\rho_{ž} = 7{,}8 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} = 7\,800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Hmotnost koule *m* jsme vypočítali v předchozím kroku, můžeme tedy využít vzorec pro výpočet hustoty:

$$\rho_{ž} = \frac{m}{V},$$

$$V = \frac{m}{\rho_{ž}},$$

$$V = \frac{\frac{500}{6} \cdot \pi}{7\,800} \text{ m}^3,$$

$$V = \frac{500}{46\,800} \cdot \pi \text{ m}^3,$$

$$V = \frac{5}{468} \cdot \pi \text{ m}^3.$$

Dále můžeme vyjádřit objem duté koule jako rozdíl objemu V_R a vnější koule s poloměrem R a objemu V_r vnitřní koule s poloměrem *r* a vypočítat objem vnitřní koule:

$$V = V_R - V_r,$$

$$V_r = V_R - V,$$

$$V_r = \frac{5}{30} \cdot \pi - \frac{5}{468} \cdot \pi,$$

$$V_r = \frac{73}{468} \cdot \pi \text{ m}^3.$$

Nyní známe objem vnitřní koule, zjistíme i její poloměr *r*:

$$V_r = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3,$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_r}{4 \cdot \pi}},$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \frac{73}{468} \cdot \pi}{4 \cdot \pi}}\,\mathrm{m},$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{\frac{73}{156}}{4}}\,\mathrm{m},$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{73}{624}}\,\mathrm{m}.$$

Tloušťku stěny *t* vypočítáme jako rozdíl poloměru *R* vnější koule a poloměru *r* vnitřní koule:

$$t = R - r,$$

$$t = 0{,}5 - \sqrt[3]{\frac{73}{624}},$$

$$t \approx 0{,}0109\ \mathrm{m},$$

$$t \approx 1{,}09\ \mathrm{cm}.$$

Tloušťka duté železné koule je přibližně 1,09 cm.

3.2.4 Rychlost

Tato skupina slovních úloh se zaměřuje na výpočty objemů a povrchů těles ve spojení s rychlostí.

Žáci při řešení úloh z této skupiny procvičují výpočty objemů a povrchů těles, ale také své znalosti týkající se rychlosti.

V učebnici Matematika pro gymnázia: Stereometrie (Pomykalová, 2013) jsem nalezla pouze jednu úlohu tohoto typu, konkrétně v kapitole Tělesa. Přestože je tento typ úloh méně častý, zahrnula jsem ho do bakalářské práce, protože je v něm zapojena dynamika do geometrických výpočtů.

Úloha 1

Jaké množství vody proteče za hodinu potrubím kruhového průřezu s průměrem 16 cm, teče-li voda rychlostí $2{,}5\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$? (Pomykalová, 2013, s.180)

Řešení:

Předpokládejme, že voda proudí potrubím, které má tvar válce. Proudí rychlostí $v = 2{,}5\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ po dobu jedné hodiny. K určení objemu vody, který proteče, použijeme vzorec pro objem válce s obsahem podstavy S_p a výškou h:

$$V = S_p \cdot h.$$

Podstavou válce je kruh s poloměrem r, což je polovina průměru kruhového průřezu, tedy 8 cm. Obsah podstavy vypočítáme pomocí vzorce pro výpočet obsahu kruhu:

$$S_p = \pi \cdot r^2,$$

$$S_p = \pi \cdot 8^2\ \mathrm{cm}^2,$$

$$S_p = 64 \cdot \pi\ \mathrm{cm}^2,$$

$$S_p = 0{,}006\,4 \cdot \pi\ \mathrm{m}^2.$$

Výšku h válce zjistíme pomocí vzorce pro výpočet rychlosti v, který využívá i čas t. Rychlost i čas známe ze zadání, nicméně pro výpočet potřebujeme sjednotit jednotky. Jelikož $v = 2{,}5\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, čas převedeme na sekundy, tedy $t = 3\,600\ \mathrm{s}$. Využijeme vzorec pro výpočet rychlosti:

$$v = \frac{h}{t},$$

$$h = v \cdot t,$$

$$h = 2{,}5 \cdot 3\,600\ \mathrm{m},$$

$$h = 9\,000 \text{ m}.$$

Nyní vypočítáme objem válce:

$$V = S_p \cdot h,$$

$$V = 0{,}006\,4 \cdot \pi \cdot 9\,000 \text{ m}^3,$$

$$V \approx 180{,}9 \text{ m}^3.$$

Potrubím kruhového průřezu proteče za hodinu přibližně $180{,}9 \text{ m}^3$ vody.

Závěr

Cílem práce bylo roztřídit, uspořádat a zpřehlednit slovní úlohy z oblasti objemů a povrchů těles, vyskytující se ve vybraných učebnicích středních škol, pro potřeby řešitelů a pedagogů. Práce je zaměřena na slovní úlohy, které kombinují objemy a povrchy těles s dalším učivem střední školy. Ukázalo se jako poměrně složité kvalitně roztřídit a uspořádat slovní úlohy na objemy a povrchy těles, protože jsou v mnoha případech komplexní, propojují více různých oblastí. U některých úloh bylo téměř nemožné jednoznačně rozhodnout o jejich zařazení.

Z tohoto důvodu musím konstatovat, že cíl byl splněn pouze částečně. Úlohy se podařilo roztřídit, uspořádat i zpřehlednit, nicméně nelze vyloučit fakt, že existují úlohy, které by bylo možné zařadit do více skupin.

V budoucnu by bylo možné provést podobné analýzy pro úlohy v jiných učebnicích, a to nejen pro gymnázia, ale i pro odborné školy. Dále bych chtěla provést výzkum na střední škole, kde jsem studovala. Zajímalo by mě, jaké kombinace a úlohy by pro žáky představovaly největší výzvu.

Seznam použitých informačních zdrojů

Bušek, I., & Calda, E. (2011). *Matematika pro gymnázia: Základní poznatky z matematiky* (Dotisk 4. vydání). Prometheus.

Divíšek, J. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ: celostátní vysokoškolská učebnice pro studenty pedagogických fakult studijního oboru 76-11-8: učitelství pro 1. stupeň základní školy*. Státní pedagogické nakladatelství.

Charvát, J., Zhouf, J., & Boček, L. (2010). *Matematika pro gymnázia: rovnice a nerovnice* (Dotisk 4. vydání). Prometheus.

Kníže, G. (1966). *Vztah celku a části při řešení slovních úloh*. Státní pedagogické nakladatelství.

Kuřina, F. (1990). *Umění vidět v matematice*. Státní pedagogické nakladatelství.

Novotná, J. (2004). Zpracování informací při řešení slovních úloh. In N. Jarmila, M. Hejný, & N. Stehlíková (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (pp. 367-377). Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta.

Odvárko, O. (2021). *Matematika pro gymnázia: posloupnosti a řady* (Dotisk 3. vydání). Prometheus.

Pomykalová, E. (2013). *Matematika pro gymnázia – Stereometrie* (Dotisk 4. vydání). Prometheus.

Pomykalová, E. (2018). *Matematika pro gymnázia: Planimetrie* (Dotisk 5. vydání). Prometheus.

Vyšín, J. (1962). *Metodika řešení matematických úloh*. Státní pedagogické nakladatelství.