Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Metody řešení soustav lineárních rovnic ve výuce matematiky na SŠ

Methods of solving systems of linear equations in high school mathematics education

Petra Šotolová

Vedoucí práce: Mgr. David Janda, Ph.D.

Studijní program: Matematika se zaměřením na vzdělávání (B0114A170007)

Studijní obor: B M 20 (0114RA170007)

2024

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Metody řešení soustav lineárních rovnic ve výuce matematiky na SŠ potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Ve Dvoře Králové nad Labem 11. 7. 2024

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu práce, panu doktorovi Davidovi Jandovi za jeho cenný čas, neocenitelnou pomoc, odborné rady a trpělivost, které mi poskytoval po celou dobu vedení této práce. Neméně díků si zaslouží má rodina za podporu v mém životě a studiu. Závěrem chci poděkovat svým přátelům, kolegům a příteli za to, že jsou tu pro mě, když je to nejvíce potřeba.

ABSTRAKT

Má bakalářská práce je zaměřena na metody řešení soustav lineárních rovnic a analýzu řešených příkladů, na nichž je metoda demonstrována v učebnicích matematiky.

V práci jsou vysvětleny základní pojmy a je zde popsána aplikace jednotlivých metod řešení soustav lineárních rovnic, konkrétně metody dosazovací a srovnávací, metody sčítací, grafického řešení, Gaussovy eliminační metody a Gauss-Jordanovy eliminační metody. Navazuje analýza parametrů, které mají společné a kterými se liší příklady vybrané k demonstraci těchto metod ve známých učebnicích matematiky. Analýza rovněž obsahuje zhodnocení uvedeného řešení těchto příkladů, jeho přínosů, dopadů a rizik na výuku tohoto tématu na úrovni střední školy.

KLÍČOVÁ SLOVA

lineární rovnice, soustava lineárních rovnic, metody řešení soustav rovnic, analýza učebnic

ABSTRACT

My bachelor's thesis focuses on methods for solving systems of linear equations and the analysis of solved examples that demonstrate these methods in mathematics textbooks. The thesis explains basic concepts and describes the application of various methods for solving systems of linear equations, specifically the substitution and comparison methods, the addition method, graphical solutions, Gauss elimination method, and Gauss-Jordan elimination method. This is followed by an analysis of the parameters that are common and different in the examples selected to demonstrate these methods in well-known mathematics textbooks. The analysis also includes an evaluation of the presented solutions of these examples, their benefits, impacts, and risks for teaching this topic at the high school level.

KEYWORDS

linear equations, system of linear equation, methods of solving systems of equations, textbook analysis

Obsah

Úvod

Pro psaní své bakalářské práce jsem si vybrala téma metody řešení soustav lineárních rovnic. Práce se zaměřuje na metody uvedené ve středoškolských učebnicích, tedy metodu dosazovací, metodu srovnávací, metodu sčítací, grafické řešení, Gaussovu eliminační metodu a Gauss-Jordanovu eliminační metodu.

Cílem je analyzovat řešené úlohy ve známých učebnicích matematiky, na kterých jsou demonstrovány jednotlivé metody řešení soustav lineárních rovnic. Analýza je zaměřena na parametry, které mají příklady společné a kterými se liší. Tyto příklady mají napříč učebnicemi zjevné podobné charakteristiky a ty mají nevyhnutelně (pozitivní i negativní) vliv na výuku i porozumění těmto metodám a souvisejícím pojmům. Analýza rovněž obsahuje zhodnocení uvedeného řešení těchto příkladů, jeho přínosů, dopadů a rizik na výuku tohoto tématu na úrovni střední školy.

Práce se dělí na dvě kapitoly. V první kapitole je obecně vysvětleno, co rozumíme lineárními rovnicemi a jejich soustavami, jaké úpravy lze při jejich řešení použít, co znamená vyřešení rovnice nebo soustavy rovnic, jaký je počet řešení rovnic a jejich soustav a jak lze toto řešení zapsat. V druhé kapitole jsou popsány a vysvětleny jednotlivé metody řešení soustav rovnic, na což navazuje stěžejní část práce, tedy analýza příkladů, na kterých jsou tyto metody demonstrovány ve vybraných učebnicích matematiky a analýza uvedeného řešení. V práci jsou zařazeny příklady z běžných učebnic matematiky pro střední školy a příklady demonstrující tyto metody zařazené ve vysokoškolských učebnicích.

1 Lineární rovnice a jejich soustavy

1.1 Lineární rovnice a jejich soustavy

Rovnost čísel je vztah mezi dvěma symboly představujícími totéž číslo. Píšeme mezi ně znak rovnosti $=$. Jsou-li x, y stejná čísla, píšeme $x = y$ a čteme x *je rovno* y. Neplatí-li $x = y$, píšeme $x \neq y$ a čteme x je různé od y.

