

UNIVERZITA KARLOVA
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Parabola jako hranice mezi elipsou a hyperbolou
Parabola as a border between an ellipse and a hyperbola

Alena Stránská

Vedoucí práce: Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.
Studijní program: Specializace v pedagogice
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Parabola jako hranice mezi elipsou a hyperbolou potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 11. července 2024

Ráda bych na tomto místě poděkovala svým dětem za podporu a zároveň se omluvila, že jsem byla během psaní této práce poněkud v jiné dimenzi. Také děkuji svým spolužákům, s kterými byl průběh mého studia ve výsledku velmi zábavný. Především bych ale velice ráda poděkovala Mgr. Michalu Zambojovi, Ph.D nejen za velkou trpělivost a cenné rady při vedení této práce, ale také za jeho inspirativně vedené přednášky, které mě dokázaly nadchnout pro geometrii takřka nekonečně.

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce představuje na základě různých definic parabolu jako hranici mezi elipsou a hyperbolou. Jako důležitý pojem je v ní zmiňována numerická excentricita kuželosečky. Práce je rozdělena do sedmi kapitol. V prvních pěti kapitolách se každá z nich zabývá na jednu definici a postupně zavádí pojmy spojené s touto definicí. Šestá kapitola se zabývá tím, kdy lze rovnici kuželosečky vyjádřit jako předpis funkce. Každá z těchto šesti kapitol obsahuje také jeden nebo více příkladů, které využívají nové poznatky z dané kapitoly. Sedmá kapitola je pak věnována pouze příkladům, ty jsou řešeny synteticky, či analyticky a mají poukázat na specifické vlastnosti paraboly, které často usnadňují řešení těchto příkladů ve srovnání s elipsou nebo hyperbolou.

KLÍČOVÁ SLOVA

kuželosečky, definice kuželoseček, parabola, elipsa, hyperbola, numerická excentricita

ABSTRACT

Based on various definitions, this bachelor thesis presents a parabola as a border between an ellipse and a hyperbola. The numerical eccentricity of the conic is mentioned in it as an important term. The work is divided into seven chapters. In the first five chapters, each of them focuses on one definition and gradually introduces the terms associated with this definition. The sixth chapter discusses when the equation of a conic can be expressed as a function. Each of these six chapters also includes one or more examples, which utilize the new insights from the respective chapter. The seventh chapter is dedicated solely to examples, which are solved either synthetically or analytically and are intended to point out the specific properties of the parabola, which often facilitate the solution of these examples compared to the ellipse or hyperbola.

KEYWORDS

conics, definitions of conics, parabola, ellipse, hyperbola, numerical eccentricity

Obsah

Úvod	1
1 Kuželosečky jako řezy kuželové plochy	2
2 Definice kuželosečky pomocí řídicí přímky a ohniska	6
2.1 Quételetova - Dandelinova věta	6
2.2 Dělicí poměr	9
2.3 Numerická excentricita kuželosečky	11
2.4 Řídicí přímka a tečny kuželosečky	12
3 Ohniskové definice kuželoseček	18
3.1 Ohnisková definice elipsy a hyperboly	18
3.2 Ohnisková definice paraboly	20
3.3 Ohniskové vlastnosti a tečny kuželosečky	22
3.4 Charakteristický trojúhelník elipsy a hyperboly	24
4 Kuželosečka jako obraz kružnice ve středové kolineaci	26
4.1 Středová kolineace mezi dvěma rovinami	26
4.2 Středová kolineace v rovině	27
4.3 Kuželosečka a tečny ve středové kolineaci	29
4.3.1 Kuželosečky a přímka	29
4.3.2 Pól a polára kuželosečky	30
4.3.3 Střed a průměry kuželosečky	33
4.3.4 Subtangenta a subnormála paraboly	36
4.3.5 Konstrukce harmonické čtveřice	36
4.4 Konstrukce kuželoseček pomocí středové kolineace	41
5 Algebraická definice kuželosečky	45
5.1 Obecná rovnice kuželosečky	45
5.2 Využití polárních vlastností	50
5.2.1 Polára, sdružené směry a střed kuželosečky	50
5.2.2 Asymptotické směry kuželosečky	51
5.2.3 Hlavní směry kuželosečky	52
5.3 Kanonický tvar rovnice kuželosečky	54
5.3.1 Shodné transformace souřadnic v rovině	54
5.3.2 Transformace středové kuželosečky	55
5.3.3 Transformace paraboly	57
5.4 Kanonická rovnice kuželoseček a tečny	61
6 Kuželosečka jako graf funkce	67
7 Příklady	72
Závěr	85
Seznam použitých zdrojů	87
Příloha	89

Úvod

K výběru tématu této práce mě inspirovala debata se spolužáky před zkouškou ze Syntetické geometrie III. Obsahem učiva tohoto předmětu byly, kromě jiného, i kuželosečky. U některých překvapivě panovaly největší obavy z toho, že se v testu objeví úloha s parabolou. Možná proto, že se na první pohled tato kuželosečka od zbývajících dvou nejvíce odlišuje; nepočítáme-li speciální případ elipsy – kružnici, s níž se žáci setkávají ze všech kuželoseček jako první už na základní škole. Stejně jako u kružnice však tato odlišnost její konstrukci naopak spíše usnadňuje, na což chci touto prací poukázat. A to nejen z pohledu syntetické geometrie, ale i analytické geometrie.

Zároveň chci ovšem ukázat, že při bližším pohledu tato odlišnost paraboly vlastně odlišností není. Jde spíš jen o mezní případ obecných vlastností, které jsou pro všechny kuželosečky stejné. Kuželosečky v této práci nebudou představeny jako izolované objekty, každá ve své vlastní kapitole, jak tomu často bývá zvykem. V prvních pěti kapitolách, zaměřených vždy na jednu jejich definici, bude naopak pohlížet na všechny kuželosečky společně. V každé definici budeme hledat, jakou hranici mezi elipsou a hyperbolou v ní parabola tvoří. Práce proto záměrně nebude začínat asi nejznámějšími ohniskovými definicemi, ve kterých je tento přechod mezi elipsou a hyperbolou nejméně patrný. Jako první bude uvedena jejich nejstarší definice. Z ní pak postupně odvodíme i definice ostatní. Cílem práce tak není jen hledání souvislostí mezi jednotlivými druhy kuželoseček, ale zároveň také mezi jednotlivými definicemi.

V šesté kapitole chce práce ukázat, v jakém případě lze na kuželosečku nahlížet jako na graf funkce. V prvních šesti kapitolách budou také postupně řazeny příklady na využití nových poznatků z dané kapitoly. Sedmá kapitola pak už bude věnována pouze příkladům. V nich bude dáno nejprve obecné zadání pro všechny kuželosečky a úkolem bude doplňovat vždy jeden prvek ze zadání tak, aby řešením byla právě parabola. Pokud nebude v příkladech uvedeno jinak, považujeme v této práci kuželosečku za sestavenou po nalezení jejích základních prvků, tedy ohnisek a hlavních vrcholů u středové kuželosečky; resp. ohniska nebo vrcholu a řídicí přímky u paraboly.

Tato práce předpokládá alespoň elementární znalost kuželoseček a také jejich základních konstrukcí, kterým se věnuje pouze okrajově. Je tak určena především žákům středních škol a gymnázií, kteří se s kuželosečkami již setkali, a nabízí jim širší pohled na toto téma a prohloubení jejich znalostí. Samozřejmým předpokladem jsou základní znalosti středoškolské matematiky, okrajově i základů matematické analýzy. Transformace kuželoseček v rámci analytické geometrie představíme tak, aby se žáci obešli bez znalostí z lineární algebry.

Text této práce je pro větší názornost doprovázen obrázky a také odkazy na interaktivní konstrukce, které byly vytvořeny v grafickém programu GeoGebra. Práce je vysázena pomocí typografického systému \LaTeX .

1 Kuželosečky jako řezy kuželové plochy

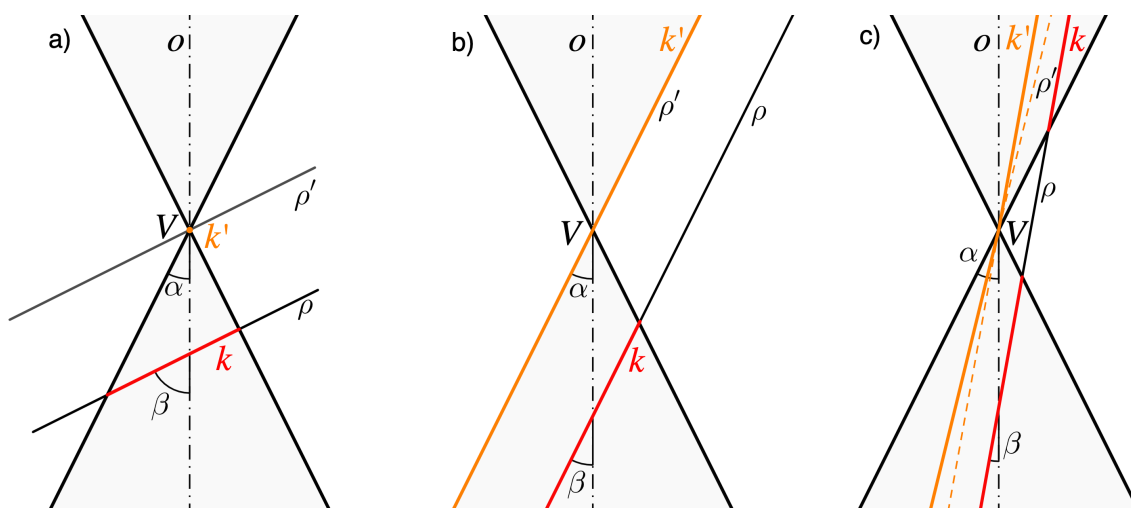
Kuželosečky lze získat jako rovinné řezy kuželové plochy¹. Pro větší jednoduchost uvažujme *rotační* kuželovou plochu, kterou si nejprve definujeme. Dále inspirováno [2, s. 93–94].

Definice 1. Necht' je dán pevný bod V , pevná přímka o procházející bodem V a úhel α pro jehož velikost platí: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Množinu všech přímek (tzv. povrchových přímek neboli površek), které procházejí bodem V a svírají s přímkou o úhel α , nazýváme rotační kuželovou plochou. Přímkou o nazýváme osou kuželové plochy a bod V vrcholem kuželové plochy.

Ved' me touto kuželovou plochou rovinu ρ , jež není vrcholová (tj. neprochází vrcholem V). Odchylku osy o od roviny ρ označme β ; $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Pro průsečnou křivku k platí (obr. 1.1):

- $\beta > \alpha \Leftrightarrow k$ je elipsa (pro $\beta = \frac{\pi}{2}$ jde o kružnici jako speciální případ elipsy),
- $\beta = \alpha \Leftrightarrow k$ je parabola,
- $\beta < \alpha \Leftrightarrow k$ je hyperbola.

Takové kuželosečky nazýváme *regulární*.



Obr. 1.1: Rovinný řez rotační kuželovou plochou: a) eliptický, b) parabolický, c) hyperbolický

Ved' me kuželovou plochou vrcholovou rovinu ρ' rovnoběžnou s rovinou ρ . Pro průsečík či průsečnice k' pak platí (obr. 1.1):

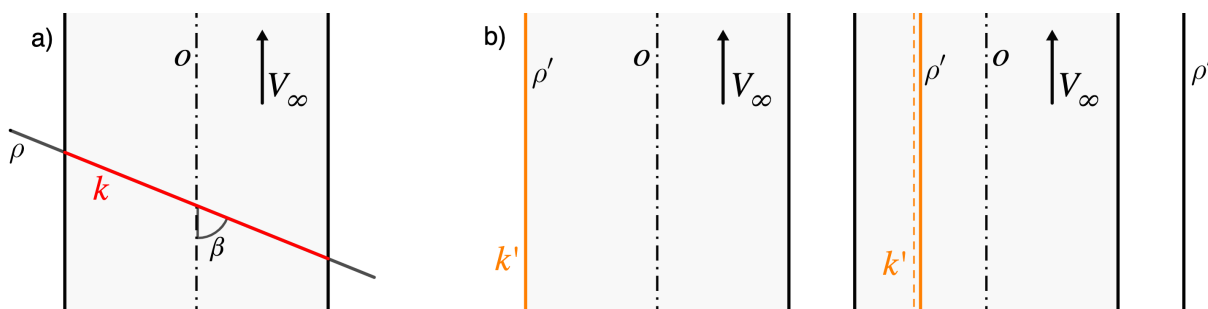
- $\beta > \alpha \Leftrightarrow k'$ je bod, tedy vrchol V ,
- $\beta = \alpha \Leftrightarrow k'$ je dvojice splývajících přímek, tedy dvě splývající površky (ρ' je tečná rovina),
- $\beta < \alpha \Leftrightarrow k'$ je dvojice různoběžných přímek, tedy dvě různé površky.

¹Nejstarší definice ukazují kuželosečky jako řezy rotačního kuželu rovinou kolmou k jedné z jeho površek a z jednoho kuželu je tak možno získat jen jeden typ kuželosečky. Jejich názvy proto byly *řez ostroúhlého kuželu* pro elipsu, *řez pravoúhlého kuželu* pro parabolu a *řez tupoúhlého kuželu* pro hyperbolu [1, s. 63]. Až APOLLONIUS Z PERGY (3. – 2. st. př. n. l.) ve spisu *Kuželosečky* definuje kuželovou plochu jako nekonečnou v obou směrech (díky čemuž uvažuje obě větve hyperboly), kterou protne libovolnou rovinou a získá tak všechny kuželosečky z jediné kuželové plochy. Dává jim dnešní názvy: elipsa, parabola a hyperbola [1, s. 64].

Takové kuželosečky nazýváme *singulární*. Pokud v dalším textu budeme hovořit pouze o kuželosečkách, budeme tím myslet kuželosečky regulární, pokud nebude řečeno jinak.

Pro výčet všech možností nyní uvažujme ještě speciální případ, kdy se vrchol V rotační kuželové plochy stane nevlastním bodem;² taková plocha se poté nazývá *rotační válcová* plocha, platí $\alpha = 0$. Pro průnik této válcové plochy a roviny ρ , respektive ρ' , pak mohou nastat tyto možnosti (obr. 1.2):

- $\beta > \alpha \Leftrightarrow k$ je elipsa (pro $\beta = \frac{\pi}{2}$ jde o kružnici); k' je prázdná množina,
- $\beta = \alpha \Leftrightarrow k'$ je dvojice splývajících přímek (pokud ρ' je tečná rovina), dvojice rovnoběžných přímek (pokud ρ' je sečná rovina), případně prázdná množina (pokud rovina ρ' válcovou plochu neprotne).



Obr. 1.2: Rovinný řez rotační válcovou plochou: a) $\beta > \alpha$, b) $\beta = \alpha = 0$

Je zřejmé, že případ $\beta < \alpha$ nemůže nastat. Pokud $\beta = \alpha$, pak každá taková rovina prochází nevlastním vrcholem V_∞ , tedy jde o vrcholovou rovinu ρ' . Z toho plyne, že řezem válcové plochy získáváme pouze jeden typ regulární kuželosečky a to elipsu.

Odchylka osy od roviny ρ tak určuje, jaká bude výsledná kuželosečka. Může nabývat nekonečně mnoha hodnot pro elipsu: $\beta \in (\alpha, \frac{\pi}{2})$ a hyperbolu: $\beta \in \langle 0, \alpha \rangle$, ovšem parabolu získáme pouze v okamžiku, kdy $\beta = \alpha$. Interaktivní konstrukci s řezem kuželové nebo válcové plochy najdeme zde <https://www.geogebra.org/m/wfskmprj>.

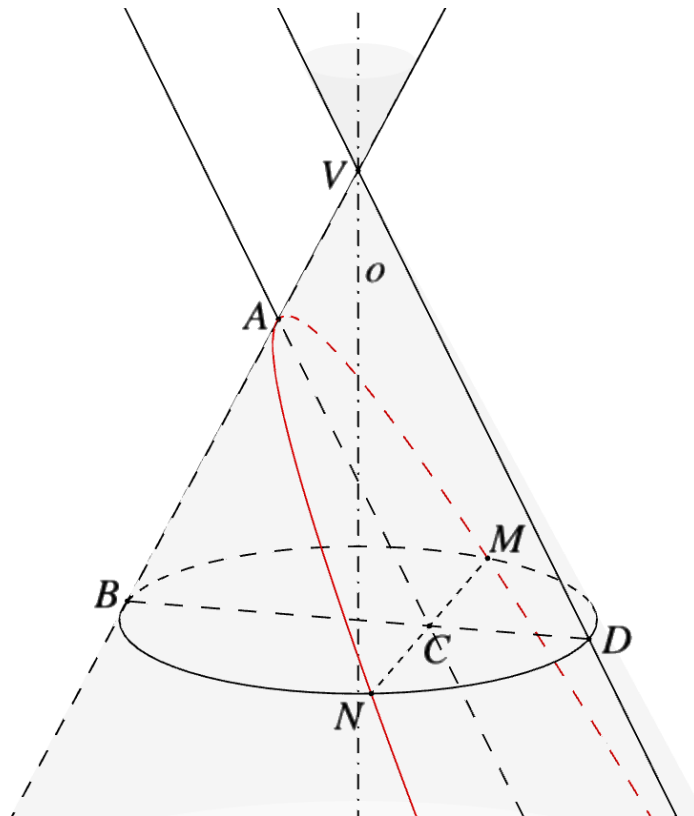
Rovnoběžnost parabolického řezu s tečnou rovinou ρ' , nám navíc umožňuje celkem snadné odvození rovnice paraboly (inspirováno [4, s. 307–309]). Zvolme na libovolné povrchce rotační kuželové plochy s vrcholem V a osou o libovolný bod D takový, že $D \neq V$. Ved' me bodem D rovinu kolmou na osu o , získáme kružnici, její průměr označme BD (obr. 1.3). Body M, N leží na této kružnici tak, že platí $MN \perp BD$. Označme bod C ; $C \in BD \cap MN$ a ved' me jím přímkou rovnoběžnou s DV , průsečík této přímky a povrchky BV označme A . Rovina ACM tak bude parabolickým řezem, neboť je rovnoběžná s tečnou rovinou procházející povrchkou DV . Trojúhelník BDM má pravý úhel u vrcholu M (Thalétova kružnice). Z Eukleidovy věty o výšce tak plyne:

$$|CM|^2 = |BC| \cdot |CD|. \quad (1.1)$$

Trojúhelníky VBD a ABC jsou podobné podle věty uu, tedy můžeme napsat

$$\frac{|BC|}{|CA|} = \frac{|BD|}{|DV|} \Rightarrow |BC| = \frac{|CA| \cdot |BD|}{|DV|}.$$

²Průsečík rovnoběžných přímek je bod v nekonečnu, tzv. nevlastní bod. Takový bod je incidentní se všemi navzájem rovnoběžnými přímkami, lze ho tedy definovat jako jejich směr [3, s. 18]. Budeme je značit velkými písmeny s indexem ∞ a v obrázcích navíc šipkou daným směrem.



Obr. 1.3: Kuželová plocha s řezem kolmým na o a s řezem rovnoběžným s DV

Dosaďme do rovnice 1.1

$$|CM|^2 = \frac{|CA| \cdot |BD|}{|DV|} \cdot |CD| = |CA| \cdot |CD| \cdot \frac{|BD|}{|DV|}.$$

Hodnota poměru $\frac{|BD|}{|DV|}$ je konstantní a nezávisí na poloze bodu D . Z rovnoběžnosti CA a DV vyplývá, že vzdálenost bodů C, D se také nemění. Výraz $|CD| \cdot \frac{|BD|}{|DV|}$ je tak konstanta, označme ji c , zbývající dvě délky označme proměnnými: $|CM| = y$ a $|CA| = x$. Dostáváme tak rovnici paraboly

$$y^2 = cx. \quad (1.2)$$

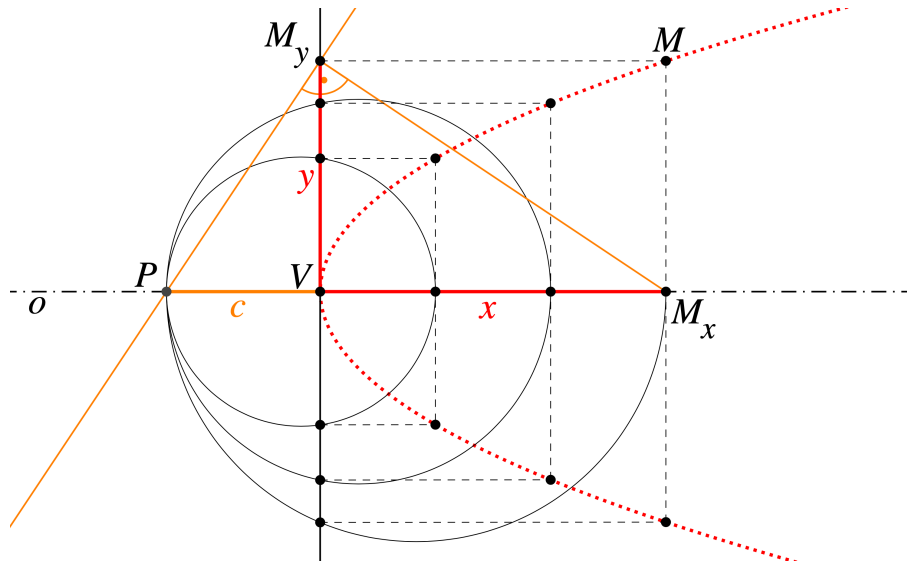
Stejně bude platit i pro bod N , pak je zřejmé, že $|CM| = |CN|$. Bod A nazveme *vrcholem* paraboly, přímkou CA její *osou*.

Příklad 1.

Sestrojte další body paraboly, je-li dán její vrchol V , osa o a jeden její bod M .

Využijme Eukleidovu větu o výšce k jednoduché konstrukci³ bodů paraboly. Vrcholem V ved'me kolmici na osu o . Délky $|VM_x|$ a $|VM_y|$ odpovídají vzdálenostem x, y bodu M od obou přímk (obr. 1.4). Z předchozího odvození víme, že pro ně platí vztah $y^2 = cx$. Pak tedy průsečík osy o a přímky kolmé na M_xM_y vedené bodem M_y bude bod P takový, že $|PV| = c$, platí $|VM_y|^2 = |PV| \cdot |VM_x|$. Vzdálenost $|PV|$ je tak vždy pro danou parabolu konstantní. Pomocí Thalétovy kružnice můžeme sestavit další libovolné body paraboly.

³Tuto méně známou konstrukci paraboly ve svém komentáři k Apolloniiovým *Kuželosečkám* uvádí perský lékař, filozof a matematik IBN SÍNÁ známý jako AVICENNA (10. – 11. st.)[5].



Obr. 1.4: Konstrukce bodů paraboly pomocí Eukleidovy věty o výšce

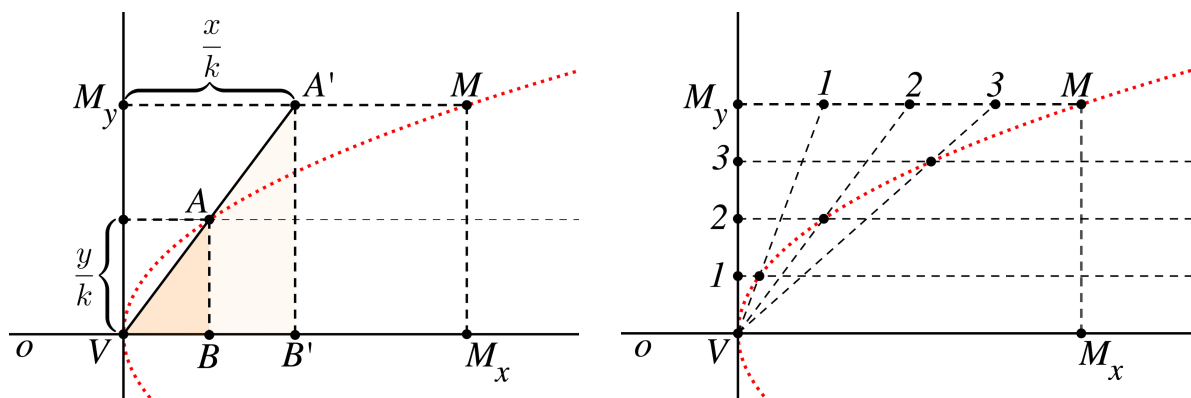
Rovnici 1.2 můžeme využít i k odvození *příčkové* konstrukce paraboly. Bude-li pro vzdálenost jejího bodu A od osy o platit $|AB| = \frac{y}{k}$; $k \in \mathbb{R}^+$ (obr. 1.5), její rovnice pak bude:

$$\left(\frac{y}{k}\right)^2 = c \cdot \frac{x}{k^2}$$

a pro délku odvěsny VB pravoúhlého trojúhelníku AVB platí $|VB| = \frac{x}{k^2}$. Délka odpovídající odvěsny VB' ; $B' \in o$, podobného trojúhelníku $A'VB'$; $A' \in M_yM$, pak bude:

$$|VB'| = \frac{x}{k^2} \cdot k = \frac{x}{k}.$$

Bod A paraboly tak leží na přeponě VA' pravoúhlého trojúhelníku $A'VB'$, kde $|VB'| = \frac{x}{k}$, ve vzdálenosti $\frac{y}{k}$ od osy o .



Obr. 1.5: Příčková konstrukce paraboly

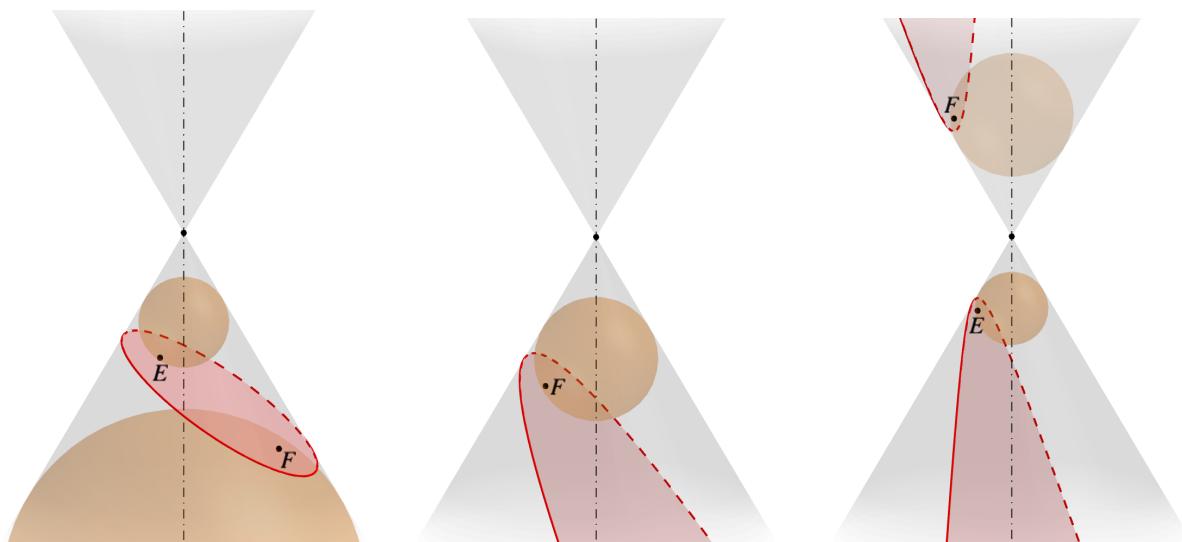
Rozdělme tedy úsečku VM_y na libovolný počet shodných dílů a na stejný počet shodných dílů rozdělme i úsečku M_yM . Tyto body očíslovme od bodu V , resp. M_y (obr. 1.5). Body na úsečce VM_y vedme rovnoběžné přímky s osou o . Body na úsečce M_yM spojíme s vrcholem V . Průsečíky odpovídajících si rovnoběžek a úseček pak budou body paraboly.

2 Definice kuželosečky pomocí řídicí přímky a ohniska

2.1 Quételetova - Dandelinova věta

Definice kuželoseček jako řezů kuželové plochy se po dlouhou dobu dávaly velmi složitě do souvislostí s definicemi planimetrickými, které jsou založeny především na ohniscích⁴. Až pomocí Quételetovy - Dandelinovy věty⁵, která dává ohniskům geometrickou interpretaci v rámci řezů kuželové plochy, lze tento vztah elegantně dokázat.

Věta 1 (Quételetova - Dandelinova). Řezem rotační kuželové plochy rovinou, která není vrcholová, je kuželosečka, jejíž ohniska jsou dotykové body sfér vepsaných do kuželové plochy tak, že se dotýkají roviny řezu (obr. 2.1). Jestliže rovina řezu protíná všechny površky rotační kuželové plochy, je řezem *elipsa*. Je-li rovina rovnoběžná právě s jednou površkou plochy, je řezem *parabola*; je-li rovina rovnoběžná se dvěma površkami plochy, je řezem *hyperbola* a ony povrchové přímky udávají směry asymptot [2, s. 94] (tyto površky jsou shodné s k' z kapitoly 1).



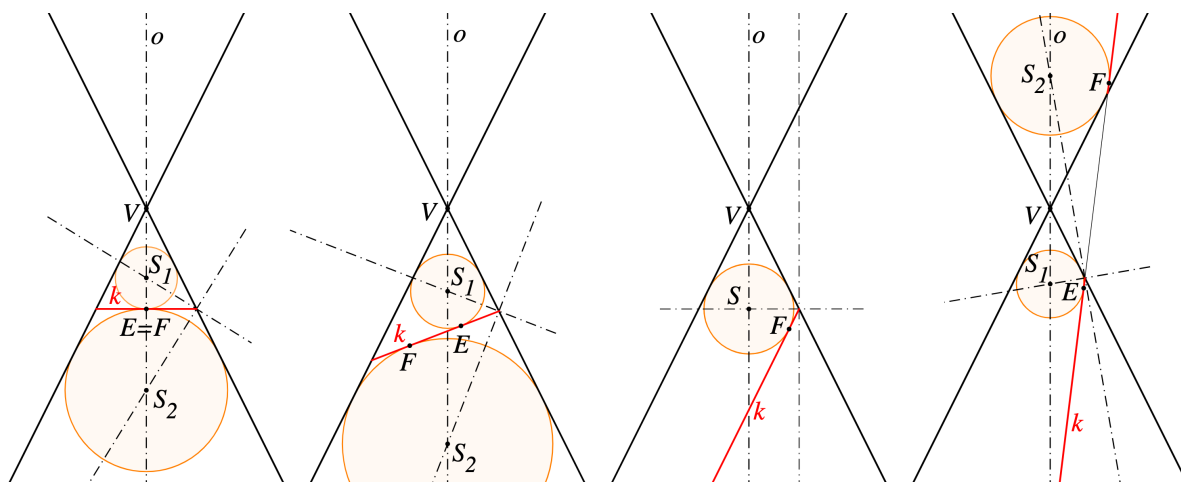
Obr. 2.1: Sféry vepsané do kuželové plochy dotýkající se roviny řezu

Podívejme se na situaci v kolmém promítání na vrcholovou rovinu obsahující osu o kuželové plochy. Středů sfér musí ležet na ose o a zároveň na osách úhlu, které svírá rovina řezu a površka kuželové plochy (obr. 2.2). Z tohoto náhledu vidíme, že

- rovina tvořící kružnici je kolmá na osu o , tedy ohniska E, F tak splynou v jeden společný tečný bod, který je totožný se středem S kružnice k ;
- parabolický řez má stejnou odchylku od osy o jako površka. Jedna z os úhlu je tak rovnoběžná s osou o a jejich průsečík je pouze nevlastní bod. Parabola je tak jedinečný případ kuželosečky, jež má pouze jedno vlastní ohnisko F ;
- mimo tyto dva hraniční případy získáme vždy dvě sféry s dvěma různými body dotyku s rovinou řezu, tedy elipsa a hyperbola mají dvě ohniska E, F .

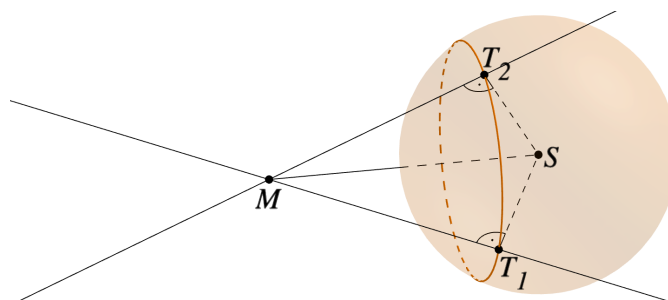
⁴APOLLONIUS ve svých spisech sice hovoří o ohniscích jako o významných bodech, ale neexistoval pro ně žádný termín (mluvilo se o nich např. jako o bodech vzniklých při příkládání). Jako první použil označení *focus* neboli *ohnisko* JOHANNES KEPLER (1571 – 1630) v jednom ze svých astronomických spisů [1, s. 383].

⁵V roce 1822 francouzský matematik GERMINAL PIERRE DANDELIN (1794 – 1847) ve své práci uvádí větu, která body dotyku vepsaných sfér s rovinou řezu definuje jako ohniska kuželosečky. K podobným souvislostem dospěl nezávisle na něm i belgický vědec LAMBERT ADOLPHE JACQUES QUÉTELET (1796 – 1874), věta tedy nese název podle obou matematiků (ovšem v jiných zemích se pro ni většinou užívá pojem Dandelinovy sféry).



Obr. 2.2: Středů sfér a jejich dotykové body s rovinou řezu u kružnice, elipsy, paraboly, hyperboly

Ukažme si teď vztah, který je základem pro následující odvození. Bodem M jsou vedeny libovolné tečny ke sféře, dotykové body tečen se sférou jsou T_1, T_2 (obr. 2.3). Trojúhelníky MST_1 a MST_2 mají společnou stranu MS . Dále víme, že $|ST_1| = |ST_2|$ (poloměry sféry). Tečny svírají s poloměrem pravý úhel. Pak jde tedy o shodné trojúhelníky podle věty Ssu a vzdálenost tečných bodů je od bodu M vždy stejná. Rovina určená dotykovou kružnicí, tedy množinou všech tečných bodů, je tak kolmá na MS .



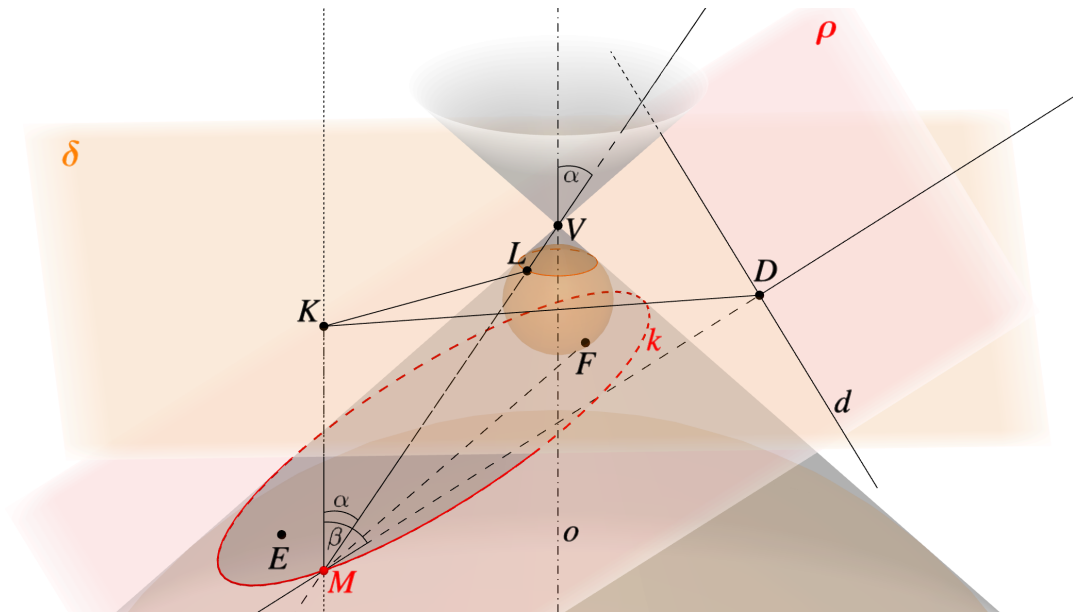
Obr. 2.3: Tečny z bodu M ke sféře

V kapitole 1 jsme si ukázali, jak úhly α a β ovlivňují podobu výsledné kuželosečky. Nyní vztah mezi těmito úhly přeneseme do planimetrické definice.⁶

Máme rotační kuželovou plochu s odchylkou povrchy α od osy o (obr. 2.4). Rovina ρ není vrcholová a její odchylka od osy o je úhel β . Vepsané sféry se dotýkají roviny ρ v bodech E, F , případně jen v bodu F . Zvolme jednu sféru a její dotykovou kružnici ved' me rovinu δ , ta bude kolmá na osu o . Zvolme na průsečné křivce k libovolný bod M a ved' me jím přímkou rovnoběžnou s osou o . Průsečík této rovnoběžky s rovinou δ nazvěme K . Bodem M ved' me povrchku, její tečný bod L se sférou leží na dotykové kružnici. Trojúhelník KML má u vrcholu M úhel shodný s α (souhlasný úhel). Bod D je pata kolmice procházející bodem M na průsečnici d rovin ρ a δ . Úhel DMK je tak shodný s úhlem β . Všechny přímky v rovině δ jsou kolmé na KM . Je-li úhel $\beta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ pak pro odvěsnu KM platí:

$$|KM| = \cos \alpha \cdot |ML| = \cos \beta \cdot |MD|. \quad (2.1)$$

⁶Alternativní verzi důkazu Quételetovy - Dandelinovy věty můžeme najít zde [8, s. 324–335].



Obr. 2.4: Na obrázku je elipsa, ale stejné odvození platí pro všechny kuželosečky vyjma kružnice

Pro ohnisko tvořené zvolenou sférou platí $|ML| = |MF|$, jelikož body L, F jsou dotykové body sféry a tečen z bodu M . Dle definice 1 je $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, tedy $\cos \alpha \neq 0$. Pak můžeme rovnici 2.1 upravit na:

$$|MF| = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot |MD|. \quad (2.2)$$

Úhly α a β jsou vždy pro daný řez neměnné, jejich poměr tak bude roven nějaké konstantě, označme ji ε . Funkce cosinus je v intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ klesající a její hodnoty jsou vždy kladné, tedy pro ε bude platit:

- a) $\varepsilon \in (0, 1) \Leftrightarrow \beta > \alpha \Leftrightarrow k$ je elipsa,
- b) $\varepsilon = 1 \Leftrightarrow \beta = \alpha \Leftrightarrow k$ je parabola,
- c) $\varepsilon \in (1, \infty) \Leftrightarrow \beta < \alpha \Leftrightarrow k$ je hyperbola.

Pro $\beta = \frac{\pi}{2}$, kdy k je kružnice, je rovina ρ rovnoběžná s rovinou δ . Jejich průsečnicí je tak nevlastní přímka. Nemůžeme napsat dle rovnice 2.1: $|KM| = \cos \beta \cdot |MD|$, protože pravá strana je neurčitý výraz $(0 \cdot \infty)$. Kružnici tak nelze pomocí přímky d definovat. Platí ale $|MF| = \frac{|KM|}{\cos \alpha}$. Pro rovnoběžné roviny je $|KM|$ shodná pro všechny body M kružnice. Výraz na pravé straně je tak konstanta, jež je rovna *poloměru* r . Došli jsme tak k definici kružnice jako množiny všech bodů v rovině, jež mají od pevného bodu vzdálenost r ⁷.

Situaci v rovině ρ tak můžeme zapsat jako planimetrickou definici kuželoseček, jež je známa jako definice Apolloniova. Tato definice bývá také nazývána jako společná, vzhledem k tomu, že nám i v rovině ukazuje spojitý přechod od elipsy přes parabolu až k hyperbole.

Ještě dodejme, že pro nevrcholovou rovinu ρ bude vždy platit, že $F \notin d$. Tato podmínka tak musí platit i v rovině. V opačném případě bychom získali singulární kuželosečku a to *bod* pro $\varepsilon < 1$, *přímku* pro $\varepsilon = 1$ a *dvě různoběžky* pro $\varepsilon > 1$.

⁷Kružnici lze definovat i pomocí dvou různých bodů A, B a kladné konstanty $\lambda \neq 1$. Množinou všech bodů M , pro které platí $|AM| : |BM| = \lambda$, je kružnice známá také jako *Apolloniova kružnice* [6].

Definice 2. V rovině je dán pevný bod F a pevná přímka d , která jím neprochází. Dále je dána konstanta $\varepsilon > 0$. Pak množinou všech bodů M roviny, pro které platí:

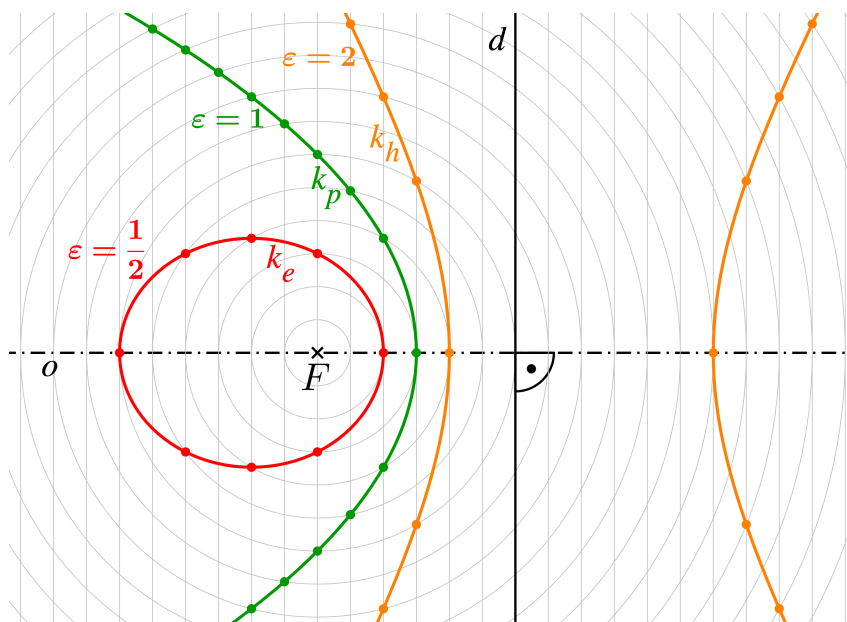
$$|MF| = \varepsilon \cdot |Md|,$$

je elipsa pro $\varepsilon < 1$ (vyjma kružnice), parabola pro $\varepsilon = 1$ a hyperbola pro $\varepsilon > 1$. Bod F je pak *ohnisko* kuželosečky, d *řídící* přímka a ε *numerická* excentricita [7, s. 13].

Pak tedy poměr vzdáleností libovolného bodu kuželosečky od jejího ohniska a její řídící přímky může nabývat nekonečně mnoha hodnot pro elipsu a hyperbolu, hranicí mezi těmito hodnotami je pak $\varepsilon = 1$, jež je jedinou hodnotou pro získání paraboly. Interaktivní podobu této definice najdeme zde <https://www.geogebra.org/m/pt2jbjwe>.

2.2 Dělicí poměr

Na obrázku 2.5 vidíme elipsu k_e , parabolu k_p a hyperbolu k_h vždy s daným ε , dále jejich společnou řídící přímku d a ohnisko F . Rovnoběžky s d zobrazují různé vzdálenosti od d , soustředné kružnice od F . Jejich odpovídající průsečíky jsou body jednotlivých kuželoseček. Je zřejmé, že všechny tři jsou osově souměrné podle přímky, jež prochází F a je kolmá na d . U paraboly už víme, že je to její *osa* o , u elipsy a hyperboly pak *hlavní osa* o_1 . Pro snadnější práci s polohou bodů na přímce si nyní definujeme dělicí poměr.



Obr. 2.5: Elipsa k_e , parabola k_p a hyperbola k_h s příslušným ε

Definice 3. Necht' $A \neq B$ jsou dva body na přímce a necht' $C \neq B$ je libovolný bod na téže přímce. Potom reálné číslo λ takové, že

$$\lambda \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

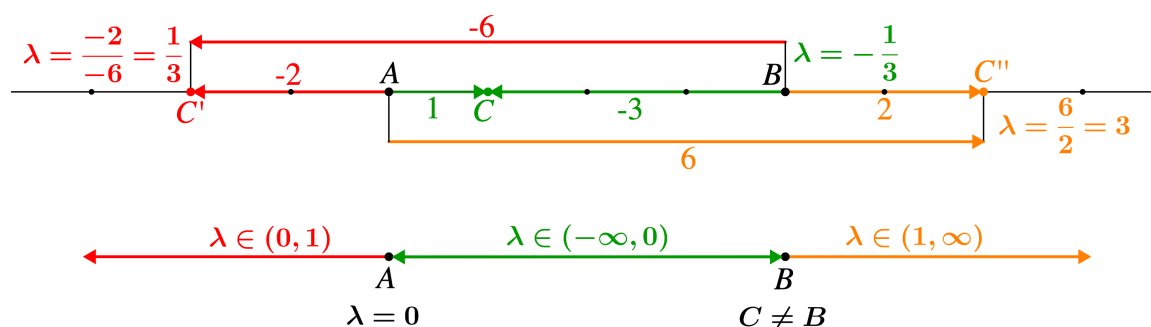
se nazývá *dělicí poměr* bodu C vzhledem k bodům A, B [3, s. 16]. Budeme ho značit $(AB; C)$.

Věta 2. Každému reálnému číslu λ odpovídá jediný bod C na přímce, jehož dělicí poměr k základním bodům A, B je roven číslu λ [3, s. 17].