Dva algebraické výrazy[1] jsou si rovny, právě tehdy když mají společný definiční obor a po dosazení libovolných stejných hodnot za proměnné do obou výrazů jsou si hodnoty výrazů rovny. (Polák, 2008)

Rovnice je úloha jejíž zápis obsahuje rovnost dvou výrazů, v nichž se vyskytuje jedna a více proměnných (x, y, z, t apod.) označujících tzv. neznámou. Rovnice lze dělit dle počtu neznámých na rovnice s jednou neznámou, například:

$$3x - 2 = 2x + 5, \tag{1.1.1}$$

rovnice se dvěma neznámými, například:

$$12x - 7y = 2y + 4. \tag{1.1.2}$$

Analogicky se třemi, čtyřmi, pěti neznámými atd. (Zhouf, 2019)

Dosazováním čísel z daného definičního oboru za neznámou tak, aby po jejich dosazení byly výrazy na pravé i levé straně definovány (v daném definičním oboru), získáme platné nebo neplatné rovnosti. Například pokud za x v rovnici (1.2.1) dosadíme číslo 7, získáme platnou rovnost:

$$3 \cdot 7 - 2 = 2 \cdot 7 + 5$$
$$19 = 19.$$

Naopak pokud v rovnici (1.1.2) dosadíme za x číslo 2 a za y číslo 3, získáme neplatnou rovnost:

[1] Algebraický výraz je zápis složený z konstant (symbol označující jediný objekt z dané množiny objektů, např. číslo) a písmen označujících proměnné (symbol, označující jakýkoliv objekt z dané množiny objektů, zpravidla písmeno, případně kombinace písmena a čísla v dolním indexu, např. $a_1, a_2, a_3, \dots$), které jsou spojeny znaky operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování.

$$12 \cdot 2 - 7 \cdot 3 \neq 2 \cdot 3 + 4$$
$$3 \neq 10.$$

Rovnice není rovnost, nemůžeme tedy rozhodovat o její pravdivosti.

Čísla, jejichž dosazením do rovnice za neznámé získáme platnou rovnost, se nazývají řešením rovnice, nebo taktéž kořeny rovnice. V jiných matematických textech se lze setkat s označením kořenu rovnice jako čísla, které danou rovnici *splňuje* nebo jí *vyhovuje*. Číslo $x = 7$ je tím pádem řešením rovnice (1.2.1) a čísla $x = 2$ a $y = 3$ nejsou řešením rovnice (1.1.2).

Lineární rovnice s jednou neznámou jsou rovnice ve tvaru $ax + b = 0$ kde koeficienty $a, b \in$ R a x je neznámá. Výraz $ax + b = 0$, kde $a \neq 0, b \neq 0$, $a, b \in R$ nazýváme lineární dvojčlen. Lineárními rovnicemi nazýváme všechny rovnice, které lze převést do tvaru $ax + b = 0$ pomocí tzv. *ekvivalentních úprav* (viz 1.2 Ekvivalentní úpravy rovnic a jejich soustav). Číslo a nazveme *lineární koeficient* a číslo b *absolutní koeficient* (*absolutní člen*). Lineární rovnice se dvěma neznámými lze převést do tvaru $ax + by + c = 0$ kde $a, b, c \in R$. Obdobně pro rovnice s více neznámými. (Cizlerová et al., 2013)

Soustava m lineárních rovnic je soubor m rovnic o n společných neznámých $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \ + \ a_{12}x2 \ + \cdots + a_{1n}x_n \ &= \ b_1 \\ a_{21}x_1 \ + \ a_{22}x2 \ + \cdots + a_{2n}x_n \ &= \ b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 \ + \ a_{m2}x_2 \ + \cdots + a_{mn}x_n \ &= \ b_m, \end{aligned}$$

kde a_{ij} jsou koeficienty soustavy rovnic a b_i jsou absolutní členy.

Řekneme, že uspořádaná n-tice $s_1, s_2, \dots, s_n$ je řešením soustavy rovnic, pokud v každé rovnici soustavy získáváme platnou rovnost když dosadíme $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, s_n = s_n$. (Anthony & Harvey, 2012)

1.2 Ekvivalentní úpravy rovnic a jejich soustav

Při postupu hledání řešení jedné rovnice postupně původní rovnici upravujeme. Cílem úprav je získat rovnici u níž známe kořeny nebo je dokážeme snadno určit. Použité úpravy musí zachovat kořeny původní rovnice, tedy nové rovnice vzniklé danými úpravami musí mít stejné řešení. Úpravy, které zachovávají řešení nazýváme *důsledkové*, taktéž *implikační*. Důsledkovými úpravami lze získat rovnici, která má stejné kořeny jako původní rovnice, ale zároveň je u nich možné získat kořeny navíc, které jsou řešením pouze nové rovnice, ale nejsou řešením původní rovnice. Takovou úpravou je například umocnění obou stran rovnice.

Mezi důsledkové úpravy patří tzv. *ekvivalentní* úpravy. Těmito úpravami převedeme původní rovnici na rovnici se shodnou množinou všech kořenů, tedy všechny kořeny jedné rovnice jsou i kořeny druhé rovnice a naopak. Ekvivalentními úpravami lze převést získanou rovnici opět na rovnici původní. Tyto rovnice se nazývají navzájem ekvivalentní. Ekvivalentní rovnice mají společný definiční obor. (Polák, 2008)

Polák (2008, s. 203) uvádí následující přehled ekvivalentních úprav v oboru reálných čísel:

- Vzájemná výměna stran rovnice.
- Nahrazení libovolné strany rovnice výrazem, který se jí rovná v celém oboru řešení rovnice.
- Přičtení téhož čísla nebo výrazu s neznámou, který je definován v celém oboru řešení rovnice, k oběma stranám rovnice.
- Vynásobení obou stran rovnice týmž číslem různým od nuly nebo výrazem s neznámou, který je definován a různý od nuly (tj. nabývá jen nenulových hodnot) v celém oboru řešení rovnice. (Stručně říkáme, že rovnici násobíme číslem, resp. výrazem.)
- Umocnění obou stran rovnice týmž přirozeným mocnitelem, jsou-li obě strany rovnice nezáporné (tj. nabývají jen nezáporných hodnot) v celém oboru řešení rovnice.

- Odmocnění obou stran rovnice týmž přirozeným odmocnitelem, jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné (tj. nabývají jen nezáporných hodnot) v celém oboru řešení rovnice.
- Zlogaritmování obou stran rovnice při témž základu, jsou-li obě strany rovnice kladné (tj. nabývají jen nezáporných hodnot) v celém oboru řešení rovnice.

Při řešení lineárních rovnic budeme využívat pouze první čtyři úpravy.

Nikdy nedělíme strany rovnice stejným výrazem s neznámou, protože tato úprava vede ke ztrátě některých kořenů. Například pokud rovnici

$$x^2 = 4x \tag{1.2.1}$$

vydělíme neznámou x, získáme jedno řešení $x = 4$. Existuje však ještě jeden kořen ($x = 0$), který jsme ztratili použitím nepovolené úpravy. Tato úprava není ekvivalentní a zároveň ani důsledková. (Cizlerová et al., 2013)

Při řešení soustavy rovnic lze na každou z rovnic použít libovolné ekvivalentní úpravy. Zároveň lze na soustavy rovnic použít ekvivalentní úpravy soustav rovnic. Polák (2008, s. 269) uvádí následující ekvivalentní úpravy soustav rovnic:

- Nahrazení libovolné rovnice soustavy rovnicí, která je s ní ekvivalentní, tj. má totéž řešení.
- Nahrazení libovolné rovnice soustavy součtem této rovnice a libovolné jiné rovnice soustavy.
- Dosazení neznámé nebo výrazu s neznámou z jedné rovnice soustavy do jiné její rovnice.

Dvě soustavy lineárních rovnic jsou ekvivalentní, pokud jednu z nich lze získat z druhé ekvivalentními úpravami. Jestliže jsou dvě soustavy rovnic ekvivalentní, potom mají stejné řešení.

1.3 Řešitelnost rovnic a jejich soustav

Vyřešení rovnice nebo vyřešení soustavy je nalezení *všech* jejích řešení neboli nalezení množiny jejích řešení.[2] Množina všech řešení rovnice či soustavy je obvykle označována písmenem K, P nebo M apod. Zapisujeme ji výčtem prvků, tedy platných kořenů, pomocí složených závorek. Například řešení rovnice (1.2.1) lze zapsat jako $K = \{7\}$. (Charvát et al., 2009)

Pokud je množina řešení víceprvková, prvky zapisujeme podle jejich hodnoty vzestupně a oddělujeme je čárkou nebo středníkem. Například řešení rovnice (1.2.1) lze zapsat jako $K = \{0, 4\}$.

Je-li množina řešení rovnice rovna oboru řešitelnosti soustavy, zapisujeme množinu řešení touto rovností. Například řešení rovnice s neznámou $x \in R$, která má za kořen libovolné číslo $x \in R$, zapisujeme $K = R$.

Pokud rovnice nemá řešení v daném oboru, množina řešení je prázdná, zapisujeme ji $K = \{\}$ nebo $K = \emptyset$.

Zároveň se můžeme setkat se zápisem bez využití množin, který je zapsán rovností proměnné a hodnoty kořenu, např. $x = 7$.[3]

Řešení (kořeny) rovnice obsahující dvě a více proměnných a řešení soustavy rovnic zapisujeme pomocí uspořádané n-tice $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ potažmo $[s_1, s_2, \dots, s_n]$[4] rovností uspořádané n-tice proměnných a uspořádané n-tice kořenů, přičemž kořeny jsou zapsány v pořadí tak, aby odpovídaly dané neznámé. Například kořeny $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ bychom zapsali rovností $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Rovněž se můžeme setkat se zápisem pomocí rovností jednotlivých proměnných a jejich kořenů nebo množinovým zápisem.

Pro řešení lineární rovnice převedené do tvaru $ax + b = 0$ v oboru R, potažmo C mohou nastat tři možnosti:

- Rovnice má právě jeden kořen $x = -\frac{b}{a}$ právě tehdy když $a \neq 0$.

---

[2] Název *řešení rovnice* se používá ve více významech. Značí kořen rovnice, množinu kořenů rovnice a postup, kterým se určují kořeny rovnice. (Polák, 2008)

[3] Rovněž lze za zápis řešení považovat rovnost $7 = x$.

[4] V matematických publikacích se lze setkat s oběma formami zápisu.

- Rovnice má nekonečně mnoho řešení, je-li $a = b = 0$. Kořenem je každé reálné, potažmo komplexní číslo.
- Rovnice nemá žádné řešení, je-li $a = 0$, $b \neq 0$. (Polák, 2008)

Lineární rovnice o dvou neznámých ve tvaru $ax + by + c = 0$, kde $a \neq 0$ a $b \neq 0$ má nekonečně mnoho dvojic kořenů, neznamená to však, že řešením je libovolná dvojice čísel. Cizlerová et al. (2013, s. 75) uvádí následující postup:

1. Zvolíme jednu neznámou a zapíšeme ji na příslušné místo v uspořádané dvojici.
2. Druhou neznámou vyjádříme[5] pomocí neznámé zvolené v prvním kroku.
3. Výsledkem je hledané obecné řešení.

Tento postup následně demonstruji na konkrétním příkladě:

$$x + y = 1.$$

Neznámá x je volena libovolně a neznámá y je z rovnice vyjádřena pomocí neznámé x: $y = 1 - x$. Zápis řešení pak vypadá následovně: $(x, y) = (x, 1 - x), x \in R$. Jiné publikace označují neznámou volenou libovolně jako parametr. Ten může být zapsán libovolným písmenem. Obdobně můžeme zapsat řešení rovnice s více neznámými nebo řešení soustavy, která má rovněž nekonečně mnoho řešení. Pomocí volby parametrů dopočítáme obecné řešení.