Orientovaná úsečka \overrightarrow{AC} je úsečka AC , na které jsme zvolili A jako počáteční bod a C jako koncový bod. Pro libovolné tři body A, B, C na přímce a $\lambda \in \mathbb{R}$ platí:

- $A = C \Rightarrow \overrightarrow{AC}$ je orientovaná úsečka s nulovou délkou;
- $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$;
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;
- $\lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \lambda \cdot \overrightarrow{AC} = \lambda \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

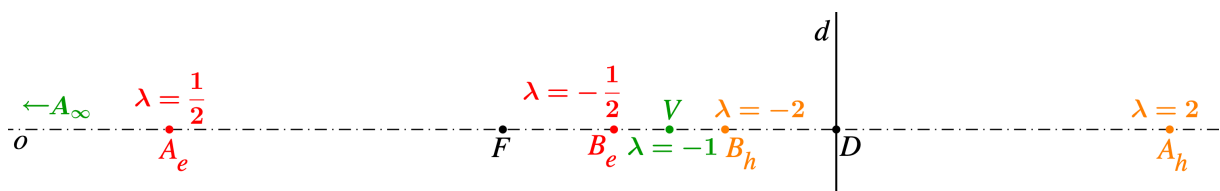
Na obrázku 2.6 nahoře vidíme různé polohy bodu C na přímce AB a jemu odpovídající hodnoty $(AB; C)$. Dle definice 3 je tak λ podílem orientovaných úseček AC a BC . Nezáleží na tom, jaký směr na přímce zvolíme jako kladný, jen je třeba se této volby dále držet. Bude ovšem platit, že $(BA; C) = \frac{1}{(AB; C)}$. Na stejném obrázku dole je znázorněno, jakých hodnot λ v závislosti na poloze bodu C nabývá.



Obr. 2.6: Hodnoty dělicího poměru $(AB; C)$

Ve výčtu hodnot chybí $\lambda = 1$, kdy by měl mít bod C stejnou vzdálenost od A i B . Vně úsečky AB takový vlastní bod neexistuje. Bude-li ale bod C ubíhat do nekonečna, bude se poměr této hodnotě limitně blížit, tedy platí, že $(AB; C_\infty) = 1$.

Podívejme se blíže na situaci na ose, resp. hlavní ose kuželosečky (obr. 2.7). Průsečík osy s přímkou d označme D . Pro body M kuželosečky ležící na ose, platí $\varepsilon = |(FD; M)|$. Pro elipsu a hyperbolu to splňují dva body A, B ; $(FD; A) = \varepsilon$, $(FD; B) = -\varepsilon$. Obě kuželosečky tak mají s hlavní osou vždy dva průsečíky A, B , tzv. *hlavní vrcholy*. Parabola bude mít vlastní průsečík pouze jeden, *vrchol* V ; $(FD; V) = -1$. Bod A_∞ ; $(FD; A_\infty) = 1$; bude nevlastní, daný směrem osy o .

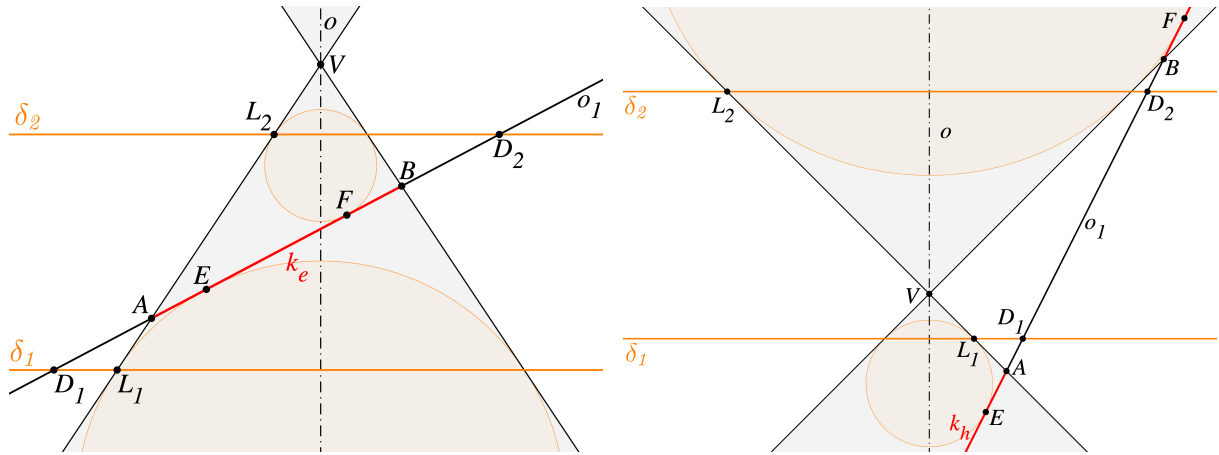


Obr. 2.7: Hlavní vrcholy elipsy, paraboly a hyperboly na ose o

Jeden vrchol kuželosečky bude vždy ležet mezi body F, D , což vyplývá i z obrázku 2.6, kde λ vnitřního bodu úsečky může nabývat všech záporných hodnot. Ve stejné polorovině určené přímkou d pak bude ležet i druhý vrchol elipsy. Hyperbola bude mít vrcholy v opačných polorovinách určených d . Vzhledem k podmínce $F \notin d$, nemůže ležet žádný bod kuželosečky na přímce d . Hyperbola tak má dvě oddělené části, tzv. *větve* hyperboly.

2.3 Numerická excentricita kuželosečky

Ukázali jsme si, jak numerickou excentricitu vyjádřit pomocí úhlů α a β , které ale v rovině ne-najdeme. Odvodme si tak ε pomocí jiných konstant. Nejprve se podívejme na kuželosečky, jež mají dvě různá, vlastní ohniska a tedy i dvě řídicí přímky. Těmi jsou elipsa (vyjma kružnice) a hyperbola. V odvození rovnice 2.2 jsme v jejich případě použili libovolnou sféru. Ke stejnému ε dojdeme i s druhou sférou, ohniskem a jemu přidruženou řídicí přímkou, jelikož k tomu využijeme stejné úhly α a β .



Obr. 2.8: Elipsa k_e , hyperbola k_h a jejich hlavní osa o_1

Na obrázku 2.8 vidíme kuželovou plochu v kolmé projekci na vrcholovou rovinu obsahující osu o_1 . Dotykovými kružnicemi sfér prochází rovnoběžné roviny δ_1, δ_2 . Osa o_1 prochází ohnisky E, F a její průsečíky s kuželovou plochou jsou vrcholy A, B . Body D_1, D_2 jsou průsečíky o_1 a řídicích přímek d_1, d_2 , jež jsou také rovnoběžné. Bodem A vedme površku AV , její průsečíky s rovinami δ_1, δ_2 označme L_1, L_2 . Rovina řezu není vrcholová, pak $|AB| \neq 0$, tuto vzdálenost označme $2a$, kde a je délka *hlavní poloosy*. Délku $|EF|$ označme $2e$, kde e je *lineární excentricita* (nazývána běžně pouze *excentricita*). Dle definice 2 je $\varepsilon > 0$.

Platí $(FD_2; A) = \varepsilon = (ED_1; B)$ a $(ED_1; A) = -\varepsilon = (FD_2; B)$, můžeme tak napsat:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{FA} &= \varepsilon \cdot \overrightarrow{D_2A} & \overrightarrow{EB} &= \varepsilon \cdot \overrightarrow{D_1B} \\
 \overrightarrow{EA} &= -\varepsilon \cdot \overrightarrow{D_1A} & \overrightarrow{FB} &= -\varepsilon \cdot \overrightarrow{D_2B} \\
 \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} &= \varepsilon \cdot (\overrightarrow{D_1A} + \overrightarrow{AD_2}) & \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FB} &= \varepsilon \cdot (\overrightarrow{D_1B} + \overrightarrow{BD_2}) \\
 \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} &= \varepsilon \cdot \overrightarrow{D_1D_2} & \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FB} &= \varepsilon \cdot \overrightarrow{D_1D_2} \quad (2.3) \\
 \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FB} \\
 \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{FB}.
 \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice 2.3:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} &= \varepsilon \cdot \overrightarrow{D_1D_2} \\
 \overrightarrow{AB} &= \varepsilon \cdot \overrightarrow{D_1D_2} \\
 \overrightarrow{AB} &= \varepsilon \cdot (\overrightarrow{D_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_2}) \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{AB} &= \varepsilon \cdot \left(\frac{\vec{AE}}{\varepsilon} + \vec{AB} - \frac{\vec{BF}}{\varepsilon} \right) \\
\vec{AB} &= \vec{AB} + \vec{BE} + \varepsilon \cdot \vec{AB} - \vec{BE} - \vec{EF} \\
\vec{EF} &= \varepsilon \cdot \vec{AB}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Pro numerickou excentricitu elipsy a hyperboly tak platí:

$$\varepsilon = \frac{e}{a}. \tag{2.6}$$

Numerickou excentricitu kružnice vyjádříme pomocí limitního případu elipsy, jejíž vzdálenost mezi ohnisky se blíží nule. Pro ε kružnice dle rovnice 2.6 tak platí:

$$\varepsilon = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{e}{a} = 0.$$

Numerickou excentricitu paraboly vyjádříme pomocí limitního případu elipsy, jejíž jedno ohnisko se vzdaluje do nekonečna. Z rovnic 2.3 a 2.4 vyplývá, že $2a = 2e + 2 \cdot |VF|$. Pak můžeme dle rovnice 2.6 napsat:

$$\varepsilon = \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{e}{e + |VF|} = 1,$$

což odpovídá definici 2.

Numerická excentricita je nezáporné číslo $\varepsilon = \frac{e}{a}$ pro elipsu a hyperbolu, $\varepsilon = 1$ pro parabolu. Toto číslo charakterizuje tvar příslušné kuželosečky a vyjadřuje, jak moc se svým tvarem liší od kružnice. Kružnice samotná má tak tuto hodnotu rovnu nule. Dvě podobné kuželosečky mají shodnou numerickou excentricitu. To pak znamená, že jsou si podobné nejen všechny kružnice, ale také všechny paraboly. [9]. To oběma přináší různé unikátní vlastnosti, jež jsou jen speciálním případem obecných vlastností kuželoseček.

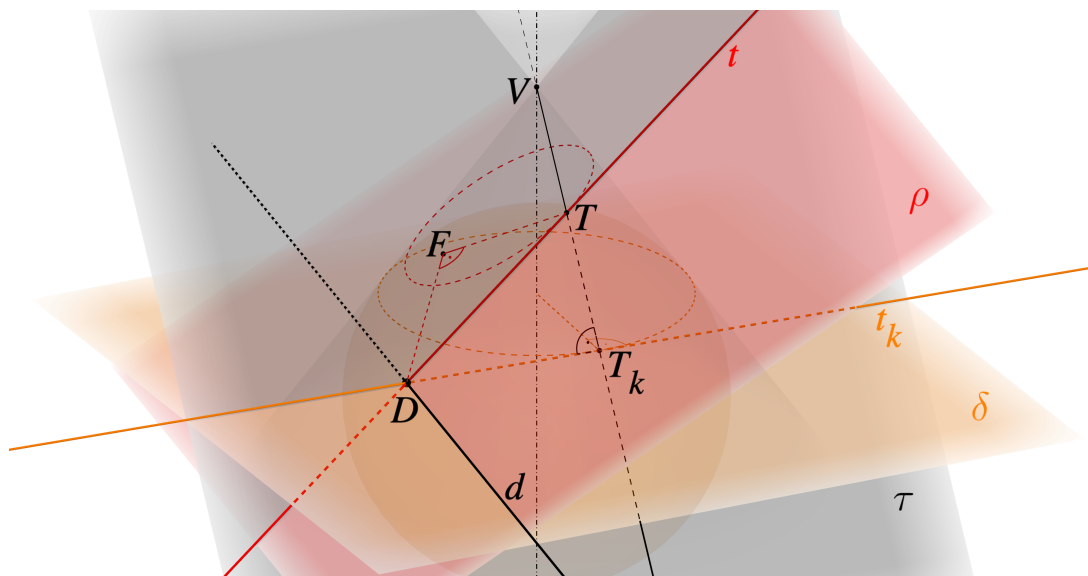
Pro některá budoucí odvození ještě určíme délku $|L_1L_2|$. Dle obrázku 2.8 a rovnic 2.3 a 2.4 můžeme napsat:

$$|L_1L_2| = |\vec{L_1A} + \vec{AL_2}| = |\vec{AE} + \vec{AF}| = |\vec{AE} + \vec{AE} + \vec{EF}| = |AB| = 2a, \tag{2.7}$$

což bude platit pro délku všech površek mezi rovinami δ_1, δ_2 .

2.4 Řídicí přímka a tečny kuželosečky

Vraťme se k prostorové situaci s rotačním kuželem, sečnou rovinou ρ , jež tvoří kuželosečku, a rovinou δ , jež prochází dotykovou kružnicí vepsané sféry (obr. 2.9). Tyto roviny opět uvažujeme jako různoběžné, jejich průsečnicí je tak řídicí přímka d . Libovolně zvoleným bodem T_k dotykové kružnice vedme površku VT_k , její průsečík s rovinou ρ označme T . Víme, že tečna t_k dotykové kružnice procházející bodem T_k v rovině δ musí být kolmá na poloměr této kružnice, tedy i na površku VT_k . Tečna t_k bude zároveň průsečnicí roviny δ a tečné roviny τ kuželové plochy vedené površkou VT_k . Také tyto roviny budou vždy různoběžné, odchylka osy od površky je menší než $\frac{\pi}{2}$, tedy je různá od její odchylky od roviny δ .



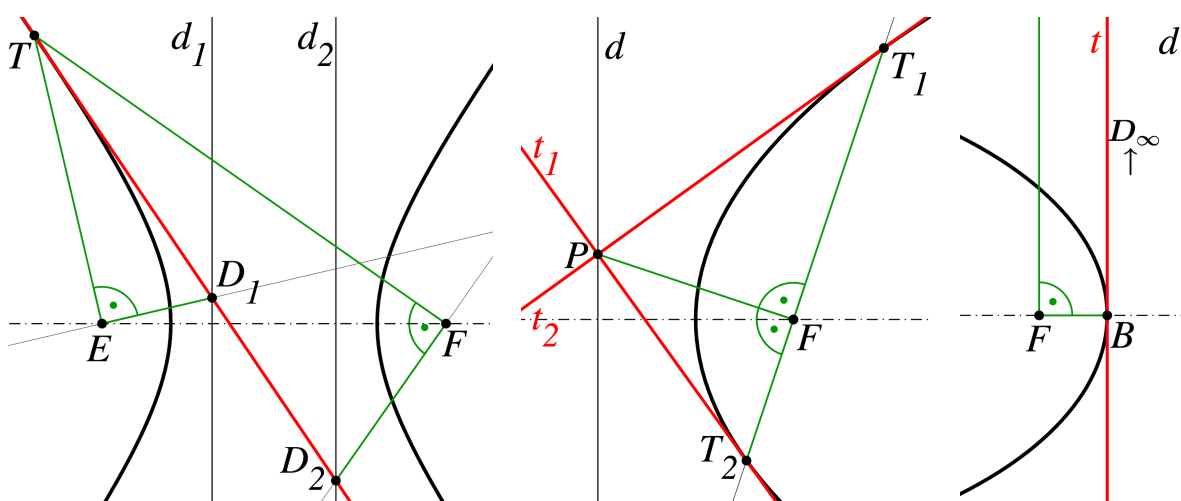
Obr. 2.9: Tečny t a t_k jako průsečnice rovin τ, ρ a τ, δ

Tečna t kuželosečky bodem T tak bude průsečnice rovin τ a ρ . I tyto roviny budou pro všechny vlastní body T kuželosečky různoběžné. Průsečnice d, t_k, t se tak protnou v jednom bodu D vyjma situace, kdy bod T bude jedním z hlavních vrcholů resp. vrcholem kuželosečky. V tomto případě budou všechny tři průsečnice rovnoběžné. Ohnisko F a bod T_k jsou dotykovými body sféry a tečen z bodů D a T , potom platí:

$$|DF| = |DT_k|, |TF| = |TT_k|$$

a trojúhelníky DTT_k a DTF jsou shodné dle věty *sss*. Úhel u vrcholu F tak bude vždy pravý. Můžeme napsat větu o vztahu mezi řídicí přímkou a tečnou kuželosečky:

Věta 3. Mějme kuželosečku (vyjma kružnice) a její ohnisko F s jemu přidruženou řídicí přímkou d . Dále mějme její libovolný bod T , jež je různý od hlavních vrcholů resp. vrcholu kuželosečky. Průsečík řídicí přímky d a přímky vedené ohniskem F kolmé na přímkou TF označme D . Pak přímka procházející body D, T je tečnou kuželosečky v bodu T [7, s. 27].



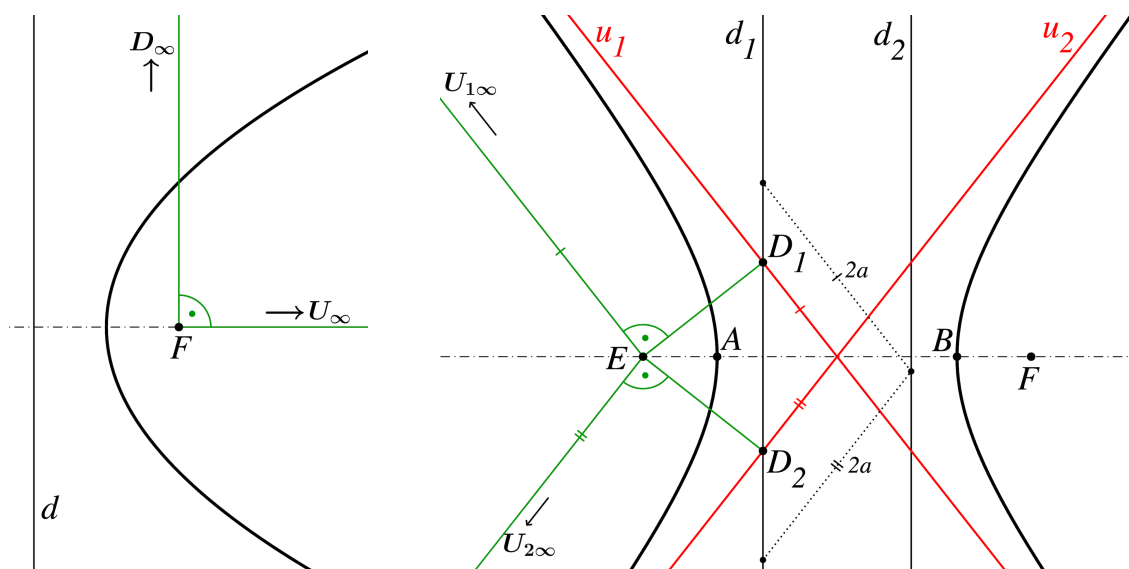
Obr. 2.10: Vztahy mezi tečnou a řídicí přímkou kuželosečky

Na obrázku 2.10 vlevo vidíme, že nezáleží na volbě ohniska, věta platí pro obě ohniska E, F a jim přidružené přímky d_1 resp. d_2 , pokud existují.

Na obrázku 2.10 uprostřed vidíme, že pokud průsečík P tečen t_1, t_2 ke kuželosečce leží na řídicí přímce d , pak přímka p vedená dotykovými body T_1, T_2 těchto tečen prochází ohniskem dané kuželosečky.

Na obrázku 2.10 vpravo vidíme, proč jsme vyloučili hlavní vrcholy kuželosečky. V této situaci totiž nebude existovat vlastní průsečík D přímky FB a řídicí přímky. Pokud však připustíme i nevlastní prvky a tedy průsečík D_∞ , je zřejmé, že tečna v hlavních vrcholech kuželosečky je přímka kolmá na hlavní osu kuželosečky.

Rovina τ může být rovnoběžná s rovinou ρ pouze při parabolickém řezu a to v situaci, kdy je površka VT_k rovnoběžná s rovinou řezu ρ . Pak neexistuje jejich průsečík, respektive je jím pouze nevlastní bod U_∞ . Průsečnice rovnoběžných rovin τ a ρ , tedy tečna v tomto nevlastním bodu – tzv. *asymptota*, je pouze nevlastní přímka. To také vidíme u paraboly na obrázku 2.11 vlevo, osa paraboly spojuje ohnisko a nevlastní bod U_∞ a kolmice na tuto osu procházející F má s řídicí přímkou d pouze nevlastní průsečík D_∞ . Přímka procházející dvěma nevlastními body D_∞, U_∞ je pak skutečně nevlastní.



Obr. 2.11: Tečny paraboly a hyperboly v jejich nevlastních bodech

U hyperboly je situace trochu jiná. Dvě površky rovnoběžné s rovinou ρ s ní také mají pouze nevlastní průsečíky $U_{1\infty}, U_{2\infty}$, ovšem obě tečné roviny procházející těmito površkami jsou od roviny ρ různoběžné. Pak existují průsečnice s rovinou ρ , jež jsou její tečny v nevlastních bodech $U_{1\infty}, U_{2\infty}$, tedy asymptoty u_1, u_2 hyperboly.

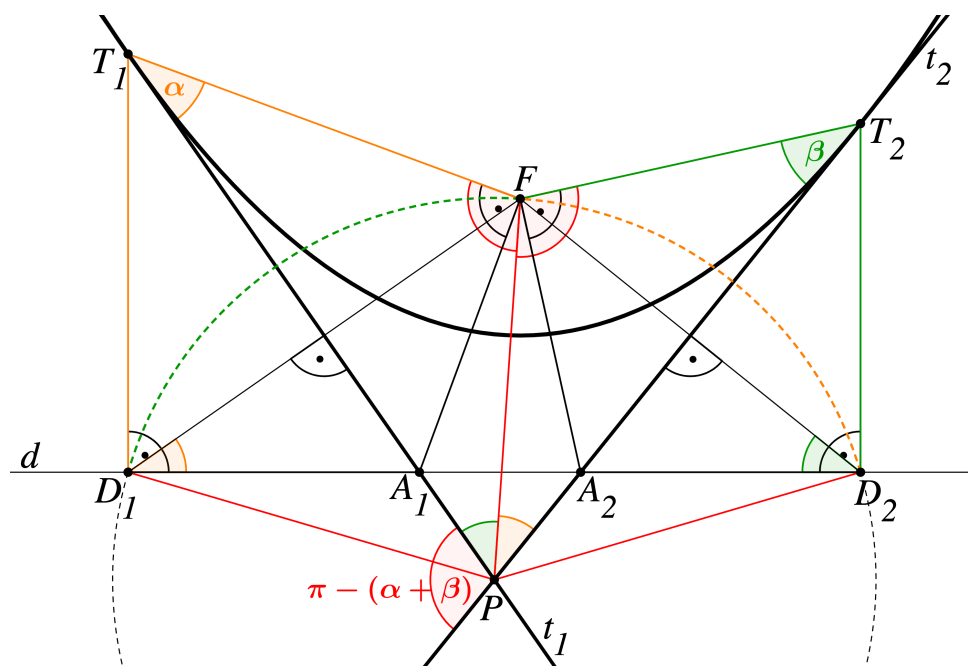
Na obrázku 2.11 vpravo pak vidíme konstrukci těchto asymptot v rovině. Rovnice 2.7 nám říká, že všechny površky mají mezi rovinami δ_1, δ_2 délku $2a$. Naneseme-li tuto délku mezi řídicí přímky d_1, d_2 , získáme směry površek rovnoběžných s rovinou ρ , tedy právě takových, jež udávají směr nevlastních bodů $U_{1\infty}, U_{2\infty}$. Kolmice vedené ohniskem E na přímky těmito směry, protnou řídicí přímku d_1 v bodech D_1 a D_2 . Přímky vedené D_1, D_2 se směry nevlastních bodů $U_{1\infty}, U_{2\infty}$ tak budou asymptoty hyperboly u_1, u_2 .

Příklad 2.

Sestrojte parabolu, jsou-li dány její dvě tečny t_1, t_2 , jež jsou na sebe kolmé, a body dotyku T_1, T_2 těchto tečen s parabolou, jež jsou různé od průsečíku P tečen t_1, t_2 .

Na obrázku 2.12 vidíme tečny t_1, t_2 paraboly a jejich průsečík P . Paty kolmic dotykovými body T_1, T_2 na řídicí přímku d označme D_1, D_2 . Průsečíky tečen s přímkou d označme A_1, A_2 . Z věty 3 plyne, že úhel TFA bude vždy pravý. Z definice 2 paraboly platí $|TF| = \varepsilon \cdot |Td|$, kde $\varepsilon = 1$, díky čemuž jsou pro parabolu trojúhelníky ATF a ATD vždy shodné podle věty Ssu a souměrné dle příslušné tečny.

Úhly u vrcholů T_1, T_2 trojúhelníků PFT_1, PFT_2 označme α a β . Úhly D_2D_1F, FD_2D_1 jsou s úhlem α resp. β shodné, jde vždy o doplňkový úhel stejných úhlů. Z osové souměrnosti plyne $|PF| = |PD|$ a body D_1, D_2, F tak leží na kružnici se středem v bodu P . Úhel D_2D_1F je zároveň obvodový úhel oblouku D_2F této kružnice, je tak shodný s úhlem T_2PF , jež tvoří polovinu odpovídajícího středového úhlu D_2PF . Platí podobně i pro úhel FD_2, D_1 a úhel FPT_1 . Velikost úhlů u vrcholu P trojúhelníků PFT_1, PFT_2 je tak rovna velikosti β resp. α a tyto trojúhelníky jsou si tak podobné dle věty uu .



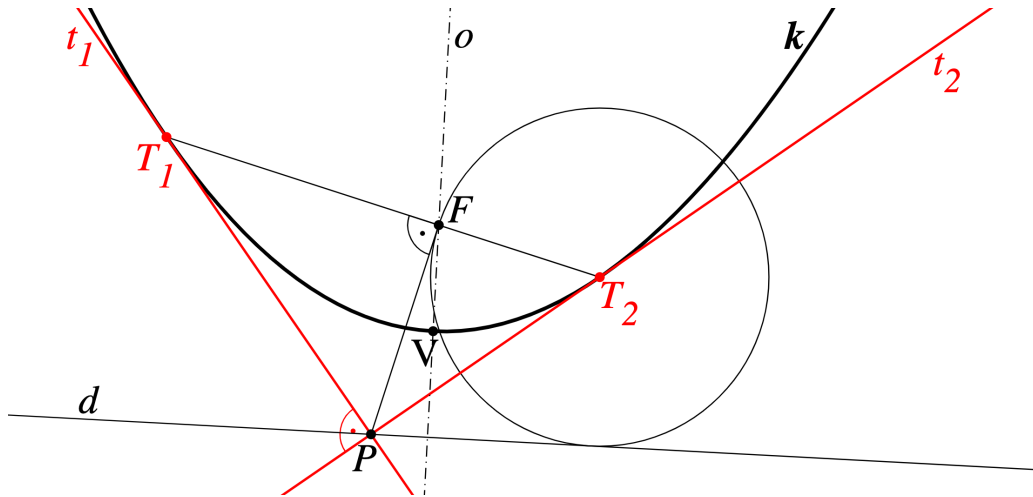
Obr. 2.12: Tečny paraboly t_1, t_2 a jejich vnější úhel

Úhly u vrcholu F jsou potom také shodné a velikost každého z nich je:

$$\pi - (\alpha + \beta).$$

Pro kolmé tečny je součet úhlů α a β roven $\frac{\pi}{2}$ a body T_1, F, T_2 jsou pak kolineární. V tomto případě bude bod P vždy ležet na řídicí přímce d (viz obr. 2.10). Povšimněme si také, že vnější úhel mezi tečnami paraboly je vždy roven úhlům T_1FP a PFT_2 . Platí tak následující věta:

Věta 4. Vnější úhel dvou libovolných tečen paraboly je shodný s úhlem, který je dán spojnicí ohniska s průsečíkem daných tečen a spojnicí ohniska s libovolným bodem dotyku daných tečen s parabolou [10, s. 67].



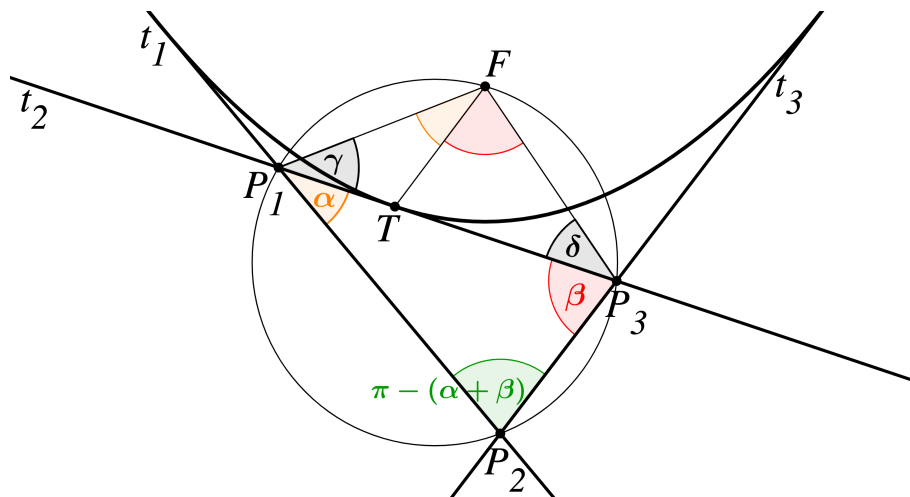
Obr. 2.13: Konstrukce paraboly dané kolmými tečnami t_1, t_2 a body dotyku T_1, T_2

Konstrukci vidíme na obrázku 2.13. Průsečíkem P tečen t_1, t_2 ved’me kolmici na $T_1 T_2$, pata této kolmice bude ohnisko F paraboly. Sestrojíme kružnici se středem v jednom z dotykových bodů procházející ohniskem. Ta se musí dotýkat řídicí přímky. Bodem P ved’me tečny k této kružnici, jednou z nich bude vždy přímka PF , druhá tečna bude řídicí přímkou d paraboly. Kolmice na d procházející F pak bude osa o paraboly, na ní bude ležet i vrchol paraboly takový, že $|VF| = |Vd|$.

Tento příklad bude mít pro T_1, T_2 různá od P vždy jedno řešení.

Příklad 3. [10, s. 78–79]

Sestrojte parabolu, jsou-li dány její tři tečny t_1, t_2, t_3 a jeden bod dotyku T s parabolou na jedné z nich.



Obr. 2.14: Trojúhelník $P_1P_2P_3$ tvořený třemi tečnami t_1, t_2, t_3 paraboly

Pomocí předchozí věty 4 dokažme zajímavý vztah, jež platí pro vrcholy trojúhelníku tvořeného třemi tečnami paraboly a pro její ohnisko. Na obrázku 2.14 je to trojúhelník $P_1P_2P_3$. Dle věty 4 je úhel α u vrcholu P_1 shodný s úhlem P_1FT a úhel β u vrcholu P_3 s úhlem TFP_3 ,

kde T je dotykový bod trojúhelníku $P_1P_2P_3$ s parabolou. Pro velikost zbývajících úhlů γ a δ trojúhelníku P_1P_3F tak platí:

$$\gamma + \delta = \pi - (\alpha + \beta)$$

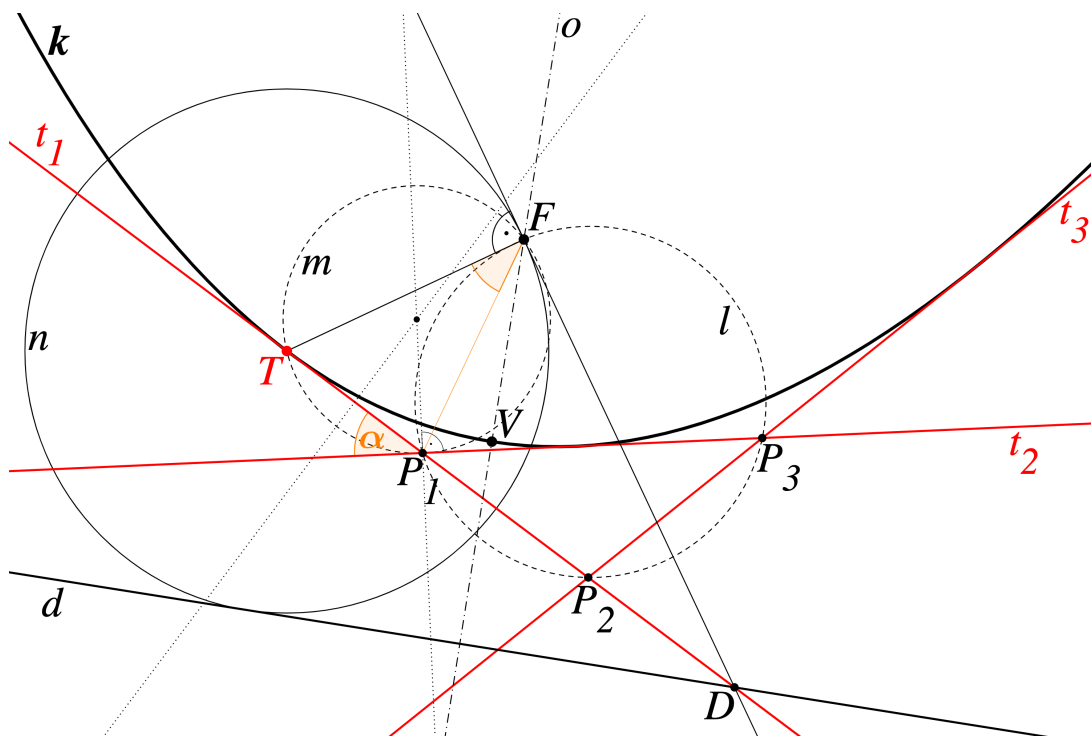
a součet protějších úhlů u vrcholů P_1, P_3 čtyřúhelníku $P_1P_2P_3F$ je tak roven:

$$\alpha + \beta + \pi - (\alpha + \beta) = \pi.$$

Stejný výpočet pak platí i pro dva protější úhly u vrcholů P_2, F , pak je čtyřúhelník $P_1P_2P_3F$ tětíkový a jeho vrcholy leží na jedné kružnici. Platí tak věta:

Věta 5. Ohnisko paraboly leží na kružnici, která prochází průsečíky libovolných tří tečen této paraboly [10, s. 74].

Pak tedy ved' me průsečíky $P_1P_2P_3$ daných tečen kružnici l (obr. 2.15). Dotykový bod T leží na tečně t_1 , zvolme jednu ze dvou zbývajících tečen a jejich průsečík, v našem případě t_2 a P_1 , a sestrojme nad úsečkou TP_1 ekvigonálu, tedy množinu bodů, ze kterých je úsečka TP_1 vidět pod úhlem α , jež je vnějším úhlem tečen t_1, t_2 . Střed této kružnice m bude ležet na kolmici na t_2 procházející P_1 a ose úsečky TP_1 . Jedním průsečíkem kružnic l a m bude vždy bod P_1 , druhým pak ohnisko F paraboly.



Obr. 2.15: Konstrukce paraboly dané třemi tečnami t_1, t_2, t_3 a bodem dotyku T

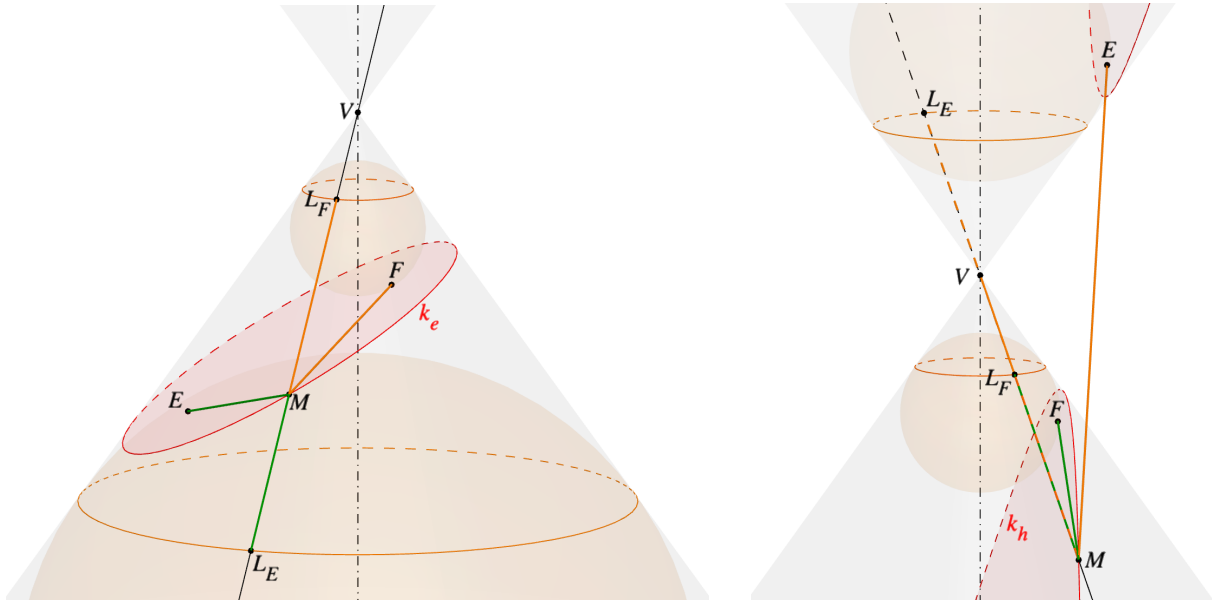
Přímka procházející ohniskem F kolmá na spojnici FT pak protne tečnu t_1 v bodu D , jež bude ležet řídicí přímce paraboly (viz věta 3). Té se také bude dotýkat kružnice n se středem v bodu T procházející ohniskem F . Tečna k této kružnici n z bodu D , různá od FD , tak bude řídicí přímkou d paraboly. Dále postupujme jako v předchozím příkladu 2.

Tento příklad bude mít pro tečny, jež nejsou konkurentní a žádné dvě z nich nejsou rovnoběžné, a pro dotykový bod T různý od průsečíků $P_1P_2P_3$ vždy jedno řešení.

3 Ohniskové definice kuželoseček

3.1 Ohnisková definice elipsy a hyperboly

Asi nejznámější definice kuželoseček jsou ty ohniskové. Odvodíme je nejprve pro kuželosečky se dvěma vlastními ohnisky, tedy pro elipsu a hyperbolu.



Obr. 3.1: Elipsa k_e , hyperbola k_h a jejich libovolný bod M

Zvolme si libovolný bod M elipsy k_e , resp. hyperboly k_h (obr. 3.1). Vedme jím povrchku VM . Body L_E, L_F jsou její průsečíky s dotykovými kružnicemi vepsaných sfér. Pro bod M platí:

$$|EM| = |ML_E|, \quad (3.1)$$

$$|FM| = |ML_F|, \quad (3.2)$$

kde $|EM|, |FM|$ jsou tzv. *délky průvodičů* EM, FM .

Sečteme-li rovnice 3.1 a 3.2, pak pro elipsu k_e platí:

$$|ME| + |MF| = |L_E M| + |ML_F| = |L_E L_F|.$$

Z rovnice 2.7 víme, že pro všechny L_E, L_F platí: $|L_E L_F| = |AB| = 2a$, pak můžeme napsat:

$$|EM| + |FM| = 2a.$$

Aby takové body M existovaly, případně netvořily jen úsečku EF , musí platit $a > e$, což dle rovnice 2.6 pro elipsu platí. Můžeme tedy napsat definici.

Definice 4. Množinu všech bodů v rovině, které mají od dvou pevných bodů E, F konstantní součet vzdáleností $2a$, pro který platí: $2a > |EF|$, nazýváme *elipsa* [2, s. 76].

Tato definice platí i pro kružnici, víme-li, že $E = F = S$, pak $|EM| = |FM| = |SM|$, po dosazení: $2|SM| = 2a$, tedy $r = a$.

Odečteme-li od sebe rovnice 3.1 a 3.2, pak pro hyperbolu k_h platí:

$$||EM| - |FM|| = ||L_EM| - |ML_F|| = |L_EL_F|.$$

Už víme, že pak dle rovnice 2.7 můžeme napsat:

$$||EM| - |FM|| = 2a.$$

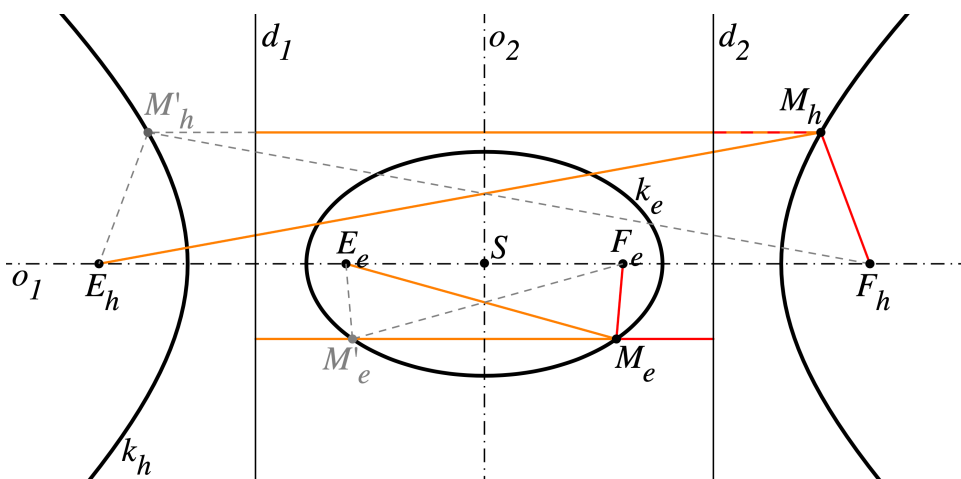
Aby takové body M existovaly, případně aby netvořily jen přímku EF , vyjma bodů mezi EF , musí platit $a < e$, což dle rovnice 2.6 pro hyperbolu platí. Také víme, že $a > 0$. Můžeme tedy napsat definici.

Definice 5. Množinu všech bodů v rovině, které mají od dvou pevných bodů E, F konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností $2a$, pro kterou platí: $0 < 2a < |EF|$, nazýváme *hyperbola* [2, s. 82].

Inspirováno [7, s. 17]. Odvodit ohniskové definice elipsy a hyperboly bychom mohli pouze v rovině pomocí Apolloniovy definice. Mějme elipsu k_e a hyperbolu k_h se společnými řídícími přímkami d_1, d_2 (obr. 3.2). Dle definice 2 můžeme napsat:

pro $\varepsilon < 1$: $ ME = \varepsilon \cdot Md_1 $ $ MF = \varepsilon \cdot Md_2 $ $ EM + FM = \varepsilon \cdot d_1 d_2 $	pro $\varepsilon > 1$: $ ME = \varepsilon \cdot Md_1 $ $ MF = \varepsilon \cdot Md_2 $ $ EM - FM = \varepsilon \cdot d_1 d_2 $
--	--

Z rovnice 2.4 vyplývá, že $\varepsilon \cdot |d_1 d_2| = 2a$. Pak jsme tedy dospěli k ohniskovým definicím elipsy a hyperboly.



Obr. 3.2: Elipsa k_e , hyperbola k_h a jejich společné řídící přímky d_1, d_2

Na obrázku 3.2 můžeme také vidět bod M' elipsy i hyperboly. Platí-li pro něj $|M'F| = |ME|$, pak musí platit také $|M'E| = |MF|$ a tedy i $|M'd_1| = |Md_2|$. Elipsa a hyperbola jsou tak osově souměrné i podle *vedlejší osy* o_2 , jež je osou rovnoběžných přímek d_1, d_2 a je kolmá na o_1 . Průsečík os o_1, o_2 je *střed kuželosečky* S , jež je také společným středem úseček AB a EF , a elipsa resp. hyperbola je podle něj středově souměrná. Takové kuželosečky se nazývají *středové*. Parabola, jež má pouze jedno vlastní ohnisko a nemá vlastní střed, se nazývá *vrcholová* kuželosečka.

3.2 Ohnisková definice paraboly

Ohniskové definice elipsy a hyperboly popisují vztah mezi délkami jejich průvodičů a vzdáleností mezi jejich hlavními vrcholy. Jak bude tato definice vypadat u paraboly, jež má pouze jedno vlastní ohnisko a vrchol? Podívejme se nejprve na jeden zajímavý důsledek ohniskových definic elipsy a hyperboly.