Pro řešení soustavy lineárních rovnic v oboru R, potažmo C mohou nastat obdobně tři možnosti:

- Soustava má právě jedno řešení. (uspořádaná n-tice)
- Soustava má nekonečně mnoho řešení. (Určíme obecné řešení pomocí parametrů.)
- Soustava nemá žádné řešení.

Pro všechny nalezené kořeny rovnice či soustavy rovnic je vhodné provést zkoušku. Tu provedeme dosazením nalezené hodnoty za danou neznámou ve všech rovnicích. Pokud po

[5] Neznámá je vyjádřena pomocí ostatních neznámých, osamostatněním na jedné straně rovnice pomocí ekvivalentních úprav rovnice.

dosazení získáme platnou rovnost nebo platné rovnosti, je dané řešení správné. Pomocí zkoušky ověříme, zda je naše řešení správné, nezjistíme však, zda jsme nalezli všechna řešení.

2 Metody řešení soustav rovnic

Neexistuje nejlepší metoda pro všechny soustavy rovnic. Některé metody jsou vhodné pro soustavy méně rovnic, zatímco jiné jsou efektivní pro soustavy o více rovnicích s větším množstvím neznámých. Výběr správné metody závisí na konkrétní soustavě rovnic, kterou se snažíme vyřešit. Množina řešení nezáleží na volbě metody, každá soustava má stejné řešení, nezávisle na metodě, kterou použijeme.

V této kapitole budou představeny metody řešení soustav rovnic používané na středních školách, tedy metoda dosazovací a srovnávací, metoda sčítací, grafické řešení, Gaussova eliminační metoda a Gauss-Jordanova eliminační metoda, a budou zde analyzovány příklady, jejichž prostřednictvím jsou v učebnicích středoškolské matematiky tyto metody představovány. Kapitola obsahuje analýzu příkladů z učebnic: Matematika pro gymnázia - Rovnice a nerovnice (Charvát et al., 2009), Matematika pro střední školy 2. díl – Výrazy, rovnice, nerovnice (Cizlerová et al., 2013), Přehled středoškolské matematiky (Polák, 2008). Tato analýza je doplněna příklady z publikací pro studenty vysoké školy, konkrétně vysokoškolskými skripty k předmětu *Lineární algebra* na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy (Barto & Tůma, 2023) a publikací Linear algebra: Concepts and methods (Anthony & Harvey, 2012).

Příklady zvolené k ilustraci jednotlivých metod, pokud jsou v dané publikaci zařazeny, budou uvedeny v tomto pořadí.

Pokud bude hodnocena obtížnost úprav, jedná se o subjektivní hodnocení z pohledu operací s koeficienty prováděné žákem střední školy a nikoliv o objektivní vymezení tohoto pojmu. Obtížnost řešení závisí na osobních pocitech, zkušenostech, schopnostech a preferencích jednotlivce, který řešení provádí.

2.1 Dosazovací metoda

Při dosazovací metodě *vyjádříme* z některé z rovnic jednu neznámou s nenulovým koeficientem, pomocí ostatních neznámých, tedy osamostatníme ji na jedné straně rovnice. Příslušný výraz vyjadřující hodnotu neznámé dosadíme do zbývajících rovnic. Získáme tak ekvivalentní soustavu rovnic, která má o jednu rovnici a jednu neznámou méně, než původní soustava. Takto pokračujeme dále, až získáme jednu lineární rovnici, kterou vyřešíme. Získané kořeny dosazujeme do původních rovnic a získáme tak všechny kořeny.

Ve středoškolské učebnici Matematika pro Gymnázia (Charvát et al., 2009) je dosazovací metoda demonstrována pouze na soustavách dvou rovnic o dvou neznámých. Ještě před představením jednotlivých metod je v učebnici uvedena úloha vedoucí na soustavu lineárních rovnic: „Určete věk otce a věk syna, víte-li, že za tři roky bude otec pětkrát starší než syn, avšak za pět let bude jen čtyřikrát starší než syn“ (Charvát et al., 2009, s. 84). Zároveň je zde uvedeno řešení této úlohy metodou dosazovací. Autoři označují věk otce neznámou x a věk syna neznámou y. Poté pomocí vztahů ze zadání vytvoří a upraví soustavu rovnic:

$$x - 5y = 12$$

$$x - 4y = 15.$$

V řešení je vyjádřena neznámá x z první rovnice, tato volba zde však není odůvodněna. Řešení vychází celočíselně.

Po ilustračním příkladu následuje doporučení, kdy použít metodu dosazovací a kdy metodu sčítací. Metoda dosazovací je doporučena pro soustavy typu

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2,$$

kde je alespoň jeden z koeficientů a_1, b_1 různý od nuly a zároveň alespoň jeden z koeficientů a_2, b_2 různý od nuly. Jsou-li všechny čtyři koeficienty nenulové, je doporučena metoda sčítací.

Toto doporučení může být pro žáky matoucí, protože existují případy, kdy jsou v daném typu soustavy koeficienty a_1, b_1, a_2, b_2 nenulové a přesto je vhodnější[6] použít metodu dosazovací.

Dosazovací metoda je následně demonstrována na soustavě rovnic s jedním řešením

$$3u + 2v = -4$$

[6] vhodnější ve smyslu menší časové náročnosti, počtu úprav a náročnosti výpočtů

$$2u - 3v = 19,$$

Řešení je zde uvedeno následovně:

Z druhé rovnice vyjádříme

$$u = \frac{1}{2}(19 + 3v), \tag{5[7]}$$

Dosadíme do první rovnice a vypočítáme v:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{1}{2}(19 + 3v) + 2v &= -4 \\ 3(19 + v) + 4v &= -8 \\ 13v &= -65 \\ v &= -5 \end{aligned}$$

Z (5) pak zjistíme $u = \frac{1}{2}[19 + 3 \cdot (-5)] = 2$.