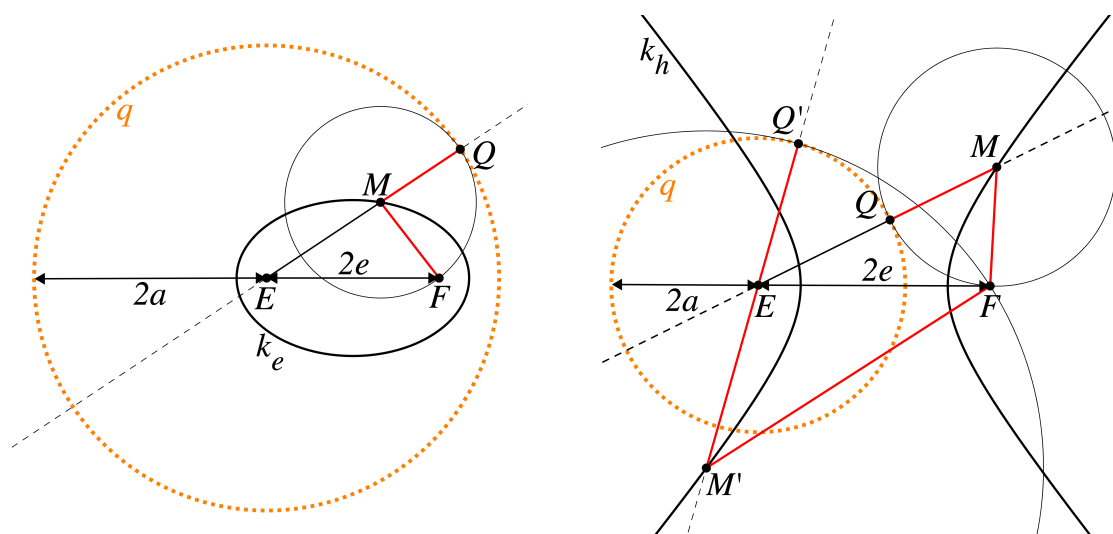
Zvolme si libovolný bod M elipsy nebo hyperboly. Ved'me jím přímku EM , kde E je jedno z ohnisek E, F . Na této přímce sestrojme bod Q takový, že $|MQ| = |MF|$ a zároveň aby pro elipsu platilo $(QM; E) > 1$, pro hyperbolu pak $(QM; E) < 1$ (obr. 3.3). $|EQ|$ elipsy můžeme vyjádřit:

$$|EQ| = |EM| + |MQ| = |EM| + |FM| = 2a$$

a $|EQ|$ hyperboly:

$$|EQ| = ||EM| - |MQ|| = ||EM| - |FM|| = 2a.$$

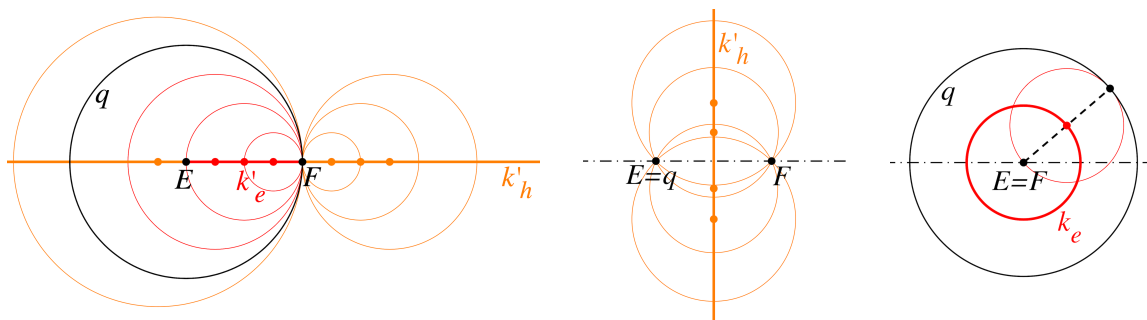
Tedy $|EQ| = 2a$ nezávisle na volbě bodu M . Všechny body Q tak budou ležet na kružnici se středem v ohnisku E a poloměrem $2a$. Nazýváme ji *řídící kružnice* a budeme ji značit q . Stejně pojmenování s řídící přímkou není náhodné, pro nejkratší vzdálenost $|MQ|$ všech bodů M elipsy od kružnice q platí $|MQ| = |MF|$, což nám připomíná definici paraboly pomocí její řídící přímky. Toto platí i pro hyperbolu a její body M ; $|EM| > |FM|$; pro zbylé body M' bude naopak vzdálenost $|M'Q'|$ nejdelší od q .



Obr. 3.3: Řídící kružnice q elipsy k_e a hyperboly k_h

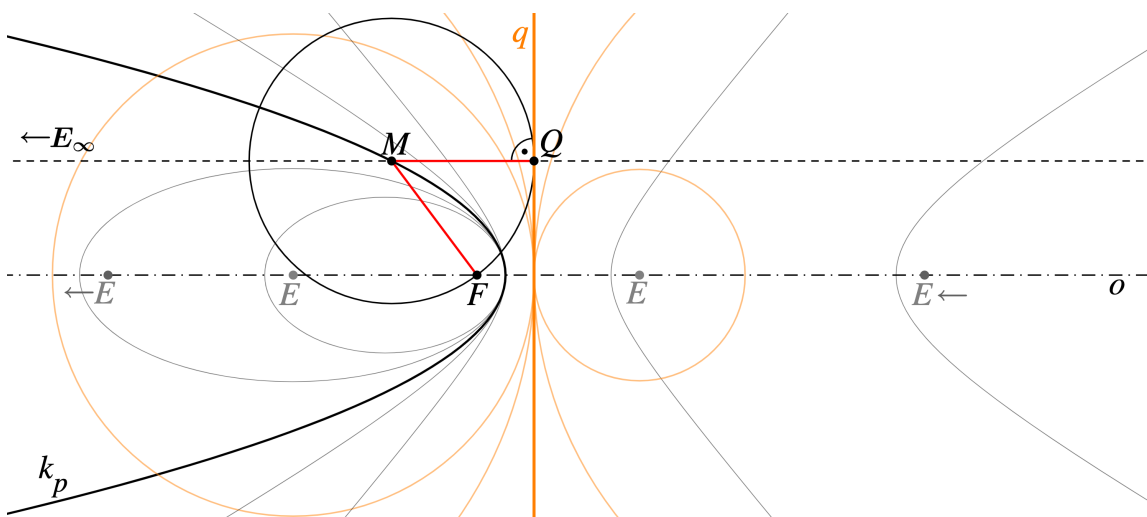
Obě kuželosečky jsou tak množinou středů všech kružnic, jež prochází bodem F a zároveň se dotýkají kružnice q ($E; 2a$). Pokud je F vnitřním bodem kružnice q , platí $e < a$ a půjde o elipsu, pokud je F vnějším bodem q , platí $e > a$ a množinou bude hyperbola. Na této interpretaci ohniskových definic pomocí dotykových kružnic je názorně vidět, proč musí platit jejich podmínky. Bod F nemůže ležet na kružnici q , což plyne z $a \neq e$. Vidíme, že elipsa pak degraduje na úsečku EF a hyperbola na přímku EF vyjma bodů mezi EF (obr. 3.4). Poloměr kružnice q musí být také různý od nuly, aby množinou středů nebyla pouze osa úsečky EF , což odpovídá podmínce $a > 0$ pro hyperbolu. Může však platit $E = F$, v takovém případě bude množinou středů speciální případ elipsy – kružnice.

Na začátku jsme zvolili libovolné ohnisko. Stejně bude platit i při opačné volbě, obě kuželosečky tak mají dvě řídící kružnice q_1, q_2 se středy v E, F a poloměrem $2a$.



Obr. 3.4: Příklad, kdy $F \in q$, poloměr q je roven nule, pro ohniska platí $E = F$

Parabolu si opět můžeme představit jako elipsu, jejíž jedno ohnisko E ubíhá do nekonečna, tedy platí $(QM; E_\infty) = 1$ (obr. 3.5). Průvodič EM se tak stane rovnoběžným s osou o . Řídící kružnice q bude mít nekonečný poloměr a stane se z ní přímka kolmá na ME_∞ , tedy platí $|MF| = |MQ| = |Mq|$. Když se ohnisko E „vrátí z nekonečna“, objeví se na druhém konci osy jako ohnisko hyperboly⁸ a q opět přechází v kružnici.



Obr. 3.5: Parabola k_p a její řídicí přímka q ; pro lepší pochopení také v interaktivní podobě najdeme zde <https://www.geogebra.org/m/ttw85yrd>

Parabola je tak množinou středů všech kružnic, jež prochází bodem F a dotýkají se přímkou q . Z této vlastnosti vychází její ohnisková definice, jež je tak ekvivalentní s Apolloniiovou definicí $|MF| = \varepsilon \cdot |Md|$, kde $\varepsilon = 1$, což je také jediná hodnota ε , s níž získáváme parabolu. Řídící přímky q, d jsou tedy shodné, ačkoliv původ každé z nich můžeme chápat trochu jinak. Budeme ji označovat již pouze d . Napišme tak ohniskovou definici paraboly.

Definice 6. Množinu všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu F a pevné přímky d , jež tímto bodem neprochází, stejné vzdálenosti, nazýváme *parabola* [2, s. 87].

Vzhledem k tomu, že ohnisko E_∞ je nevlastní, nelze hovořit o délce a, e či průvodiče ME_∞ . Můžeme ale pracovat se vzdáleností $|Fd|$ ohniska od řídicí přímky, jež se nazývá *parametr paraboly* p . Délkami průvodičů paraboly pak rozumíme $|MF|$ a $|Md|$.

V ohniskových definicích na první pohled nevidíme, jakou hranici v nich tvoří parabola. Můžeme ale říci, že její řídicí přímka je hranicí mezi řídicími kružnicemi elipsy a hyperboly.

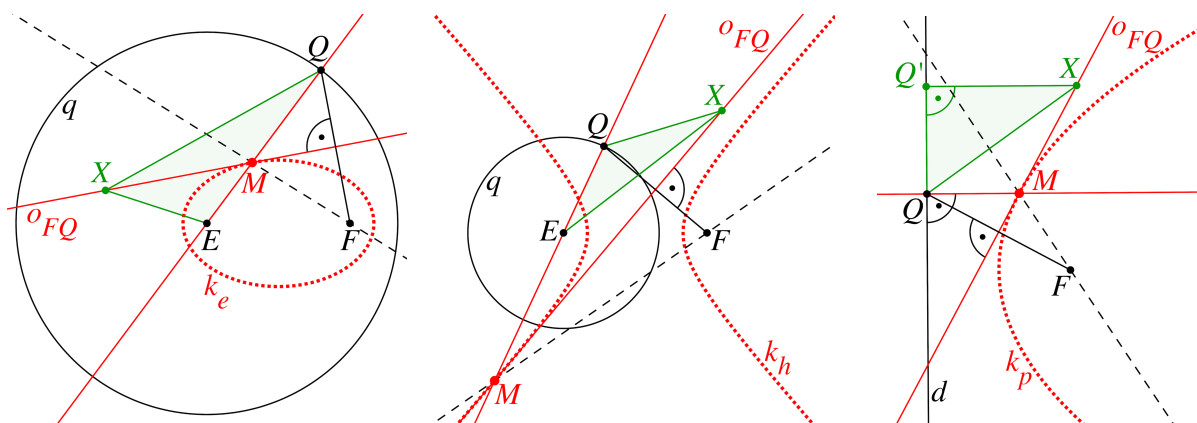
⁸Práci s nevlastními body by šlo dobře popsat pomocí projektivního rozšíření eukleidovské roviny, ale to je již nad rámec této práce. Zůstaňme proto pouze u této intuitivní představy.

3.3 Ohniskové vlastnosti a tečny kuželosečky

Příklad 4.

Sestrojte body kuželosečky, je-li dána délka její hlavní poloosy a ($a \neq 0$) a její excentricita e ($e \neq a$); resp. její parametr p ($p \neq 0$).

Využijme ke konstrukci kuželosečky její řídicí kružnici, resp. přímku. U kuželosečky se dvěma ohnisky $E, F; |EF| = 2e$; nezáleží na volbě řídicí kružnice, my jsme na obrázku 3.6 zvolili kružnici q ($E; 2a$). Pro elipsu musí platit $e < a$ a pro hyperbolu $e > a$. Pro parabolu s ohniskem F mějme přímku d takovou, že $|Fd| = p$. Na kružnici q , resp. přímce d , pak zvolme libovolný bod Q . Bod M kuželosečky musí ležet na ose úsečky FQ , jelikož pro něj platí $|MQ| = |MF|$ a zároveň na přímce EQ , resp. kolmici k d procházející Q (mohli bychom také říci QE_∞). Jejich průsečík tak bude hledaný bod M kuželosečky.



Obr. 3.6: Konstrukce libovolného bodu M elipsy k_e , hyperboly k_h a paraboly k_p

Podívejme se, je-li bod M jediný společný bod osy úsečky FQ a kuželosečky. Pro všechny body X na této ose, takové že $X \neq M$, také platí $|XQ| = |XF|$, pro elipsu a hyperbolu pak $|EQ| = 2a$. Po dosazení za příslušné strany v trojúhelníku EQX můžeme dle trojúhelníkové nerovnosti napsat u elipsy:

$$|EX| + |FX| > 2a,$$

a u hyperboly:

$$2a + |EX| > |FX| \Rightarrow 2a > ||FX| - |EX||.$$

U paraboly využijme kolmosti průvodiče XQ' na d . Pro přeponu QX pravoúhlého trojúhelníku $Q'QX$ platí:

$$|QX|^2 = |QQ'|^2 + |XQ'|^2 \Rightarrow |XF| > |Xd|.$$

Všechny body osy o_{FQ} jsou tak kromě bodu M vnější⁹ body příslušné kuželosečky. Osa o_{FQ} je tudíž její tečna a bod M jejich tečným bodem. Tato osa je pak zároveň osou vnějších úhlů průvodičů FM a EM , resp. FM a QM . Můžeme tak napsat věty (všechny z [11]):

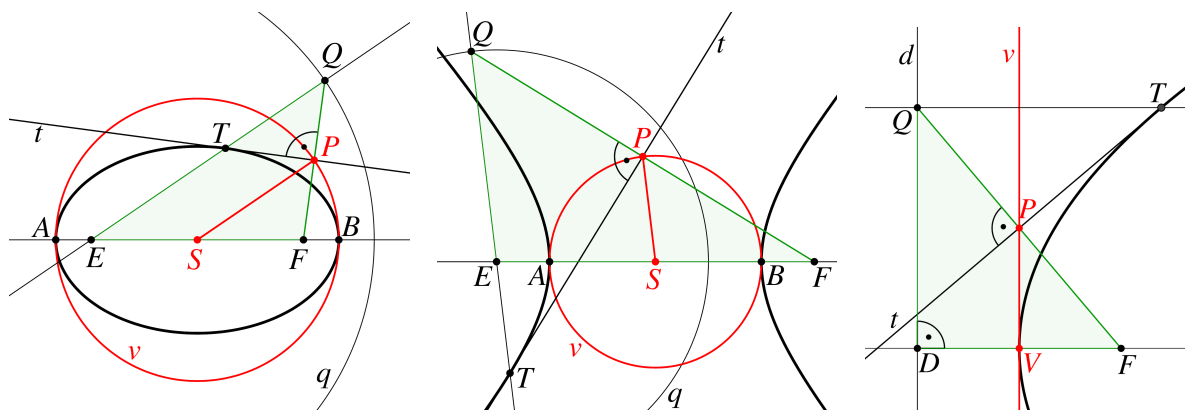
Věta 6. Tečna regulární kuželosečky pólí vnější úhly průvodičů dotykového bodu.

Věta 7. Množinou všech bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem elipsy respektive hyperboly podle jejich tečen je kružnice se středem v druhém ohnisku a poloměrem $2a$.

Věta 8. Množinou všech bodů souměrně sdružených s ohniskem paraboly podle jejich tečen je její řídicí přímka.

⁹Opačná nerovnost by pak platila pro vnitřní body dané kuželosečky.

Podívejme se ještě na další významný bod osy o_{FQ} , tedy tečny t kuželosečky. Je jím její průsečík s úsečkou FQ neboli pata P kolmice vedené z ohniska kuželosečky na její tečnu (obr. 3.7). Tento bod leží ve středu úsečky FQ . Pak tedy úsečka SP , kde S je střed kuželosečky se dvěma ohnisky E, F , je střední příčka trojúhelníku EFQ . Její délka je rovna polovině rovnoběžné strany EQ , pak vždy platí $|SP| = a$. Všechny paty P tak budou ležet na *vrcholové kružnici* $v(S; a)$. Tato kružnice prochází hlavními vrcholy A, B , tečny vedené těmito vrcholy budou přímkami kolmé na hlavní osu kuželosečky.



Obr. 3.7: Vrcholová kružnice v elipsy, hyperboly a vrcholová přímka v paraboly

U paraboly opět využijme pravouhlého trojúhelníku, tentokrát DFQ , kde D je průsečík řídicí přímky a osy paraboly. Úsečka VP , kde V je vrchol paraboly, je střední příčka tohoto trojúhelníku rovnoběžná se stranou QD . Pak tedy všechny paty P kolmic z ohniska F paraboly na její tečny leží na přímce rovnoběžné s řídicí přímkou d procházející vrcholem V , tedy na *vrcholové přímce* v . Tato přímka je zároveň její tečnou v bodu V .

Na parabolu jsme se ovšem mohli opět podívat jako na limitní případ elipsy, jejíž ohnisko E ubíhá do nekonečna. Nekonečnu se pak bude blížit i střed její vrcholové kružnice, tedy stane se z ní přímka kolmá na osu paraboly, jež prochází vrcholem paraboly.

Platí tedy věty (všechny opět z [11]):

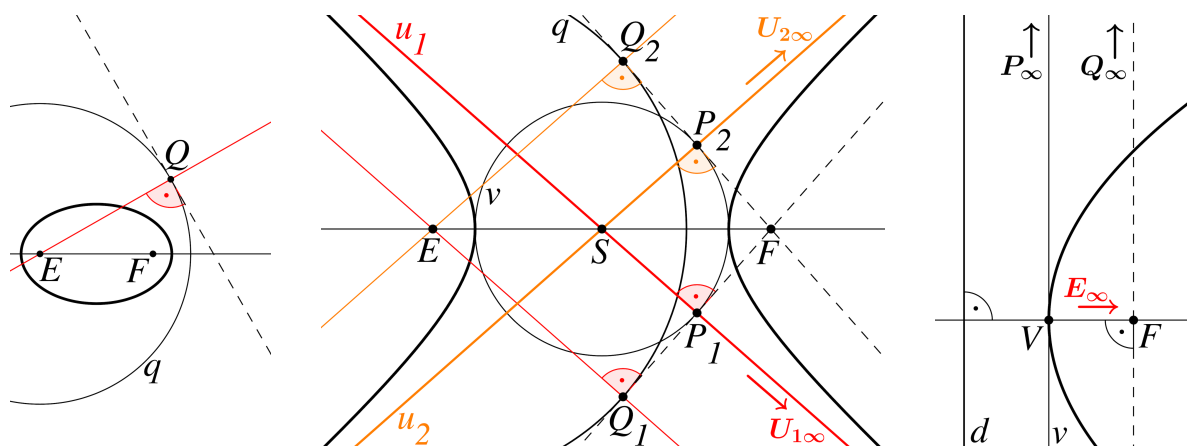
Věta 9. Množinou všech pat kolmic vedených z ohniska elipsy respektive hyperboly k jejich tečnám je kružnice se středem ve středu příslušné kuželosečky a poloměrem a^{10} .

Věta 10. Množinou všech pat kolmic vedených z ohniska paraboly k jejím tečnám je její vrcholová tečna.

Pokud bude osa o_{FQ} rovnoběžná s přímkou EQ , jejich průsečík M nebude existovat, tedy bude jím pouze nevlastní bod. V tomto případě zároveň platí: $FQ \perp EQ$ a FQ je pak tečna kružnice q . Což v případě elipsy není možné, F je vnitřní bod q (obr. 3.8).

U hyperboly takové tečny pro $F \notin q$ existují vždy dvě a jsou zároveň i tečnami vrcholové kružnice, neboť v tomto případě platí také: $FQ \perp SP$. Přímkou SP_1, SP_2 jsou pak osy úseček FQ_1, FQ_2 , jež se dotknou hyperboly pouze v nevlastních bodech $U_{1\infty}, U_{2\infty}$. Tyto tečny v nevlastních bodech, tedy asymptoty u_1, u_2 hyperboly se tak protínají v jejím středu S .

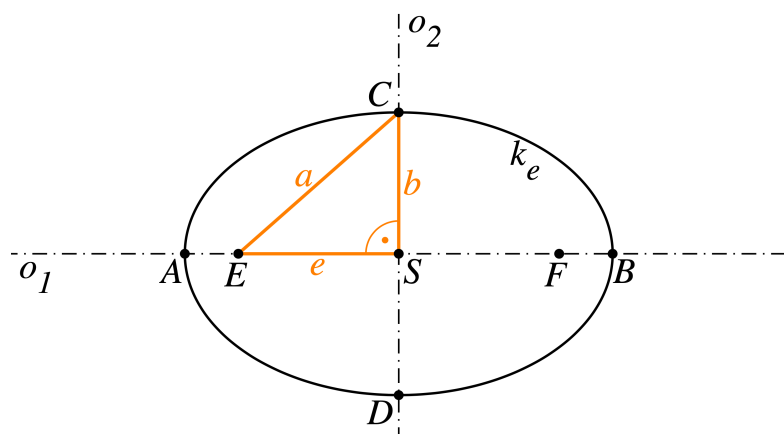
¹⁰Pro všechny body M kružnice tedy platí $M = P$, její tečny vedené bodem M jsou tak skutečně přímkami kolmé na poloměr SM , kde S je střed kružnice.



Obr. 3.8: Možnost existence nevlastního bodu u elipsy, hyperboly a paraboly

U paraboly by musela být přímka FQ kolmá na osu paraboly. V tomto případě ale neexistují vlastní body P, Q a osa o_{FQ} , jež je asymptotou paraboly, je pouze nevlastní. Tedy i zde jsme dospěli ke stejnému závěru jako v předešlé kapitole.

3.4 Charakteristický trojúhelník elipsy a hyperboly



Obr. 3.9: Charakteristický trojúhelník elipsy

Už víme, že narozdíl od paraboly může mít elipsa a hyperbola různý tvar, protože jejich numerická excentricita ε může nabývat nekonečně mnoha hodnot. Tvar elipsy nám pomáhají určit její průsečíky s vedlejší osou o_2 , tzv. *vedlejší vrcholy* C, D (obr. 3.9). Délka $|ES|$ je (lineární) excentricita e a $|CS|$ je *délka vedlejší poloosy* b . Víme, že $|EC| + |CF| = 2a$, díky souměrnosti dle o_2 je tak $|EC| = a$. Body ESC tvoří tzv. *charakteristický trojúhelník* elipsy. Pro tři délky a, b, e platí vztah dle Pýthagorovy věty

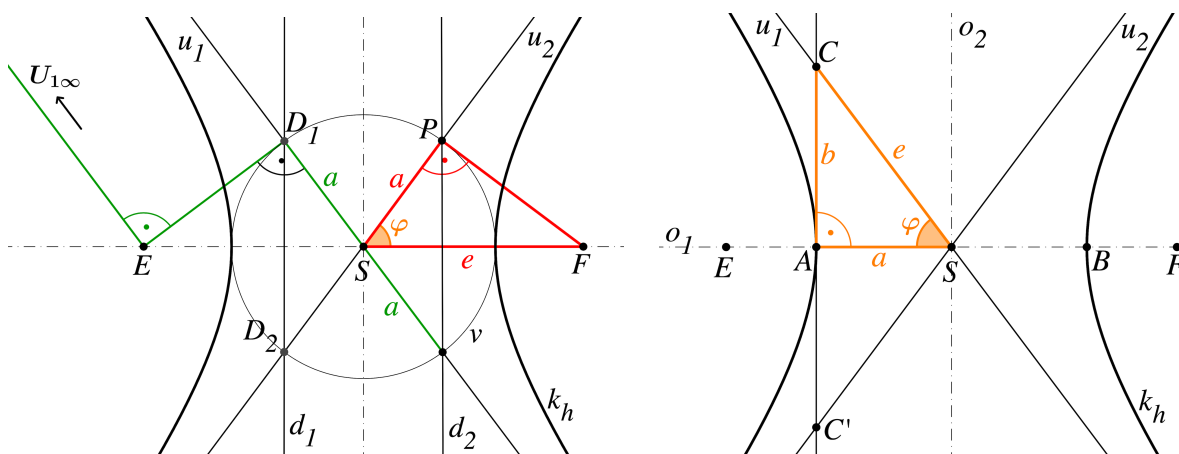
$$a^2 = b^2 + e^2, \quad (3.3)$$

kde b je vždy různé od nuly ($a > e$). Z této rovnice také vyplývá, že pro délku hlavní poloosy vždy platí $a \geq b$. Rovnost nastane v případě $e = 0$, tedy když půjde o kružnici.

S hyperbolou ale vedlejší osa žádné průsečíky nemá. Její tvar nám pomáhají dourčit její asymptoty, jež se k hyperbole neustále přibližují, ale dotknou se jí až v nekonečnu. Ted' jsme

si ukázali, že asymptoty jsou přímky procházející středem hyperboly a dotykovými body tečen vedených z ohnisek k vrcholové kružnici.

Na obr. 3.10 vlevo vidíme, že to odpovídá situaci z minulé kapitoly a body D_1, D_2 , jimiž prochází asymptoty, jsou také průsečíky řídicí přímky a vrcholové kružnice hyperboly. Další způsob konstrukce asymptot vychází ze shodnosti trojúhelníku tvořeného body FSP s trojúhelníkem CSA dle věty Ssu (obr. 3.10 vpravo), kde bod C leží na kolmici k hlavní ose vedené vrcholem A a platí pro něj $|SC| = e$. Přímky SC a SC' jsou pak díky shodnosti úhlu u vrcholu S asymptoty.



Obr. 3.10: Charakteristický trojúhelník CSA hyperboly a asymptoty u_1, u_2

CSA je pak *charakteristický trojúhelník* hyperboly a $|AC|$ délka vedlejší poloosy b . Pro délky a, b, e platí vztah dle Pythagorovy věty

$$e^2 = a^2 + b^2, \quad (3.4)$$

kde b a e jsou vždy různé od nuly ($e > a$), také musí platit $a > 0$. Z rovnice vyplývá, že poměr velikostí a, b může být různý, hlavní osa bude ta, jež má s hyperbolou průsečíky (vrcholy A, B). Pro úhel φ , který s hlavní osou svírají asymptoty platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{e^2 - a^2}}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1},$$

nebo také

$$\cos \varphi = \frac{a}{e} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tento úhel tak bude pro všechny podobné hyperboly shodný. Pro $a = b$ jde o tzv. *rovnoosou hyperbolu*, pro jejíž numerickou excentricitu platí

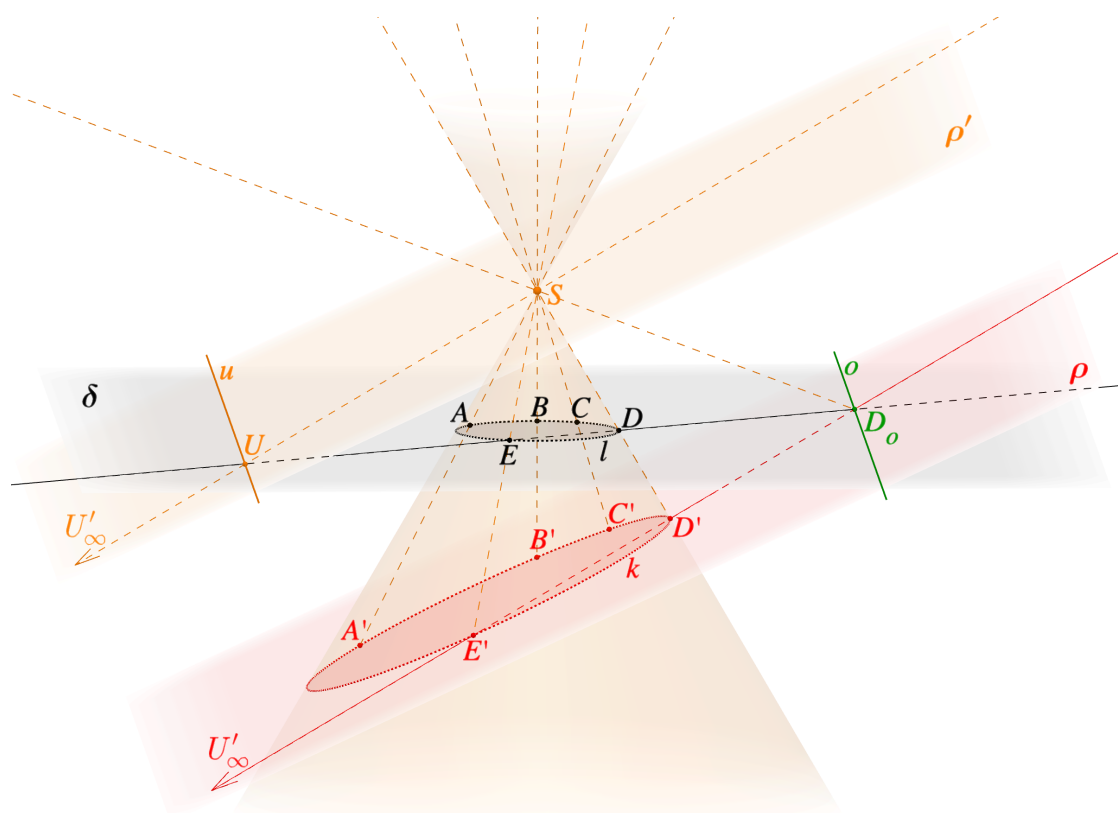
$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{2a^2}}{a} = \sqrt{2},$$

tedy všechny rovnoosé hyperboly jsou si podobné. Její asymptoty jsou pak na sebe vždy kolmé, neboť v takovém případě je $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

4 Kuželosečka jako obraz kružnice ve středové kolineaci

4.1 Středová kolineace mezi dvěma rovinami

Představme si rotační kuželovou plochu jako středové promítání mezi rovinami δ a ρ , kde δ je kolmá na osu kuželové plochy. Střed promítání S je různý od těchto rovin a odpovídá vrcholu kuželové plochy. Vzor, tedy kružnici l v rovině δ , promítáme do roviny ρ (obr. 4.1). Obrazy bodů jsou průsečíky přímk procházejících vzory a bodem S s rovinou ρ . Body na průsečnici o rovin δ a ρ se tak zobrazí samy na sebe, o je tak přímka *samodružných* bodů. Toto vzájemně jednoznačné zobrazení nazýváme *středová kolineace* mezi dvěma rovinami, bod S *střed kolineace*, přímkou o *osa kolineace*. Víme, že řezem kuželové plochy rovinou neprocházející jejím vrcholem, tedy i obrazem kružnice ve středové kolineaci, bude vždy regulární kuželosečka. Uvažujme, že jsou roviny δ a ρ různoběžné¹¹ a bod S je vlastní,¹² aby obrazem mohla být elipsa (jiná než kružnice), parabola nebo hyperbola.



Obr. 4.1: Středová kolineace mezi dvěma rovinami δ a ρ

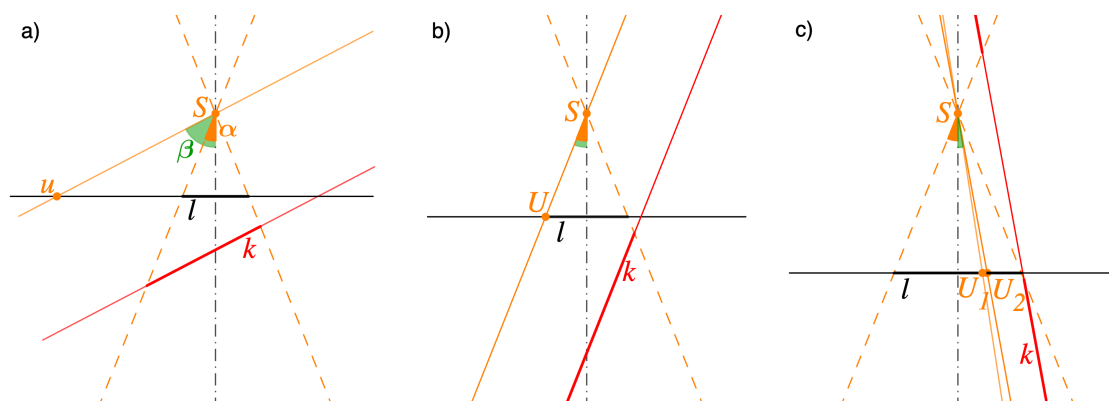
Existuje ještě nějaké jiné hledisko, než poměr velikostí úhlů α a β z kapitoly 1, podle kterého bychom mohli určit, jaká kuželosečka tímto obrazem bude? Na obrázku 4.1 prochází středem S rovina ρ' rovnoběžná s rovinou ρ . Libovolný bod U na průsečnici u rovin ρ' a δ se tak v dané středové kolineaci mezi rovinami δ a ρ zobrazí na nevlastní bod U'_∞ . Takovým bodům se říká *úběžník* a přímce u , která je těmito body tvořena, *úběžnice*. Jak je patrné, úběžnice je rovnoběžná s osou kolineace.

¹¹Pokud by tyto roviny byly rovnoběžné, jednalo by se o *stejnolehlost*, tedy podobnost, pak by obrazem kružnice byla opět pouze kružnice. Shodné roviny by pak byly *identitou*.

¹²Pokud by byl bod S nevlastní, jednalo by se o válcovou plochu a už víme, že jejím řezem, tedy obrazem kružnice, bude vždy pouze elipsa. Takovému zobrazení říkáme *osová afinita*. Pokud by byly roviny ještě navíc rovnoběžné, šlo by o shodnost, konkrétně *posunutí*.

Jakou souvislost má úběžnice s typem výsledné kuželosečky si ukažme na obrázku 4.2. Úhly α a β jsou podobně jako v kapitole 1 odchylka osy kuželové plochy od povrchy, resp. od roviny ρ . Přičemž povrchy nahradily přímkou vedené body na kružnici l a středem kolineace S . Pak pro kružnici l a její obraz k platí:

- $\beta > \alpha \Leftrightarrow k$ je elipsa, úběžnice nemá s l žádný společný bod,
- $\beta = \alpha \Leftrightarrow k$ je parabola, úběžnice je tečna l a má s ní společný právě jeden bod U ,
- $\beta < \alpha \Leftrightarrow k$ je hyperbola, úběžnice je sečna l a má s ní společné dva body U_1, U_2 .

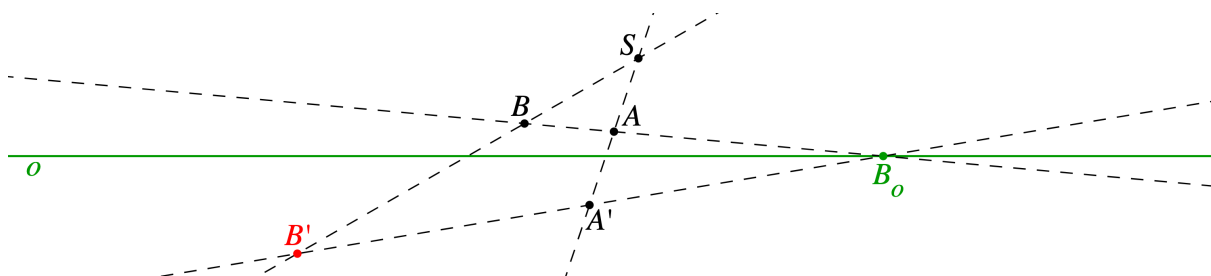


Obr. 4.2: Vzájemná poloha úběžnice u a kružnice l

4.2 Středová kolineace v rovině

Středová kolineace v prostoru nám dala dobrý náhled na situaci. Stejně vlastnosti bude ovšem mít i středová kolineace v rovině, kterou získáme rovnoběžným promítáním prostorové situace z obrázku 4.1 do roviny. Směr promítání volíme tak, aby nebyl rovnoběžný s rovinami δ a ρ . Víme, že v prostoru není střed S incidentní s rovinami δ a ρ , pak tedy musí platit $S \notin o$. Tyto roviny jsme uvažovali jako různoběžné, tedy osa o nechť je vlastní přímka; S jsme volili jako vlastní bod. Dále stejně jako v prostoru platí, že

- spojnice odpovídajících si bodů prochází pevným bodem, tzv. *středem kolineace* S ;
- průsečík odpovídajících si přímek leží na pevné přímce, tzv. *ose kolineace* o ;
- zobrazení zachovává incidenci [3, s. 192].

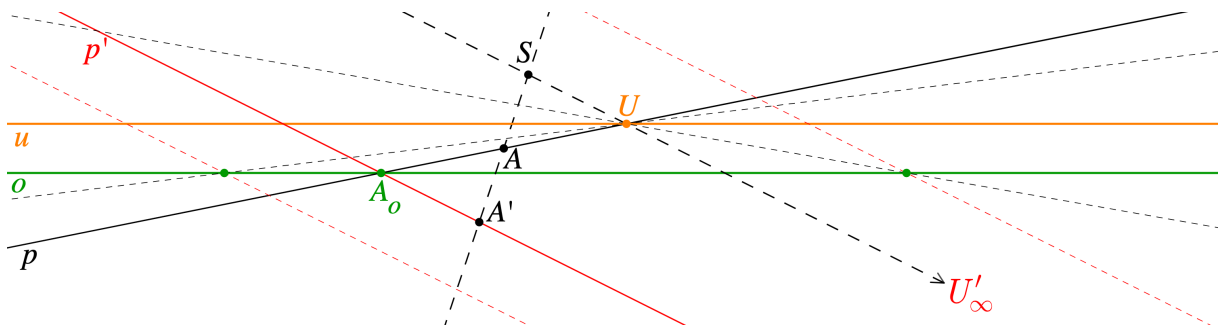


Obr. 4.3: Konstrukce bodu B'

Ukažme si, jak v rovině sestavit obraz vlastního bodu. Máme zadánu středovou kolineaci pomocí jejího středu S , osy o a párem odpovídajících si bodů A a A' . Body S, A, A' jsou od

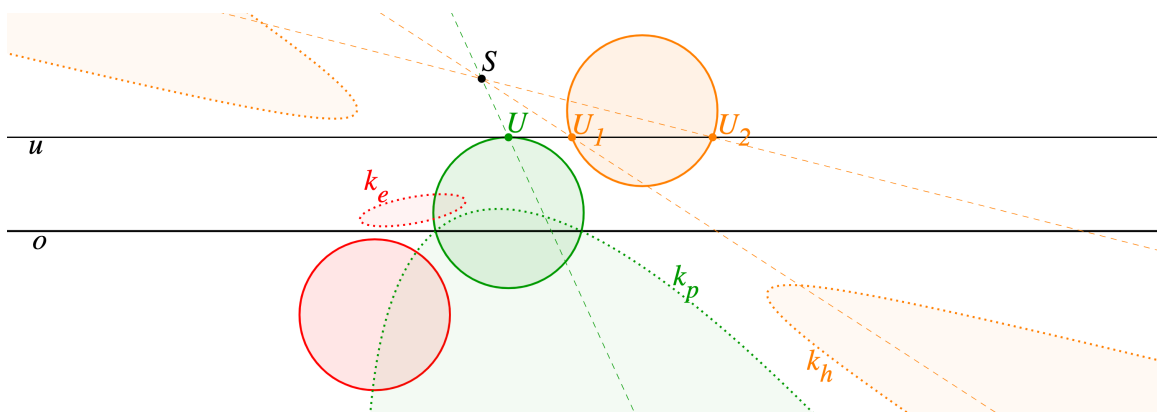
sebe různé a neleží na ose o . Bod A' musí ležet dle definice na přímce SA (obr. 4.3). Hledáme obraz bodu B , jež od těchto tří bodů také různý a $B \notin o$. Ved'me bodem B přímku BA . Její průsečík s osou o označme B_o , tento bod je samodružný. Aby byla zachována incidence, musí bodem B_o procházet i obraz přímky BA . Průsečík přímek B_oA' a SB tak bude hledaný obraz bodu B – bod B' .

Nyní si ukažme, jak v rovině najít úběžnici. Středovou kolineaci máme dānu stejně jako na obrázku 4.3. Libovolně zvolenou přímku p procházející bodem A zobrazíme na přímku p' , ta musí procházet body A' a A_o , kde A_o je průsečík p a o (obr. 4.4). Středem S ved'me přímku rovnoběžnou s p' , její průsečík s přímku p označme U . Obraz tohoto bodu musí ležet na



Obr. 4.4: Konstrukce úběžnice u

p' a zároveň na SU , tyto přímky jsou ovšem rovnoběžné. Pak se tedy bod U zobrazí na nevlastní bod U'_∞ . Navíc si můžeme povšimnout, že se přímky procházející bodem U zobrazí na přímky rovnoběžné s SU , neboť všechny takové musí procházet bodem U'_∞ . Přímka vedená bodem U rovnoběžná s osou o potom bude hledanou úběžnicí u . Všechny její body se zobrazí na nevlastní. Pak již můžeme vyslovit následující větu:



Obr. 4.5: Obrazy kružnice ve středové kolineaci – elipsa k_e , parabola k_p a hyperbola k_h ; interaktivní podobu obrázku najdeme zde <https://www.geogebra.org/m/xef3eqsu>

Věta 11. Kružnici odpovídá ve středové kolineaci elipsa tehdy, když kružnice neprotíná úběžnici v žádném bodu; parabola odpovídá v této kolineaci kružnici tehdy, když úběžnice je tečnou kružnice; hyperbola odpovídá v této kolineaci kružnici tehdy, když kružnice protíná úběžnici ve dvou různých bodech (obr. 4.5) [3, s. 198].

Došli jsme ke stejnému závěru jako v předešlých kapitolách. Středová kolineace nám ale umožňuje podívat se přímo na situaci u nevlastní přímky, jejímž vzorem je úběžnice.

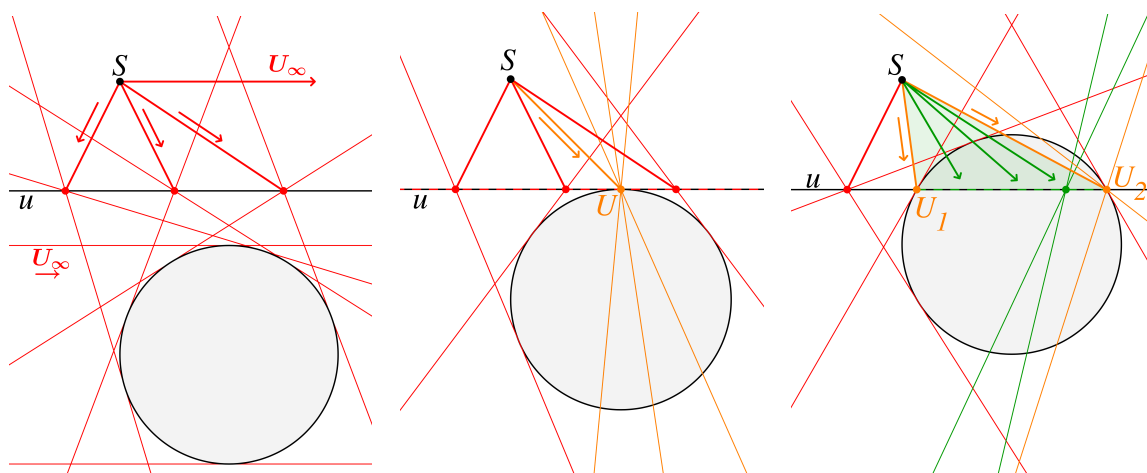
Elipsa je obraz kružnice, jež nemá s úběžnicí žádný společný bod, tedy všechny body elipsy zůstávají vlastní a je uzavřenou křivkou. Parabola je obraz kružnice pouze v tom okamžiku, kdy se tato kružnice jedním bodem dotkne úběžnice. Parabola je tak kuželosečka, jež se dotýká nevlastní přímky, tedy má jeden nevlastní bod. Do nekonečna potom ubíhá i její druhé ohnisko a střed. Kružnice rozdělená úběžnicí na dvě libovolné části je obrazem hyperboly. Hyperbola tak nekonečnem prochází a je v jejích dvou nevlastních bodech „roztržená“ na dvě větve. I v této definici tak můžeme vidět, že parabola je hraniční případ mezi elipsou a hyperbolou (Inspirováno [12, s. 1–22]).

Body U a U_1, U_2 (obr. 4.5) jsou vzory nevlastních bodů paraboly a hyperboly. Tyto nevlastní body jsou dány směry přímek SU a SU_1, SU_2 , těmto směrům říkáme *asymptotické směry*. Už víme, že parabola má jeden asymptotický směr, jež je rovnoběžný s osou paraboly, hyperbola má dva takové směry a jsou rovnoběžné s asymptotami hyperboly.

4.3 Kuželosečka a tečny ve středové kolineaci

4.3.1 Kuželosečky a přímka

Je patrné, že středová kolineace nezachovává délky úseček, obsahy ani velikosti úhlů. Víme ale, že zachovává incidenci, tedy incidenční vztahy mezi kružnicí a přímkou, jež jsou často intuitivní, by měly zůstat stejné i pro její obrazy. Na obrázku 4.6 vidíme kružnici jako vzor elipsy, paraboly a hyperboly v kolineaci se středem S a úběžnicí u ; $S \notin u$. Víme, že se všechny přímky procházející stejným bodem na úběžnici u zobrazí na přímky, jež budou rovnoběžné se spojnicí tohoto bodu a středem S (platí i pro spojnicí SU_∞ rovnoběžnou s u).



Obr. 4.6: Přímky a kružnice, jež je vzorem elipsy, paraboly a hyperboly

Sečna má s kuželosečkou právě dva společné body. U paraboly a hyperboly se však může stát, že průsečíkem přímky s danou kuželosečkou bude pouze jeden vlastní bod tehdy, když je vzorem přímky sečna kružnice procházející bodem U, U_1 nebo U_2 . Taková přímka bude ovšem mít zároveň asymptotický směr a bude vlastně procházet příslušným nevlastním bodem. Takovým přímkám říkáme *asymptotické sečny*.