Daná soustava má jediné řešení $(u, v) = (2, -5)$ (Charvát et al., 2009, s. 86).

Poté je uvedeno řešení na soustavě, která má nekonečně mnoho řešení:

$$5x - 2y = 3$$

$$10x - 4y = 6.$$

Zde je vyjádřeno x z první rovnice:

$$x = \frac{1}{5}(3 + 2y),$$

A dosazeno do druhé rovnice. Pro y je tak získána rovnice $0 \cdot y = 0$, dále je určen parametr y a neznámá x je určena pomocí tohoto parametru, přičemž je využito vyjádření x z první rovnice.

Neznámá y zde není přímo označena jako parametr, nicméně jako reálné číslo, které lze volit libovolně. Autoři podotýkají, že „jde v podstatě o jednu rovnici, protože druhá rovnice je dvojnásobkem první rovnice“ (Charvát et al., 2009, s. 87). Toto tvrzení je poněkud nepřesné, platí, že druhá rovnice je dvojnásobkem první rovnice, ale stále se jedná

[7] Rovnice má v této literatuře číslo 5 z důvodu zachování přehlednosti při odkazování na tuto rovnici. Číslování v této práci nebylo změněno z důvodu uvedení přímé citace.

o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých a nejedná se o jednu rovnici. Vhodnější by bylo uvést, že pokud je v soustavě dvou lineárních rovnic o dvou neznámých jedna rovnice násobkem druhé, soustava má vždy nekonečně mnoho řešení, jedná-li se o lineární rovnici, kterou lze upravit do tvaru $ax + by = c$ a zároveň nenastane případ $a = 0, b = 0$ a zároveň $c \neq 0$.

Dále je postup demonstrován na soustavě rovnic, která nemá řešení, konkrétně na soustavě

$$5x - 2y = 3$$

$$10x - 4y = 5,$$

která je podobná předchozí soustavě a proto je uvedený postup obdobný, rovněž je vyjádřena neznámá x z první rovnice a je dosazena do druhé rovnice. Tentokrát je získána rovnice ve tvaru $0 \cdot y = -1$ a je zde uvedeno, že jelikož tato rovnice nemá řešení, nemá řešení ani soustava. Autoři konstatují, že „ostatně je ihned vidět, že rovnice dané soustavy jsou ve sporu. Je-li pro x, y splněna první rovnice, platí nutně $10\mathrm{x} - 4\mathrm{y} = 6$ a druhá rovnice splněna být nemůže“ (Charvát et al., 2009, s. 87). Tato poznámka je rovněž poněkud nepřesná, rovnosti mohou být ve sporu, pokud na ně nahlížíme jako na tvrzení. Rovnice není tvrzení a nemůžeme tedy rozhodovat o jeho pravdivosti.

Dále učebnice uvádí řešenou soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x + 7y &= 0 \\ 5y &= -3. \end{aligned}$$

Kde poukazuje, že v druhé rovnici je pouze jedna neznámá a tak není třeba žádnou z neznámých vyjadřovat a kořen lze získat přímo z této rovnice. Tato soustava má jedno řešení. Toto řešení není, na rozdíl od řešení předchozích příkladů, celočíselné, ale je jím uspořádaná dvojice racionálních čísel. Autoři tímto příkladem demonstrují výše uvedené doporučení, kdy pro soustavu rovnic volit metodu dosazovací, tedy když je jeden z koeficientů u neznámé roven nule.

Dále je v učebnici znovu uveden postup řešení u soustavy

$$3u + 2v = -4$$

$$2u - 3v = 19,$$

nicméně tentokrát je postup řešení zapsán, dle slov autorů *důsledně*. V postupu pak odděluje ekvivalentní soustavy vodorovnými čarami pro zachování přehlednosti. Uvádí, že tento zápis bychom použili zejména u soustav více rovnic, protože zde lze snadno při zápisu vynechat některou z rovnic.

Všechny soustavy uvedené v části učebnice věnované metodě dosazovací obsahují ve vyjádření neznámé lomený výraz a chybí zde odůvodnění zvolení dané neznámé k vyjádření. Koeficienty u neznámých jsou voleny relativně náhodně. Řešené soustavy jsou ale voleny tak, aby měly požadovaný počet řešení, a jsou zde obsaženy všechny možnosti. Zároveň autoři u soustavy, která nemá žádné řešení a u soustavy, která má nekonečně mnoho řešení, uvádí poznámku k podobě soustavy, čímž naznačují, že lze podle podoby rovnic poznat, že se nejedná o soustavy s jedním řešením.

V učebnici Matematika pro střední školy (Cizlerová et al., 2013) je dosazovací metoda demonstrována na jednom příkladu soustavy dvou rovnic o dvou neznámých s jedním řešením

$$2x - 3y + 5 = 0$$
$$4x - 3y + 1 = 0.$$

Kromě obecného postupu uvádí doporučení vyjadřovat neznámou, která má koeficient 1 nebo -1. Protože žádná z neznámých u daného příkladu nemá takový koeficient, neznámou k vyjádření tak při řešení volí náhodně, v tomto případě neznámou x z první rovnice. U konkrétní soustavy by bylo výhodnější vyjádřit z jedné z rovnic $-3y$ (potažmo $3y$) a dosadit za $-3y$ v druhé rovnici. Tímto postupem by se při řešení eliminoval zápis se zlomky. Tato soustava by byla vhodná pro demonstraci sčítací metody, pro kterou je výhodná (viz následující podkapitola), nicméně autoři ji demonstrují na jiné soustavě.