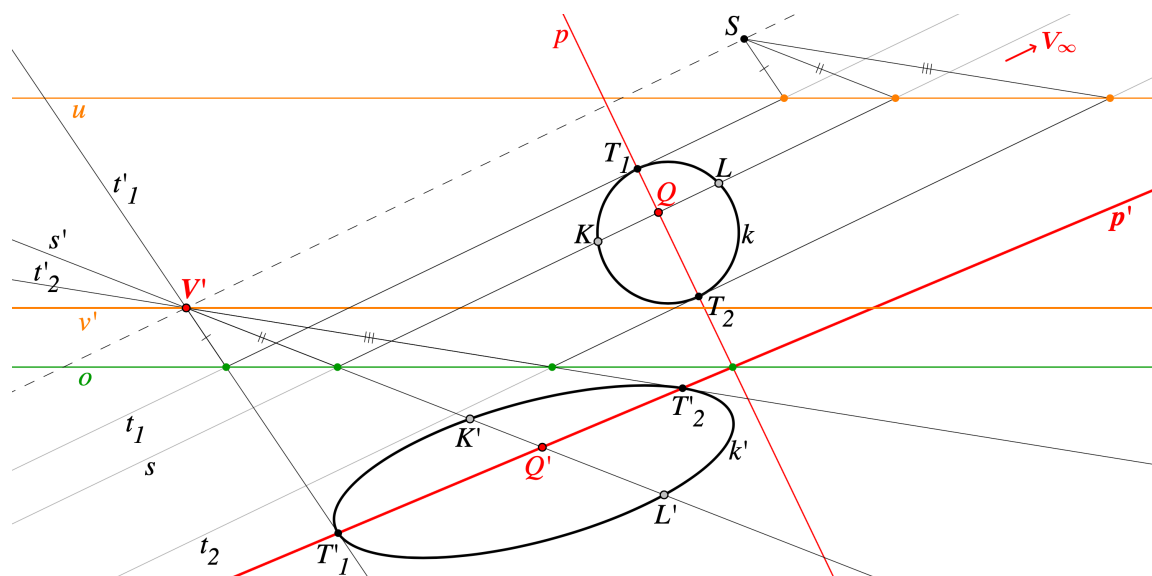
Tečna má s kuželosečkou právě jeden společný bod, jak jsme si ukázali v kapitole o ohniskových vlastnostech. Avšak asymptoty hyperboly, tedy obrazy tečen ke kružnici v bodech U_1, U_2 , s ní nemají společné žádné vlastní body. Mají ale asymptotické směry a průsečíky nevlastní. Hyperbola dále nebude mít tečny rovnoběžné se spojnicemi středu S s body na

úběžnici mezi U_1, U_2 , tedy s přímkami, jež budou mít odchylku od hlavní osy menší než její asymptoty. V každém zbývajícím směru pak bude mít hyperbola vždy dvě rovnoběžné tečny, ke každé své větvi jednu. Parabola nebude mít vlastní tečnu rovnoběžnou s její osou. Ve všech ostatních směrech bude mít vždy jen jednu vlastní tečnu. Elipsa pak bude mít v každém směru vždy dvě rovnoběžné tečny.

Vnější přímka (také *nesečna*) nemá s kuželosečkou žádné společné body. Neexistují nesečny asymptotickým směrem, takové přímky mají s kuželosečkou společný vždy jeden vlastní bod (vyjma samotných asymptot). Neexistují také nesečny hyperboly s odchylkou od hlavní osy menší než mají asymptoty, ty ji protnou vždy ve dvou vlastních bodech.

Vidíme, že při určování typu přímky vzhledem ke kuželosečce musíme dávat pozor i na její směr. Pokud asymptotický směr přímky uvažujeme také jako průsečík, pak incidenční vlastnosti kuželosečky a přímky budou skutečně odpovídat jejich vzorům.

4.3.2 Pól a polára kuželosečky



Obr. 4.7: Harmonická čtveřice bodů K', L', Q', V' u elipsy k'

Na obrázku 4.7 vidíme kružnici k jako vzor elipsy k' ve středové kolíneaci se středem S , osou o a úběžnicí u . Rovnoběžné tečny t_1, t_2 se dotýkají kružnice v bodech T_1, T_2 . Libovolná, s nimi rovnoběžná sečna s vytíná na kružnici tětivu¹³ KL . Je zřejmé, že ji v tomto případě přímka $T_1 T_2$ v bodu Q pólí. Pro body K, L, Q a jejich obrazy K', L', Q' očividně platí:

$$(KL; Q) = -1 \neq (K'L'; Q'),$$

středová kolíneace tak nezachovává ani dělicí poměr. Invariant středové kolíneace ovšem můžeme pomocí dvou dělicích poměrů získat, uveďme si jeho definici:

Definice 7. Porovnáme-li dva dělicí poměry:

$$\frac{(AB; C)}{(AB; D)},$$

¹³Tětiva kuželosečky je úsečka, jejíž krajní body jsou body příslušné kuželosečky [3, s. 143].

kde platí, že body A, B, C, D jsou od sebe různé a body A, B vždy vlastní, získáváme číslo μ ; $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; kterému říkáme *dvojpoměr*¹⁴ bodů A, B, C, D , zapisujeme $\mu = (AB; CD)$.¹⁵

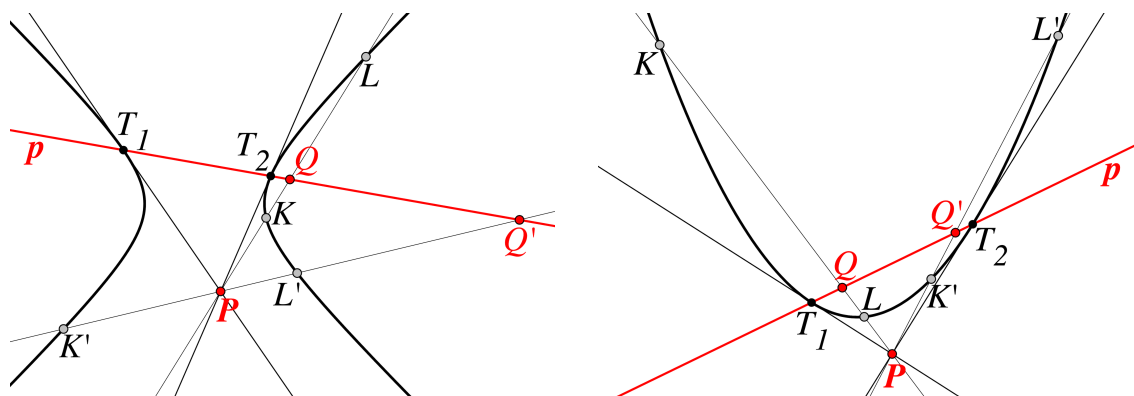
Představme si tedy bod V_∞ sečny s kružnice k , jež ubíhá do nekonečna. Pak pro tři dané body K, L, Q na sečně s a bod V_∞ na základě definice 7 a věty 2 (s. 9) můžeme napsat:

$$(KL; Q) = -1 = \frac{(KL; Q)}{1} = \frac{(KL; Q)}{(KL; V_\infty)} = (KL; QV_\infty).$$

Nevlastním bodem V_∞ pak prochází všechny rovnoběžné přímky t_1, t_2, s . Ty se zobrazují na různoběžné přímky t'_1, t'_2, s' , jež se také musí protnout v jednom bodu V' , obrazu bodu V_∞ . Obrazům nevlastních bodů říkáme *protiúběžník* a přímce v' , jež je množinou takových bodů, *protiúběžnice*. V prostorové situaci na obrázku 4.1 (s. 26) by to byla průsečnice roviny ρ s rovinou rovnoběžnou s δ procházející středem S . Z obou obrázků je patrné, že je rovnoběžná s osou kolineace a že vzdálenost středu kolineace od úběžnice je shodná se vzdáleností osy kolineace od protiúběžnice. Bod V' musí ležet i na přímce SV_∞ a způsob jeho konstrukce je z obrázku 4.7 zřejmý. Pro průsečíky K', L' libovolné sečny incidentní s V' , jež protíná v bodu Q' spojnicí dotykových bodů T'_1, T'_2 tečen t'_1, t'_2 vedených V' , vždy platí:

$$(KL; QV_\infty) = -1 = (K'L'; Q'V').$$

Platí-li $(K'L'; Q'V') = -1$, pak říkáme, že body Q', V' jsou *harmonicky sdružené* s body K', L' . Zobrazíme-li pak kuželosečku v další libovolné středové kolineaci, musí harmonický vztah mezi těmito čtyřmi body zůstat stejný, protože kolineace zachovává incidenci a dvojpoměr.



Obr. 4.8: Harmonické čtveřice bodů K, L, Q, P u hyperboly a paraboly

Na obrázku 4.8 vidíme harmonickou čtveřici bodů K, L, Q, P také u hyperboly a paraboly. Ze záporné hodnoty jejich dvojpoměru vyplývá, že jeden z dvojice průsečíků musí vždy ležet mezi body P, Q a druhý vně úsečky PQ . Což odpovídá tomu, že P je vnější bod a Q je vnitřní bod kuželosečky. Nezáleží na uspořádání bodů K a L , tedy ani na jejich značení. Z hodnoty dvojpoměru harmonické čtveřice totiž plyne, že $(QP; KL) = -1$ právě tehdy, když

$$(QP; KL) = \frac{(QP; K)}{(QP; L)} = \frac{(QP; L)}{(QP; K)} = (QP; LK), \quad (4.1)$$

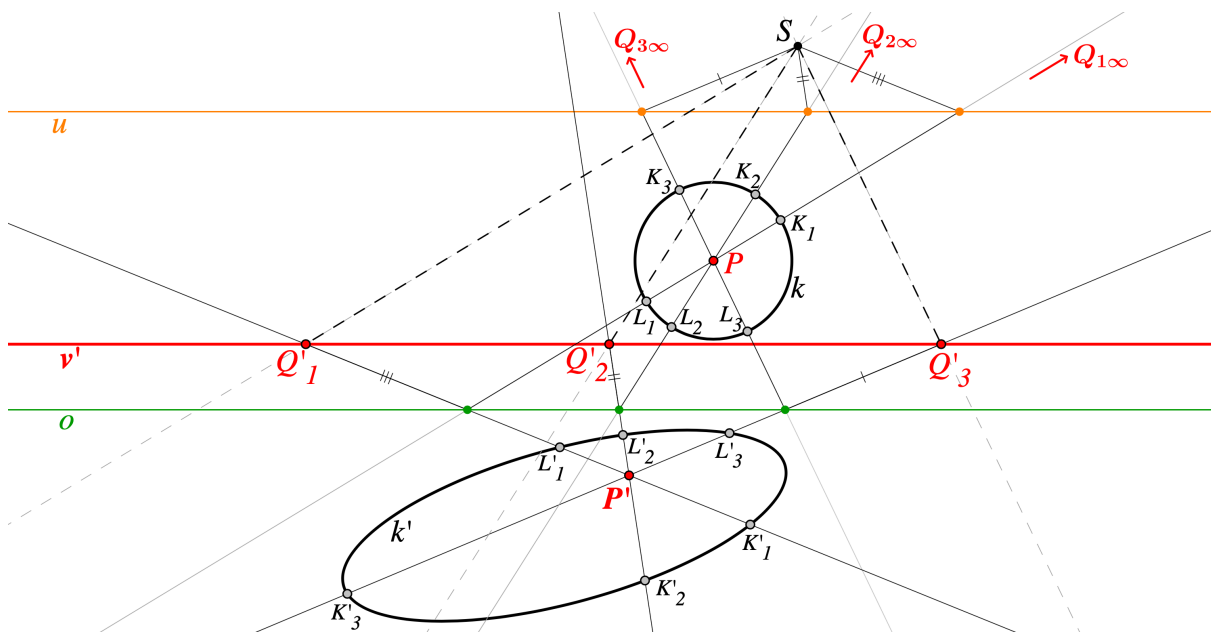
¹⁴Že se dvojpoměr promítáním nemění, znal už ve starověku významný řecký matematik a astronom PAPPUS Z ALEXANDRIE (3. – 4. st.). Důkaz tohoto tvrzení můžeme nalézt například zde [3, s. 25–26].

¹⁵Rozepsáním obou dělicích poměrů a následnou úpravou lze snadno ověřit, že u dvojpoměru nezáleží na pořadí jednotlivých dvojic bodů a pokud jsou oba body C, D vlastní, pak platí $(AB; CD) = (CD; AB)$.

neboť pouze čísla 1, -1 jsou rovny své převrácené hodnotě a číslo 1 jsme pro body od sebe různé vyloučili. Vzhledem k obecné vlastnosti dvojpoměru pak platí také:

$$(QP; KL) = (KL; QP) = (KL; PQ) = (PQ; KL).$$

U harmonické čtveřice tak nezáleží na pořadí jednotlivých bodů v každé dvojici, důležité je zachovat stejné dvojice bodů, jež se navzájem oddělují. Pojd'me se podívat, zda existuje přímka se stejnou vlastností jako p , když P bude vnitřním bodem kuželosečky.



Obr. 4.9: Polára v' bodu P' vzhledem k elipse k'

Na obrázku 4.9 je opět kružnice k jako vzor elipsy k' ve středové kolineaci se středem S , osou o a úběžnicí u . Středem P kružnice ved' me libovolné přímky, jež protínají kružnici v bodech K, L . Dvojpoměr těchto bodů spolu s nevlastním bodem Q_∞ příslušné přímky tak bude:

$$(KL; P) = (KL; PQ_\infty) = -1.$$

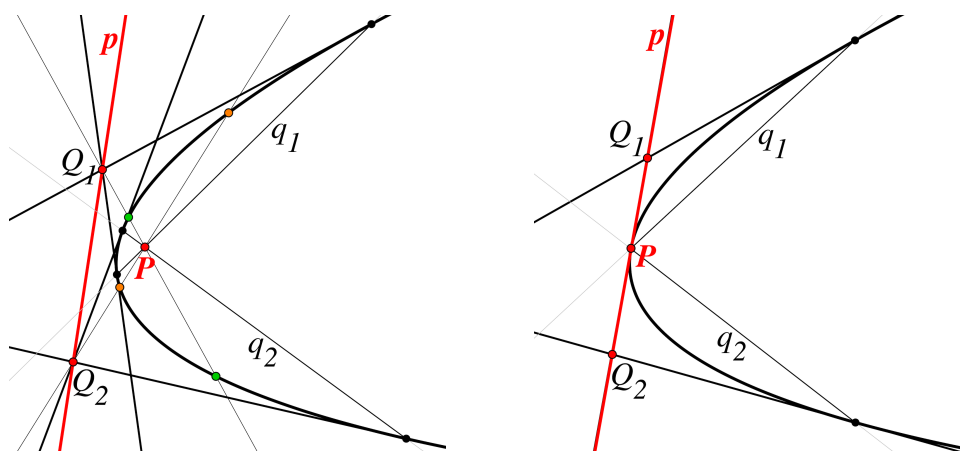
Víme, že zobrazením se tento dvojpoměr nezmění. Všechny nevlastní body Q_∞ se zobrazí na body Q' , jež budou ležet na protiúběžnici v' a budou tak kolineární. Tato kolinearita bodů Q' musí zůstat v každé další kolineaci zachována. Pak můžeme napsat definici:

Definice 8. Bodem P v rovině ved' me libovolnou přímku, jež protne kuželosečku k v bodech K, L . Pak množinou všech bodů Q takových, že $(PQ; KL) = -1$, je přímka p . Tu nazýváme *polára* bodu P vzhledem ke kuželosečce k a bod P se nazývá *pól* přímky p vzhledem ke kuželosečce k . Je-li P bodem kuželosečky k , pak jeho polára p vzhledem ke kuželosečce k je tečna dotýkající se této kuželosečky v bodu P [13, s. 192], [3, s. 106].

Pro korektnost definice je třeba uvažovat i komplexní průsečíky K, L přímky PQ a kuželosečky k , aby i pro vnější bod P této kuželosečky byla uvedenou množinou bodů Q skutečně celá přímka p . Těchto komplexních průsečíků pak využívá i následující věta, jež plyne z výše uvedeného a platí i v situaci, kdy přímka PQ neprotíná kuželosečku v reálných bodech.

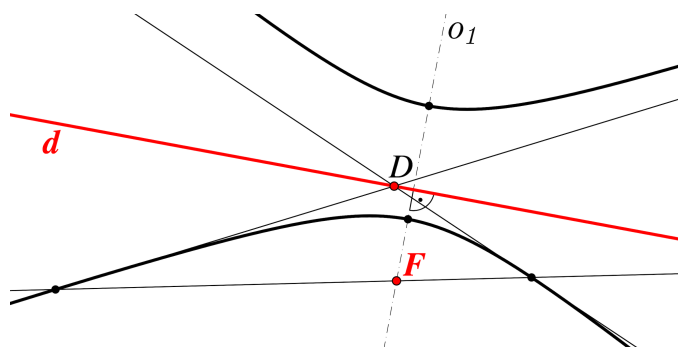
Věta 12. Jestliže bod Q leží na poláře p bodu P , pak tento bod P leží na poláře q bodu Q , sestrojené vzhledem k téže kuželosečce [3, s. 107].

Na obrázku 4.10 vlevo pak vidíme poláru p vnitřního bodu P kuželosečky. Bod P musí vždy ležet na poláře q libovolného bodu Q poláry p , jak plyne z předchozí věty. Polára p tak bude procházet póly Q_1, Q_2 libovolných sečen q_1, q_2 kuželosečky incidentních s bodem P .



Obr. 4.10: Polára p vnitřního bodu P kuželosečky a bodu P , jež leží na kuželosečce

Bude-li se bod P přibližovat ke kuželosečce, bude se k ní přibližovat i jeho polára. Na obrázku 4.10 vpravo vidíme limitní případ, kdy se přímka p dotkne kuželosečky v bodu P . Polára q libovolného bodu Q na tečně p prochází bodem P a tečna je tak jeho polárou p . Průsečíky libovolné přímky PQ s kuželosečkou ovšem v tento jeden bod P splývají a poláru tak nelze definovat pomocí harmonické čtveřice. Proto jsme tento případ uvedli v definici 8 zvlášť.



Obr. 4.11: Řídící přímka d jako polára ohniska F kuželosečky

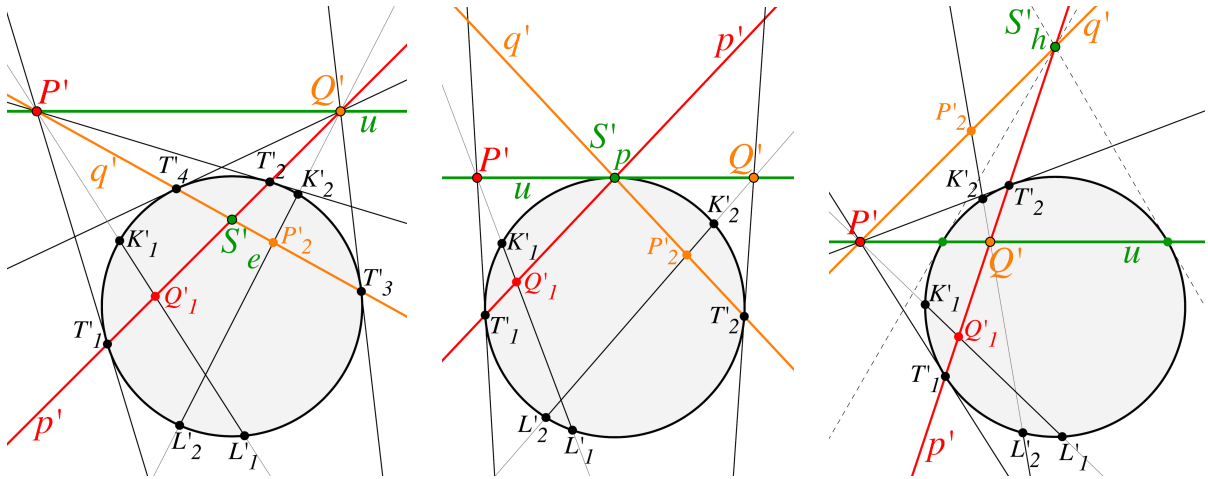
Na obrázku 2.10 (s. 13) vidíme, že řídicí přímka je vlastně polárou ohniska F vzhledem ke kuželosečce. Z toho vychází její možná konstrukce na obrázku 4.11, jež není pro kuželosečky vyjma paraboly úplně samozřejmá.

Promítáním se může měnit tvar i druh kuželosečky, harmonický vztah pólu a poláry ovšem zůstává zachován. Je tedy tzv. *projektivní vlastností* kuželosečky a lze ji využívat při konstrukcích úplně stejně u každé z kuželoseček.

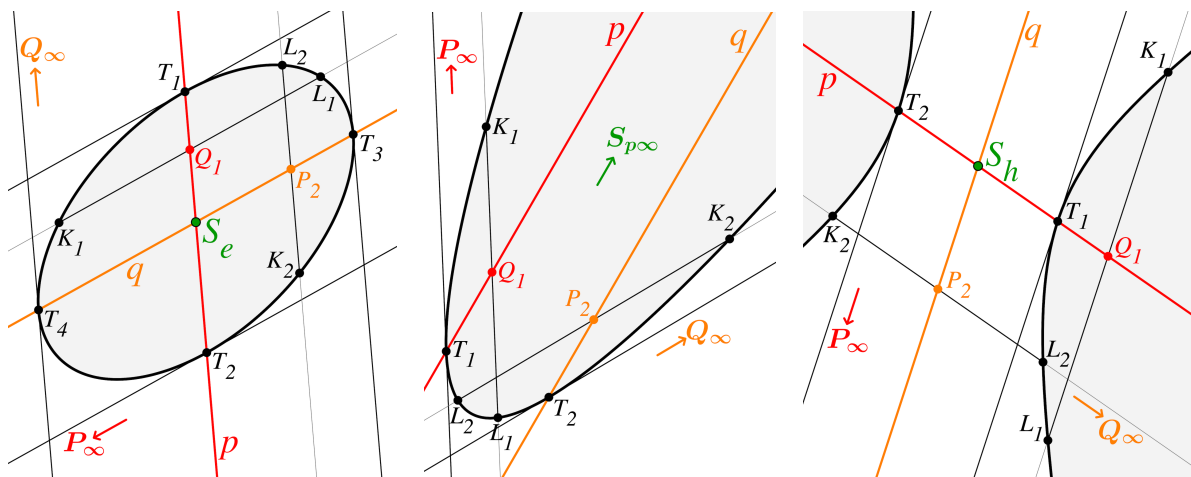
4.3.3 Střed a průměry kuželosečky

V předchozím odvození jsme vlastně vycházeli z toho, že pólem průměru kružnice je nevlastní bod a polárou středu kružnice je nevlastní přímka. Jde o projektivní vlastnost a platí tak pro všechny kuželosečky. Opět se můžeme díky středové kolineaci podívat na situaci přímo u nevlastní přímky, tedy samozřejmě pouze u jejího vzoru. Na obrázku 4.12 vidíme

póly S'_e, S'_p a S'_h přímky u vzhledem ke kružnici. Ve středové kolineaci, kde u bude úběžnice, se pak tyto kružnice zobrazí na elipsu, parabolu resp. hyperbolu a póly S'_e, S'_p resp. S'_h na jejich středy. Na obrázku 4.13 pak tyto možné obrazy elipsy, paraboly a hyperboly z obrázku 4.12 přímo vidíme. Označení jednotlivých prvků odpovídá jejich očárkovaným vzorům.



Obr. 4.12: Póly S'_e, S'_p, S'_h úběžnice u vzhledem ke kružnici



Obr. 4.13: Elipsa, parabola a hyperbola a jejich průměry p, q

Je zřejmé, že střed elipsy a hyperboly bude vždy vlastní bod, u elipsy její vnitřní bod, u hyperboly vnější – průsečík jejich asymptot. Parabola pak vlastní střed mít nebude, pólem úběžnice je její tečný bod S'_p s kružnicí, tedy vzor nevlastního bodu paraboly. Také vidíme průměry p, q příslušné kuželosečce jako obrazy polár p', q' bodů P', Q' na úběžnici. Průměry pak chápeme jako celé přímky, protože ne vždy jsou omezeny krajními body kuželosečky.

Definice 9. Každá vlastní přímka, jejíž pól je vzhledem k dané kuželosečce nevlastní bod, se nazývá průměr kuželosečky [3, s. 142].

Věta 13. Každý průměr středové kuželosečky prochází jejím středem a obráceně každá přímka procházející středem kuželosečky je jejím průměrem.

Věta 14. Všechny průměry paraboly jsou navzájem rovnoběžné. Jejich společný nevlastní bod je bod, v němž se parabola dotýká nevlastní přímky (obě věty [3, s. 142]).

Ze vztahu $(KL; QP_\infty) = -1 = (KL; Q)$, jež platí pro libovolnou sečnu QP_∞ kuželosečky, kde Q je její průsečík s polárou p bodu P_∞ pak plyne:

Věta 15. Přímka procházející středy rovnoběžných tětiv kuželosečky je průměr této kuželosečky [3, s. 143].

Na obrázku 4.12 u vzoru elipsy a hyperboly leží bod Q' na poláře p' bodu P' a bod P' tak leží na poláře q' bodu Q' . Obrazy P_∞, Q_∞ pak také vzájemně leží na svých polárách q, p a určují tzv. *sdužené směry* dané kuželosečky. Dva průměry středové kuželosečky, jejichž směry jsou sdužené, nazýváme *sdužené průměry* elipsy resp. hyperboly.

Věta 16. Každý ze dvou sdužených průměrů středové kuželosečky půlí její tětivy rovnoběžné s druhým z těchto průměrů [3, s. 144].

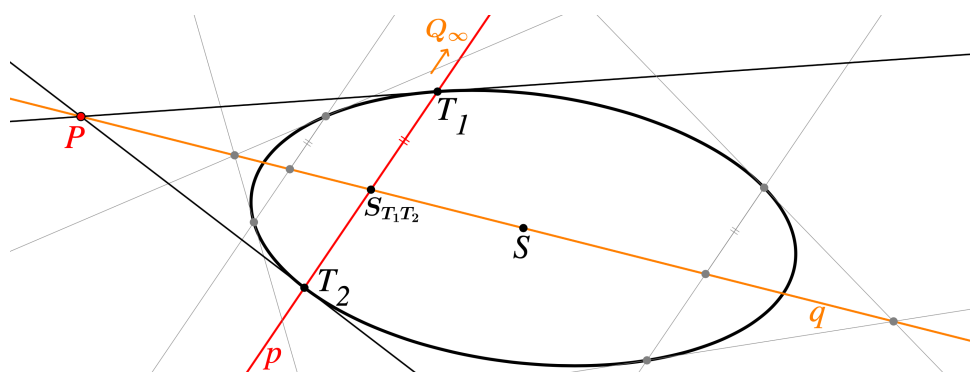
Věta 17. Dva průměry středové kuželosečky k jsou sdužené právě tehdy, když tečny kuželosečky k sestrojené v krajních bodech jednoho z těchto průměrů jsou rovnoběžné s druhým z nich [3, s. 145].

Na obrázku 4.12 u vzoru paraboly vidíme, že v jejím případě budou všechny směry sduženy se směrem daným S_{p_∞} . V jejím případě tak hovoříme o směru sduženém s příslušným průměrem paraboly. Na obrázku 4.13 pak vidíme směr daný P_∞ sdužený s průměrem p paraboly a směr daný Q_∞ sdužený s průměrem q paraboly.

Věta 18. Průměr paraboly půlí všechny její tětivy rovnoběžné se směrem s ním sduženým.

Věta 19. Každá vlastní tečna paraboly je rovnoběžná se směrem sduženým s tím průměrem paraboly, který prochází bodem dotyku dané tečny (obě věty [3, s. 146]).

Sdužené průměry elipsy resp. hyperboly, jejichž směry jsou na sebe kolmé jsou pak osy dané kuželosečky. Průměr paraboly, jehož sdužený směr je s ním kolmý, je osa paraboly. Tyto směry os, resp. osy a jejího sduženého směru, se pak nazývají *hlavní směry* kuželosečky. U speciálního případu elipsy – kružnice nelze určit hlavní či vedlejší osu, osou souměrnosti má nekonečně mnoho a všechny její sdužené směry jsou tak na sebe kolmé.



Obr. 4.14: Průměr q kuželosečky procházející P a $S_{T_1 T_2}$

Na poláře q bodu Q_∞ , jež je průměrem kuželosečky, pak budou samozřejmě ležet i všechny vlastní body P jejichž polára p prochází Q_∞ (obr. 4.14). Z toho plyne věta:

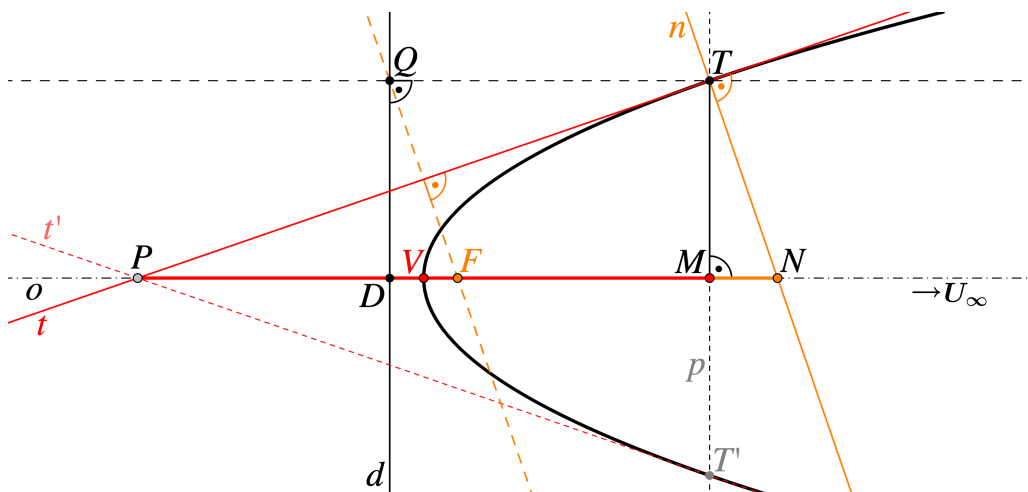
Věta 20. Přímka procházející průsečíkem P tečen kuželosečky a středem úsečky, jejíž krajní body jsou body dotyku těchto tečen s danou kuželosečkou, je průměr této kuželosečky [3, s. 142].

4.3.4 Subtangenta a subnormála paraboly

Nechť P je průsečík libovolné tečny t a osy o paraboly (obr. 4.15). Patu kolmice vedené z tečného bodu T tečny t na osu o označme M . Přímka MT je zároveň polárou bodu P vzhledem k parabole, neboť směr sdružený s osou paraboly je na ni vždy kolmý. Pak pro body P, M , vrchol V paraboly a nevlastní bod U_∞ , jež je dán směrem osy o platí:

$$(PM; VU_\infty) = -1 = (PM; V),$$

a vrchol V tak bude vždy ležet ve středu úsečky PM , jež se nazývá *subtangenta*. Jde vlastně o speciální případ věty 20, kde průměr q je osou paraboly.



Obr. 4.15: Subtangenta PM a subnormála MN

Přímka procházející bodem dotyku T , jež je na tečnu t kolmá se nazývá *normála* n paraboly, její průsečík s osou označme N . Přímka FQ , kde Q je pata průvodiče QT , je na tečnu t také kolmá a je tak s normálou rovnoběžná. Z rovnoběžnosti průvodiče QT s osou paraboly plyne $|FQ| = |NT|$ a $|DQ| = |MT|$. Trojúhelníky FQD a NTM jsou tak shodné dle věty Ssu a délka $|MN|$ je pak rovna délce $|DF|$, tedy parametru p paraboly. Úsečky MN říkáme *subnormála*. Pro délku $|PN|$ platí:

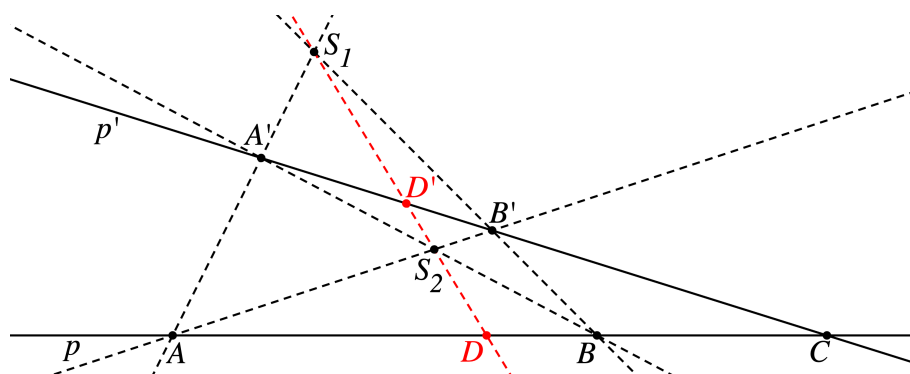
$$\begin{aligned} |PN| &= 2 \cdot |PV| + p \\ \frac{|PN|}{2} &= |PV| + \frac{p}{2} = |PF| \end{aligned}$$

a ohnisko F tak leží ve středu úsečky PN .

Věta 21. Subtangenta je půlena vrcholem. Subnormála má konstantní délku rovnou parametru paraboly. Součet délek subtangenty a subnormály je půlen ohniskem [13, s. 141].

4.3.5 Konstrukce harmonické čtveřice

Ke konstrukci harmonické čtveřice využijme rovnici 4.1. Mějme tři různé body A, B, C na přímce p . Hledáme bod D takový, aby platilo $(CD; AB) = -1$. Zvolme libovolný střed $S_1 \notin p$ kolineace. Bod C , jež tvoří dvojici s hledaným bodem D , volme jako samodružný a vhodně jím vedme libovolnou přímku $p' \neq p$; $S_1 \notin p'$; jako obraz přímky p (obr. 4.16). Body A, B se tak zobrazí na průsečíky A', B' přímky p' s přímkami S_1A resp. S_1B .



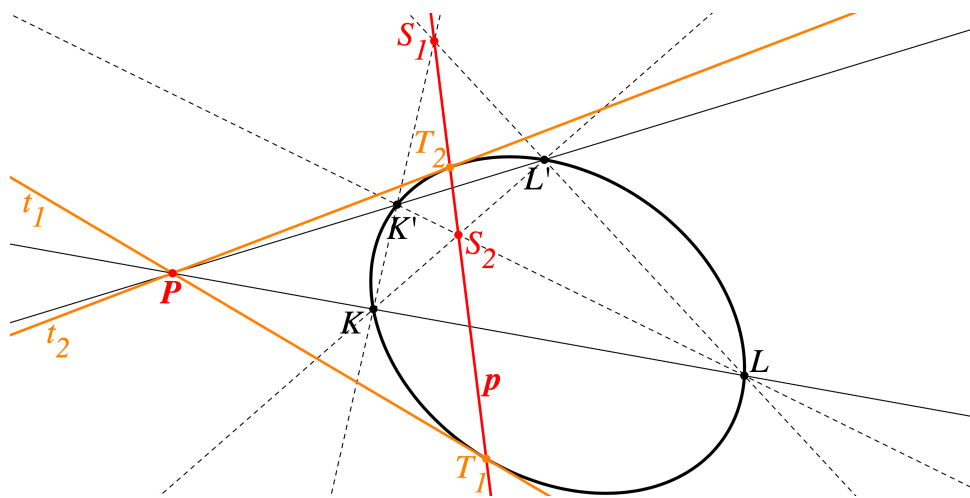
Obr. 4.16: Konstrukce harmonické čtveřice

Střed S_2 druhé kolineace, jež zobrazí $A \rightarrow B'$ a $B \rightarrow A'$, bude průsečíkem přímk AB' a BA' . Přímka S_1S_2 pak protne přímky p, p' v bodech D, D' , kde D' je obrazem bodu D v obou zobrazeních. Obě tyto kolineace zachovávají dvojpoměr, tedy platí

$$(CD; AB) = (CD'; A'B') = (CD'; B'A'),$$

což platí právě tehdy, když body A, B, C, D a A', B', C, D' tvoří harmonické čtveřice.¹⁶

Pomocí této konstrukce můžeme snadno sestrojít tečny kuželosečky daným bodem i v případě, kdy neznáme ohniska ani vrcholy kuželosečky, navíc to zvládneme i bez kružítka.

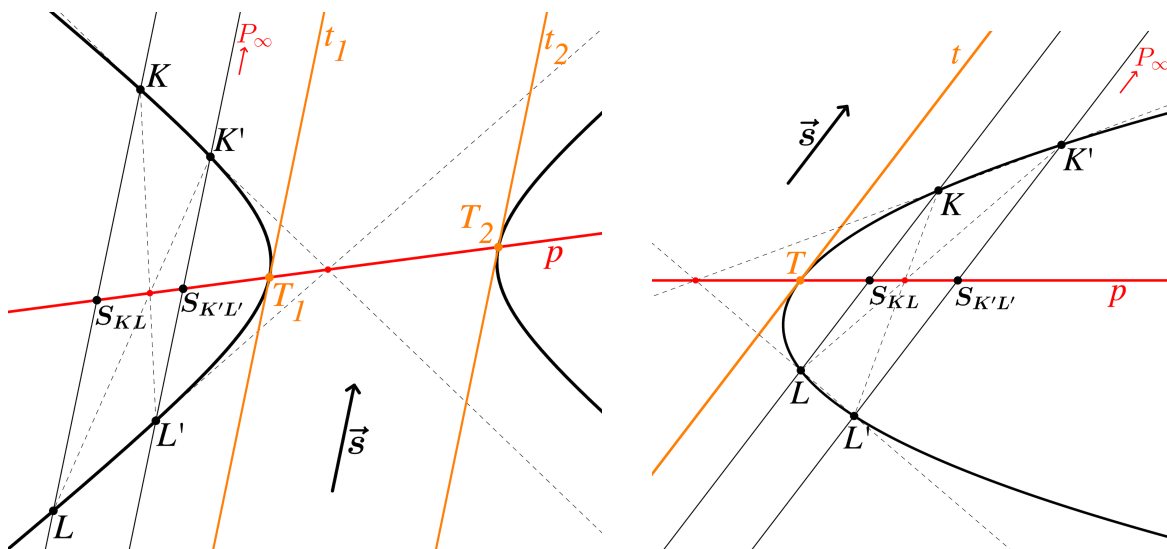


Obr. 4.17: Konstrukce tečen t_1, t_2 k elipse vedené bodem P

Máme danou kuželosečku, v našem případě elipsu (obr. 4.17), a její vnější, vlastní bod P . Vedme jím dvě libovolné sečny, jejich průsečíky s elipsou označme K, L a K', L' . Průsečíky přímk KK', LL' a KL', LK' označme S_1, S_2 . Přímka S_1S_2 pak spolu s bodem P harmonicky odděluje dvojice bodů K, L a K', L' a je tak polárou p bodu P vzhledem k elipse. Průsečíky T_1, T_2 poláry a elipsy jsou dotykové body tečen t_1, t_2 vedených z bodu P . Polára libovolného vnějšího, vlastního bodu P má s kuželosečkou vždy dva průsečíky, existují tak vždy dvě tečny daným bodem. Vyjma středu hyperboly nebo libovolného bodu na její asymptotě, jehož polárou je nevlastní přímka, resp. asymptotická sečna a obě tečny, resp. jedna z tečen potom splývají s asymptotou.

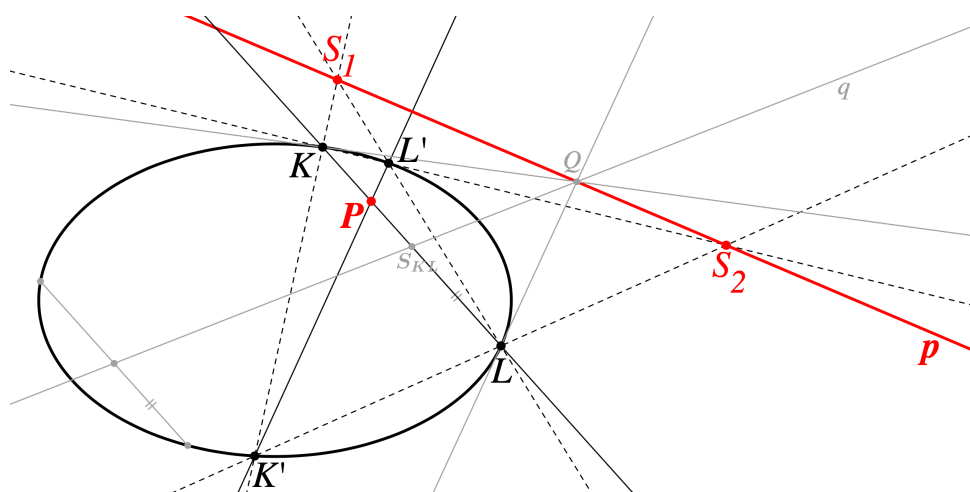
¹⁶Skupina čtyř bodů A, A', B, B' v rovině, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce se pak nazývá *úplný čtyřroh*. Ten má velký význam v projektivní geometrii právě pro jeho harmonické vlastnosti [3, s. 32].

Pokud bude vnější bod kuželosečky nevlastní bod P_∞ , půjde vlastně o tečny daným směrem. Příslušnou kuželosečkou ved' me dvě libovolné sečny se směrem \vec{s} , jejich průsečíky opět označme K, L a K', L' . Středů $S_{KL}, S_{K'L'}$ tětiv $KL, K'L'$, jež můžeme najít i pomocí úplného čtyřrohu, kde samodružný bod je nevlastní, ved' me přímku p . Ta je vlastně polárou nevlastního bodu P_∞ příslušných sečen. Pak průsečíky T_1, T_2 průměru p s kuželosečkou prochází tečny t_1, t_2 daným směrem \vec{s} , jež je sružený s průměrem p . Diskusi k existenci tečen daným směrem jsme již provedli v kapitole 4.3.1 (s. 29).



Obr. 4.18: Konstrukce tečen hyperboly a paraboly daným směrem \vec{s}

Úplný čtyřroh můžeme také využít i ke konstrukci poláry vnitřního bodu kuželosečky. Na obrázku 4.19 vidíme elipsu a její vnitřní bod P , jež bude opět samodružným bodem. Ved' me jím dvě libovolné sečny $KL, K'L'$ elipsy. Průsečíky přímek KK', LL' a KL', LK' opět označme S_1, S_2 . Přímka S_1S_2 tak spolu s bodem P harmonicky odděluje dvojice bodů K, L a K', L' a je tak polárou p bodu P vzhledem k elipse.



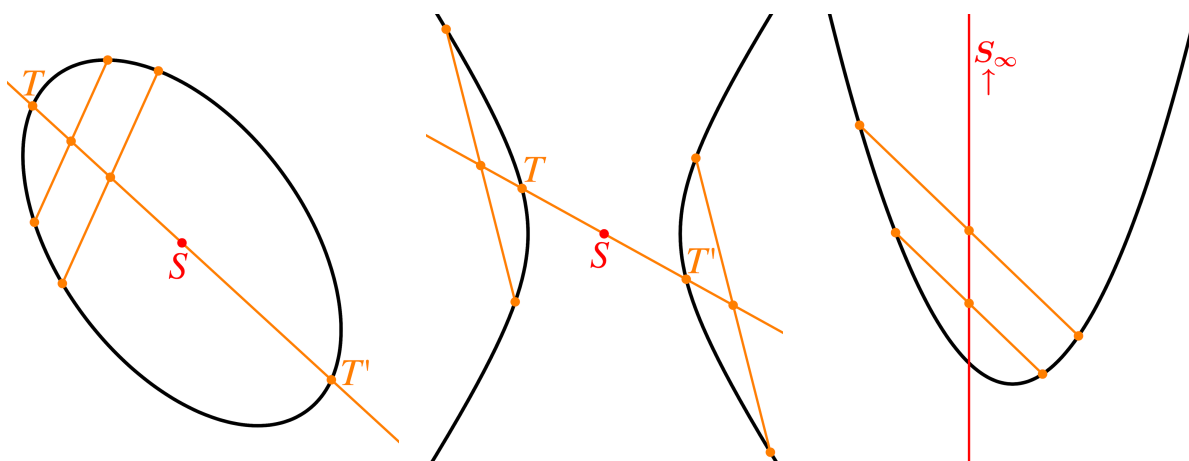
Obr. 4.19: Konstrukce poláry p vnitřního bodu P elipsy

Průměr q procházející středem tětivy KL je sružený se směrem této tětivy. Jeho průsečík Q s polárou p je tak pól přímky KL a přímky QK, QL jsou tečny v bodech K, L . Z toho plyne jedna z možných konstrukcí tečny kuželosečky v jejím bodu K resp. L .

Příklad 5.

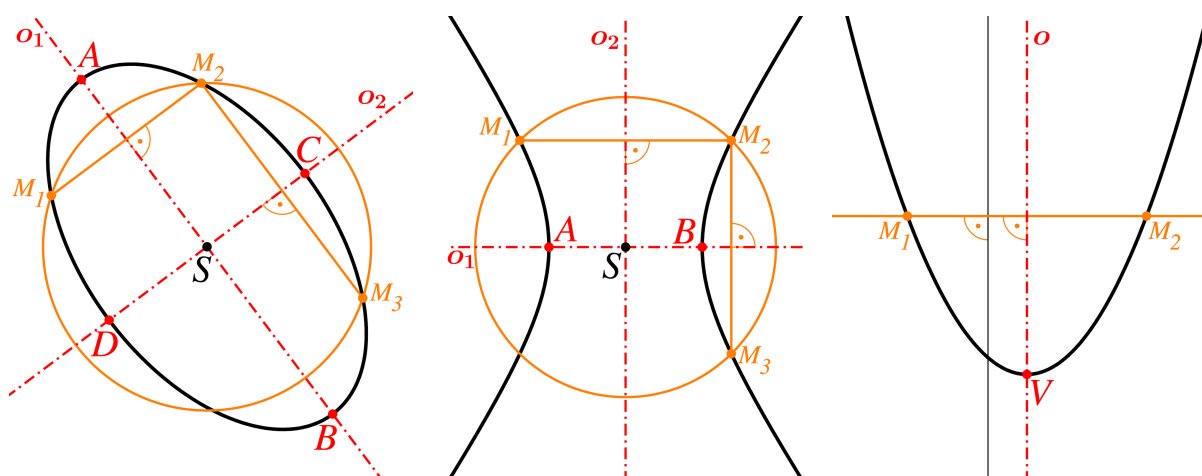
Najděte významné prvky (střed, osy, vrcholy, ohniska a řídicí přímky) kuželosečky, je-li dána pouze samotná křivka – elipsa, hyperbola a parabola.