Autoři rovněž doporučují rovnice, se kterými v danou chvíli nepracujeme, opisovat pro zachování přehlednosti.

Učebnice dále uvádí *srovnávací metodu* jako speciální případ metody dosazovací. Při této metodě vyjádříme ze všech rovnic soustavy pomocí ekvivalentních úprav stejnou neznámou. Získané výrazy porovnáme. Máme-li dvě rovnice o dvou neznámých, touto úpravou získáme lineární rovnici s jednou neznámou, kterou následně vyřešíme. Zpětným dosazením získáme i druhou neznámou. U soustavy tří a více rovnic porovnáme vyjádření jedné rovnice s ostatními rovnicemi, čímž získáme ekvivalentní soustavu rovnic, kde je o jednu rovnici a neznámou méně. Postup opakujeme, dokud nezískáme jednu rovnici, kterou vyřešíme a zpětným dosazováním získáme zbylé kořeny.

Cizlerová et al. (2013) uvádí řešený příklad soustavy dvou rovnic o dvou neznámých

$$x + 4y + 2 = 0$$
$$2x + y - 3 = 0,$$

kde z rovnic vyjadřuje neznámou x. Neznámá k vyjádření je dle slov autorů vybrána náhodně.

Příklady jsou zde zapsány ve tvaru s nulovou pravou stranou[8], což je oproti ostatním publikacím neobvyklé.

Výše uvedené publikace uvádí metodu dosazovací jako první a poté následují další metody. Přehled středoškolské matematiky (Polák, 2008) nejprve dělí metody na *eliminační* a ostatní. Podstatou eliminačních metod je postupná *eliminace* (vylučování) *neznámých*. Podle způsobu, kterým jsou vylučovány neznámé, rozlišuje metodu sčítací, dosazovací (substituční) a srovnávací. Všechny tyto metody poté demonstruje na soustavě dvou rovnic o dvou neznámých:

$$2x - y = 1$$
$$x + 3y = 11.$$

U metody dosazovací pak uvádí řešení netradičně oproti předchozím dvěma učebnicím. Nejprve vyjadřuje y z první rovnice a dosazením tohoto výrazu do druhé rovnice dopočítává kořen x. Poté ale nepokračuje dosazením známého kořenu do jedné z původních rovnic, což by vedlo k získání jedné lineární rovnice o jedné neznámé a možnosti dopočítat zbylý kořen, ale vrací se k původním rovnicím a tentokrát vyjadřuje x z druhé rovnice. Dosazením výrazu do první rovnice dopočítává kořen y. Tento postup je poměrně zavádějící a může vést k domněnce, že po dopočítání jednoho kořenu dosazovací metodou je třeba vrátit se k původní soustavě rovnic a začínat s řešením znovu, tentokrát

[8] Takto budeme označovat vyjádření rovnice, kde jsou absolutní členy přítomny na levé straně rovnice. Nejedná se o tzv. homogenní rovnici, u které jsou absolutní členy nulové.

vyjádřením jiné neznámé z jiné rovnice. U soustav s vyšším počtem rovnic a neznámých, případně u soustav, kde nelze vyjádřit neznámé takto jednoduše by byl tento postup výrazně složitější. Autoři tuto pluralitu možných řešení dále nediskutují, zodpovězení potenciálně četných otázek žáků zůstává na učiteli.

V řešení jsou výhodně vybrány neznámé k vyjádření, tedy y s koeficientem -1 z první rovnice a x s koeficientem 1 z druhé rovnice. Vyjádření tedy nevede k lomenému výrazu a řešení je tak jednodušší a přehlednější. Tato volba zde není okomentována a neplyne z ní přímo doporučení volit neznámé s koeficienty 1 nebo -1. Přesto jsou pravděpodobně koeficienty u vyjádřených neznámých zvoleny úmyslně z důvodu zjednodušení výpočtů. Zbylá čísla v soustavě jsou, co se týče metody dosazovací, pravděpodobně zvolena relativně náhodně. U řešení metodou srovnávací vyjadřuje z obou rovnic neznámou y. Porovnáním získává kořen x a ten nyní již dosazuje do první původní rovnice a získává tak kořen y. Řešení metodou srovnávací obsahuje lomené výrazy a postup má více kroků.

V ostatních posuzovaných publikacích není metoda dosazovací uvedena.

Shrnutí

Dosazovací metoda je vhodná na použití u soustav rovnic, kde lze jednoduše vyjádřit jednu z neznámých, nebo je jedna z nich již vyjádřena pomocí ostatních neznámých nebo vyřešena. To explicitně doporučuje i Charvát et al. (2009) a zařazuje takovou soustavu mezi řešené příklady.

Metodu je vhodné použít u soustav s nízkým počtem rovnic. U všech posuzovaných středoškolských učebnic je demonstrována pouze na soustavách obsahující dvě rovnice o dvou neznámých. Pro soustavy s více než dvěma rovnicemi nebo neznámými může být vhodná, pokud je co nejvíce neznámých v rovnicích s koeficientem 1 nebo -1 (tyto neznámé doporučuje vybrat k vyjádření i Cizlerová et al., 2013) nebo pokud se neznámé po dosazení vzájemně odečtou.