Sestrojme dvě libovolné rovnoběžné tětivy kuželosečky, u hyperboly volme její vnitřní úsečky. Přímka procházející jejich středy bude dle věty 15 průměr kuželosečky (obr. 4.20). U středových kuželoseček označme průsečíky průměru s kuželosečkou T, T' . Střed S tětivy TT' pak bude středem příslušné kuželosečky. Střed S_∞ paraboly je pouze nevlastní bod, daný směrem průměru paraboly.



Obr. 4.20: Konstrukce středu elipsy, hyperboly a průměru paraboly

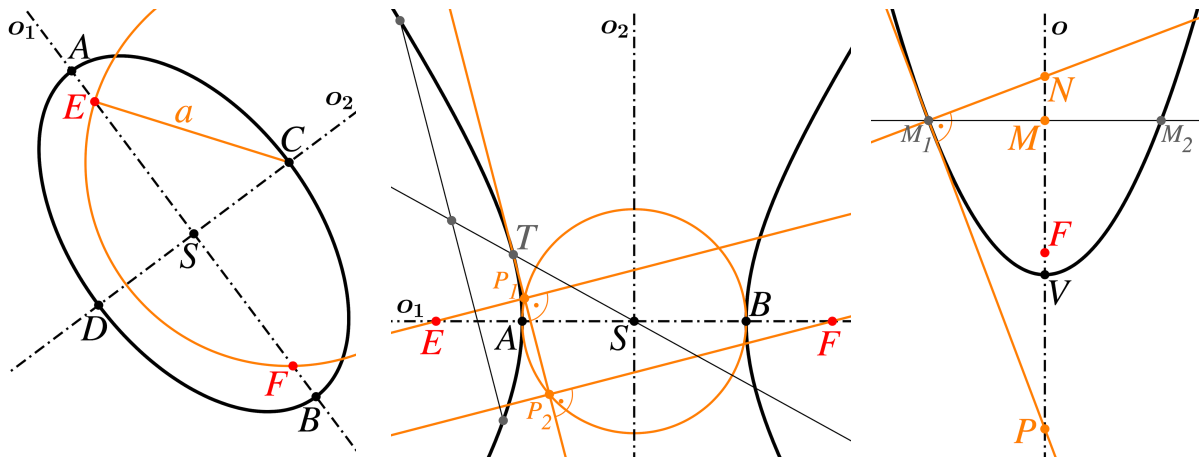
Využijme osové souměrnosti kuželoseček ke konstrukci jejich os. U středových kuželoseček sestrojme libovolnou kružnici se středem v S , tak aby měla s kuželosečkou čtyři průsečíky (obr. 4.21). Tři z nich označme postupně M_1, M_2, M_3 . Body M_1, M_2 a M_2, M_3 jsou souměrné vždy dle jedné z os elipsy resp. hyperboly, osami příslušné kuželosečky tak budou úsečky M_1M_2 a M_2M_3 . Průsečíky elipsy s osami označme A, B a C, D tak, aby platilo $|AB| > |CD|$, body A, B bude procházet hlavní osa o_1 , vrcholy C, D vedlejší osa o_2 . Hyperbolu bude hlavní osa o_1 protínat ve vrcholech A, B .



Obr. 4.21: Konstrukce os o_1, o_2 elipsy, hyperboly a osy o paraboly

Kolmice na průměr paraboly ji protne ve dvou bodech M_1, M_2 , jež jsou souměrné dle osy o paraboly, osa o tak bude osou úsečky M_1M_2 . Průsečík osy o s parabolou je její vrchol V .

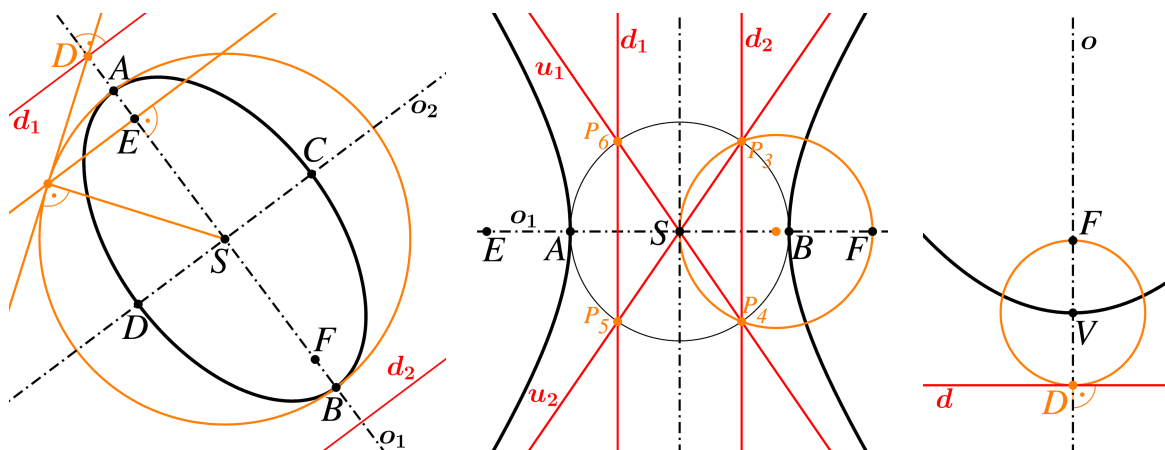
U elipsy platí $|EC| = |AS| = a$, pak průsečíky hlavní osy o_1 s kružnicí se středem C a poloměrem a budou ohniska E, F elipsy (obr. 4.22). U hyperboly bude tečna procházející krajním bodem T průměru rovnoběžná s tětivou, kterou jsme využili ke konstrukci tohoto průměru (viz věty 16, 17). Průsečíky P_1, P_2 této tečny a vrcholové kružnice jsou paty kolmic na tečnu, tyto kolmice tak protnou osu o_1 v ohniskách E, F hyperboly (věta 9, s. 23).



Obr. 4.22: Konstrukce ohnisek E, F elipsy, hyperboly a ohniska F paraboly

Střed tětivy M_1M_2 paraboly označme M . Jejím vnějším bodem P na ose o , pro nějž platí $|VM| = |VP|$ bude procházet tečna paraboly s dotykovým bodem M_1 (věta 21). Bodem M_1 ved' me normálu, jež protne osu o v bodu N . Ohnisko F pak bude středem úsečky PN .

Řídící přímka elipsy je polára jejího ohniska a má sdružený směr s její hlavní osou o_1 . Pro jednodušší konstrukci tečny využijme vrcholovou kružnici elipsy. Jedním z průsečíků vrcholové kružnice s kolmicí na osu o_1 procházející ohniskem E ved' me tečnu, jejím průsečíkem D s osou o_1 , jež je pólem této kolmice, pak prochází řídící přímka d_1 elipsy (obr. 4.23). Přímka, jež bude souměrná dle vedlejší osy o_2 s přímkou d_1 , bude řídící přímka d_2 elipsy.



Obr. 4.23: Konstrukce řídících přímek d_1, d_2 elipsy, hyperboly a řídící přímky d paraboly

Asymptoty hyperboly prochází dotykovými body tečen vedených z ohniska hyperboly k její vrcholové kružnici. Sestrojme tak Thalétovu kružnici nad průměrem SF , jejím průsečíkem P_4 resp. P_3 s vrcholovou kružnicí a středem S hyperboly bude procházet asymptota u_1 resp. u_2 . Řídící přímky d_1, d_2 hyperboly pak prochází průsečíky P_5, P_6 a P_3, P_4 vrcholové kružnice s asymptotami.

Konstrukce řídicí přímky je u paraboly díky $\varepsilon = 1$ snadná. Sestrojíme její vnější bod D na ose o paraboly takový, aby platilo $|VF| = |VD|$. Kolmice na osu o procházející D pak bude řídicí přímka d paraboly.

4.4 Konstrukce kuželoseček pomocí středové kolineace

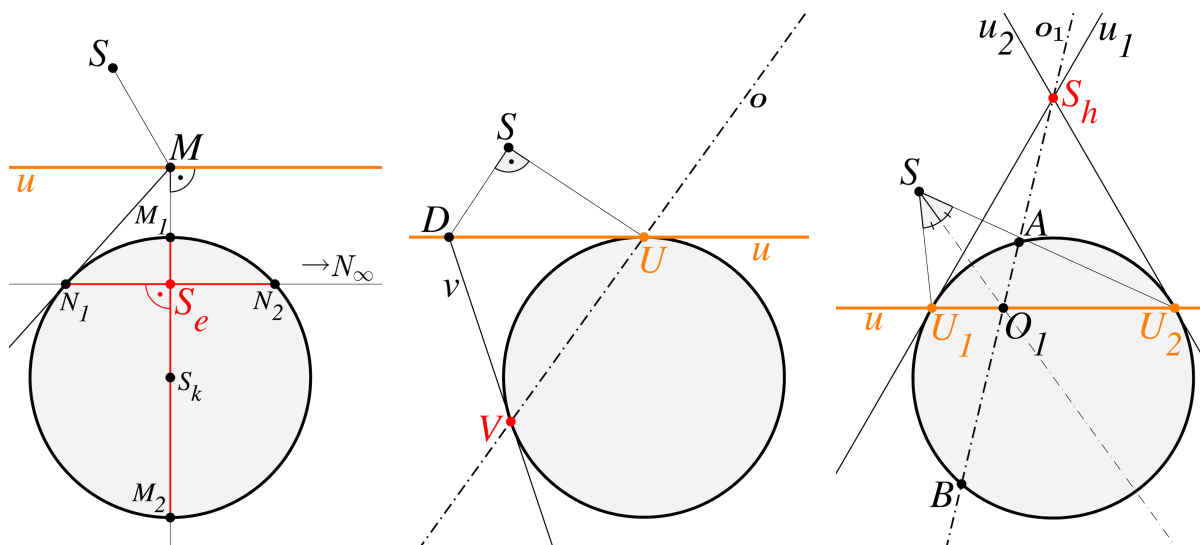
Užitím středové kolineace lze řešit mnoho konstrukčních úloh o kuželosečkách, především takových, kdy známe jejich pět navzájem různých bodů či jejich kombinaci s tečnami, příp. ohniskem apod. Při konstrukci kuželosečky z těchto daných prvků lze postupovat:

- Vyskytne-li se mezi zadanými prvky ohnisko, volíme je za střed S kolineace a kružnici k' opišeme vhodným poloměrem okolo tohoto středu. Dohledáme osu o kolineace a úběžnici u .
- Zvolme osu o kolineace jako spojnici dvou daných bodů a kružnici k' procházející těmito body. Dohledáme střed S kolineace a úběžnici u .
- Zvolme střed S kolineace v průsečíku dvou daných tečen a kružnici k' dotýkající se těchto tečen. Dohledáme osu o kolineace a úběžnici u [14, s. 145].

Jednotlivé postupy si ukážeme prakticky v příkladu 6 na konci této kapitoly.

Když budeme znát střed S , osu o , úběžnici u kolineace a kružnici k' , sestrojíme hledanou kuželosečku k jako obraz této kružnice. Mohli bychom postupně zobrazovat její jednotlivé body a významné prvky kuželosečky pak dohledat stejně jako v příkladu 5. To je ovšem dost pracné. Podívejme se, jak si tuto konstrukci usnadnit tím, že nalezneme přímo vzory některých prvků příslušné kuželosečky. Na obrázku 4.24 jsou vzory kuželoseček ve středové kolineaci se středem S a úběžnicí u .

Na obrázku 4.24 vlevo vidíme kružnici jako vzor elipsy. Kolmice na úběžnici procházející středem S_k kružnice je jejím průměrem M_1M_2 . Ten se zobrazí i na průměr elipsy, v obou případech půjde o poláru samodružného nevlastního bodu N_∞ . Polára N_1N_2 průsečíku M úběžnice u s M_1M_2 je na tento průměr kolmá. Jejich průsečík S_e je vzorem středu elipsy, úsečky M_1M_2 , N_1N_2 jejich omezených sdružených průměrů. S jejich obrazy pak pomocí *Rytzovy konstrukce* (najdeme například zde [3, s. 207]) dohledáme všechny vrcholy elipsy. S nimi už snadno sestrojíme i ohniska elipsy (viz příklad 5).



Obr. 4.24: Kružnice jako vzor elipsy, paraboly a hyperboly ve středové kolineaci

Vzor paraboly vidíme na obrázku 4.24 uprostřed. Spojnice SU udává směr osy paraboly, spojnice SD kolmá na SU směr vrcholové tečny paraboly. Dotykový bod V tečny v bodem D ke kružnici je tak vzorem vrcholu paraboly, přímka VU osy paraboly. Zobrazíme další libovolný bod kružnice a dohledáme ohnisko pomocí subtangenty a subnormály a následně pak řídicí přímku, stejně jako v příkladu 5.

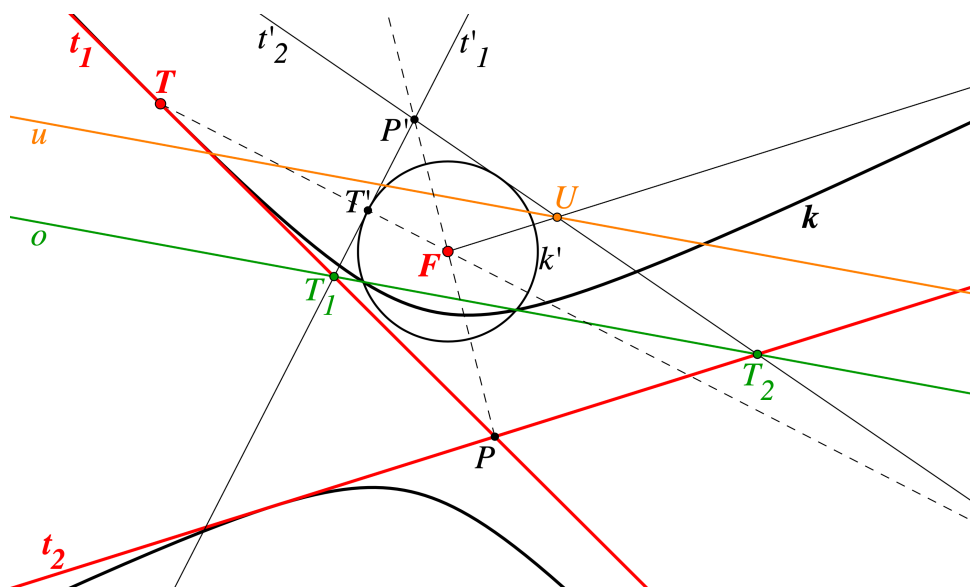
Na obrázku 4.24 vpravo vidíme kružnici jako vzor hyperboly. Tečny u_1, u_2 kružnice body U_1, U_2 jsou vzory asymptot hyperboly, jejich průsečík S_h pak jejího středu. Průsečík O_1 osy úhlu U_1SU_2 s úběžnicí u je vzorem nevlastního bodu hlavní osy hyperboly, přímka S_hO_1 se tak zobrazí na hlavní osu a její průsečíky A, B s kružnicí na hlavní vrcholy hyperboly. Ohniska už pak u hyperboly sestrojíme pomocí asymptot a vrcholové kružnice.

Příklad 6.

Nelezněte vhodnou středovou kolineaci a kružnici, jež se zobrazí v této kolineaci na kuželosečku s danými prvky. Rozhodněte, zda půjde o elipsu, parabolu nebo hyperbolu.

a) Kuželosečka je dána jejím ohniskem F , tečnou t_1 s bodem dotyku T a další tečnou t_2 .

Jak jsme si uvedli v možnosti a) na straně 41, za střed kolineace volíme dané ohnisko F . Střed kolineace je samodružným bodem středové kolineace a musí tak být zároveň ohniskem odpovídající kružnice k' , přičemž ohniskem kružnice je její střed.

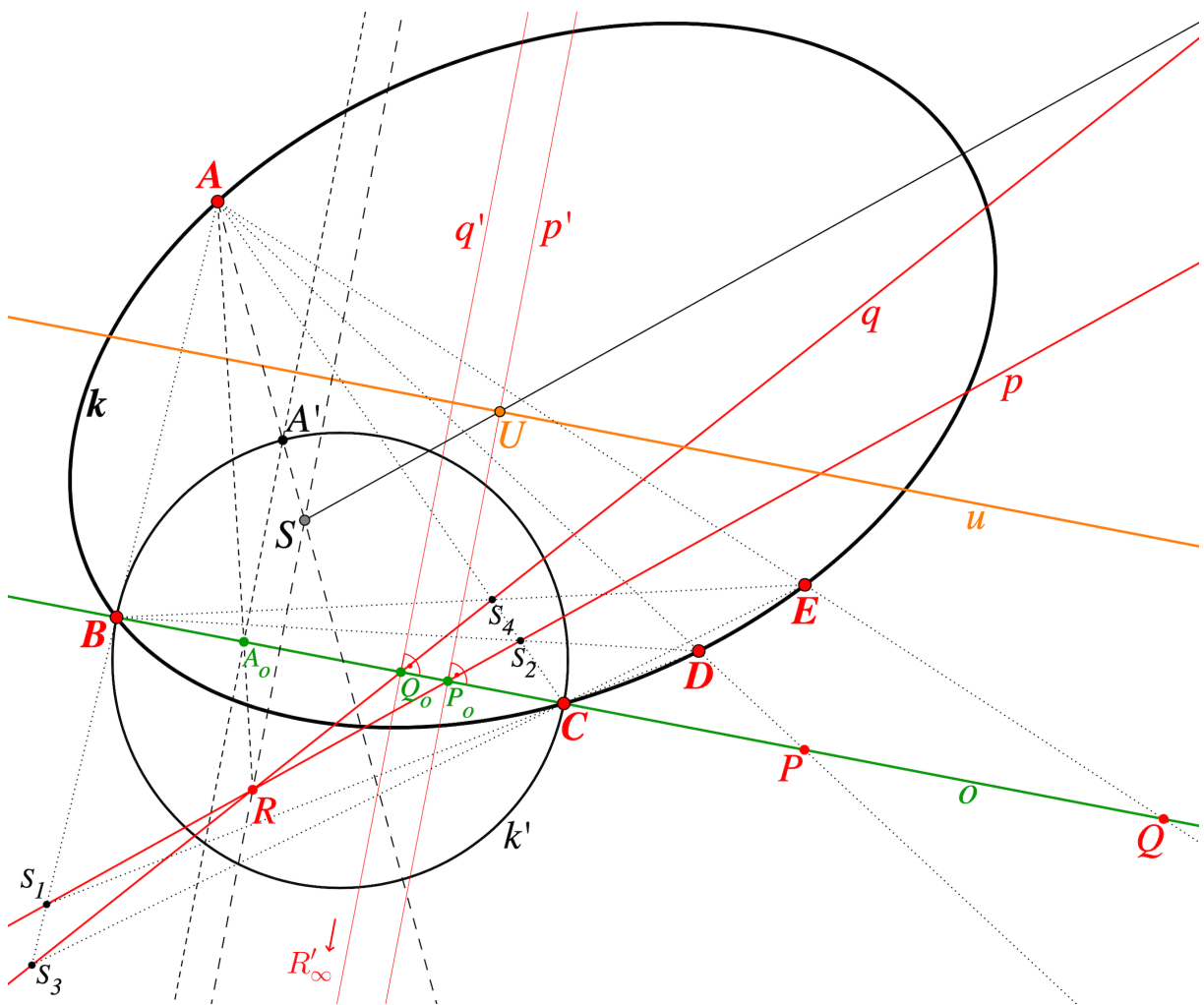


Obr. 4.25: Konstrukce kuželosečky dané ohniskem F , tečnou t_1 s bodem dotyku T a tečnou t_2

Sestrojme tedy kružnici k' se středem v ohnisku F (obr. 4.25). Vzor dotykového bodu T bude ležet na přímce FT a zároveň na kružnici k' . Bodem T' může být libovolný ze dvou průsečíků, tato volba ovlivní jen polohu některých prvků kolineace a nikoli výslednou kuželosečku. Tečna t'_1 kružnice k' bodem T' je vzorem tečny t_1 . Průsečíku P tečen t_1, t_2 pak odpovídá průsečík P' přímky FP a t'_1 . Druhá tečna t'_2 bodem P' ke kružnici k' je vzorem tečny t_2 . Průsečíky T_1, T_2 odpovídajících si tečen prochází osa o kolineace. Přímka rovnoběžná s t_2 vedená středem F protne odpovídající tečnu t'_2 v úběžníku U . Úběžnice u prochází úběžníkem a je rovnoběžná s osou o . Protíná kružnici k' ve dvou bodech a hledanou kuželosečkou tak bude v daném případě hyperbola. Příklad bude mít nejvýše jedno řešení.

b) [14, s. 148] *Kuželosečka je dána pěti různými body A, B, C, D, E , z nichž žádné tři nejsou kolineární.*

Dvěma libovolnými zadanými body, v našem případě B, C , ved' me osu o kolineace (obr. 4.26). Sestrojme kružnici k' nad průměrem BC . Pomocí úplného čtyřrohu $ABCD, ABCE$ sestrojme poláry p, q tak, aby jejich póly byly průsečíky P, Q přímek AD, AE s osou o kolineace. Tyto body tak budou samodružné. Průsečíky P_o, Q_o polár p, q s osou o pak musí procházet i odpovídající poláry p', q' vzhledem ke kružnici k' , jež budou na průměr BC této kružnice kolmé. Průsečík R polár p, q je obrazem společného nevlastního bodu R'_∞ polár p', q' . Průsečíkem A_o přímky AR s osou o tak ved' me přímku $A_oR'_\infty$, jeden z jejích průsečíků s kružnicí k' zvolme jako vzor A' bodu A . Tato volba podobu výsledné kuželosečky neovlivní. Střed S kolineace bude průsečíkem spojnic odpovídajících si bodů AA' a RR'_∞ . Přímka procházející středem S rovnoběžná s polárou p protne její obraz p' v úběžníku U . V daném případě úběžnice u neprotíná kružnici k' v žádném bodu a hledanou kuželosečkou k je tak elipsa. Při splnění podmínky v zadání bude mít příklad vždy jedno řešení.



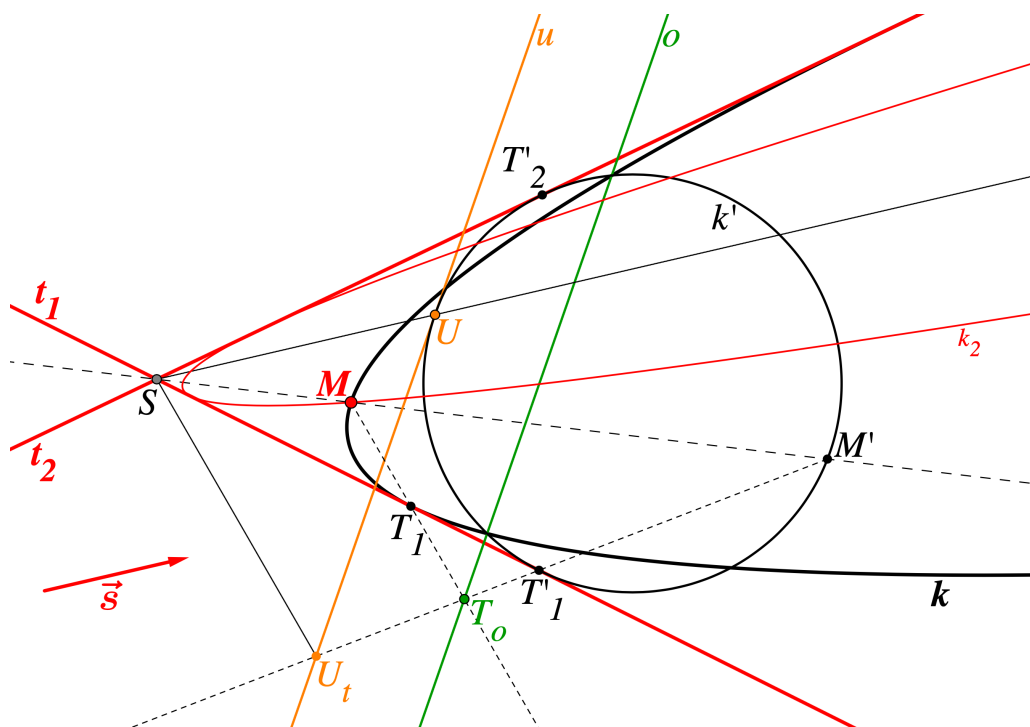
Obr. 4.26: Konstrukce kuželosečky dané body A, B, C, D, E

Z těchto dvou příkladů je zřejmé, že existuje nekonečně mnoho poloh úběžnice takových, abychom získali elipsu nebo hyperbolu. Pro parabolu jsou však takové možnosti s danou osou kolineace nejvýše dvě. Můžeme říci, že vždy známe jednu tečnu paraboly – nevlastní přímku. Abychom tak získali z náhodně daných prvků parabolu, potřebujeme k tomu o jeden

prvek v zadání méně než u elipsy a hyperboly. Toto zadání však není úplně jednoznačné, což plyne právě ze dvou možných poloh úběžnice, pro parabolu danou čtyřmi body by například existovala až dvě řešení.

c) Parabola je dána jejími dvěma tečnami t_1, t_2 , bodem M a směrem osy \vec{s} .

Zvolme střed S kolineace jako průsečík daných tečen t_1, t_2 (obr. 4.27). Všechny přímky procházející středem kolineace jsou samodružné, tečny t_1, t_2 tak musí být zároveň tečny kružnice k' . Sestrojme tedy libovolnou kružnici k' , jež se dotýká obou tečen. Úběžník U , jež bude vzorem nevlastního bodu paraboly, musí ležet na průsečíku přímky procházející středem S se směrem \vec{s} s kružnicí k' . Máme dvojí volbu, ta však podobu paraboly neovlivní, směr osy bude u obou stejný. Tečna bodem U ke kružnici k' je úběžnice u . Vzor M' bodu M bude ležet na průsečíku přímky SM a kružnice k' . Opět máme dvojí volbu, jež tentokrát ovlivní uspořádání bodů na parabole. My jsme zvolili bod M' , jež leží mezi dotykovými body T'_1, T'_2 tečen t_1, t_2 s kružnicí k' . Přímka $M'T'_1$ protne úběžnici u v bodu U_t , spojnice SU_t tak určuje směr odpovídající přímky bodem M , jež protne tečnu t_1 v bodu T_1 . Průsečíkem T_o odpovídajících si přímkou $M'T'_1$ a MT_1 pak prochází osa o kolineace rovnoběžná s úběžnicí u .



Obr. 4.27: Konstrukce paraboly dané jejími tečnami t_1, t_2 , bodem M a směrem osy \vec{s}

Stejně bychom postupovali pro druhý průsečík přímky SM s kružnicí k' , ten by ležel mezi body U, T'_1 . Pak by parabola k_2 měla odpovídající uspořádání, jak můžeme také vidět na obrázku 4.27. Příklad bude mít nejvýše dvě řešení.

Po nalezení všech prvků středové kolineace pak lze sestavit samotnou kuželosečku jako obraz kružnice k' podle postupu, který jsme si uvedli v této kapitole.

5 Algebraická definice kuželosečky

5.1 Obecná rovnice kuželosečky

Definice 10. Množinu bodů $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, jež splňují rovnici:

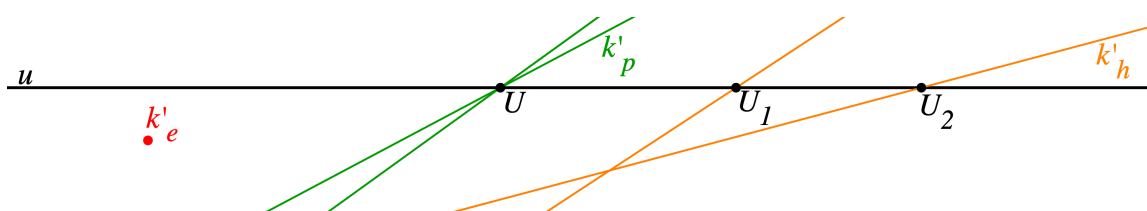
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (5.1)$$

kde A, B, C, D, E, F jsou reálná čísla a platí $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, nazýváme kuželosečka.

Rovnice 5.1 se pak nazývá *obecná rovnice kuželosečky*. Mohou jí ovšem vyhovovat nejen regulární, ale i singulární kuželosečky.

- Pokud je polynom na levé straně rovnice 5.1 rozložitelný na součin lineárních polynomů s reálnými koeficienty (tedy je *reducibilní nad \mathbb{R}*), půjde o tyto singulární kuželosečky:
 - *dvě rovnoběžné přímky*, např. polynom $x^2 + 2xy + y^2$ můžeme rozložit na $(x + y) \cdot (x + y)$, získáme *dvojnásobnou přímku* $x + y = 0$; nebo polynom $x^2 + 3x + 2$ můžeme rozložit na $(x + 1) \cdot (x + 2)$, získáme *dvě různé rovnoběžky* $x + 1 = 0$ a $x + 2 = 0$;
 - *dvě různoběžné přímky*, např. polynom $x^2 - y^2$ můžeme rozložit na $(x + y) \cdot (x - y)$, získáme dvě různoběžky $x + y = 0$ a $x - y = 0$.
- Pokud nelze polynom na levé straně rovnice 5.1 rozložit na součin lineárních polynomů s reálnými koeficienty (tedy je *ireducibilní nad \mathbb{R}*), je kuželosečka singulární v případě, že je množinou obsahující:
 - *jeden reálný bod*, např. $x^2 + y^2 = 0$, této rovnici vyhovuje jediný reálný bod $M = [0, 0]$;
 - *žádný reálný bod*, např. $x^2 + 1 = 0$ nebo $x^2 + 2y^2 + 1 = 0$.
- Pokud je polynom na levé straně rovnice 5.1 ireducibilní nad \mathbb{R} a kuželosečka je množinou nekonečně mnoha reálných bodů,¹⁷ půjde o regulární kuželosečku, tedy o *elipsu, parabolu* nebo *hyperbolu* [7, s. 20].

Ve větě 11 (s. 28) rozlišujeme regulární kuželosečky podle počtu jejich nevlastních bodů. Uveďme si definici, jež bude platit i pro kuželosečky singulární:



Obr. 5.1: Singulární kuželosečka eliptického, parabolického a hyperbolického typu a nevlastní body

Definice 11. Kuželosečku, která nemá s nevlastní přímkou společné žádné reálné body, budeme nazývat kuželosečkou *eliptického typu*. Kuželosečku, která má s nevlastní přímkou společné právě dva reálné různé body, budeme nazývat kuželosečkou *hyperbolického typu* a kuželosečku, která má s nevlastní přímkou společný právě jeden dvojnásobný bod, budeme nazývat kuželosečkou *parabolického typu* [16, s. 70].

¹⁷Množina určená rovnicí 5.1 může obsahovat žádný, jeden nebo nekonečně mnoho reálných bodů. Pokud tedy obsahuje více než jeden reálný bod, pak už víme, že jich bude obsahovat nekonečně mnoho [15, s. 20].

Tato definice pak odpovídá rozdělení kuželoseček v kapitole 1 dle poměru odchylek osy kuželové plochy od její povrchy resp. od sečné roviny, tedy podle toho, zda je tato sečná rovina rovnoběžná s eliptickým, hyperbolickým nebo parabolickým řezem (viz tabulka 1). Dvě různoběžné přímky mají dva směry a tedy dva nevlastní body, dvě rovnoběžné přímky či dvojnásobná přímka směr pouze jeden. Jeden bod pak zřejmě žádný směr nemá (obr. 5.1). Prázdnou množinu jsme ovšem mohli získat nejen řezem rovnoběžným s eliptickým, ale i s tím parabolickým. Může mít ale prázdná množina společný bod s nevlastní přímkou?

	Reducibilní nad \mathbb{R}	Ireducibilní nad \mathbb{R}		
		Singulární		Regulární
Počet bodů v \mathbb{R}	∞	1	0	∞
Eliptického typu	\times	Bod	Prázdná množina	Elipsa
Parabolického typu	Dvě rovnoběžky; totožné či různé	\times	Prázdná množina	Parabola
Hyperbolického typu	Dvě různoběžky	\times	\times	Hypebola

Tabulka 1: Přehled kuželoseček v \mathbb{R}^2

Podívejme se tak na rovnice kuželoseček v oboru komplexních čísel a to nejprve na jeden reálný bod a polynom $x^2 + y^2$, jež je nad \mathbb{C} reducibilní na $(x + iy) \cdot (x - iy)$. Získáváme tak dvě *imaginární různoběžky*. Průsečíkem dvou komplexně sdružených přímek je vždy reálný bod, jež tvoří tuto kuželosečku v \mathbb{R} . Její dva nevlastní body nejsou reálné, půjde o dva komplexně sdružené body a kuželosečka je eliptického typu.

Polynom $x^2 + 1$ je reducibilní na $(x + i) \cdot (x - i)$ a získáváme dvě různé *imaginární rovnoběžky*. I průsečíkem komplexně sdružených rovnoběžek je reálný bod, ovšem v tomto případě jen nevlastní. Tato prázdná množina v \mathbb{R} je tak skutečně kuželosečkou parabolického typu.

Polynom $x^2 + 2y^2 + 1$ je pak ireducibilní i nad \mathbb{C} , ovšem kuželosečka je množinou obsahující nekonečně mnoho komplexních bodů a jde tak o *imaginární elipsu*.

	Reducibilní nad \mathbb{C}	Ireducibilní nad \mathbb{C}
	Singulární	Regulární
Počet bodů v \mathbb{C}	∞	∞
Eliptického typu	Dvě imaginární různoběžky	Elipsa, imaginární elipsa
Parabolického typu	Dvě reálné nebo imaginární rovnoběžky	Parabola
Hyperbolického typu	Dvě reálné různoběžky	Hypebola

Tabulka 2: Přehled kuželoseček v \mathbb{C}^2

Jak vidíme v tabulce 2, pomocí komplexních čísel bychom dosáhli v přehledu kuželoseček větší ucelenosti – všechny singulární kuželosečky pak lze rozložit na dvě přímky. Na dvě reálné či imaginární rovnoběžky rozložíme kuželosečky parabolického typu, na dvě imaginární

různoběžky kuželosečky eliptického typu a na dvě reálné různoběžky kuželosečky hyperbolického typu. Imaginární elipsa je pak v \mathbb{C}^2 kuželosečka regulární [15, s. 98].

Kuželosečka je jednoznačně určena pěti body. Dosazením jejich souřadnic za x, y do rovnice 5.1 můžeme vytvořit soustavu lineárních rovnic, jejímž řešením získáme koeficienty A, B, C, D, E, F . Budeme mít pět rovnic o šesti neznámých, tato homogenní soustava tak bude mít vždy nenulové řešení. Toto řešení bude jednoznačné až na násobek, pokud jsou body různé a žádné čtyři neleží na jedné přímce [16, s. 54]. Existují kuželosečky, jimž stačí k jejich jednoznačnému určení bodů méně. Některé rovnice u nich nahradíme vztahy mezi koeficienty, jež plynou z jejich unikátních vlastností. Pro získání regulární kuželosečky pak nesmí být kolinéární žádné její tři body (její podmnožinou není žádná přímka).

V dalším textu se opět zaměříme na regulární, reálné kuželosečky. Podívejme se na možné vztahy mezi koeficienty některých z nich. Mějme přímku d danou rovnicí $d: ax + by + c = 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $(a, b) \neq (0, 0)$. Můžeme ji tak vynásobit výrazem:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot (ax + by + c) = 0$$

a dosadit za její koeficienty:

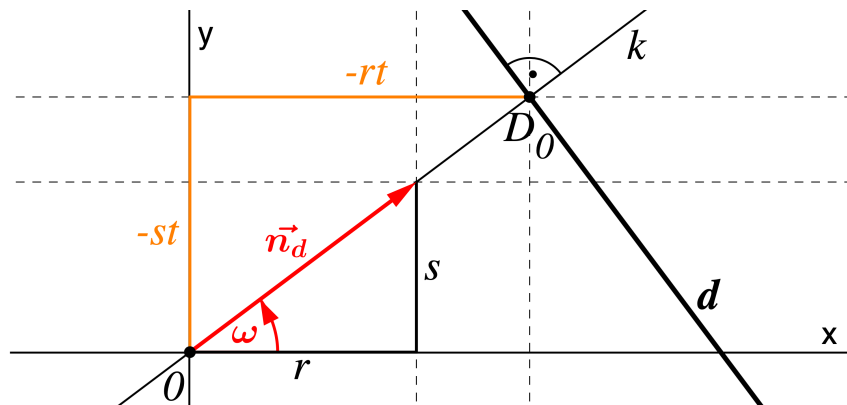
$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = r, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = s, \quad \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = t,$$

čímž získáváme ekvivalentní rovnici $rx + sy + t = 0$. Pro souřadnice r, s jejího normálového vektoru $\vec{n}_d = (r, s)$ pak platí:

$$r^2 + s^2 = 1, \tag{5.2}$$

z čehož také plyne:

$$r = \cos \omega \wedge s = \sin \omega, \tag{5.3}$$



Obr. 5.2: Normálový vektor přímky d a bod D_0

kde $\omega \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je orientovaný úhel, jež svírá kladná x -ová poloosa s vektorem \vec{n}_d (obr. 5.2). Bod D_0 je pata kolmice k na přímku d procházející počátkem. Pro souřadnice bodu D_0 platí $D_0 = [-rt, -st]$, jak můžeme ověřit jejich dosazením do rovnice přímky d :

$$r \cdot (-rt) + s \cdot (-st) + t = -t \cdot (r^2 + s^2) + t = -t + t = 0 \quad (\text{viz rovnice 5.2})$$

a do rovnice přímky k , jež je ve tvaru $k: sx - ry = 0$:

$$s \cdot (-rt) - r \cdot (-st) = -rst + rst = 0.$$

Vzdálenost bodu $M = [x, y]$ od přímky d pak můžeme vyjádřit:

$$|Md| = \frac{|rx + sy + t|}{|\vec{n}|} = |rx + sy + t|.$$

Mějme pevnou přímku $d: rx + sy + t = 0$, pevný bod $F = [g, h]$; $F \notin d$ a $\varepsilon > 0$. Množinou všech bodů $M = [x, y]$ takových, že $|MF| = \varepsilon \cdot |Md|$, je regulární kuželosečka. Dosadíme:

$$\sqrt{(x-g)^2 + (y-h)^2} = \varepsilon \cdot |rx + sy + t|.$$

Rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$x^2 - 2gx + g^2 + y^2 - 2hy + h^2 = \varepsilon^2 \cdot (r^2x^2 + 2rsxy + s^2y^2 + 2rtx + 2sty + t^2),$$

kterou upravíme na

$$(1 - \varepsilon^2 r^2) \cdot x^2 + 2 \cdot (-\varepsilon^2 rs) \cdot xy + (1 - \varepsilon^2 s^2) \cdot y^2 + 2 \cdot (-g - \varepsilon^2 rt) \cdot x + 2 \cdot (-h - \varepsilon^2 st) \cdot y + (g^2 + h^2 - \varepsilon^2 t^2) = 0,$$

čímž po dosazení za konstantní výrazy v závorkách

$$\gamma \cdot (1 - \varepsilon^2 r^2, -\varepsilon^2 rs, 1 - \varepsilon^2 s^2, -g - \varepsilon^2 rt, -h - \varepsilon^2 st, g^2 + h^2 - \varepsilon^2 t^2) = (A, B, C, D, E, F), \quad (5.4)$$

kde reálné číslo $\gamma \neq 0$, skutečně získáváme obecnou rovnici kuželosečky 5.1. Platí věta:

Věta 22. Je-li 5.1 rovnice regulární a reálné kuželosečky k , pak znaménko diskriminantu $\mathcal{D} = B^2 - AC$ určuje druh této kuželosečky k . Pro hodnoty $\mathcal{D} < 0$ je kuželosečkou k elipsa, pro $\mathcal{D} = 0$ parabola a pro $\mathcal{D} > 0$ hyperbola [7, s. 20].

Tuto větu si pomocí rovnice 5.4 snadno dokážeme. Vyjádřeme koeficienty A, B, C :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= B^2 - AC = \gamma^2 \cdot \varepsilon^4 r^2 s^2 - \gamma \cdot (1 - \varepsilon^2 r^2) \cdot \gamma \cdot (1 - \varepsilon^2 s^2) \\ \mathcal{D} &= \gamma^2 \cdot (\varepsilon^4 r^2 s^2 - 1 + \varepsilon^2 s^2 + \varepsilon^2 r^2 - \varepsilon^4 r^2 s^2) = \gamma^2 \cdot (-1 + \varepsilon^2 \cdot (s^2 + r^2)) \\ \mathcal{D} &= B^2 - AC = \gamma^2 \cdot (\varepsilon^2 - 1). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Znaménko diskriminantu \mathcal{D} tak závisí pouze na hodnotě numerické excentricity ε kuželosečky. Násobek rovnice γ toto znaménko nijak neovlivní, protože jeho druhá mocnina bude vždy kladná. Už víme, že s $0 < \varepsilon < 1$ získáme elipsu, $\varepsilon = 1$ parabolu a $\varepsilon > 1$ hyperbolu. Pak znaménko diskriminantu \mathcal{D} v rovnici 5.5 bude skutečně odpovídat větě 22.

I v algebraické definici tak vidíme hranici, jež parabola mezi elipsou a hyperbolou tvoří. Diskriminant $\mathcal{D} = B^2 - AC$ může nabývat nekonečně mnoha hodnot pro elipsu a hyperbolu, ovšem pro parabolu nabývá jediné hodnoty $\mathcal{D} = 0$. Vztah mezi \mathcal{D} a ε najdeme v interaktivní konstrukci zde <https://www.geogebra.org/m/kuxbbtf8>.

Pro určení paraboly tak stačí čtyři body. Ovšem z $B = \pm\sqrt{AC}$ plyne, že zadání nemusí být jednoznačné, protože jej mohou splňovat až dvě paraboly.

Dalším speciálním případem kuželosečky je rovnoosá hyperbola. Pro její koeficienty po dosazení $\varepsilon = \sqrt{2}$ platí:

$$A = \gamma \cdot (1 - 2r^2),$$

$$C = \gamma \cdot (1 - 2s^2) = \gamma \cdot (1 - 2 \cdot (1 - r^2)) = \gamma \cdot (-1 + 2r^2).$$

Pak tedy platí $A = -C$ a pro jednoznačné zadání rovnoosé hyperboly také stačí čtyři body, pokud neleží ve speciální poloze, kdy získáme nekonečno řešení. Podívejme se, za jakých podmínek budou koeficienty A a C shodné:

$$\gamma \cdot (1 - \varepsilon^2 r^2) = \gamma \cdot (1 - \varepsilon^2 s^2)$$

$$1 - \varepsilon^2 r^2 = 1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 r^2$$

$$\varepsilon^2 \cdot (1 - 2r^2) = 0.$$

Pak získáváme dvě řešení, kdy

$$r = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; s = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

nebo

$$\varepsilon = 0.$$

Připomeňme si, že (r, s) je normálový vektor řídicí přímky (viz 5.3), tedy zároveň směrový vektor hlavní osy resp. osy kuželosečky. A, C jsou tak shodné pro všechny kuželosečky s hlavními směry $(1, 1)$ a $(1, -1)$ (viz s. 35). Rovnoosá hyperbola má pak v této poloze oba koeficienty A, C nulové ($A = -C$). Řešení, kdy $\varepsilon = 0$, odpovídá kružnici. Tu ovšem nelze pomocí řídicí přímky definovat a tuto hodnotu jsme při odvozování rovnice 5.4 vyloučili. Její rovnici však snadno získáme pomocí Pýthagorovy věty, pro všechny body $M = [x, y]$ kružnice se středem v počátku a poloměrem r platí:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

pro kružnice se středem $S = [m, n]$ po dosazení $x = (x' - m)$ a $y = (y' - n)$ a roznásobením:

$$x'^2 + y'^2 + 2 \cdot (-m) \cdot x' + 2 \cdot (-n) \cdot y' + (m^2 + n^2 - r^2) = 0$$

a pro koeficienty obecné rovnice kružnice skutečně platí $A = C$. Zároveň bude vždy platit $B = 0$. Pro jednoznačné zadání kružnice tak stačí tři body. Koeficient B ovšem nemusí být nulový jen pro $\varepsilon = 0$, ale také pro $r = 0$ nebo $s = 0$. To nastane v případě, kdy budou hlavní směry kuželosečky rovnoběžné se souřadnicovými osami x a y (opět viz 5.3). Vztahy mezi koeficienty rovnice kuželosečky shrnuje tabulka 3; to, jak koeficienty ovlivňují podobu kuželosečky vyzkoušejme interaktivně zde <https://www.geogebra.org/m/uuws2brx>.