Metoda srovnávací je oproti metodě dosazovací (rovněž oproti metodě sčítací viz následující podkapitola) složitější. Proto bych doporučila využít pouze klasickou dosazovací metodu, ale i tento způsob hledání řešení může být opodstatněný. Případem, kdy bychom srovnávací metodu využili, je například stav, kdy máme na jedné straně všech rovnic v soustavě vyjádřenou stejnou neznámou, případně pokud máme ve všech rovnicích stejný mnohočlen na jedné straně rovnice a porovnáním druhých stran rovnice bychom eliminovali jednu z neznámých. Některé zdroje tuto metodu vynechávají, jiné ji zařazují pod metodu dosazovací a pouze některé ji uvádí jako samostatnou metodu. Důležité je zde dle mého názoru vyjádření myšlenky, že je tímto způsobem na řešení soustavy rovnic možné také nahlížet.

Explicitně řešené charakteristiky:

- obor řešitelnosti soustavy rovnic
- volba metody na základě hodnoty koeficientů (Charvát et al., 2009)
- volba neznámé k eliminaci na základě hodnoty koeficientu (Cizlerová et al., 2013)

Charakteristiky příkladů, které jsou relevantní, ale na které autoři explicitně neupozorňují:

- pořadí proměnných v zápisu rovnice (vždy uvedeno ve standardním tvaru)
- pojmenování proměnných rovnice (v jednom případě jsou použita různá písmena, Charvát et al., 2009)
- zadání soustavy s nulovou pravou stranou (Cizlerová et al., 2013)

Další charakteristiky popsaných příkladů:

- koeficienty členů rovnic jsou relativně náhodně, ale s ohledem na obor řešitelnosti soustavy (a ilustraci různých možností) a v některých případech tak, aby navzájem nebyly dělitelné a řešení vedlo k využití lomených výrazů

2.2 Sčítací metoda

Sčítací metoda spočívá ve sčítání rovnic. Dvě rovnice sečteme tak, že sečteme jejich levé strany (součet umístíme na levou stranu nově vzniklé rovnice) a pravé strany (součet umístíme na pravou stranu). Sečtení rovnic tímto způsobem je ekvivalentní úpravou soustavy rovnic.

Naším cílem při sčítání bude eliminovat jednu z neznámých neboli ji odečíst, abychom získali rovnici, která obsahuje o jednu neznámou méně. Aby se člen s neznámou odečetl, musí druhá rovnice obsahovat člen opačný. Obsahuje-li jedna z rovnic člen ax, kde x je neznámá a a je konstanta, musí druhá rovnice obsahovat člen $-ax$. Členy obou rovnic musíme pomocí ekvivalentních úprav převést do tohoto tvaru.

Obecně stačí první rovnici vynásobit koeficientem u neznámé, kterou chceme eliminovat, z druhé rovnice a druhou rovnici vynásobit koeficientem u neznámé z první rovnice. Abychom nenásobili zbytečně velkými čísly, můžeme si pro koeficienty u neznámé, kterou chceme eliminovat, najít nejmenší společný násobek a rovnice vynásobit tak, abychom ho získali. U velkých koeficientů je to nutnost, například u řešení pomocí výpočetní techniky.

Poté je třeba zkontrolovat, zda je znamínko u koeficientu u jedné rovnice kladné a u druhé záporné, případně jednu z rovnic vynásobit -1 (zaměnit znaménka u každého členu). Tuto metodu si lze interpretovat jako sčítací a odčítací metodu, v druhém případě není potřeba aby měly koeficienty opačná znaménka, ale naopak shodná a jednu rovnici od druhé odečteme.

Je výhodné vždy volit k eliminaci ty členy, které se již ve formě ax a $-ax$ nachází, případně se nachází ve formě ax a ax (jednu z rovnic vynásobíme číslem -1 nebo jednu z rovnic od druhé odečteme), nebo pokud opačné členy získáme vynásobením jedné rovnice (tedy není potřeba násobit obě rovnice). U soustavy dvou rovnic o dvou neznámých po sečtení rovnic získáme jednu lineární rovnici s jednou neznámou, kterou lze dopočítat.

Pro soustavu tří a více rovnic je tato metoda ve smyslu časové náročnosti obtížnější. Musíme totiž postupně sečíst jednu rovnici se všemi zbylými rovnicemi soustavy tak, abychom každým součtem eliminovali tu stejnou neznámou. To je zároveň podstatou Gaussovy eliminace (viz 2.4 Gaussova a Gauss-Jordanova eliminační metoda). Poté získáme soustavu, kde je o jednu rovnici a jednu neznámou méně. Dále postup opakujeme. Vybereme si jednu z rovnic nově vzniklé soustavy a vhodně ji sečteme s ostatními rovnicemi v soustavě abychom v každé rovnici eliminovali tu stejnou neznámou a znovu získáme novou soustavu rovnic. Takto pokračujeme, dokud nezískáme jednu rovnici, z níž lze získat řešení jedné neznámé.

Posléze, stejně jako u metody dosazovací, postupně dosazujeme známé kořeny do původních rovnic a rovnic, které z nich vznikly ekvivalentními úpravami, a tak dopočítáme zbylé kořeny.

Ve středoškolské učebnici Matematika pro Gymnázia (Charvát et al., 2009) je sčítací metoda demonstrována opět na soustavách dvou rovnic o dvou neznámých. Nejprve je zde uvedeno řešení soustavy rovnic z úvodní ilustrační úlohy, která byla prvně řešena metodou dosazovací. V soustavě

$$x - 5y = 12$$

$$x - 4y = 15$$

autoři nejprve první rovnici násobí číslem -1 a poté první rovnici nechávají beze změny a k druhé rovnici přičítají první rovnici. První rovnici tedy opisují a po úpravě získávají:

$$\begin{aligned} -x + 5y &= -12 \\ y &= 3. \end{aligned}$$

Dále dosazují $y = 3$ do první rovnice a tím dopočítávají neznámou x.