	$A = C; A \neq 0$	$(A, C) = (0, 0)$	$A = -C; A \neq 0$	$A \neq \pm C$
$B = 0$	$\varepsilon = 0$	×	$\varepsilon = \sqrt{2}$	$\varepsilon > 0; \varepsilon \neq \sqrt{2}$
	×	×	$r = 0$ nebo $s = 0$	
$B \neq 0$	$\varepsilon > 0; \varepsilon \neq \sqrt{2}$	$\varepsilon = \sqrt{2}$		$\varepsilon > 0; \varepsilon \neq \sqrt{2}$
	$r = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $s = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$		$r \neq 0; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm 1$ a $s \neq 0; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm 1$	

Tabulka 3: Hodnoty ε a souřadnic směrového vektoru (hlavní) osy kuželosečky dané rovnicí 5.1

5.2 Využití polárních vlastností

5.2.1 Polára, sdružené směry a střed kuželosečky

Začneme definicí poláry [13, s. 192]:¹⁸

Definice 12. Rovnice poláry p bodu $P = [x_p, y_p]$ ¹⁹ vzhledem k regulární kuželosečce dané rovnicí 5.1 je

$$(Ax_p + By_p + D) \cdot x + (Bx_p + Cy_p + E) \cdot y + Dx_p + Ey_p + F = 0. \quad (5.6)$$

Víme, že když bod P leží na kuželosečce, je polára p tečnou dané kuželosečky a bod P jejich bodem dotyku. Z rovnice 5.6 vyjádříme souřadnice směrového vektoru $\vec{u} = (u, v)$ poláry p bodu P :

$$\begin{aligned} u &= (Bx_p + Cy_p + E), \\ v &= -(Ax_p + By_p + D). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Polára nevlastního bodu daného vektorem \vec{u} bude průměrem kuželosečky (definice 9, s. 34). Rovnici tohoto průměru získáme ze vztahů 5.7, platí věta [13, s. 193]:

Věta 23. Rovnice průměru regulární kuželosečky dané rovnicí 5.1, který je sdružený se směrem daným vektorem $\vec{u} = (u, v)$, je

$$(Ax + By + D) \cdot u + (Bx + Cy + E) \cdot v = 0. \quad (5.8)$$

Po úpravě rovnice 5.8 vyjádříme směrový vektor \vec{u}' tohoto průměru. Směry dané $\vec{u} = (u, v)$ a $\vec{u}' = (u', v')$ tak budou sdruženými směry (viz věty 17 a 19, s. 35):

$$\begin{aligned} (Au + Bv) \cdot x + (Bu + Cv) \cdot y + Du + Ev &= 0, \\ u' &= (Bu + Cv), \\ v' &= -(Au + Bv). \end{aligned}$$

Opět tak bude platit vztah

$$u' \cdot (Au + Bv) + v' \cdot (Bu + Cv) = 0,$$

jehož úpravou získáme rovnici v následující větě [13, s. 193]:

Věta 24. Pro sdružené směry regulární kuželosečky dané rovnicí 5.1, jež jsou dány nenulovými vektory $\vec{u} = (u, v)$ a $\vec{u}' = (u', v')$ platí vztah

$$A \cdot uu' + B \cdot (uv' + u'v) + C \cdot vv' = 0. \quad (5.9)$$

Střed kuželosečky je pak průsečíkem jejích dvou libovolných průměrů. Zvolme průměry sdružené se směry danými vektory $(1, 0)$ a $(0, 1)$ a dosadíme do rovnice 5.8 [13, s. 193]:

Věta 25. Souřadnice středu $S = [m, n]$ regulární středové kuželosečky dané rovnicí 5.1 jsou řešením soustavy rovnic²⁰

$$\begin{aligned} Am + Bn + D &= 0, \\ Bm + Cn + E &= 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

¹⁸Odvození rovnice poláry můžeme najít zde [17, s. 113–118].

¹⁹Pokud bude bod P ohniskem dané kuželosečky, získáme rovnicí její řídicí přímky (viz s. 33).

²⁰Střed paraboly je nevlastní bod, v jejím případě nemá soustava rovnic 5.10 řešení. Pokud ovšem bude mít tato soustava nekonečně mnoho řešení, půjde o singulární kuželosečku parabolického typu.

5.2.2 Asymptotické směry kuželosečky

Víme, že směr průměru procházejícího dotykovým bodem tečny kuželosečky je sdružený se směrem této tečny. Pak směr asymptoty kuželosečky, která prochází středem kuželosečky jako její průměr a je zároveň i tečnou v nevlastním bodu, je sdružený opět se směrem této asymptoty. Pro souřadnice vektorů těchto shodných sdružených směrů tak platí:

$$(u', v') = (u, v). \quad (5.11)$$

Dosazením 5.11 do rovnice 5.9 tak získáme rovnici, jež bude platit pro souřadnice vektoru určujícího asymptotický směr kuželosečky [18, s. 19–23]:

Definice 13. Směr daný nenulovým vektorem $\vec{u} = (u, v)$ se nazývá asymptotickým směrem kuželosečky o rovnici 5.1, jestliže je

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 = 0. \quad (5.12)$$

Tuto rovnici 5.12 z definice 13 můžeme rozepsat:

$$u \cdot (Au + Bv) + v \cdot (Bu + Cv) = 0$$

a pro nenulový vektor \vec{u} bude existovat řešení právě tehdy, když existuje reálné číslo θ takové, že

$$\begin{aligned} Au + Bv &= \theta v, \\ Bu + Cv &= -\theta u. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Eliminací u resp. v získáme rovnice:

$$\begin{aligned} (B^2 - AC - \theta^2) \cdot v &= 0, \\ (B^2 - AC - \theta^2) \cdot u &= 0, \end{aligned}$$

potom je alespoň jedno z čísel u, v nenulové v případě, že $B^2 - AC - \theta^2 = 0$. Je zřejmé, že pak $\theta^2 = \mathcal{D}$. Pro $\mathcal{D} < 0$ takové reálné číslo θ neexistuje, což odpovídá tomu, že elipsa nemá asymptotický směr. Pro $\mathcal{D} = 0$ získáme jedno řešení, což skutečně odpovídá jednomu asymptotickému směru paraboly. Pro $\mathcal{D} > 0$ jde o hyperbolu se dvěma asymptotickými směry. Získáme dva kořeny $\theta_{1,2} = \pm\sqrt{\mathcal{D}}$.

Dosadíme $\pm\sqrt{\mathcal{D}}$ za θ do rovnic 5.13. Nenulové vektory, které budou jejich řešením pak určují asymptotické směry paraboly a hyperboly. Najdeme je v tabulce 4.

$(A, C) = (0, 0)$ nastane pouze u rovnoosé hyperboly (viz tabulka 3). Rovnice 5.12 pak bude ve tvaru $2Buv = 0$, jejímž řešením jsou nenulové vektory $\vec{u}_1 = (1, 0)$ a $\vec{u}_2 = (0, 1)$.

Dosazením souřadnic vektorů, které určují asymptotický směr, do rovnice 5.8, pak získáme v případě hyperboly rovnice jejích asymptot, v případě paraboly tato rovnice nebude mít řešení. Její asymptotou je nevlastní přímka, kterou nelze v eukleidovské rovině vyjádřit.

Asymptotický směr paraboly je rovnoběžný se směrem její osy. Což můžeme snadno dokázat dosazením za koeficienty z rovnice 5.4. Pro $A \neq 0$ platí:

$$\vec{u} = (-B; A) = (\gamma \cdot r s; \gamma \cdot (1 - r^2)) = (\gamma \cdot r s; \gamma \cdot s^2) = (\gamma s \cdot r; \gamma s \cdot s) = \gamma s \cdot \vec{s}_o$$

a směrový vektor $\vec{s}_o = (r, s)$ osy paraboly je skutečně násobkem směrového vektoru $\vec{u} = (u, v)$ asymptotického směru paraboly. Pro $C \neq 0$ pak dojdeme ke stejnému výsledku.

	Parabola $\vec{u} = (u, v)$	Hyperbola $\vec{u}_1 = (u_1, v_1); \vec{u}_2 = (u_2, v_2)$
$A \neq 0$	$\vec{u} = (-B; A)$	$\vec{u}_{1,2} = (-B \pm \sqrt{\mathcal{D}}; A)$
$C \neq 0$	$\vec{u} = (C; -B)$	$\vec{u}_{1,2} = (C; -B \mp \sqrt{\mathcal{D}})$
$A \neq 0; C \neq 0$	$(-B; A) = k \cdot (C; -B)$	$(-B \pm \sqrt{\mathcal{D}}; A) = k \cdot (C; -B \mp \sqrt{\mathcal{D}})$
$(A, C) = (0, 0)$	\times	$\vec{u}_1 = (1, 0); \vec{u}_2 = (0, 1)$
Asymptoty	\times	$(Ax + By + D) u_{1,2} + (Bx + Cy + E) v_{1,2} = 0$

Tabulka 4: Vektory určující asymptotické směry paraboly a hyperboly daných 5.1 ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

5.2.3 Hlavní směry kuželosečky

Už víme, že hlavní směry kuželosečky jsou sdružené směry, jež jsou na sebe kolmé. Jsou tak určeny vektory, pro jejichž souřadnice platí:

$$(u', v') = (v, -u). \quad (5.14)$$

Opět dosadíme do rovnice 5.9 a získáváme definici [17, s. 129]:

Definice 14. Směr daný nenulovým vektorem $\vec{u} = (u, v)$ se nazývá hlavním směrem kuželosečky o rovnici 5.1, jestliže je

$$A \cdot uv + B \cdot (v^2 - u^2) - C \cdot uv = 0. \quad (5.15)$$

Rovnici 5.15 můžeme opět rozepsat:

$$v \cdot (Au + Bv) - u \cdot (Bu + Cv) = 0$$

a pro nenulový vektor \vec{u} bude existovat řešení právě tehdy, když existuje reálné číslo λ takové, že

$$\begin{aligned} Au + Bv &= \lambda u, \\ Bu + Cv &= \lambda v. \end{aligned}$$

Eliminací u resp. v získáme rovnice:

$$\begin{aligned} ((A - \lambda)(C - \lambda) - B^2) \cdot v &= 0, \\ ((A - \lambda)(C - \lambda) - B^2) \cdot u &= 0. \end{aligned}$$

Potom je alespoň jedno z čísel u, v nenulové v případě, že $(A - \lambda)(C - \lambda) - B^2 = 0$. Dokažme, že tato rovnice bude mít vždy dvě řešení. Upravme, vyjádříme λ a následně dosadíme za koeficienty z rovnice 5.4:

$$\lambda^2 - (A + C) \cdot \lambda - \mathcal{D} = 0, \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{A + C \pm \sqrt{(A + C)^2 + 4 \cdot \mathcal{D}}}{2} \\ \lambda_{1,2} &= \frac{\gamma \cdot (1 - \varepsilon^2 r^2 + 1 - \varepsilon^2 s^2) \pm \sqrt{\gamma^2 \cdot (1 - \varepsilon^2 r^2 + 1 - \varepsilon^2 s^2)^2 + 4\gamma^2 \cdot (\varepsilon^2 - 1)}}{2} \\ \lambda_{1,2} &= \frac{\gamma \cdot (2 - \varepsilon^2) \pm \gamma \cdot \sqrt{\varepsilon^4}}{2} \end{aligned}$$

Diskriminant této rovnice bude vždy kladný, rovnice tak bude mít vždy dva kořeny. Navíc je patrné, že řešení této rovnice bude pro všechny podobné kuželosečky shodné až na násobek. Dopočítáme kořeny $\lambda_{1,2}$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\gamma \cdot (2 - \varepsilon^2 \pm \varepsilon^2)}{2} \begin{cases} \gamma \\ \gamma \cdot (1 - \varepsilon^2). \end{cases}$$

Kořeny $\lambda_{1,2}$ ²¹ odpovídají koeficientům A, C v případě, kdy jsou hlavní směry kuželosečky rovnoběžné se souřadnicovými osami, tedy když $r = 1$ a $s = 0$ nebo naopak (dosadíme pro A, C do rovnice 5.4). Je zřejmé, že elipsa tak má v tomto tvaru u koeficientů A, C znaménka shodná, hyperbola naopak různá a parabola má vždy jeden z těchto koeficientů nulový.

Řešením rovnice 5.15 jsou a hlavní směry kuželosečky pro $B \neq 0$ ²² určují tyto nenulové vektory ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$):

$$(-B; A - \lambda_{1,2}) = k \cdot (C - \lambda_{1,2}; -B). \quad (5.17)$$

To můžeme opět snadno dokázat dosazením z rovnice 5.4:

$$\begin{aligned} (-B; A - \lambda_1) &= (\gamma \cdot (\varepsilon^2 r s); \gamma \cdot (1 - \varepsilon^2 r^2) - \gamma) = \gamma \varepsilon^2 \cdot (r s; -r^2) = \gamma \varepsilon^2 r \cdot (s; -r), \\ (-B; A - \lambda_2) &= (\gamma \cdot (\varepsilon^2 r s); \gamma \cdot (1 - \varepsilon^2 r^2) - \gamma \cdot (1 - \varepsilon^2)) = \gamma \varepsilon^2 \cdot (r s; 1 - r^2) = \gamma \varepsilon^2 s \cdot (r; s), \end{aligned}$$

což skutečně odpovídá hlavním směrům kuželosečky s řídicí přímkou $rx + sy + t = 0$, jež jsou dané vektory $\vec{s}_1 = (r, s)$, $\vec{s}_2 = (s, -r)$. Ke stejným výsledkům pak dojdeme i s vektory $(C - \lambda_1; -B)$ a $(C - \lambda_2; -B)$.

Pro parabolu pak můžeme postupovat snadnějším způsobem. Z řešení rovnice 5.16 plyne, že $(A + C) = \gamma \cdot (2 - \varepsilon^2)$ a součet koeficientů A, C tak bude pro shodnou kuželosečku vždy stejný. Pak je-li $\lambda_1 = 0$, musí platit $\lambda_2 = (A + C)$. Dosazením těchto hodnot $\lambda_{1,2}$ do souřadnic vektorů 5.17 získáme směrový vektor její osy, jež je shodný s vektorem asymptotického směru, a směrový vektor její řídicí přímky (viz tabulka 5).

Parabola $\vec{s}_o = (r, s); \vec{s}_d = (s, -r)$	Středová kuželosečka $\vec{u}_1 = (u_1, v_1); \vec{u}_2 = (u_2, v_2)$
$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = A + C$	$\lambda^2 - (A + C) \cdot \lambda - \mathcal{D} = 0$
$\vec{s}_o = (-B; A) = k \cdot (C; -B);$ $\vec{s}_d = (A; B) = (-k) \cdot (B; C)$	$\vec{u}_{1,2} = (-B; A - \lambda_{1,2}) = k \cdot (C - \lambda_{1,2}; -B)$
Osa o : $(Ax + By + D) \cdot A + (Bx + Cy + E) \cdot B = 0;$ $(Ax + By + D) \cdot B + (Bx + Cy + E) \cdot C = 0$	Osy $o_{1,2}$: $(Ax + By + D) u_{1,2} + (Bx + Cy + E) v_{1,2} = 0$

Tabulka 5: Vektory, jež určují hlavní směry kuželosečky dané rovnicí 5.1 pro $B \neq 0$ ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Dosadíme-li souřadnice vektorů 5.17 elipsy resp. hyperboly do rovnice 5.8 průměru kuželosečky, získáme rovnice jejich os. Dosazením souřadnic směrového vektoru řídicí přímky získáme rovnici osy paraboly (opět viz tabulka 5).

²¹Čísla $\lambda_{1,2}$ odpovídají *vlastním číslům* matice kvadratických členů kuželosečky a vektory určující hlavní směry pak jejím *vlastním vektorům*. Vlastní čísla a vektory jsou velmi důležitým pojmem v lineární algebře.

²²Pro $B = 0$ nemá smysl hlavní směry hledat, budou rovnoběžné se souřadnicovými osami x, y .

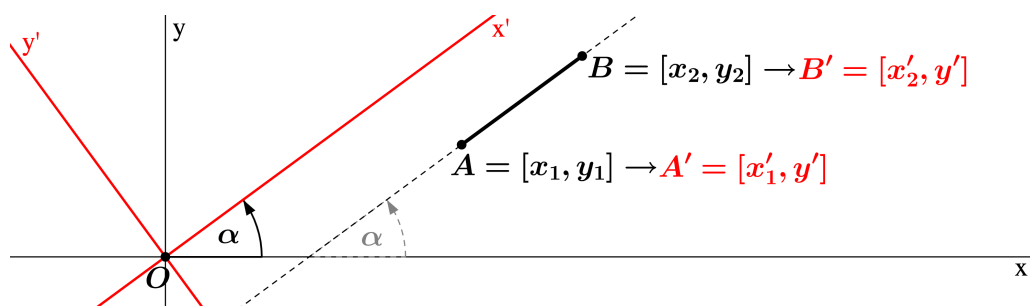
5.3 Kanonický tvar rovnice kuželosečky

5.3.1 Shodné transformace souřadnic v rovině

Jakýkoli přechod od jedné soustavy kartézských souřadnic v rovině k jiné stejně orientované soustavě kartézských souřadnic lze provést jedním posunutím (translací) a jedním otočením (rotací). Tyto transformace si popíšeme ([13, s. 188]).

Transformace souřadnic bodu X při přechodu od kartézské soustavy $(O; x, y)$ ke kartézské soustavě $(O; x', y')$, která vznikne z $(O; x, y)$ otočením kolem společného počátku o úhel α , je dána vzorcí:

$$\begin{aligned}x &= x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha, \\y &= x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha.\end{aligned}\tag{5.18}$$



Obr. 5.3: Transformace souřadnic otočením o úhel α , kde $A'B'$ bude rovnoběžná s osou x'

Dosazením za x, y ze vztahů 5.18 do rovnice 5.1 kuželosečky a její úpravou získáme novou rovnici:

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0,\tag{5.19}$$

kde

$$\begin{aligned}A' &= A \cos^2 \alpha + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha, \\B' &= -A \sin \alpha \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + C \sin \alpha \cos \alpha, \\C' &= A \sin^2 \alpha - 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha, \\D' &= D \cos \alpha + E \sin \alpha, \\E' &= -D \sin \alpha + E \cos \alpha, \\F' &= F.\end{aligned}\tag{5.20}$$

Aby byly osy výsledné kuželosečky rovnoběžné se souřadnicovými osami x', y' , potřebujeme vhodný úhel α takový, aby platilo $B' = 0$. Vyjádříme si tuto rovnost z 5.20:

$$B' = B \cdot \cos(2\alpha) - \frac{1}{2} \cdot (A - C) \cdot \sin(2\alpha) = 0$$

$$\cotg(2\alpha) = \frac{A - C}{2B},$$

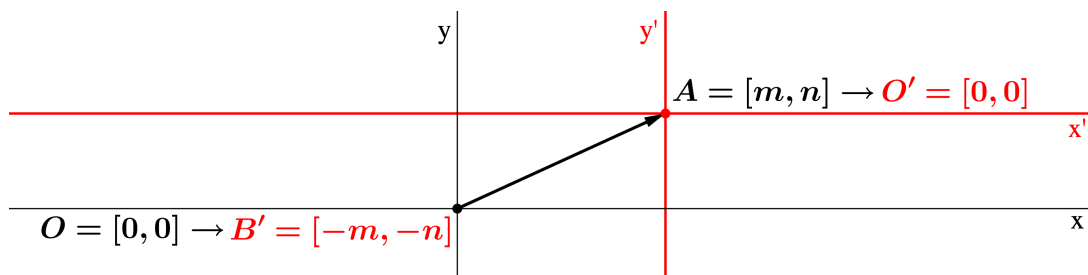
za předpokladu, že $B \neq 0$ (pak by ale kuželosečka již v potřebném tvaru byla).

Vhodný úhel α můžeme také vyjádřit pomocí souřadnic vektorů $\vec{u}_{1,2} = (u_{1,2}; v_{1,2})$ hlavních směrů kuželosečky. Vydělíme-li tyto souřadnice délkou příslušného vektoru, získáme přímo hodnoty sinu a cosinu úhlu α (tak jako v rovnici 5.3):

$$(\cos \alpha; \sin \alpha) = \left(\frac{u_{1,2}}{\sqrt{u_{1,2}^2 + v_{1,2}^2}}; \frac{v_{1,2}}{\sqrt{u_{1,2}^2 + v_{1,2}^2}} \right).$$

Transformace souřadnic bodu X při přechodu od kartézské soustavy $(O; x, y)$ ke kartézské soustavě $(O'; x', y')$, přičemž osy x', y' jsou rovnoběžné po řadě s osami x, y , mají stejnou orientaci a počátek O' má v soustavě $(O; x, y)$ souřadnice m, n , je dána vzorcí

$$\begin{aligned}x &= x' + m, \\y &= y' + n.\end{aligned}\tag{5.21}$$



Obr. 5.4: Transformace souřadnic posunutím, kde $A = [m, n] \rightarrow O'$

Dosazením za x, y ze vztahů 5.21 do rovnice 5.1 kuželosečky a její úpravou získáme novou rovnici 5.19, kde

$$\begin{aligned}(A', B', C') &= (A, B, C), \\D' &= Am + Bn + D, \\E' &= Bm + Cn + E, \\F' &= Am^2 + 2Bmn + Cn^2 + 2Dm + 2En + F.\end{aligned}\tag{5.22}$$

Aby střed resp. vrchol výsledné kuželosečky ležel v novém počátku O' soustavy souřadnic, potřebujeme vhodné souřadnice m, n , jež budou odpovídat původním souřadnicím středu $S = [m, n]$ resp. vrcholu $V = [m, n]$. Tyto souřadnice můžeme získat úpravou rovnice, která již nebude obsahovat smíšený člen xy , doplněním na čtverec. V následujících kapitolách si ovšem ukažme, jak si tento obecný postup můžeme usnadnit s ohledem na druh kuželosečky.

5.3.2 Transformace středové kuželosečky

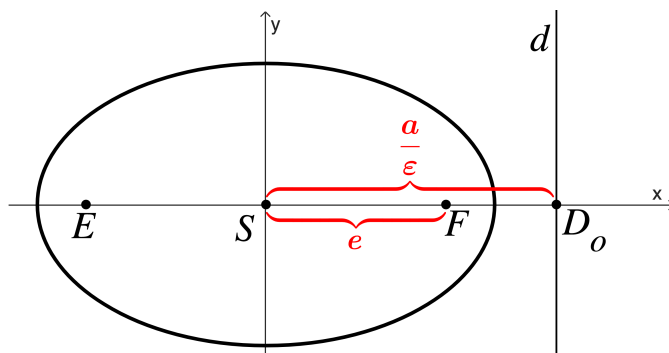
Uvažujme kuželosečky s $D^2 - AC \neq 0$. Dle 5.22 odpovídají vztahy pro D', E' soustavě rovnic 5.10 pro výpočet středu kuželosečky. Pak po transformaci rovnice 5.1, kdy nový počátek O' bude ležet v bodu $S = [m, n]$ budou tyto koeficienty nulové. Získáme tak rovnici:

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0,$$

přičemž koeficienty A, B, C zůstávají shodné a vztah 5.22 pro koeficient F' vlastně odpovídá dosazení souřadnic $[m, n]$ do původní rovnice kuželosečky. Pokud bude $F' = 0$, pak střed S leží přímo na kuželosečce a půjde o singulární kuželosečku (konkrétně dvě imaginární resp. reálné různoběžky).

Úprava rovnice do osového tvaru již bude snadná. Koeficient B' bude roven nule, F' se dle 5.20 rotací nezmění. Koeficienty A', C' odpovídají číslům $\lambda_{1,2}$. Získáme tak rovnici:

$$A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0.$$



Obr. 5.5: Středová kuželosečka se středem $S = [0, 0]$ a s hlavní osou splývající s osou x

Dvě možnosti, tedy λ_1 jako A' nebo C' ovlivní s jakou ze souřadnicových os bude splývat hlavní osa kuželosečky. Zvolme $|A'| < |C'|$ u elipsy a rozdílná znaménka u koeficientů A a F u hyperboly pro kuželosečku s hlavní osou splývající s osou x .

Dosaďme z rovnice 5.4. Pro kuželosečku v této poloze bude platit $r = 1$, $s = 0$, $F = [g, 0]$ a bod $D_o = [-t, 0]$. Dostaneme rovnici (použijme zkráceně x, y místo x'', y''):

$$\gamma \cdot ((1 - \varepsilon^2) \cdot x^2 + y^2 + g^2 - \varepsilon^2 t^2) = 0.$$

Dle obrázku 5.5 pak platí $g^2 = e^2$ a dle rovnice 2.4 (s. 12) potom $t^2 = \frac{a^2}{\varepsilon^2}$. Také víme, že $\varepsilon > 0$, $a > 0$ a $a \neq e$. Můžeme dosadit a upravit:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right) \cdot x^2 + y^2 + e^2 - \varepsilon^2 \cdot \frac{a^2}{\varepsilon^2} &= 0 \\ \left(\frac{a^2 - e^2}{a^2}\right) \cdot x^2 + y^2 &= a^2 - e^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} &= 1 \end{aligned}$$

Dosaďme ze vztahu pro charakteristický trojúhelník (3.3 a 3.4, s. 24–25):

pro elipsu a $a > e$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pro hyperbolu a $a < e$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.23)$$

Rovnice 5.23 jsou *kanonické rovnice* elipsy resp. hyperboly se středem $S = [0, 0]$, kde a je délka hlavní poloosy elipsy resp. hyperboly a b je délka jejich vedlejší poloosy.²³ Podobně dojdeme k rovnicím elipsy resp. hyperboly, jejichž hlavní osa splývá s osou y . Posunutím počátku soustavy souřadnic do $[-m, -n]$ pak můžeme získat *středovou rovnici* kuželosečky s původním středem $S = [m, n]$, např.:

$$\frac{(x' - m)^2}{a^2} + \frac{(y' - n)^2}{b^2} = 1.$$

Přehled všech tvarů rovnic středových kuželoseček najdeme v tabulkách 6 a 7 (s. 62 a 63).

²³Zvídavého čtenáře jistě napadne, že můžeme dojít k variantě, kdy v rovnici 5.23 elipsy bude její pravá strana odpovídat záporné hodnotě. V takovém případě půjde o imaginární elipsu. U rovnice hyperboly pak tato situace vzhledem k rozdílným znaménkům u výrazů na levé straně rovnice nenastane.

Příklad 7.

Uveďte obecnou rovnici $8x^2 + 8xy - 7y^2 - 24x - 30y + 153 = 0$ regulární kuželosečky do středového a kanonického tvaru a určete druh této kuželosečky.

Určíme diskriminant kuželosečky:

$$\mathcal{D} = B^2 - AC = 16 + 56 = 72.$$

Pro $\mathcal{D} > 0$ jde o hyperbolu, můžeme najít souřadnice jejího středu dosazením do 5.10:

$$8m + 4n - 12 = 0$$

$$4m - 7n - 15 = 0$$

Získáme souřadnice středu $S = [2, -1]$. Dosadíme je do rovnice kuželosečky:

$$8 \cdot 4 + 8 \cdot (-2) - 7 \cdot 1 - 24 \cdot 2 - 30 \cdot (-1) + 153 = 144.$$

Pak tedy rovnice posunuté hyperboly se středem $S = [0, 0]$ bude:

$$8x'^2 + 8x'y' - 7y'^2 + 144 = 0.$$

Vypočítáme $\lambda_{1,2}$ dosazením $A + C = 1$ a $\mathcal{D} = 72$ do rovnice 5.16:

$$\lambda^2 - \lambda - 72 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 72}}{2} = \frac{1 \pm 17}{2} \begin{cases} 9 \\ -8 \end{cases}$$

Pro rovnici hyperboly s hlavní osou rovnoběžnou s osou x dosadíme tak, aby A' a F' měly různá znaménka:

$$-8x''^2 + 9y''^2 + 144 = 0.$$

Pak již snadno upravíme na kanonickou rovnici hyperboly:

$$\frac{x''^2}{18} - \frac{y''^2}{16} = 1.$$

Posunutím počátku soustavy souřadnic do $[-1, -2]$ pak získáme středovou rovnici hyperboly s původním středem $S = [1, 2]$:

$$\frac{(x''' - 1)^2}{18} - \frac{(y''' - 2)^2}{16} = 1.$$

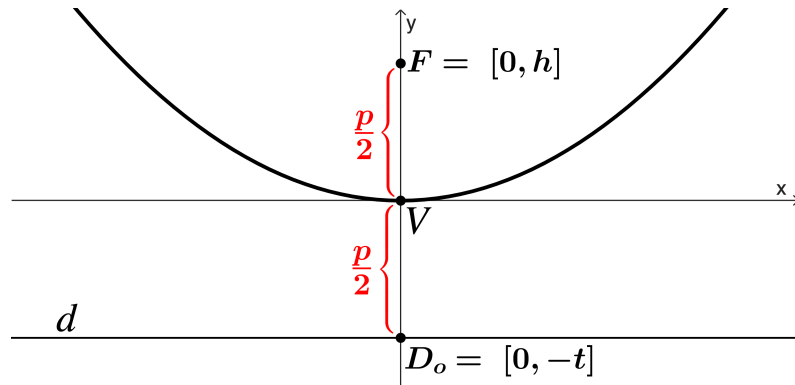
5.3.3 Transformace paraboly

Uvažujme kuželosečku s $B^2 - AC = 0$. Vyjádříme nejprve koeficienty obecné rovnice 5.1 podle 5.4 s $\varepsilon = 1$ a s uplatněním vztahu $r^2 + s^2 = 1$:

$$\gamma \cdot (s^2, -rs, r^2, -g - rt, -h - st, g^2 + h^2 - t^2) = (A, B, C, D, E, F). \quad (5.24)$$

Nyní dosadíme do koeficientů v 5.24 pro parabolu, jejíž osa splývá s osou y a její vrchol je $V = [0, 0]$. Pak $r = 0$, $s = 1$, ohnisko $F = [0, h]$ a bod $D_o = [0, -t]$. Absolutní člen F musí být pro parabolu procházející počátkem roven nule. Získáme rovnici:

$$x^2 + 2 \cdot (-h - t) \cdot y = 0.$$



Obr. 5.6: Parabola s osou rovnoběžnou s osou y a vrcholem $V = [0, 0]$

Pro y -ovou souřadnici ohniska F a bodu D_o pak z vlastností paraboly (obr. 5.6) platí:²⁴

pro $h > 0$:

$$h = \frac{p}{2}, \quad -t = -\frac{p}{2}$$

pro $h < 0$:

$$h = -\frac{p}{2}, \quad -t = \frac{p}{2},$$

kde p ; $p > 0$; je parametr paraboly. Dosadíme:

$$x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{p}{2} - \frac{p}{2}\right) \cdot y = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot \left(\frac{p}{2} + \frac{p}{2}\right) \cdot y = 0.$$

Získáváme tak kanonickou rovnici paraboly, jež je otevřená nahoru, resp. dolů:

$$x^2 = 2py$$

$$x^2 = -2py. \quad (5.25)$$

Podobně dojdeme k rovnici paraboly, jejíž osou je osa x a je otevřená doprava, resp. doleva:

$$y^2 = 2px$$

$$y^2 = -2px. \quad (5.26)$$

Rovnice 5.26 pak skutečně odpovídá rovnici $y^2 = cx$ (1.2, s. 4), kde konstanta $c = 2p$.

Obecnou rovnici 5.1 odpovídající parabole tak potřebujeme dle 5.25 uvést do tvaru:

$$A'x'^2 + 2E'y' = 0,$$

přičemž víme, že pokud je $C' = 0$, pak musí platit $A' = A + C$ (viz tabulka 5). Z rovnic 5.25 plyne, že $E' = \gamma \cdot (\pm p)$. Parametr p odpovídá vzdálenosti $|Fd|$, tedy platí:

$$p = |rg + sh + t|$$

$$p = |rg + sh + t \cdot (r^2 + s^2)|$$

$$p = |r \cdot (g + rt) + s \cdot (h + st)|$$

$$p = \frac{|r \cdot -D + s \cdot -E|}{|\gamma|}$$

$$|E'| = |r \cdot D + s \cdot E|.$$

Koeficient E' tak můžeme získat z rovnice [17, s. 137–138]:

$$E' = \pm (r \cdot D + s \cdot E), \quad (5.27)$$

²⁴Varianta $h = 0$ by znamenala, že je ohnisko bodem kuželosečky, což u paraboly nemůže nastat.

kde (r, s) je normalizovaný vektor asymptotického směru dané paraboly, tedy pro $B \neq 0$:

$$(r, s) = \left(-\frac{B}{\sqrt{(-B)^2 + A^2}}; \frac{A}{\sqrt{(-B)^2 + A^2}} \right). \quad (5.28)$$

Zvolíme-li u koeficientů A' a E' různá znaménka, získáme rovnici paraboly otevřené nahoru. Pokud bude platit $E' = 0$, leží ohnisko F na řídicí přímce a půjde o singulární kuželosečku parabolického typu. Z rovnic 5.27 a 5.28 plyne, že tak nastane v případě, že

$$A \cdot E = B \cdot D,$$

což platí právě tehdy, když existuje nenulové reálné číslo k takové, že:

$$\begin{aligned} A &= k \cdot D \\ B &= k \cdot E. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Stejně hodnoty jako pro A', E' dosadíme za koeficienty C', D' pro parabolu dle rovnice 5.26.

Pro parabolu s vrcholem $V = [m, n]$ pak má její *vrcholová rovnice* tvar:

$$(x - m)^2 = \pm 2p(y - n) \qquad (y - n)^2 = \pm 2p(x - m),$$

přičemž původní vrchol V paraboly můžeme najít jako průsečík původní paraboly s její osou (viz tabulka 5).

Přehled všech tvarů rovnic paraboly najdeme v tabulce 8 na straně 64.

Příklad 8.

Parabola má průsečíky $K = [4, 0]$, $L = [-8, 0]$ s osou x a $M = [0, 1]$, $N = [0, -2]$ s osou y . Určete její obecnou rovnici a také její rovnici v kanonickém tvaru, kde $V = [0, 0]$ a její osa splývá s osou y .

Pomocí čtyř bodů sestavíme čtyři rovnice jejich dosazením do rovnice 5.1. Pátou rovnicí bude vztah $B^2 - AC = 0$, jež platí pro parabolu.

$$\begin{aligned} 16 \cdot A + 0 + 0 + 4 \cdot 2D + 0 + F &= 0 \\ 64 \cdot A + 0 + 0 - 8 \cdot 2D + 0 + F &= 0 \\ 0 + 0 + 1 \cdot C + 0 + 1 \cdot 2E + F &= 0 \\ 0 + 0 + 4 \cdot C + 0 - 2 \cdot 2E + F &= 0 \\ B^2 - AC &= 0 \end{aligned}$$

Z prvních čtyř rovnic můžeme vyjádřit vztahy pro F a koeficienty A, C, D, E :

$$A = -\frac{F}{32} \qquad C = -\frac{F}{2} \qquad D = -\frac{F}{16} \qquad E = -\frac{F}{4}.$$

Dosaďme do páté rovnice za A, C :

$$\begin{aligned} B^2 &= \left(-\frac{F}{32} \right) \cdot \left(-\frac{F}{2} \right) \\ B &= \pm \frac{F}{8}. \end{aligned}$$

Zvolme vhodně jako parametr $F = -32$, což odpovídá rovnicím:

$$k_1 : x^2 + 8xy + 16y^2 + 4x + 16y - 32 = 0,$$

$$k_2 : x^2 - 8xy + 16y^2 + 4x + 16y - 32 = 0.$$

Je zřejmé, že u rovnice k_1 pro koeficienty A, B, D, E dle 5.29 platí:

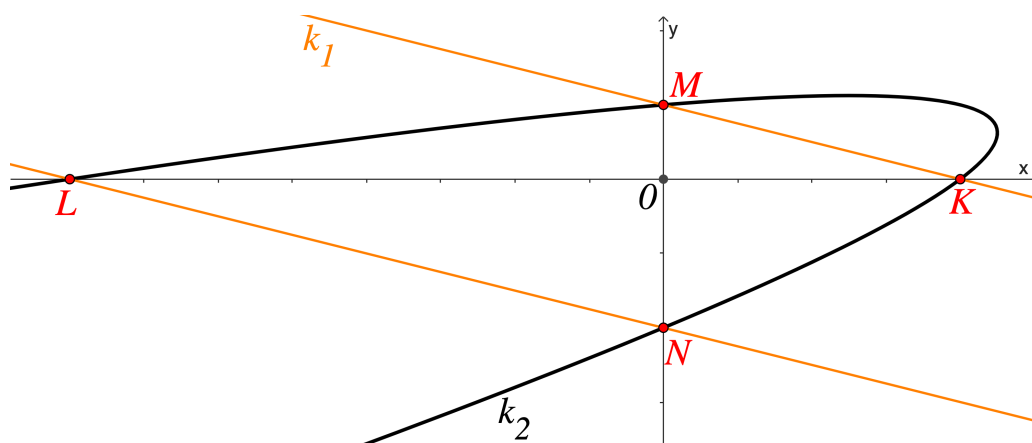
$$(1, 4) = \left(\frac{1}{2} \cdot 2; \frac{1}{2} \cdot 8\right)$$

a jde tak o rovnici singulární kuželosečky. Normalizovaný směrový vektor asymptotického směru paraboly k_2 dle rovnice 5.28 je:

$$(r, s) = \left(\frac{4}{\sqrt{17}}; \frac{1}{\sqrt{17}}\right).$$

Koeficient E' pak můžeme vypočítat dle 5.27:

$$E' = \pm \left(\frac{4}{\sqrt{17}} \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot 8\right) = \pm \frac{16}{\sqrt{17}}.$$



Obr. 5.7: Parabola k_2 procházející body K, L, M, N

Koeficient $A' = 1 + 16 = 17$, získáváme tak rovnici:

$$17x^2 = \pm \frac{32}{\sqrt{17}} y,$$

jež snadno upravíme na kanonickou rovnici:

$$x^2 = \pm \frac{32\sqrt{17}}{289} \cdot y.$$

Již víme, že ze čtyř zadaných bodů můžeme získat až dvě paraboly (viz s. 48), příklad tak může mít nejvýše dvě řešení. Jak vidíme na obrázku 5.7, pokud zadané body tvoří vrcholy lichoběžníku, zadání vyhovuje pouze jedna parabola. Pokud by body ležely ve vrcholech rovnoběžníku, neexistovalo by žádné řešení. To se liší od obecného zadání v příkladu 6b) (s. 43) s pěti body, kde existuje řešení vždy. Vyplývá to ze souměrnosti paraboly pouze podle jedné osy.

5.4 Kanonická rovnice kuželoseček a tečny

Rovnice 5.6 poláry bodu $P = [x_p, y_p]$ vzhledem k regulární kuželosečce, jež má hlavní směry rovnoběžné se souřadnicovými osami x, y , tedy s $B = 0$, je po snadné úpravě

$$Axx_p + Cyy_p + D \cdot (x + x_p) + E \cdot (y + y_p) + F = 0. \quad (5.30)$$

Obecná rovnice elipsy se středem $S = [0, 0]$ a hlavní osou splývající s osou x dle 5.23 je:

$$\frac{1}{a^2} \cdot x^2 + \frac{1}{b^2} \cdot y^2 - 1 = 0. \quad (5.31)$$

Dosadíme-li za odpovídající koeficienty do rovnice 5.30 poláry, získáme rovnici poláry p bodu $P = [x_p, y_p]$ vzhledem k elipse s hlavní osou rovnoběžnou s osou x a $S = [0, 0]$, resp. po transformaci soustavy souřadnic se středem $S = [m, n]$:

$$\frac{xx_p}{a^2} + \frac{yy_p}{b^2} = 1 \qquad \frac{(x-m) \cdot (x_p-m)}{a^2} + \frac{(y-n) \cdot (y_p-n)}{b^2} = 1.$$

Obdobně můžeme vyjádřit a dosadit koeficienty z kanonické rovnice hyperboly a paraboly. Pro bod $P = [x_p, y_p]$, jež leží na kuželosečce, bude 5.30 rovnicí tečny daným bodem. Pro bod ležící vně kuželosečky pak získáme rovnici poláry a tečna bude procházet vždy daným bodem a průsečíkem poláry s kuželosečkou.

Rovnice 5.8 průměru, který je sdružený se směrem daným vektorem $\vec{u} = (u, v)$, je pro regulární kuželosečku, jež má hlavní směry rovnoběžné se souřadnicovými osami x, y , po úpravě:

$$Axu + Cyv + Du + Ev = 0. \quad (5.32)$$

Opět dosadíme za odpovídající koeficienty a získáme rovnici pro průměr elipsy dané rovnicí 5.31, tedy s hlavní osou rovnoběžnou s x a $S = [0, 0]$, resp. po transformaci $S = [m, n]$:

$$\frac{x}{a^2} \cdot u + \frac{y}{b^2} \cdot v = 0 \qquad \frac{x-m}{a^2} \cdot u + \frac{y-n}{b^2} \cdot v = 0.$$

Obdobně můžeme vyjádřit a dosadit koeficienty z kanonické rovnice hyperboly a paraboly. Vektor $\vec{u} = (u, v)$ je směrovým vektorem tečny, která prochází průsečíkem daného průměru s kuželosečkou.

Asymptotické směry hyperboly dané rovnicí 5.23 můžeme dle tabulky 4 vyjádřit:

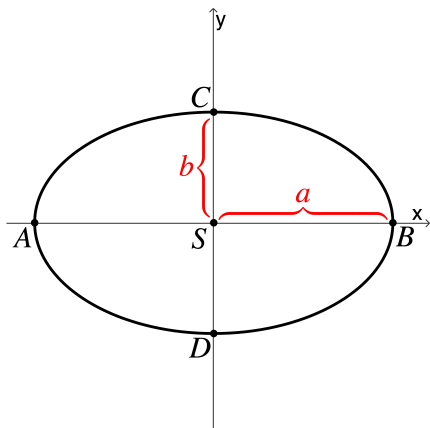
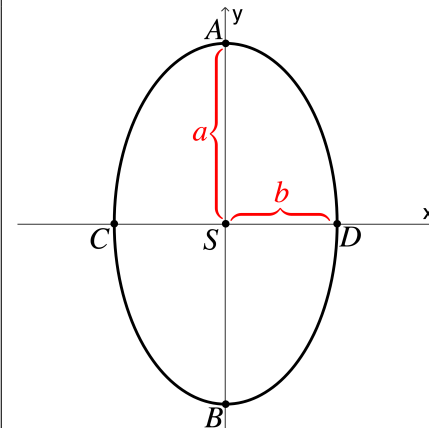
$$\vec{u}_{1,2} = \left(C; -B \pm \sqrt{\mathcal{D}} \right) = \left(-\frac{1}{b^2}; \pm \sqrt{-\left(\frac{1}{a^2} \cdot \left(-\frac{1}{b^2} \right) \right)} \right) = \left(-\frac{1}{b^2}; \pm \frac{1}{ab} \right) = -\frac{1}{ab^2} \cdot (a; \mp b).$$

Dosazením souřadnic tohoto vektoru do rovnice 5.32 průměru hyperboly, jež má hlavní osu rovnoběžnou s osou x a střed $S = [0, 0]$, resp. po transformaci $S = [m, n]$, získáme rovnice jejich asymptot:

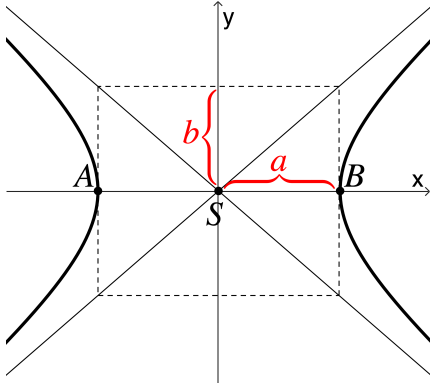
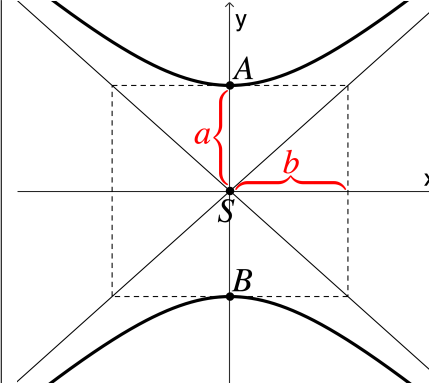
$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0 \qquad \frac{x-m}{a} \pm \frac{y-n}{b} = 0.$$

Jak můžeme vidět v tabulce 7, k podobným rovnicím asymptot dospějeme u hyperboly s hlavní osou rovnoběžnou s osou y . Dvě hyperboly, jejichž hlavní osy jsou na sebe kolmé, mají stejný střed S a pro jejich poloosy a, b a a', b' platí $a = b'$ a $b = a'$, tak mají společné asymptoty. Takovým hyperbolám se říká *doplňkové*.

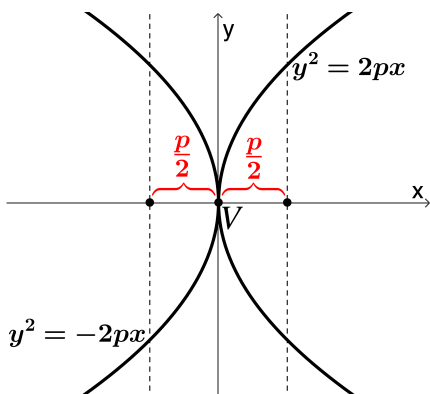
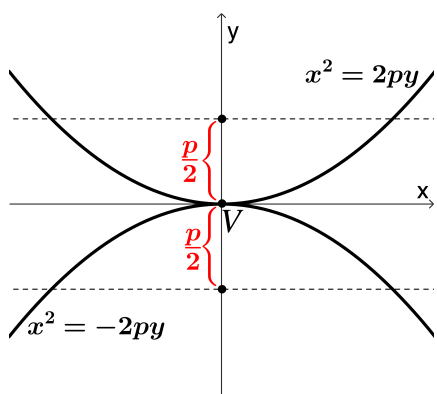
Přehled rovnic tečen a průměrů z této kapitoly najdeme v následujících tabulkách 6, 7 a 8.

<i>Elipsa</i>		
Hlavní poloosa a , vedlejší poloosa b ; $a, b \neq 0$; $a > b$		
Hlavní osa	Splývající s x ($o_1 : y = 0$)	Splývající s y ($o_1 : x = 0$)
$S = [0, 0]$ Polára bodu $P = [x_p; y_p]$ Průměr sdružený s $\vec{u} = (u, v)$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{xx_p}{a^2} + \frac{yy_p}{b^2} = 1$ $\frac{x}{a^2} \cdot u + \frac{y}{b^2} \cdot v = 0$ 	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ $\frac{xx_p}{b^2} + \frac{yy_p}{a^2} = 1$ $\frac{x}{b^2} \cdot u + \frac{y}{a^2} \cdot v = 0$ 
Hlavní osa	Rovnoběžná s x ($o_1 : y - n = 0$; $o_2 : x - m = 0$)	
$S = [m, n]$ Polára bodu $P = [x_p; y_p]$ Průměr sdružený s $\vec{u} = (u, v)$	$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(x - m) \cdot (x_p - m)}{a^2} + \frac{(y - n) \cdot (y_p - n)}{b^2} = 1$ $\frac{x - m}{a^2} \cdot u + \frac{y - n}{b^2} \cdot v = 0$	
Hlavní osa	Rovnoběžná s y ($o_1 : x - m = 0$; $o_2 : y - n = 0$)	
$S = [m, n]$ Polára bodu $P = [x_p; y_p]$ Průměr sdružený s $\vec{u} = (u, v)$	$\frac{(x - m)^2}{b^2} + \frac{(y - n)^2}{a^2} = 1$ $\frac{(x - m) \cdot (x_p - m)}{b^2} + \frac{(y - n) \cdot (y_p - n)}{a^2} = 1$ $\frac{x - m}{b^2} \cdot u + \frac{y - n}{a^2} \cdot v = 0$	

Tabulka 6: Kanonické a středové rovnice elipsy a jim odpovídající rovnice poláry a průměru

<i>Hyperbola</i>		
Hlavní poloosa a , vedlejší poloosa b ; $a, b \neq 0$		
Hlavní osa	Splývající s x ($o_1 : y = 0$)	Splývající s y ($o_1 : x = 0$)
$S = [0, 0]$ Polára bodu $P = [x_p; y_p]$ Průměr sdružený s $\vec{u} = (u, v)$ Asymptoty	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{xx_p}{a^2} - \frac{yy_p}{b^2} = 1$ $\frac{x}{a^2} \cdot u - \frac{y}{b^2} \cdot v = 1$ $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ 	$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ $-\frac{xx_p}{b^2} + \frac{yy_p}{a^2} = 1$ $-\frac{x}{b^2} \cdot u + \frac{y}{a^2} \cdot v = 1$ $\frac{x}{b} \pm \frac{y}{a} = 0$ 
Hlavní osa	Rovnoběžná s x ($o_1 : y - n = 0$; $o_2 : x - m = 0$)	
$S = [m, n]$ Polára bodu $P = [x_p; y_p]$ Průměr sdružený s $\vec{u} = (u, v)$ Asymptoty	$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(x - m) \cdot (x_p - m)}{a^2} + \frac{(y - n) \cdot (y_p - n)}{b^2} = 1$ $\frac{x - m}{a^2} \cdot u + \frac{y - n}{b^2} \cdot v = 0$ $\frac{x - m}{a} \pm \frac{y - n}{b} = 0$	
Hlavní osa	Rovnoběžná s y ($o_1 : x - m = 0$; $o_2 : y - n = 0$)	
$S = [m, n]$ Polára bodu $P = [x_p; y_p]$ Průměr sdružený s $\vec{u} = (u, v)$ Asymptoty	$\frac{(x - m)^2}{b^2} + \frac{(y - n)^2}{a^2} = 1$ $\frac{(x - m) \cdot (x_p - m)}{b^2} + \frac{(y - n) \cdot (y_p - n)}{a^2} = 1$ $\frac{x - m}{b^2} \cdot u + \frac{y - n}{a^2} \cdot v = 0$ $\frac{x - m}{b} \pm \frac{y - n}{a} = 0$	

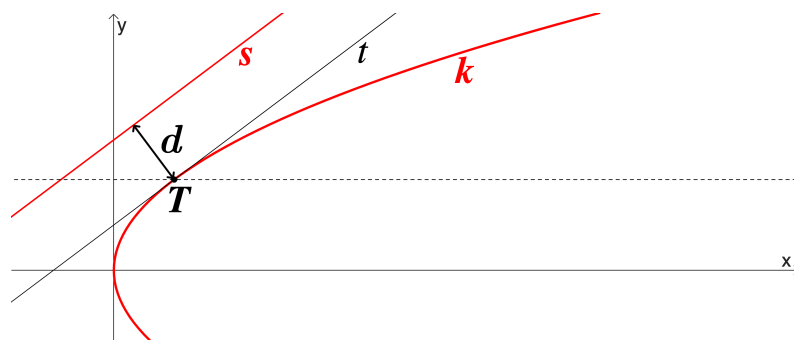
Tabulka 7: Kanonické a středové rovnice hyperboly a jim odpovídající rovnice poláry a průměru

<i>Parabola</i> Parametr p ; $p > 0$		
Osa	Splývající s x ($o : y = 0$)	Splývající s y ($o : x = 0$)
$V = [0, 0]$ Polára bodu $P = [x_p; y_p]$ Průměr sdružený s $\vec{u} = (u, v)$	$y^2 = \pm 2px$ $yy_p = \pm p(x + x_p)$ $y \cdot v = \pm p \cdot u$ 	$x^2 = \pm 2py$ $xx_p = \pm p(y + y_p)$ $x \cdot u = \pm p \cdot v$ 
Osa	Rovnoběžná s x ($o : y - n = 0$)	
$V = [m, n]$ Polára bodu $P = [x_p; y_p]$ Průměr sdružený s $\vec{u} = (u, v)$	$(y - n)^2 = \pm 2p(x - m)$ $(y - n) \cdot (y_p - n) = \pm p \cdot (x - m + x_p - m)$ $(y - m) \cdot v = \pm p \cdot u$	
Osa	Rovnoběžná s y ($o : x - m = 0$)	
$V = [m, n]$ Polára bodu $P = [x_p; y_p]$ Průměr sdružený s $\vec{u} = (u, v)$	$(x - m)^2 = \pm 2p(y - n)$ $(x - m) \cdot (x_p - m) = \pm p \cdot (y - n + y_p - n)$ $(x - m) \cdot u = \pm p \cdot v$	

Tabulka 8: Kanonické a vrcholové rovnice paraboly a jim odpovídající rovnice poláry a průměru

Příklad 9. [19, s. 194–195]

Mějme parabolu k : $y^2 = 18x$ a její vnější přímku s : $3x - 4y + 69 = 0$. Jaký bod paraboly má nejkratší vzdálenost od přímky a jaká je tato vzdálenost?



Obr. 5.8: Parabola k , přímka s a jejich nejkratší vzdálenost d

Nejbližší bod T paraboly ke přímce je vlastně dotykovým bodem tečny t , jež je rovnoběžná s touto přímkou (obr. 5.8). Její směrový vektor je $\vec{s} = (4, 3)$, parametr paraboly $p = \frac{18}{2} = 9$. Údaje dosadíme do odpovídající rovnice pro průměr paraboly sdružený s tímto směrem:

$$y \cdot v = p \cdot u$$

$$y \cdot 3 = 9 \cdot 4$$

$$y = 12.$$

Vidíme, že průměr paraboly, jejíž osa je rovnoběžná s jednou ze souřadnicových os, bude skutečně s touto osou vždy rovnoběžný. Získáváme tak přímo y -ovou souřadnici dotykového bodu T . Druhou souřadnici dopočítáme dosazením do rovnice paraboly:

$$12^2 = 18x$$

$$8 = x$$

a hledaným bodem je tak $T = [8, 12]$. Jeho vzdálenost d od přímky s je:

$$d = \frac{|3 \cdot 8 - 4 \cdot 12 + 69|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$d = 9.$$

Příklad 10.

Určete rovnici paraboly, která má hlavní osu rovnoběžnou s osou y a je dána třemi tečnami $t_1: 3x - y + 8 = 0$, $t_2: 2x + y - 8 = 0$ a $t_3: x + y = 0$.

Rovnici tečny můžeme vyjádřit ve směrnicovém tvaru $y = k \cdot x + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, vzhledem k tomu, že tečna paraboly nemůže být v tomto případě rovnoběžná s osou y . Najdeme vztah mezi koeficienty k a q takový, aby měla přímka s s parabolou právě jeden průsečík. Dosadíme za y do odpovídající rovnice paraboly (viz tabulka 8) a upravme:

$$(x - m)^2 = 2p(y - n)$$

$$(x - m)^2 = 2p \cdot (k \cdot x + q - n)$$

$$x^2 - (2m + 2kp) \cdot x + m^2 - 2pq + 2np = 0$$

Pro jediné řešení této rovnice musí být její diskriminant roven nule:

$$(2m + 2kp)^2 - 4 \cdot (m^2 - 2pq + 2np) = 0$$

$$4k^2p^2 + 8kmp + 8pq - 8np = 0.$$

Vyjádříme koeficient q :

$$q = n - km - \frac{k^2p}{2} \quad (5.33)$$

a rovnice daných tečen ve směnicovém tvaru:

$$y = 3x + 8 \qquad y = -2x + 8 \qquad y = -x.$$

Dosaďme k, q z těchto tří rovnic do rovnice 5.33 a získáme tak soustavu tří rovnic o třech neznámých m, n, p :

$$8 = n - 3m - \frac{9p}{2}$$

$$8 = n + 2m - 2p$$

$$0 = n + m - \frac{p}{2}.$$

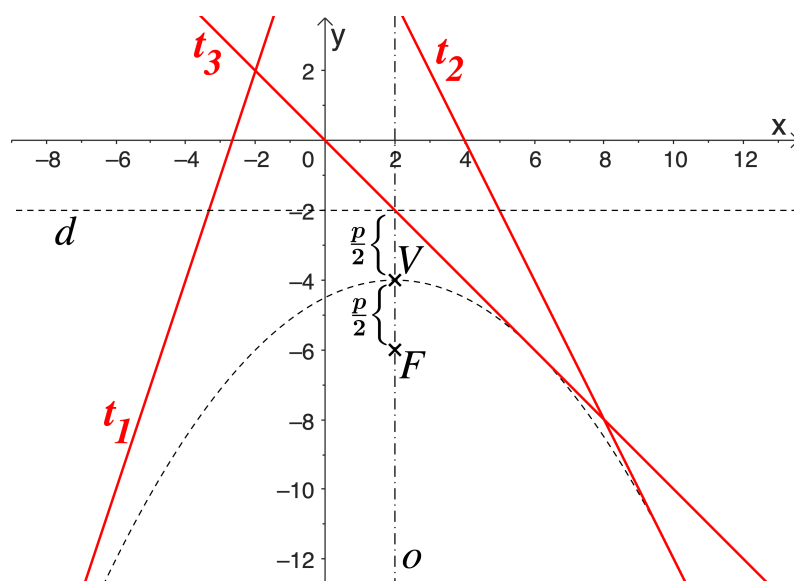
Řešením této soustavy získáme:

$$m = 2 \qquad n = -4 \qquad p = -4.$$

Parametr p paraboly musí být kladný, parabola je tak otevřená dolů. Její rovnice je:

$$(x - 2)^2 = -8 \cdot (y + 4).$$

Jde tak o parabolu s parametrem $p = 4$, vrcholem $V = [2; -4]$, osou $o: x - 2 = 0$, ohniskem $F = [2, -6]$ a řídicí přímkou $d: y + 2 = 0$ (obr. 5.9).



Obr. 5.9: Parabola dána třemi tečnami a směrem osy

6 Kuželosečka jako graf funkce

Při algebraickém řešení geometrických úloh v rovině pomocí rovnic se souřadnicemi x, y můžeme využít závislosti jedné z těchto souřadnic na druhé. Ne vždy je ovšem takové vyjádření jednoznačné. Např. pro rovnici $x^2 + y^2 - 25 = 0$ kružnice získáme vztahy:

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2} \qquad x = \pm\sqrt{25 - y^2}.$$

Pro jednoznačné vyjádření je tak nutné, aby byl jeden z koeficientů A, C v rovnici 5.1 kuželosečky nulový. Podívejme se, kdy a pro jaké kuželosečky to může nastat.

Pro koeficienty rovnice *elipsy* dle věty 22 platí $B^2 < AC$. Pak musí být vždy $A \cdot C \neq 0$, tedy rovnice elipsy má vždy oba koeficienty A, C nenulové.

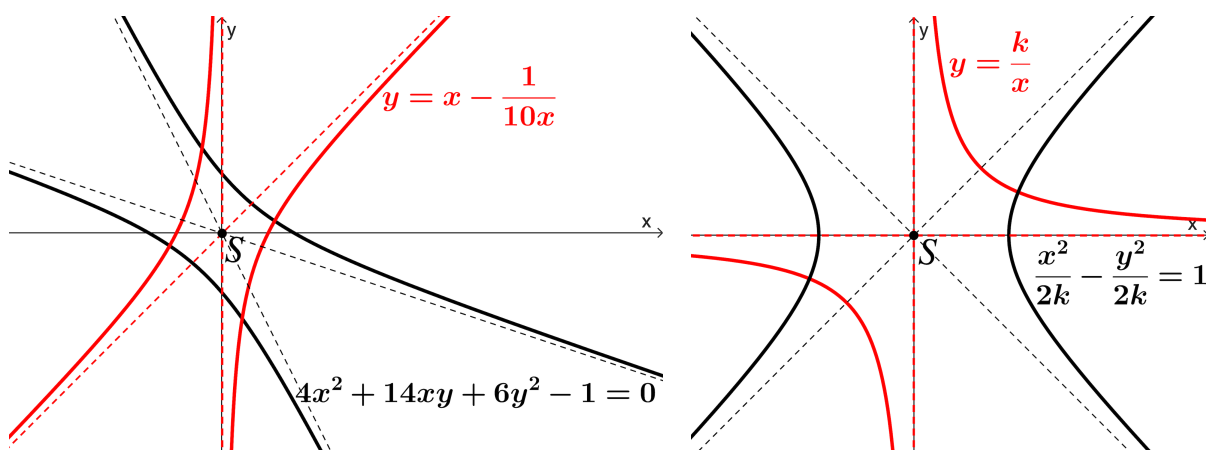
Pro koeficienty rovnice *hyperboly* dle věty 22 platí $B^2 > AC$. Pro $B = 0$ musí opět vždy platit $A \cdot C \neq 0$. Pro $B \neq 0$ může být libovolný z koeficientů A, C nulový v případě, že je jeden z asymptotických směrů hyperboly rovnoběžný s osou x nebo y (viz tabulka 4):

$$\text{pro } A = 0: \vec{u} = (C; -B + \sqrt{B^2 - AC}) = (C; -B + B) = (C; 0),$$

$$\text{pro } C = 0: \vec{u} = (-B + \sqrt{B^2 - AC}; A) = (-B + B; A) = (0; A).$$

Pak lze každou rovnici hyperboly transformovat pomocí rotace do potřebného tvaru. Hodnota výrazů $B^2 - AC$ a $A + C$ se shodným zobrazením nemění, pro hyperbolu se středem v počátku tak pro její koeficienty A', B', C', F' , kde např. $C' = 0$, platí:

$$B^2 - AC = B'^2 \qquad A + C = A' \qquad F = F'. \qquad (6.1)$$



Obr. 6.1: Hyperbola jako graf funkce

Na obrázku 6.1 vlevo vidíme hyperbolu danou rovnicí $k: 4x^2 + 14xy + 6y^2 - 1 = 0$. Pro koeficienty A', B' a F' transformované hyperboly dle vztahů 6.1 platí:

$$A' = 4 + 6 = 10 \qquad B' = \sqrt{49 - 24} = \pm 5 \qquad F' = -1.$$

Máme dvě volby pro dvě polohy hyperboly, při níž je rovnoběžná s osou y jedna nebo druhá asymptota. Zvolme rovnici $10x^2 - 10xy - 1 = 0$ a vyjádřeme y pro $x \neq 0$:

$$y = x - \frac{1}{10x}.$$

V tomto případě jde vlastně o funkční předpis $y = f(x)$. Pro funkci je jednoznačné přiřazení hodnoty tzv. *závisle proměnné* y hodnotě tzv. *nezávisle proměnné* x nutnou podmínkou. Daná hyperbola je pak grafem této funkce.

Na obrázku 6.1 vpravo vidíme graf nepřímé úměrnosti $y = \frac{k}{x}$, $x \neq 0$. Z $(A, C) = (0, 0)$ plyne, že jde o prostou funkci a že tímto grafem bude vždy rovnoosá hyperbola s asymptotami, které jsou obě rovnoběžné se souřadnicovými osami. Na obrázku pak vidíme i její rovnici v kanonickém tvaru.

Pro koeficienty rovnice *paraboly* dle věty 22 platí $B^2 = AC$. Z toho plyne, že je jeden z koeficientů A, C roven nule právě tehdy, když je roven nule i koeficient B . Tedy opět tehdy, je-li asymptotický směr paraboly rovnoběžný s jednou ze souřadnicových os. Parabola je tak jediná kuželosečka, z jejíž kanonické rovnice můžeme jednoznačně vyjádřit jednu z jejích proměnných.

Pokud má parabola osu rovnoběžnou s osou y , je grafem kvadratické funkce. V následujících příkladech si tak ukažme, jak lze využít toho, že rovnici paraboly $x^2 = 2py$ můžeme upravit na předpis funkce:

$$y = \frac{x^2}{2p}. \quad (6.2)$$

Příklad 11.

Určete rovnici tečny paraboly $k: x^2 = 6y$ vnějším bodem $P = [-1, -4]$ a jejich bod dotyku.

Dotykový bod tečny a paraboly označme $T = [x_t, y_t]$. Rovnice paraboly lze vyjádřit jako předpis funkce, využijme tak geometrický význam hodnoty derivace $f'(x_t)$ jako směrnice tečny křivky dané rovnicí $y = f(x)$ v bodu x_t . Rovnice této tečny je:

$$y - y_t = f'(x_t) \cdot (x - x_t).$$

Dosadíme dle 6.2 nejprve obecně a rovnici upravíme:

$$\begin{aligned} y - y_t &= \frac{x_t}{p} \cdot (x - x_t) \\ y - y_t &= \frac{x_t}{p} \cdot x - 2y_t \\ p \cdot (y + y_t) &= xx_t, \end{aligned} \quad (6.3)$$

čímž jsme skutečně dospěli k rovnici poláry podle tabulky 8. Na této tečně ovšem leží i bod $P = [x_p, y_p]$, jímž tečna prochází. Můžeme jej tak do této rovnice dosadit za x a y :

$$\begin{aligned} x_p x_t &= p y_p + p \cdot \frac{x_t^2}{2p} \\ 0 &= x_t^2 - 2x_p x_t + 2p y_p \end{aligned}$$

a vyjádřit x_t :

$$\begin{aligned} x_{t_1, t_2} &= \frac{2x_p \pm \sqrt{4x_p^2 - 8py_p}}{2} \\ x_{t_1, t_2} &= x_p \pm \sqrt{x_p^2 - 2py_p}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Je zřejmé, že bude-li bod P bodem paraboly, bude výraz $x_p^2 - 2py_p$ roven nule (což plyne z rovnice paraboly), rovnice bude mít pouze jedno řešení $x_t = x_p$ a tedy i $y_t = y_p$ a P bude přímo hledaným bodem dotyku. Pro vnější bod P paraboly pak získáme vždy dvě řešení, body $T_1, T_2 \neq P$. Dosadíme souřadnice bodu P ze zadání do rovnice 6.4:

$$x_{t_1, t_2} = -1 \pm \sqrt{1 - 6 \cdot (-4)} = -1 \pm 5 \begin{cases} 4 \\ -6. \end{cases}$$

Dotykové body T_1, T_2 tak budou mít souřadnice:

$$T_1 = \left[4; \frac{8}{3}\right] \qquad T_2 = [-6; 6].$$

Rovnice tečen získáme dosazením do rovnice 6.3 poláry, kde $P = T_{1,2}$ a $p = 3$:

$$t_1 : 4x - 3y - 8 = 0 \qquad t_2 : 2x + y + 6 = 0.$$

Příklad 12.

Určete souřadnice vrcholu $V = [m, n]$ paraboly dané obecnou rovnicí $x^2 - 18x - 2y + 76 = 0$ a vyjádřete tuto rovnici ve vrcholovém tvaru.

Víme, že obecnou rovnici paraboly bez smíšeného členu xy můžeme na její vrcholovou rovnici upravit doplněním na čtverec, souřadnice vrcholu pak z této rovnice vyplynou.

Podívejme se však na rovnici paraboly opět jako na funkci:

$$y = \frac{x^2}{2} - 9x + 38,$$

jejíž vrcholová tečna je rovnoběžná s osou x a má tak nulovou směrnici. Pokud tak derivaci $f'(m)$ položíme rovnu nule, můžeme vyjádřit souřadnici m bodu dotyku vrcholové tečny:

$$\begin{aligned} y' &= x - 9 \\ f'(m) &= m - 9 = 0 \\ m &= 9. \end{aligned}$$

Druhou souřadnici vrcholu získáme dosazením m do rovnice funkce:

$$y = \frac{81}{2} - 81 + 38 = -\frac{5}{2}$$

a jeho souřadnice tak jsou:

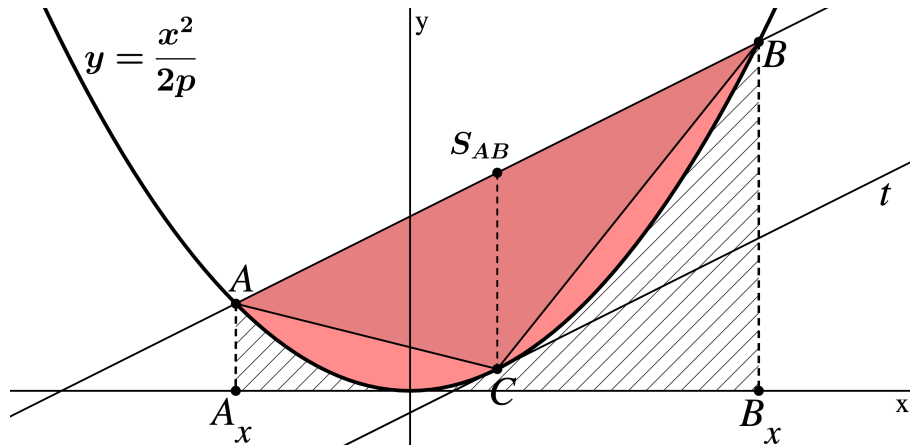
$$V = \left[9; -\frac{5}{2}\right].$$

Pro kladné znaménko u kvadratického členu x^2 v rovnici funkce, půjde o parabolu otevřenou nahoru. Parametr p pak můžeme dle rovnice 5.27 vyjádřit pomocí koeficientů A a E její obecné rovnice v zadání. V tomto tvaru totiž pro parabolu platí $r = 0$, $s = 1$, $A = \gamma$:

$$p = \left| \frac{E}{A} \right| = 1$$

a vrcholová rovnice paraboly je:

$$(x - 9)^2 = 2 \left(y + \frac{5}{2} \right).$$



Obr. 6.2: Parabolická úseč daná tětivou AB a trojúhelník ABC

Příklad 13. [20]

Vyjádřete obsah parabolické úseče paraboly $k: x^2 = 2py$. Porovnejte s obsahem trojúhelníku, který je dán tětivou vymežující tuto úseč a vrcholem úseče.

Souřadnice bodů A, B, C (obr. 6.2) označme (uvažujme $x_A < x_C < x_B$):

$$A = [x_A, y_A] \qquad B = [x_B, y_B] \qquad C = [x_C, y_C].$$

Pro obsah parabolické úseče, jež je na obrázku 6.2 barevně vyznačena, vyjádřeme nejprve obsah S_l lichoběžníku $B_x B A A_x$ dle vztahu 6.2:

$$S_l = \frac{|B_x B| + |A A_x|}{2} \cdot |A_x B_x| = \frac{x_B^2 + x_A^2}{4p} \cdot (x_B - x_A).$$

Rovnici paraboly opět můžeme vyjádřit jako funkci dle rovnice 6.2, pomocí určitého integrálu tak vypočítejme obsah S_p vyšrafované části pod parabolou na obrázku 6.2:

$$S_p = \int_{x_A}^{x_B} \frac{x^2}{2p} dx = \frac{1}{6p} [x^3]_{x_A}^{x_B} = \frac{x_B^3 - x_A^3}{6p}.$$

Obsah S_u parabolické úseče bude roven rozdílu $S_l - S_p$:

$$\begin{aligned} S_u &= \frac{x_B^2 + x_A^2}{4p} \cdot (x_B - x_A) - \frac{x_B^3 - x_A^3}{6p} \\ 12p \cdot S_u &= 3 \cdot (x_B - x_A) \cdot (x_B^2 + x_A^2) - 2 \cdot (x_B - x_A) \cdot (x_B^2 + x_A x_B + x_A^2) \\ 12p \cdot S_u &= (x_B - x_A) \cdot (x_B^2 - 2x_A x_B + x_A^2) = (x_B - x_A) \cdot (x_B - x_A)^2 \\ S_u &= \frac{(x_B - x_A)^3}{12p}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Výpočet bez užití integrálního počtu pak můžeme najít zde [20].²⁵

²⁵Tzv. *kvadraturu paraboly*, tedy výpočet obsahu parabolické úseče, provedl už ve 3. st. př. n. l. ARCHIMÉDÉS ZE SYRAKUS za pomoci *metody vyčerpání*, kdy rozděluje parabolickou úseč na nekonečně mnoho trojúhelníků. Podobným přístupem byl Archimédés schopen vypočítat také obsah kruhu, objem a povrch koule apod. [20]

Pro výpočet obsahu trojúhelníku ABC vyjádřeme vektory \vec{AB} a \vec{AC} :

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= (x_B - x_A; y_B - y_A), \\ \vec{AC} &= (x_C - x_A; y_C - y_A).\end{aligned}$$

Jejich vektorový součin získáme doplněním třetí souřadnice $z = 0$ (oba vektory vlastně leží v rovině $z = 0$):

$$(x_B - x_A; y_B - y_A; 0) \times (x_C - x_A; y_C - y_A; 0) = (0; 0; (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)).$$

Polovina velikosti tohoto vektoru bude rovna obsahu trojúhelníku ABC .²⁶ Dosad' me za y -ové souřadnice dle vztahu 6.2:

$$\begin{aligned}2 \cdot S_{\Delta} &= \left| (x_B - x_A) \cdot \frac{x_C^2 - x_A^2}{2p} - \frac{x_B^2 - x_A^2}{2p} \cdot (x_C - x_A) \right| \\ 4p \cdot S_{\Delta} &= |(x_B - x_A) \cdot (x_C + x_A) \cdot (x_C - x_A) - (x_B + x_A) \cdot (x_B - x_A) \cdot (x_C - x_A)| \\ S_{\Delta} &= \frac{|(x_A - x_B) \cdot (x_B - x_C) \cdot (x_C - x_A)|}{4p}.\end{aligned}\tag{6.6}$$

Vrchol C parabolické úseče je bodem, jímž prochází tečna rovnoběžná s tětivou AB vymezující tuto úseč (obr. 6.2). Průměr paraboly procházející bodem C je sdružený se směrem tečny t , tedy i tětivy AB a prochází tak jejím středem. Pro souřadnice bodů A, B, C tak platí:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Dosad' me do rovnice 6.6 pro výpočet obsahu trojúhelníku ABC :

$$\begin{aligned}S_{\Delta} &= \frac{\left| (x_A - x_B) \cdot \left(x_B - \frac{x_A + x_B}{2}\right) \cdot \left(\frac{x_A + x_B}{2} - x_A\right) \right|}{4p} \\ S_{\Delta} &= \frac{(x_B - x_A)^3}{16p}.\end{aligned}\tag{6.7}$$

Pak je tedy zřejmé, že pro 6.7 a 6.5 platí vztah:

$$S_u = \frac{4}{3} S_{\Delta}.$$

²⁶Platí, že obsah rovnoběžníku, jenž je vymezen dvěma vektory vycházejícími z jednoho vrcholu, je roven velikosti vektoru, který získáme jejich vektorovým součinem [2, s. 64]. Obsah trojúhelníku vymezeného těmito dvěma vektory je pak roven polovině obsahu rovnoběžníku.

7 Příklady

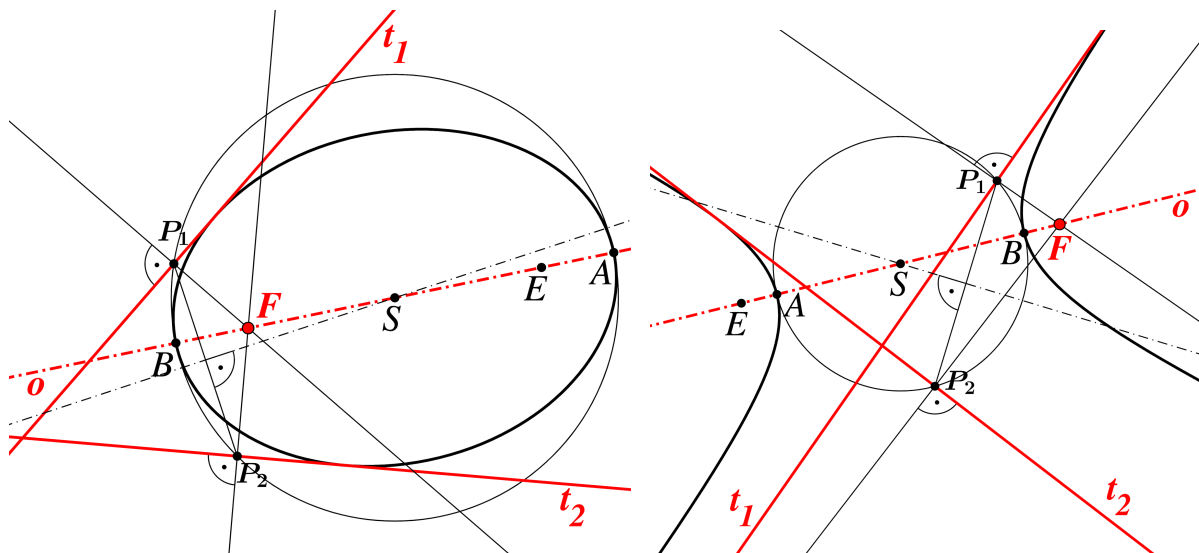
V následujících příkladech bude kuželosečka dána pěti prvky, resp. pěti různými informacemi (některé prvky totiž mohou spojovat informací více). Víme, že s takovým zadáním při náhodně daných prvcích parabolu nezískáme, potřebujeme k tomu o jednu informaci méně. Příklad tak nejprve vyřešíme obecně a potom postupně dourčíme vždy jeden prvek ze zadání tak, aby řešením byla právě parabola.

Příklad 14.

Sestrojte kuželosečku, je-li dána její (hlavní) osa o , ohnisko F na této ose a dvě různoběžné tečny t_1, t_2 , které tímto ohniskem neprocházejí, nejsou s osou o rovnoběžné a jejich průsečík neleží na této ose.

Obecné řešení

Ukažme si nejprve obecné řešení. Paty P_1, P_2 kolmic na tečny ohniskem F leží na vrcholové kružnici/přímce. Pak osa úsečky P_1P_2 protne osu o kuželosečky ve středu S této kružnice (obr. 7.1). Druhé ohnisko E kuželosečky bude souměrné podle S s ohniskem F . Průsečíky vrcholové kružnice budou vrcholy A, B kuželosečky.



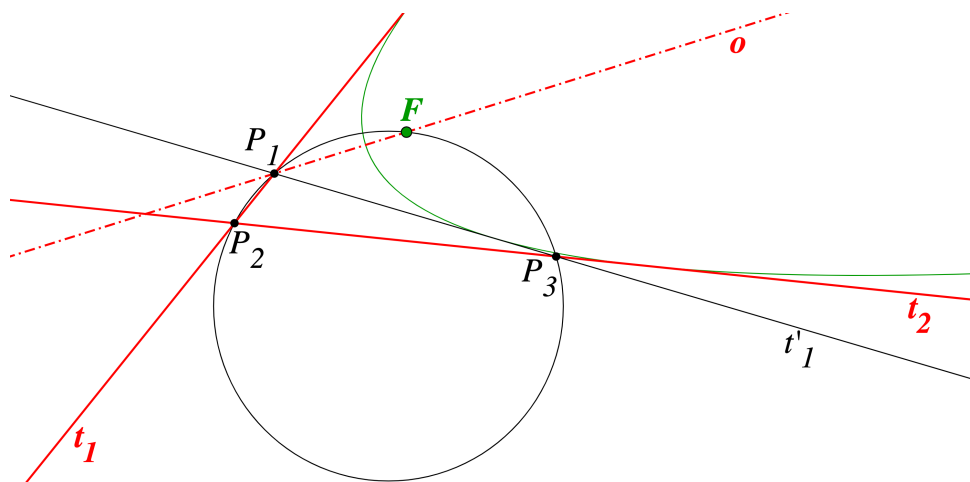
Obr. 7.1: Elipsa a hyperbola s daným ohniskem F , hlavní osou o a tečnami t_1, t_2

Při splnění podmínek v zadání bude mít tento příklad vždy jedno řešení. Jak vidíme na obrázku 7.1 vlevo pokud leží vrcholy A, B vně úsečky EF půjde o elipsu, na obrázku 7.1 vpravo pak leží vrcholy A, B mezi body E, F a jde tak o hyperbolu. Pro parabolu by musela být osa P_1P_2 rovnoběžná s osou o , aby byl jejich průsečíkem nevlastní bod paraboly a body P_1, P_2 tvořily vrcholovou přímku, což při náhodně daných prvcích pravděpodobně nenastane.

Dána osa o , tečny t_1, t_2 a dourčit ohnisko F paraboly

Mějme tedy osu o kuželosečky, její dvě tečny t_1, t_2 a doplníme její ohnisko tak, aby řešením byla parabola. Využijme osově souměrnosti paraboly podle osy o a zobrazme v této souměrnosti jednu z tečen, v našem případě t_1 (obr. 7.2). Tečny t_1, t_1', t_2 pak tvoří trojúhelník $P_1P_2P_3$. Dle věty 5 (s. 17) leží ohnisko na kružnici opsané tomuto trojúhelníku. Jedním průsečíkem této kružnice s osou je samotný vrchol P_1 , jež leží zároveň na tečně t_1 a nemůže být ohniskem. Druhým průsečíkem je hledané ohnisko F .

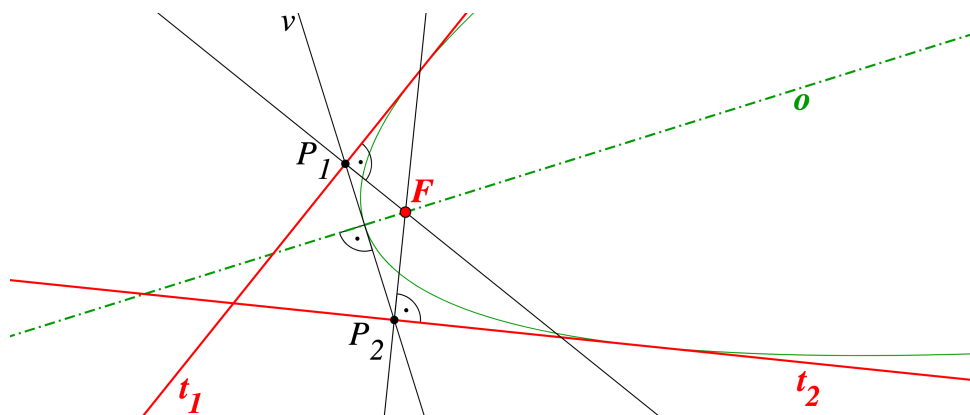
Řešení nebude existovat pokud $t'_1 \parallel t_2$. Jinak najdeme vždy jedno ohnisko F a tedy i jedno řešení. Věta 5 vychází z vlastnosti všech bodů M paraboly $|MF| = |Md|$. Pro elipsu a hyperbolu neplatí a zadání by pro ně skutečně nebylo jednoznačné.



Obr. 7.2: Osa o , tečny t_1, t_2 a hledané ohnisko F

Dáno ohnisko F , tečny t_1, t_2 , a dourčit osu o paraboly

K nalezení osy při daném ohnisku F a tečnách t_1, t_2 , využijme podobného postupu, jako při obecném zadání. Paty kolmic P_1, P_2 na tečny t_1, t_2 vedené ohniskem F (obr. 7.3), leží na vrcholové přímce v . Ta je kolmá na osu o , tedy kolmice na v vedená ohniskem F je osa o paraboly.



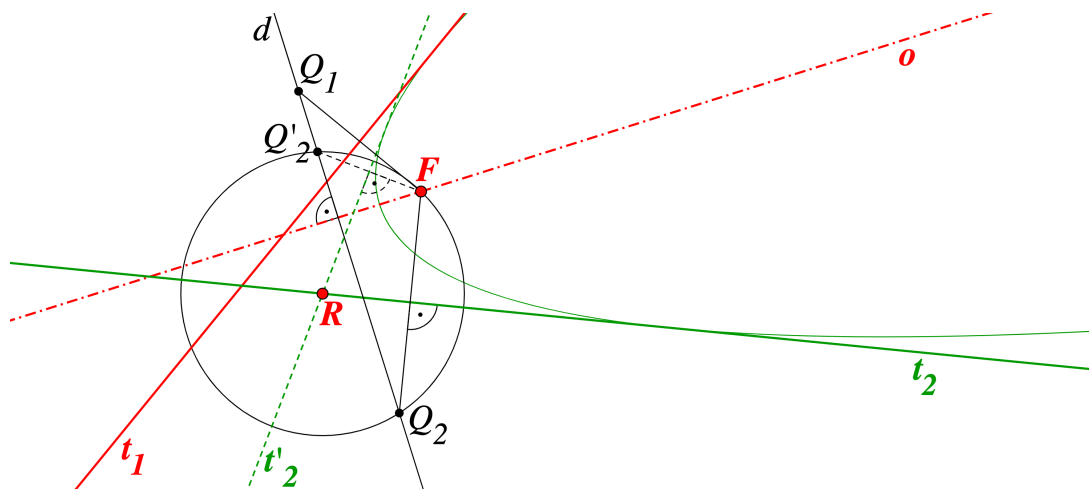
Obr. 7.3: Ohnisko F , tečny t_1, t_2 a hledaná osa o

Tento příklad bude mít pro parabolu vždy jedno řešení. U elipsy nebo hyperboly by jejich vrcholová kružnice bez dané hlavní osy nebyla určena jednoznačně.

Dáno ohnisko F , osa o , tečna t_1 a dourčit tečnu t_2 paraboly

Pro upřesnění zadání hledáme tečnu t_2 , která prochází vnějším bodem paraboly R ; $R \notin o$ (obr. 7.4). Využijme ohniskových vlastností. Bod Q_1 , jež je souměrný s ohniskem F podle tečny t_1 , leží na řídicí přímce d . Ta tak tímto bodem prochází a zároveň je kolmá na osu o . Řídicí přímka je množinou všech bodů souměrně sdružených s ohniskem F podle jejích tečen, leží na ní tak i bod Q_2 sdružený podle hledané tečny t_2 . Pro bod R tečny musí platit $|RF| = |RQ_2|$, bod Q_2 tak bude průsečíkem kružnice se středem R procházející ohniskem a přímky d . Osa úsečky FQ potom bude tečna t_2 .

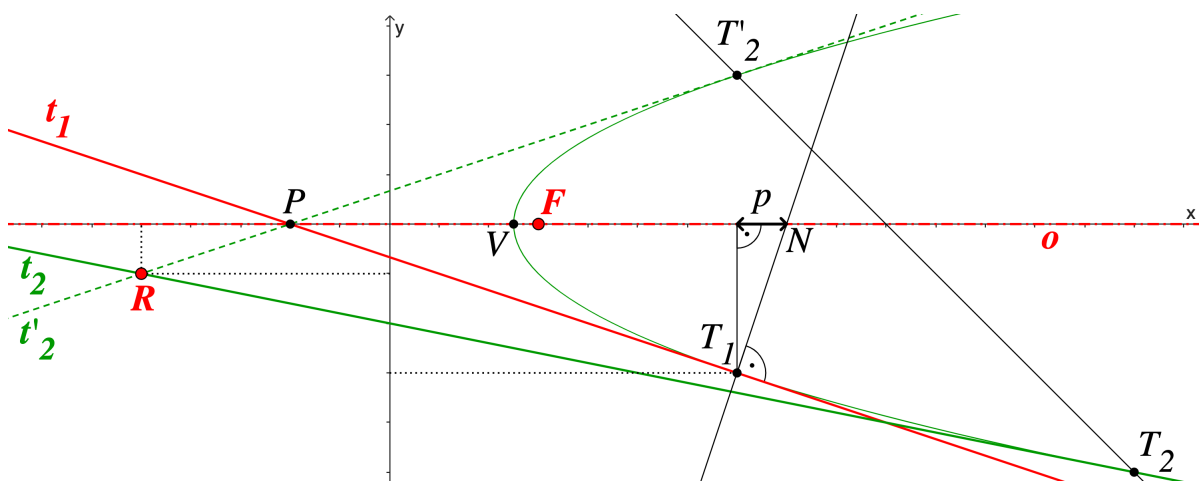
Pro vnější bod R paraboly budou existovat vždy dva průsečíky s řídicí přímkou d a tedy dvě tečny t_2, t'_2 , ovšem obě ke stejné parabole dané přímkou d a ohniskem F a tato parabola je tak jediným řešením. Množina bodů souměrných s ohniskem podle tečen elipsy a hyperboly je kružnice, ta by tak v tomto zadání opět nebyla dána jednoznačně.



Obr. 7.4: Ohnisko F , osa o , tečna t_1 a hledaná tečna t_2 bodem R

Dáno ohnisko F , osa o , tečna t_1 a dourčit tečnu t_2 paraboly

Stejně zadání vyřešíme také analyticky, ovšem tentokrát s trochu jiným přístupem. Mějme dáno ohnisko $F = [3; 0]$, osu $o: y = 0$, tečnu $t_1: x + 3y + 2 = 0$ a nalezneme tečnu t_2 procházející vnějším bodem $R = [-5; -1]$ takovou, aby kuželosečkou byla parabola.



Obr. 7.5: Ohnisko F , osa o , tečna t_1 a hledaná tečna t_2 bodem R

Využijme vlastnosti subtangenty a subnormály z věty 21 (s. 36). Souřadnice průsečíku P osy paraboly, jež splývá s osou x (obr. 7.5), s tečnou t_1 získáme dosazením $y = 0$ do její rovnice:

$$P = [-2; 0].$$

Platí $(PN; F) = -1$, kde $N = [x_n; 0]$ je průsečík normály tečny t_1 s osou x . Pro x -ové souřadnice bodů P, F a N tak platí:

$$3 = \frac{-2 + x_n}{2}$$

$$x_n = 8.$$

Normála kolmá na tečnu t_1 má směrový vektor $\vec{s}_n = (1; 3)$, vyjádřeme ji parametricky:

$$n: x = 8 + s$$

$$y = 3s,$$

kde $s \in \mathbb{R}$. Dosadíme do rovnice tečny t_1 , vyjádřeme s :

$$8 + s + 9s + 2 = 0$$

$$s = -1$$

a souřadnice dotykového bodu T_1 tečny t_1 s parabolou jsou:

$$T_1 = [7; -3].$$

Průsečík poláry bodu P s osou x bude mít stejnou x -ovou souřadnici jako T_1 , parametr paraboly p je tak absolutní hodnota rozdílu x -ových souřadnic bodů N a T_1 :

$$p = |8 - 7| = 1.$$

Dle souřadnic F a P jde o parabolu otevřenou doprava, souřadnice vrcholu V tak jsou:

$$V = [3 - \frac{1}{2}; 0] = [\frac{5}{2}; 0].$$

Rovnice poláry bodu $P = [-5; -1]$ dle tabulky 8 je:

$$-y = x - \frac{5}{2} - 5 - \frac{5}{2}$$

$$10 - y = x, \tag{7.1}$$

což dosadíme do rovnice paraboly

$$y^2 = 2 \left(x - \frac{5}{2} \right)$$

pro nalezení jejich průsečíků s polárou:

$$y^2 = 2 \cdot \left(10 - y - \frac{5}{2} \right)$$

$$0 = (y + 5) \cdot (y - 3).$$

Rovnice má dvě řešení $y_{1,2}$, dosazením do 7.1 dopočítáme $x_{1,2}$:

$$T_2 = [15; -5]$$

$$T_2' = [7; 3]$$

a jejich dosazením do odpovídající rovnice poláry dle tabulky 8 získáváme dvě tečny:

$$t_2: x + 5y + 10 = 0$$

$$t_2': x - 3y + 2 = 0.$$

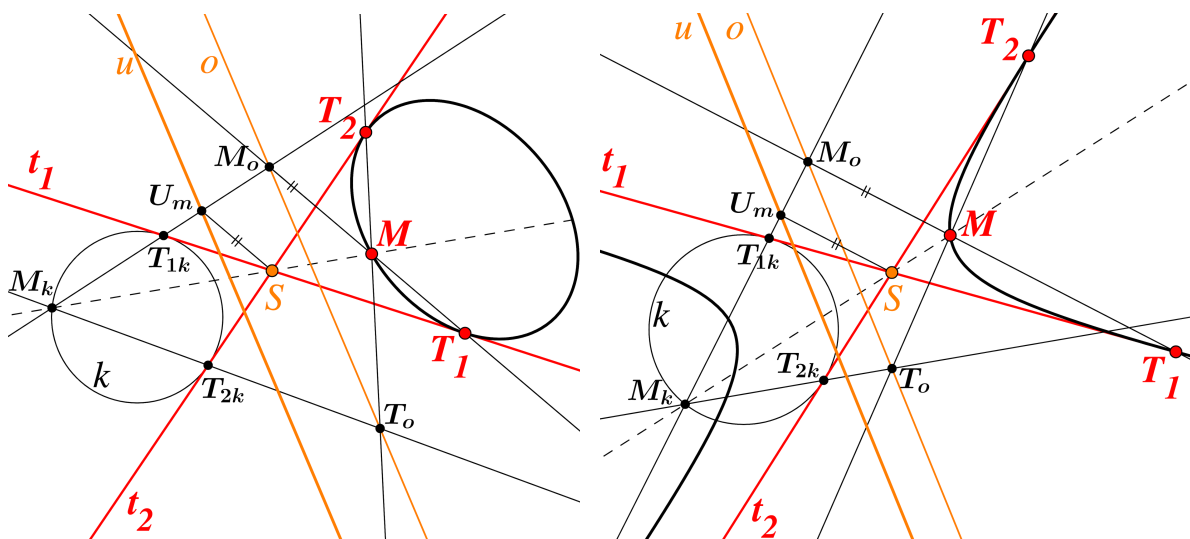
Vlastnosti subtangenty a subnormály vyplývají z toho, že je vždy jeden z vrcholů paraboly nevlastní bod. Elipsa a hyperbola mají oba vrcholy vlastní a dělicí poměr jednoho vrcholu vzhledem k pólu a průsečíku poláry s osou tak může nabývat nekonečně mnoha hodnot.

Příklad 15.

Sestrojte kuželosečku, jsou-li dány její dvě různoběžné tečny t_1, t_2 , jejich body dotyku T_1, T_2 , které jsou různé od průsečíku těchto tečen, a její bod M , který neleží na žádné z tečen a není s body T_1, T_2 kolineární.

Obecné řešení

K obecnému řešení využijme středovou kolineaci. Zvolme za její střed průsečík S tečen t_1, t_2 (obr. 7.6). Jako vzor volme kružnici k , jež se dotýká obou tečen, jejich dotykové body T_{1k} a T_{2k} jsou vzory dotykových bodů T_1, T_2 s kuželosečkou. Přímka SM protne kružnici ve dvou bodech, zvolme libovolný z nich jako vzor M_k daného bodu M . Tato volba neovlivní podobu výsledné kuželosečky. Průsečíky M_o, T_o odpovídajících si přímek $MT_1, M_k T_{1k}$ a $MT_2, M_k T_{2k}$ prochází osa o kolineace. Úběžník U_m získáme jako průsečík přímky procházející S rovnoběžné s MT_1 a jí odpovídající přímky $M_k T_{1k}$. Úběžníkem pak prochází úběžnice u rovnoběžná s osou o . Tím jsme určili středovou kolineaci, kuželosečku pak sestrojíme jako obraz kružnice k dle kapitoly 4.4.



Obr. 7.6: Elipsa a hyperbola s danými tečnami t_1, t_2 , jejich dotykovými body T_1, T_2 a bodem M

Tento příklad bude mít při splnění podmínek v zadání vždy jedno řešení. Na obrázku 7.6 vlevo je úběžnice vnější přímkou kružnice k a obrazem tak bude elipsa, na obrázku 7.6 vpravo je pak sečnou kružnice k a řešením je hyperbola. Pro parabolu by musela být úběžnice tečnou této kružnice, což při náhodně daných prvcích nenastane. Opět tak doplňujeme různé prvky tak, aby řešením byla skutečně parabola.

Dán bod M , tečny t_1, t_2 , dotykový bod T_1 a dourčit dotykový bod T_2 paraboly

Dotykový bod T_2 tečny t_2 najdeme opět s užitím středové kolineace. Její střed S , kružnici k a vzory jejich bodů volme stejně jako v předchozím případě. (obr. 7.7). Přímka procházející středem S rovnoběžná s MT_1 opět protne její vzor, přímku $M_k T_{1k}$, v bodu U_m . Tímto bodem vedme tečnu ke kružnici k , jež bude úběžnicí u . K určení osy pak už skutečně stačí pouze jeden bod, průsečík M_o odpovídajících si přímek MT_1 a $M_k T_{1k}$, neboť je s úběžnicí u rovnoběžná. Průsečíkem T_o osy kolineace a přímky $M_k T_{2k}$ pak prochází její obraz, přímka MT_o , jež protne tečnu t_2 v hledaném bodu T_2 .

Pokud budou body M, T_1 ležet v opačných polorovinách určených tečnou t_2 , nebude existovat žádné řešení. K tomuto problému při obecném zadání nedojde, v této situaci by byla

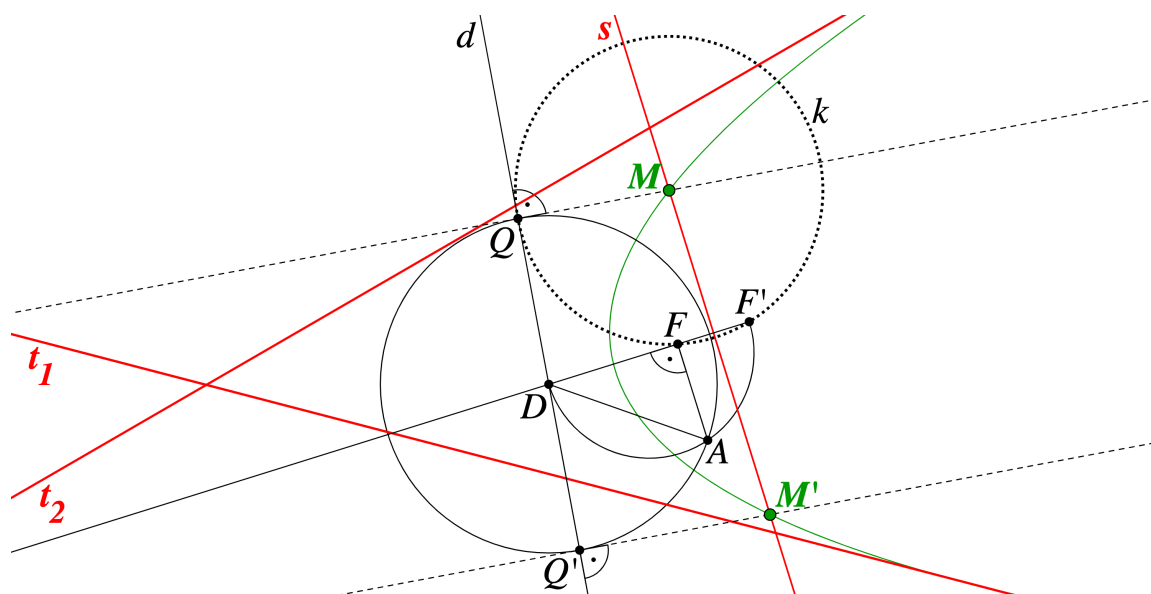
Parabola je množinou středů kružnic, které prochází ohniskem a dotýkají se řídicí přímky paraboly. Kružnice k se středem ležícím zároveň na sečně s bude procházet i bodem F' , jež je souměrný s ohniskem F podle této sečny (obr. 7.9). Průsečík přímky FF' s řídicí přímkou d označme D . Příмка d je pak zároveň tečnou z bodu D ke kružnici k . Pro mocnost m bodu D k této kružnici platí:

$$m = |DF| \cdot |DF'| = |DQ|^2,$$

kde Q je dotykový bod přímky d s kružnicí k , kolmice na d tak bude zároveň průvodičem hledaného bodu M . Nad průměrem DF' sestrojme Tháletovu kružnici, jeden její průsečík s kolmicí na DF' bodem F označme A . Dle Eukleidovy věty o odvěsně platí:

$$|DF| \cdot |DF'| = |DA|^2$$

a vzdálenost $|DA|$ tak odpovídá vzdálenosti $|DQ|$. Kružnice se středem D a poloměrem $|DA|$ tak protne přímkou d v bodu Q , kolmice na d tímto bodem pak přímkou s v bodu M .



Obr. 7.9: Body M a M' jako průsečíky sečny s a nenarýsované paraboly

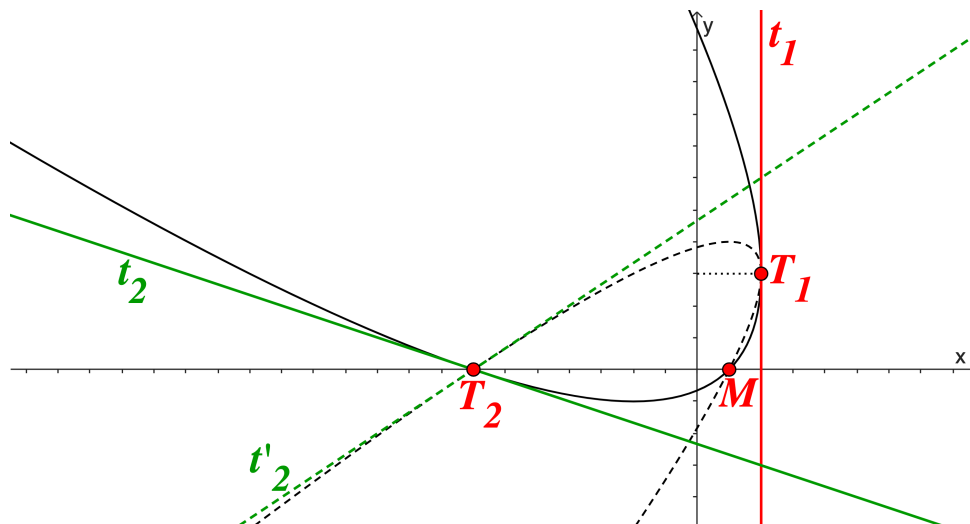
Pro sečnu s budou existovat dva průsečíky Q, Q' a najdeme tak dva body M, M' odpovídající zadání (pro tečnu s by bod F' ležel přímo na řídicí přímce a byl tak samotným bodem Q). Konstrukce paraboly je v tomto příkladu usnadněna tím, že její „druhé ohnisko“ E_∞ je nevlastním bodem paraboly a k jeho určení stačí znát pouze směr osy paraboly.

Dán bod M , tečna t_1 , dotykové body T_1, T_2 a dourčit tečnu t_2 paraboly

Tuto variantu řešme analyticky. Známe tečnu $t_1: x - 2 = 0$ s dotykovým bodem $T_1 = [2; 3]$, body kuželosečky $M = [1; 0]$, $T_2 = [-7; 0]$ a hledáme tečnu t_2 procházející bodem T_2 takovou, aby šlo o parabolu (obr. 7.10).

Tentokrát není dána osa paraboly ani žádný prvek, ze kterého by vyplynul směr této osy a nemůžeme použít odpovídající tvar vrcholové rovnice paraboly. Vlastně ani nevíme, zda bude mít výsledná parabola hlavní směry rovnoběžné se souřadnicovými osami. Z rovnice tečny t_1 dokonce vidíme, že její osa určitě nebude rovnoběžná s osou y . Musíme tak vycházet z obecné rovnice kuželosečky 5.1. Dosadíme do této rovnice souřadnice bodů M a T_2 :

$$\begin{aligned} 1 \cdot A + 1 \cdot 2D + F &= 0 \\ 49 \cdot A - 7 \cdot 2D + F &= 0. \end{aligned}$$



Obr. 7.10: Tečna t_1 s dotykovým bodem T_1 , body M , T_2 a hledaná tečna t_2

Z těchto rovnic můžeme vyjádřit D a F ve vztahu ke koeficientu A :

$$D = 3A \qquad F = -7A. \qquad (7.2)$$

Souřadnice bodu T_1 dosadíme do rovnice 5.6 poláry:

$$(2A + 3B + D) \cdot x + (2B + 3C + E) \cdot y + (2D + 3E + F) = 0.$$

Z této rovnice by se mohlo zdát, že pokud výrazy v závorkách dáme do rovnosti s odpovídajícími koeficienty a, b, c dané tečny t_1 , získáme další tři rovnice, což by bylo více, než pro parabolu potřebujeme. Obecná rovnice přímky je však stejně jako obecná rovnice kuželosečky dána jednoznačně až na násobek, který neznáme. Vhodný zápis soustavy tak je:

$$\begin{aligned} 2A + 3B + D &= 1 \cdot s \\ 2B + 3C + E &= 0 \\ 2D + 3E + F &= -2 \cdot s, \end{aligned}$$

kde $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dosadíme do první a třetí rovnice vztahy ze 7.2 a eliminujeme jejich lineární kombinací koeficient s , druhou rovnici opíšme:

$$\begin{aligned} 9A + 6B + 3E &= 0 \\ 2B + 3C + E &= 0 \end{aligned}$$

a vyjádříme koeficient C :

$$C = A.$$

Nyní využijme vztahu $B^2 = AC$, jež platí pro nestředovou kuželosečku:

$$B = \sqrt{A^2} = \pm A.$$

Poslední koeficient E závisí na znaménku koeficientu B :

$$\begin{aligned} B = A & & B = -A \\ E = -5A & & E = -A. \end{aligned}$$

Řešením jsou tak dvě rovnice:

$$k : x^2 + 2xy + y^2 + 6x - 10y - 7 = 0,$$

$$k' : x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 2y - 7 = 0,$$

kteřé jsou dle vztahů 5.29 obě rovnici paraboly. Dosazením bodu $T_2 = [-7; 0]$ paraboly do rovnice poláry 5.6, získáme přímo rovnici tečny t_2 tímto bodem:

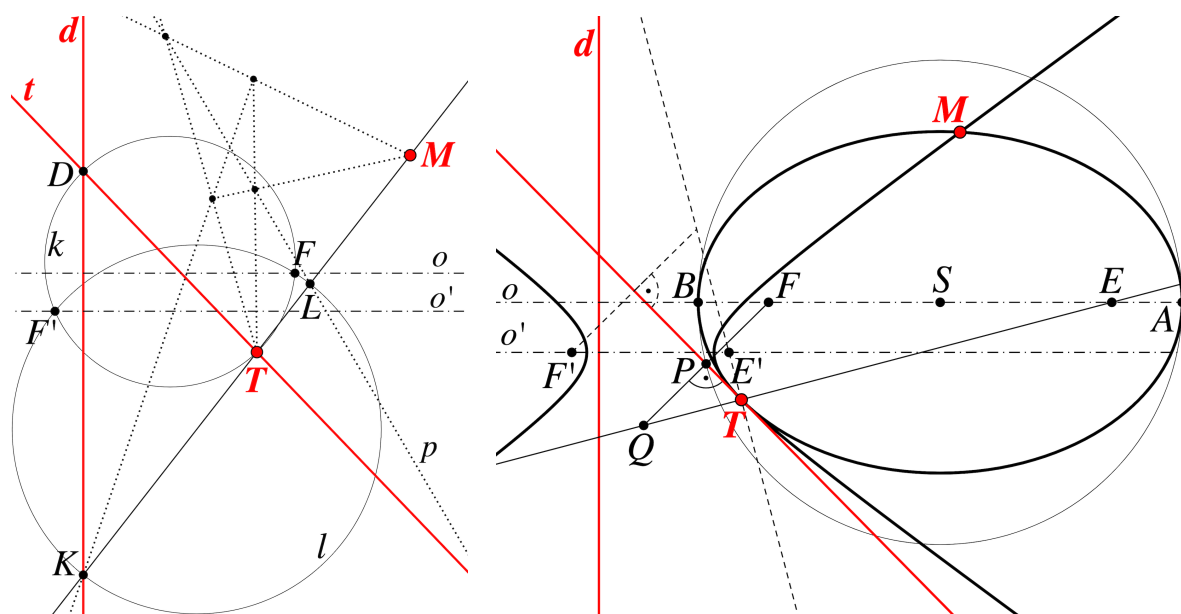
$$t_2 : x + 3y + 7 = 0,$$

$$t_2' : 2x - 3y + 14 = 0.$$

Pokud by body M a T_2 ležely v opačných polorovinách daných tečnou t_1 , parabola nebude existovat. Řešením může být dvojitá přímka v případě kolineárních bodů M, T_1, T_2 . V ostatních případech by neměla soustava reálné řešení. To by se při obecném zadání nemohlo stát, soustava lineárních rovnic s reálnými koeficienty má vždy reálné řešení. Rovnice $B^2 = AC$, jež platí právě pro parabolu, však obsahuje kvadratické členy.

Příklad 16.

Sestrojte kuželosečku, je-li dána její řídicí přímka d , její tečna t , jež není kolmá na d , s bodem dotyku T , jež neleží na d a její další bod M , jež neleží na t a d .



Obr. 7.11: Elipsa a hyperbola s danou řídicí přímkou d , tečnou t s bodem dotyku T a bodem M

Obecné řešení

Řešení je inspirováno [21, s. 68]. Známe řídicí přímku d kuželosečky, ale neznáme hodnotu numerické excentricity ε a nevíme jaký je poměr mezi vzdálenostmi bodů M a T od d a od ohniska F kuželosečky. Využijme tak jiného vztahu mezi řídicí přímkou a ohniskem. Průsečík tečny t a d označme D (obr. 7.11 vlevo). Podle věty 3 (s. 13) svírají přímky DF a FT pravý úhel. Ohnisko tak bude ležet na Tháletově kružnici k nad průměrem DT . Tečnu bodem M ovšem neznáme. Víme však, že polára libovolného bodu řídicí přímky prochází ohniskem. Průsečík přímky MT s d označme K . Polára bodu K musí procházet bodem L pro nějž platí:

$$(KL; MT) = -1.$$

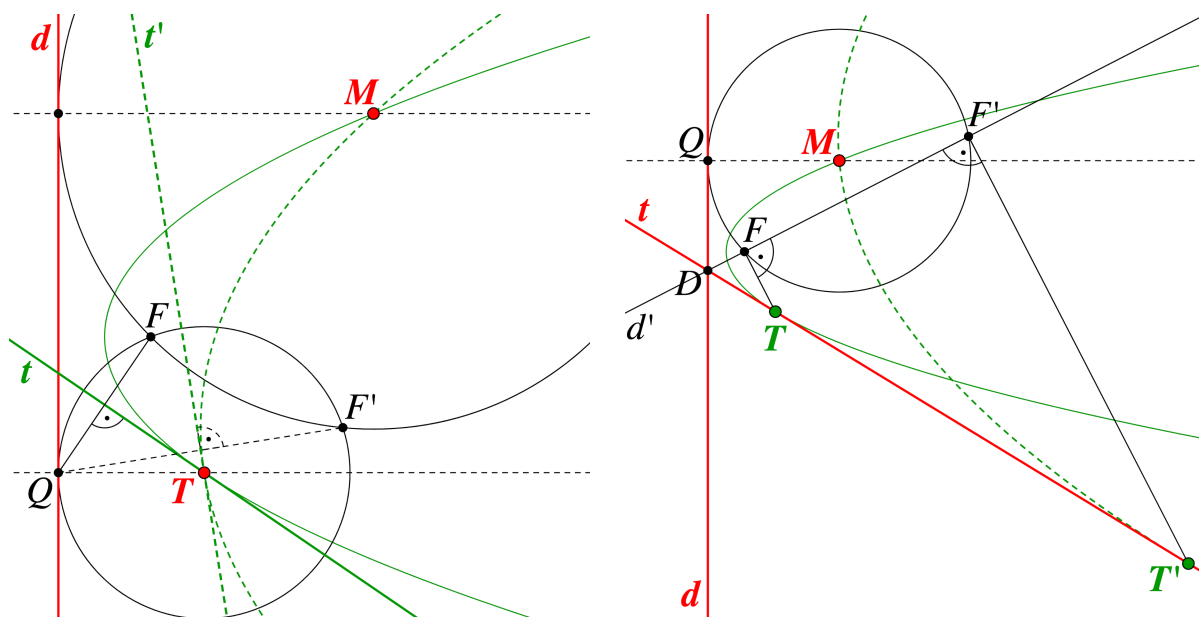
Sestrojíme tento bod pomocí úplného čtyřrohu. Dodejme, že přímka p , jež body K, M, T harmonicky odděluje, není přímo polárou bodu K , k tomu bychom potřebovali čtyři body kuželosečky. Nám ale stačí vědět, že polára procházející L svírá s přímkou KF pravý úhel. Nad průměrem KL tak opět sestrojme Tháletovu kružnici l , průsečík k, l je pak hledané ohnisko F . Pak již můžeme sestrojit hlavní osu kuželosečky, jež je kolmá na d (obr. 7.11 vpravo). Pomocí sdruženého bodu Q ohniska F dle tečny t a přímky QT pak najdeme i druhé ohnisko E . Vrcholová kružnice, jejíž střed S leží ve středu EF a prochází patou P kolmice tečny t na F , protne osu kuželosečky v hlavních vrcholech A, B .

Může se stát, že nebudou existovat průsečíky kružnic k a l , pak řešení neexistuje. Pokud budou mít k, l pouze jeden průsečík ($D = K$) a nebo pokud jeden z průsečíků bude ležet na řídicí přímce d ($MT \perp d$), existuje pouze jedno řešení. Pro dva průsečíky kružnic k, l existují dvě řešení. Řešení najdeme i pro $MT \parallel d$, jen bude bod K_∞ nevlastní. Pro ohniska E, F ve stejných polorovinách daných přímkou d , je řešením elipsa, pro ohniska E', F' v opačných polorovinách je řešením hyperbola (obr. 7.11 vpravo). Parabolu získáme pouze v okamžiku, kdy bude bod Q ležet přímo na řídicí přímce a průvodič QT pak bude rovnoběžný s osou o .

Dána řídicí přímka d , bod M , dotykový bod T a dourčit tečnu t paraboly

Konstrukce paraboly s danou řídicí přímkou d a dvěma jejími body M, T vychází přímo z její definice (obr. 7.12 vlevo). Průsečíkem kružnic, jež mají střed v daných bodech a jež se dotýkají řídicí přímky, pak bude ohnisko F paraboly. Osa úsečky FQ , kde Q je dotykový bod kružnice se středem T s řídicí přímkou, je hledaná tečna t bodem T .

Pro existenci řešení musí oba body M, T ležet ve stejné polorovině určené přímkou d . Jinak se počet řešení odvíjí od počtu průsečíků kružnic. Pro $|Td| + |Md| < |MT|$ nebude opět řešení existovat, pro $|Td| + |Md| = |MT|$ bude řešením jedna parabola a tedy jedna tečna t , pro $|Td| + |Md| > |MT|$ budou existovat dvě řešení a tedy dvě tečny t, t' , každá vždy k jiné parabole. Numerická excentricita ε elipsy a hyperboly může narozdíl od paraboly nabývat nekonečně mnoha hodnot a jejich zadání by pak skutečně nebylo jednoznačné.



Obr. 7.12: Řídicí přímka d , bod M , bod T a hledaná tečna t , resp. tečna t a hledaný bod T

Dána řídicí přímka d , bod M , tečna t a dourčit dotykový bod T paraboly

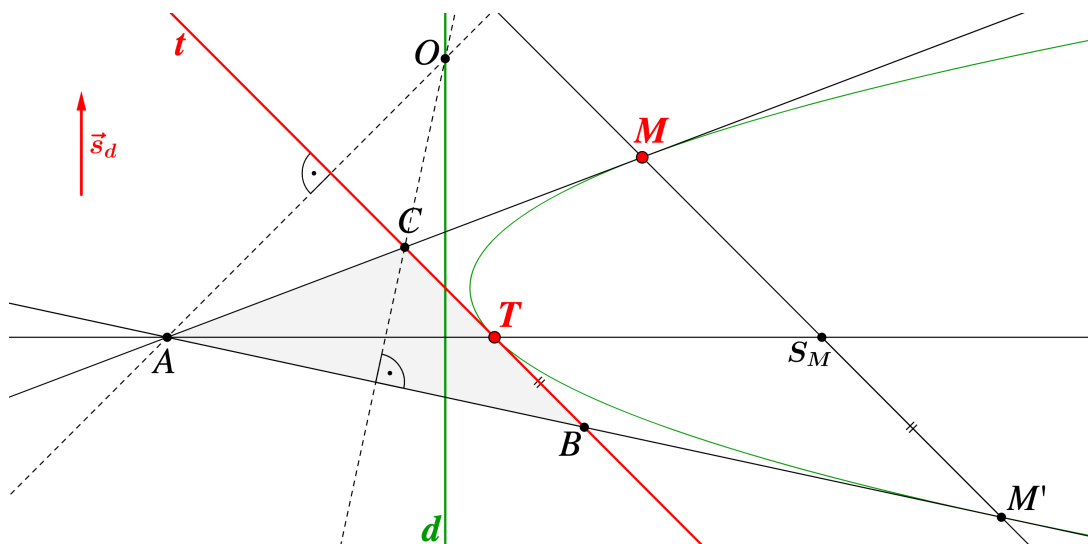
Známe-li řídicí přímku d , bod M a tečnu t , ohnisko F bude opět ležet na kružnici se středem v M , jež se dotýká řídicí přímky (obr. 7.12 vpravo). Řídicí přímka je množinou všech bodů souměrně sdružených s ohniskem paraboly podle tečen, ohnisko tak bude zároveň ležet na přímce d' osově souměrné s řídicí přímkou podle tečny t a bude tak průsečíkem této přímky a kružnice. Průsečík tečny t a řídicí přímky označme D . Dle věty 3 (s. 13) leží dotkový bod T tečny t na kolmici na přímku DF bodem F .

Řešením tohoto příkladu bude jedna parabola v případě, že by tečna bodem M paraboly také procházela bodem D (to nastane, když budou body M, F, T kolineární). Jinak budou řešením vždy dvě paraboly s ohnisky F, F' a tedy dva dotkové body T, T' . V těchto třech příkladech můžeme vidět, jak jsou pro parabolu řešení s danou řídicí přímkou celkem triviální, narozdíl od elipsy a hyperboly.

Dán směr \vec{s}_d , bod M , tečna t , dotkový bod T a dourčit řídicí přímku d paraboly

Pro určení řídicí přímky pomocí zbylých prvků M, T, t bychom měli málo informací. Ponechme tak v zadání informaci o směru řídicí přímky a hledejme pouze její polohu.

Dotkovým bodem T tečny t prochází průměr paraboly, jehož směr je kolmý na směr \vec{s}_d řídicí přímky (obr. 7.13). Tento průměr je sdružený se směrem tečny t a pólí tak všechny tětivy paraboly rovnoběžné s touto tečnou (viz věta 18 a 19, s. 35). Přímka procházející bodem M rovnoběžná s t tak protne tento průměr ve středu S_M tětivy MM' , pro jejíž druhý krajní bod M' pak platí $(MM'; S_M) = -1$. Body M a M' prochází tečny, jejichž průsečík A leží na průměru paraboly TS_M a platí pro něj $(AS_M; T) = -1$. Dostáváme se tak k variantě, kdy známe dvě tečny s jejich body dotyku, kterou jsme již řešili v příkladu 7.



Obr. 7.13: Tečna t s dotkovým bodem T , bod M , směr \vec{s}_d hledané řídicí přímky d

Můžeme ale sestavit řídicí přímku, aniž bychom k tomu potřebovali ohnisko paraboly. Platí následující věta, kterou zde ponecháváme bez důkazu:

Věta 26. Průsečík výšek trojúhelníku (tzv. *ortocentrum*), který je tvořen třemi libovolnými tečnami paraboly, leží na její řídicí přímce [21, s. 161].²⁷

²⁷Ve [21, s. 161] najdeme také elegantní důkaz pomocí prostředků projektivní geometrie, konkrétně tzv. *Brianchonovy věty*. Věta 26 ovšem také vychází z vlastností tzv. *Simsonovy přímky*, která v případě trojúhelníku tvořeného třemi tečnami paraboly a jejího ohniska odpovídá vrcholové přímce této paraboly [7, s. 381].

Pak tedy průsečíky tečny t a tečen AM' , AM označme B, C . Bodem O , jež je ortocentrem trojúhelníku ABC , prochází řídicí přímka d paraboly, jež je rovnoběžná se směrem \vec{s}_d .

Tento příklad bude mít vždy jedno řešení. Konstrukce paraboly je usnadněna tím, že jsou všechny její směry sdružené se směrem osy, a zároveň pro její pól A přímky MM' , střed tětivy S_M a druhý průsečík průměru s parabolou, kterým je vždy nevlastní bod U_∞ , platí:

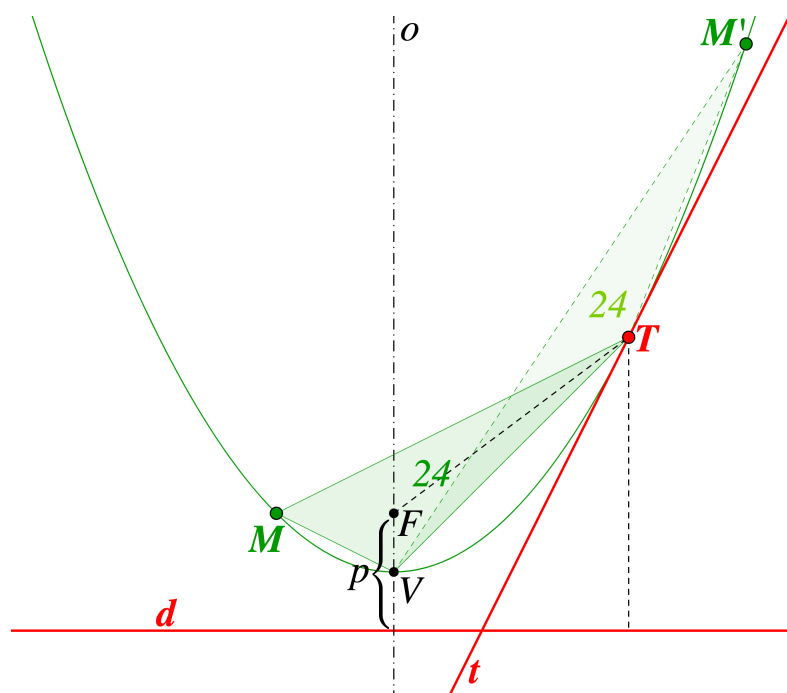
$$(AS_M; TU_\infty) = (AS_M; T) = -1.$$

Dána řídicí přímka d , tečna t , dotkový bod T a dourčit bod M paraboly

Mějme řídicí přímku paraboly, tečnu, jejich dotkový bod a pro upřesnění zadání hledejme bod paraboly takový, aby měl trojúhelník určený tímto bodem, daným dotkovým bodem a vrcholem této paraboly obsah 24. Tento příklad tak řešíme analyticky. Volme řídicí přímku paraboly $d: y + 2 = 0$, její tečnu $t: 2x - y - 2 = 0$ a jejich dotkový bod $T = [5, 8]$.

Známe bod T paraboly pro nějž platí $|TF| = |Td|$. Dle řídicí přímky vidíme, že parabola má osu rovnoběžnou s osou y (obr. 7.14) a je otevřená nahoru. Její ohnisko tak bude mít x -ovou souřadnici stejnou jako vrchol $V = [m, n]$. Jeho y -ovou souřadnici můžeme vyjádřit pomocí parametru p paraboly, jež je roven jeho vzdálenosti od řídicí přímky d , tedy:

$$F = [m; p - 2].$$



Obr. 7.14: Řídicí přímka d , tečna t s dotkovým bodem T hledaný bod M

Souřadnice obsahují stále dvě neznámé, potřebujeme najít vztah mezi m a p . Známe tečnu, z jejího směrnicového tvaru $y = 2x - 2$ i její směrnici $k = 2$. Vyjádřeme tak z odpovídající rovnice paraboly (viz tabulka 8) proměnnou y a určíme derivaci y' :

$$(x - m)^2 = 2p(y - n)$$

$$y = \frac{(x - m)^2}{2p} + n$$

$$y' = \frac{x - m}{p} = k,$$

dosadíme k , souřadnici bodu T a vyjádříme m :

$$2 = \frac{5 - m}{p}$$

$$m = 5 - 2p.$$

Nyní už můžeme sestavit rovnici pro vzdálenosti $|TF|$ a $|Td|$:

$$\sqrt{(5 - 5 + 2p)^2 + (8 - p + 2)^2} = |8 + 2|$$

$$p \cdot (p - 4) = 0.$$

Hodnota parametru musí být různá od nuly, platí tak $p = 4$ a také $m = -3$. Souřadnice vrcholu jsou:

$$V = \left[-3; \frac{p}{2} - 2\right] = [-3; 0].$$

Pak už můžeme dosadit x -ové souřadnice bodu T a V do vzorce pro výpočet obsahu vepsaného trojúhelníku dle 6.6 (s. 71):

$$S_{\Delta} = \frac{|(x_M - x_V) \cdot (x_V - x_T) \cdot (x_T - x_M)|}{4p}$$

$$24 = \frac{|(x_M + 3) \cdot (-3 - 5) \cdot (5 - x_M)|}{16}$$

$$384 = |8x_M^2 - 16x_M - 120|$$

$$48 = |(x_M + 3) \cdot (x_M - 5)|,$$

kde vidíme, že -3 a 5 jsou nulové body, které odpovídají souřadnicím bodů T a V .

Pro $x_M \in (-3; 5)$ můžeme napsat:

$$-48 = x_M^2 - 2x_M - 15$$

$$0 = x_M^2 - 2x_M + 33.$$

Tato rovnice má záporný diskriminant $D = -128$ a nemá v \mathbb{R} řešení.

Pro $x_M \in (-\infty; -3) \cup (5; \infty)$ pak platí:

$$48 = x_M^2 - 2x_M - 15$$

$$0 = (x_M + 7) \cdot (x_M - 9)$$

a získáváme tak dva kořeny -7 a 9 , jež oba odpovídají těmto intervalům. Druhou souřadnici vypočítáme dosazením x -ové souřadnice do rovnice paraboly

$$(x + 3)^2 = 8y$$

a řešením jsou tak dva body M a M' :

$$M = [-7; 2]$$

$$M' = [9; 18].$$

Závěr

Cílem práce bylo poukázat na specifické vlastnosti paraboly a představit ji jako hranici mezi elipsou a hyperbolou. V první kapitole jsme definovali kuželosečky jako řezy kuželové plochy, hraničnost paraboly je z této definice jasně patrná. Unikátní poloha parabolického řezu navíc umožňuje snadné odvození její rovnice a méně známou konstrukci paraboly pomocí Eukleidovy věty, kterou jsme v této kapitole uvedli.

Druhá kapitola ukázala prostřednictvím Apolloniovy definice spojitý přechod od elipsy přes parabolu až k hyperbole i v rovině. Poměr úhlů osy kuželové plochy od její povrchy a od roviny řezu jsme přenesli i do planimetrické podoby a zavedli jsme numerickou excentricitu ε kuželosečky, kterou jsme zde vyjádřili poměrem vzdáleností $\frac{e}{a}$. Přičemž parabolu jsme chápali jako limitní případ elipsy, jejíž ohnisko ubíhá do nekonečna. Z její jediné hodnoty numerické excentricity $\varepsilon = 1$ pak vyplynuly některé unikátní vztahy mezi její řídicí přímkou a jejími tečnami.

Ve třetí kapitole jsme odvodili ohniskové definice nejen pomocí Quételetovy - Dandelinovy věty, ale také s využitím Apolloniovy definice. Ukázat v těchto definicích hranici mezi elipsou a hyperbolou bylo asi nejtěžší. Podařilo se nám to až díky trochu jiné interpretaci ohniskových definic. I v této definici potom záleží na poměru $\frac{e}{a}$. V příkladu jsme ukázali konstrukci kuželosečky za použití řídicí kružnice, ze které vyplynuly vztahy mezi tečnou a ohniskem kuželosečky.

Čtvrtá definice ukázala, kolik mají jednotlivé kuželosečky nevlastních bodů, což vyplývá z poměru úhlů známých z první kapitoly a opět tak vlastně souvisí s hodnotou numerické excentricity. Tato kapitola je jen lehkým nahlédnutím do projektivní geometrie, která vlastně všechny tři kuželosečky považuje za jeden objekt. Zaměřili jsme se především na takové projektivní vlastnosti, které jsou prakticky využitelné při běžných konstrukcích, navíc jsou univerzální pro všechny kuželosečky. Pomocí středové kolineace a vzoru nevlastní přímky jsme si ukázali, jak existence nevlastního bodu kuželosečky dokáže ovlivnit její vlastnosti a proč jeden nevlastní bod ve výsledku znamená více speciálních vlastností než nevlastní body dva. Vlastnosti subtangenty a subnormály paraboly jsou třeba právě jedněmi z nich.

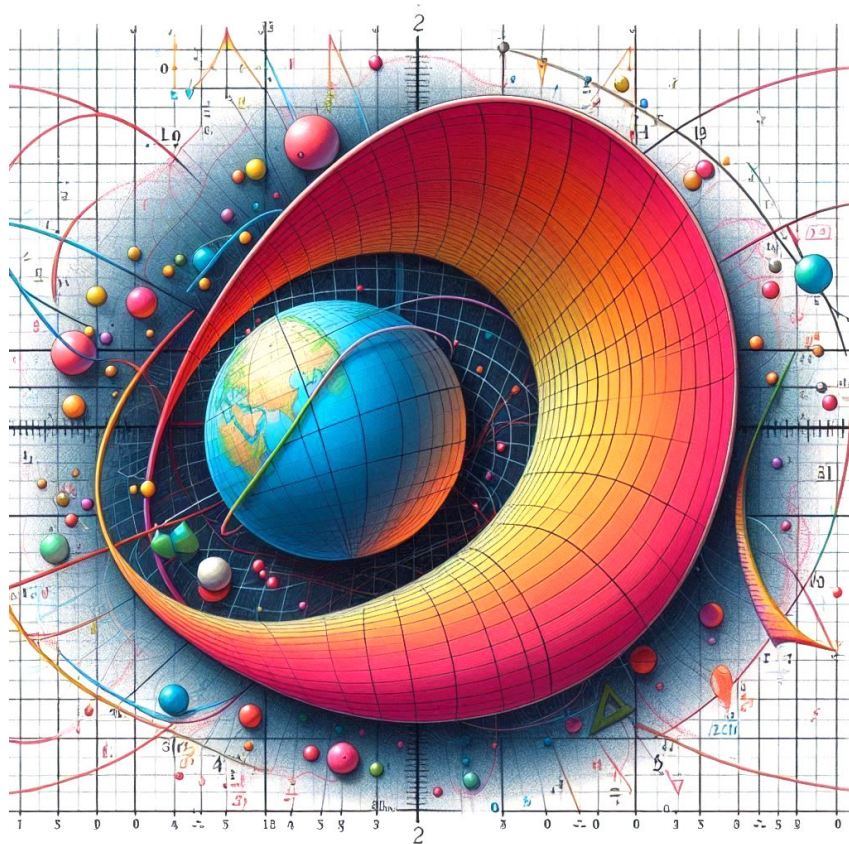
Pátá kapitola začala netradičně přímo algebraickou definicí. Následně jsem si však ukázali, že rovnice z této definice skutečně odpovídá rovnici regulární kuželosečky. Představili jsme si diskriminant kuželosečky, jež je ukazatelem toho, jaký typ kuželosečky daná algebraická rovnice představuje. I tento diskriminant má pro parabolu jedinou hodnotu, která je opět hranicí mezi hodnotami pro elipsu a hyperbolu. A znovu souvisí s hodnotou ε . Zavedením rovnice poláry a s využitím polárních vlastností jsme si ukázali, co všechno lze z obecné rovnice kuželosečky vyčíst. Což jsme poté využili k transformaci této rovnice do kanonického tvaru. Došli jsme k tomu, že rovnice paraboly má vždy v tomto tvaru jen jeden kvadratický člen. To jí opět přináší mnohá zjednodušení, třeba už jen při samotné transformaci.

Na to navázala i následující šestá kapitola, kde jsme právě možnosti jednoznačného vyjádření jedné proměnné z kanonické rovnice paraboly využili k řešení několika příkladů. Také jsme si ukázali, jak můžeme využít při výpočtech diferenciální nebo integrální počet.

V sedmé kapitole jsme se zaměřili už pouze na příklady. Ty navázaly na teorii, kterou jsme vyložili v předchozích kapitolách. Trochu netradiční způsob zadání měl poukázat právě na rozdíl mezi konstrukcemi resp. hledáním rovnic paraboly a zbývajících dvou kuželoseček.

Jako velmi důležitý pojem se v práci ukázala být numerická excentricita ε , která – at' už ve své stereometrické či planimetrické reprezentaci – méně či více skrytě – souvisí se všemi zde uvedenými definicemi. Ve všech definicích se nám podařilo ukázat, proč je parabola hraničním případem kuželosečky a co z toho pro ni vyplývá. U každé z nich také odkazujeme na interaktivní konstrukci, která má napomoci s pochopením statických obrázků.

Některé kapitoly by bylo možné ještě více rozšířit, například čtvrtá kapitola je jen úvodem do projektivní geometrie a toto téma by šlo ještě více rozpracovat způsobem, který by byl srozumitelný i středoškolákům. V páté a šesté kapitole bychom se pak nemuseli omezit jen na funkci jedné proměnné, ale využít i implicitní vyjádření funkce více proměnných, které by možnost využití metod diferenciálního počtu rozšířilo na všechny tvary rovnic kuželosečky a mohli bychom kuželosečky zkoumat z pohledu diferenciální geometrie.



Obrázek na téma: „Parabola as a border between an ellipse and a hyperbola“, vytvořil nástroj DALL·E 3

Seznam použitých zdrojů

- [1] ŠÍR, Zbyněk, ed. *Řecké matematické texty: řecko-česky*. Přeložil Richard MAŠEK, přeložil Adam ŠMÍD. Praha: OIKOYMENH, 2011. ISBN 978-80-7298-308-7.
- [2] LÁVIČKA, Miroslav. *Geometrie 1: základy geometrie v rovině*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2002. ISBN 80-7082-861-7.
- [3] HAVLÍČEK, Karel. *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1956. Řada theoretické literatury.
- [4] THOMAS, Ivor. *Greek Mathematical Works: Volume II, From Aristarchus to Pappus*. London: Harvard University Press, 1941. ISBN 978-0674993990.
- [5] SUGIMOTO, Takeshi. *Discourse on the latus rectum in conics*. Symmetry: Culture and Science [online]. 2013, 24(1-4), 295-309 [cit. 2024-06-22]. ISSN 2226-1877. Dostupné z: <https://journal-scs.symmetry.hu/issue-content/?volume=24&issue=1-4> [paywall]
- [6] BLAŽEK, Jiří a Pavel LEISCHNER. *Kuželosečky a Apolloniovy kružnice*. Matematika–fyzika–informatika. 2019, 28(3), 175-185. ISSN 1805-7705. Dostupné z: <https://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/456>
- [7] GLAESER, Georg, Hellmuth STACHEL a Boris ODEHNAL. *The Universe of Conics: From the ancient Greeks to 21st century developments* [online]. Heidelberg: Springer Spektrum Berlin, 2016 [cit. 2024-06-22]. ISBN 978-3-662-45450-3. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-45450-3>
- [8] URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965.
- [9] AYOUB, Ayoub B. *The Eccentricity of a Conic Section*. The college mathematics journal [online]. Taylor & Francis, 2003, 34(2), 116-121 [cit. 2024-06-22]. ISSN 1931-1346. Dostupné z: <https://doi.org/10.2307/3595784>
- [10] EAGLES, T.H. *Constructive geometry of plane curves, with numerous examples*. London: Macmillan and Co., 1885.
- [11] POMYKALOVÁ, Eva. *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. 2. vydání. Praha: Prometheus, 2023. ISBN 978-80-7196-554-1.
- [12] KENDIG, Keith. *Conics: Dolciani Mathematical Expositions vol. 29*. Washington: The Mathematical Association of America, 2020. ISBN 978-0883853351.
- [13] REKTORYS, Karel a Karel DRÁBEK. *Přehled užité matematiky*. 4., nezměn. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1981. Česká matice technická (SNTL).
- [14] PISKA, Rudolf a Václav MEDEK. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury; Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1966.
- [15] MÍDA, Jiří. *Analytická geometrie kuželoseček*. Praha: Karolinum, 1992. ISBN 80-7066-699-4.

- [16] JANYŠKA, Josef a Anna SEKANINOVÁ. *Analytická teorie kuželoseček a kvadratik*. Vyd. 2. Brno: Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-2604-9.
- [17] PECH, Pavel. *Kuželosečky*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2004. ISBN 80-7040-755-7.
- [18] BOČEK, Leo. *Analytická geometrie kuželoseček pro 3. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku*. 3. nezm. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987. Učebnice pro střední školy (Státní pedagogické nakladatelství).
- [19] MAŠKA, Otokar. *Řešené úlohy z matematiky: stereometrie, trigonometrie, analytická geometrie*. Praha: SNTL, 1959. Polytechnická knihovna (SNTL).
- [20] SWAIN, Gordon a Thomas DENCE. *Archimedes' Quadrature of the Parabola Revisited*. *Mathematics Magazine* [online]. Taylor & Francis, 1998, 71(2), 123-130 [cit. 2024-06-22]. ISSN 1930-0980. Dostupné z: <https://doi.org/10.1080/0025570X.1998.11996612>
- [21] RUSSELL, John Wellesley. *An Elementary Treatise on Pure Geometry with Numerous Examples*. Oxford: Clarendon Press, 1893.

Příloha

Interaktivní příloha této práce vytvořená v programu GeoGebra je dostupná on-line na adrese <https://www.geogebra.org/m/zuybw3mt> s popisem a návody na ovládání. Odkazy na jednotlivé konstrukce najdeme také přímo v textu.