Volba násobit číslem -1 právě první rovnici není nijak okomentována, přičemž je, co se týče počtu kroků, nejvýhodnější. Volba neznámé k eliminaci zde rovněž není okomentována, nicméně je rovněž, co se týče počtu kroků a časové náročnosti nejvýhodnější. Násobí se pouze jedna rovnice číslem -1 a v druhém případě by se musely násobit obě rovnice čísly 4 a -5 nebo -4 a 5. Žádná doporučení k výběru neznámé k eliminaci či rovnice k úpravě tedy z daného příkladu neplynou. Autoři se nijak nevěnují zdůvodnění funkčnosti tohoto algoritmu ani jeho propedeutice.

Následuje řešení příkladu, který se rovněž vyskytoval v předchozí části, konkrétně soustava rovnic

$$3u + 2v = -4$$

$$2u - 3v = 19.$$

Zde autoři první rovnici násobí číslem 3 a druhou rovnici číslem 2:

$$9u + 6v = -12$$

$$4u - 6v = 38.$$

Následně opisují první rovnici a k druhé rovnici ji přičítají:

$$9u + 6v = -12$$
$$13u = 26.$$

Z čehož určují řešení. Na tomto příkladě rovněž demonstrují ekvivalentní úpravu „vynásobení některé rovnice soustavy nenulovým číslem a současné přičtení násobku zbývající rovnice soustavy k této (vynásobené) rovnici“ (Charvát et al., 2009, s. 90). Přičemž uvádí, že přechod od první soustavy k třetí soustavě lze udělat bez mezivýsledku, tedy druhé soustavy.

Dále autoři uvádí, že danou soustavu rovnic lze vyřešit i tak, že k dvojnásobku první rovnice přičteme trojnásobek druhé rovnice a získáme tak rovnici $13u = 26$, z níž lze získat neznámou u a dosazením do jedné z původních rovnic i neznámou v. Tento zápis, tedy neopisování celé soustavy rovnic, autoři vnímají za nedůsledný, ale podotýkají, že při řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých takto nemůže dojít k chybě.

U daného příkladu rovněž není zdůvodněna volba neznámé k eliminaci. Jelikož autoři zvolili k eliminaci neznámou v, u které mají koeficienty v rovnicích opačné znaménko, stačí rovnice násobit kladnými čísly. Kdyby byla k eliminaci zvolena neznámá u, rovnice by rovněž stačilo vynásobit čísly 2 a 3, ale u jedné z rovnic by musela být zaměněna znaménka, což může být krok navíc, nebo bychom rovnici museli násobit čísly -2 a 3 nebo 2 a -3, tedy jednu rovnici násobit číslem záporným, což může být pro žáky středních škol obtížnější. Zároveň není zřejmé, že lze k eliminaci zvolit i druhou neznámou, u které nejsou znaménka u koeficientů opačná. Rovněž zde tedy byla neznámá k eliminaci vybrána tak, aby řešení bylo co nejjednodušší.

Po tomto příkladu autoři vyzývají k vyřešení soustav $(5x - 2y = 3, 10x - 4y = 6)$ a $(5x - 2y = 3, 10x - 4y = 5)$, které byly ilustračně řešeny metodou dosazovací. Jsou zde tedy zařazeny soustavy, které mají nula a nekonečně mnoho řešení, ale konkrétně sčítací metodou zde nejsou ilustračně vyřešeny.

Následuje slovní úloha „V chemické laboratoři je k dispozici 20% roztok a 35% roztok kyseliny sírové. Kolik kilogramů prvního a kolik kilogramů druhého roztoku musíme smíchat, abychom dostali 15 kg 29% roztoku?" (Charvát et al., 2009, s. 91). V řešení autoři označují množství prvního roztoku v kilogramech neznámou x a množství druhého roztoku v kilogramech neznámou y. Autoři (Charvát et al., 2009, s. 91) dále uvádí, že „dostaneme $(x+y)$ kg roztoku v němž je $\left(\frac{20}{100}x+\frac{35}{100}y\right)$ kg čisté kyseliny, půjde tedy o $\frac{20x+35y}{x+y}$ % roztok." Pro x a y získávají soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\frac{20x+35y}{x+y}=29$$
$$x+y=15,$$

kterou upravují na soustavu:

$$3x-2y=0$$
$$x+y=15.$$

Tato soustava je zde řešena dvěma způsoby, metodou dosazovací i metodou sčítací. U metody dosazovací je z druhé rovnice vyjádřena neznámá x, která je dosazena do první rovnice. Volba neznámé zde není odůvodněna.

U metody sčítací je eliminována druhá neznámá. V řešení je přičten k první rovnici dvojnásobek druhé rovnice, čímž získáme lineární rovnici s jednou neznámou a lze dopočítat x. Toto řešení je opět nejvhodnější. Výběrem úpravy druhé rovnice je docíleno toho, že postup nebude obsahovat zlomky a zároveň je zde využit záporný koeficient u neznámé, kterou chceme eliminovat, v první rovnici. Druhou rovnici tak násobíme kladným číslem a první rovnici netřeba upravovat, čímž si ušetříme jeden krok.

Význam volby koeficientů u neznámých v dané soustavě můžeme pouze odhadovat. Je možné, že úloha byla záměrně zadána tak, aby měla jedno celočíselné řešení a zároveň aby soustava obsahovala pouze celá čísla. Podobné úlohy na směsi obvykle obsahují rovnici typu $1x+1y=k$, kde x a y jsou neznámé a k je reálné číslo. Druhá rovnice obsahuje koeficienty 3 a -2, což je opakující se jev z minulých příkladů, kde se vyskytovaly koeficienty 2, -2, 3 a -3. Tato čísla jsou pravděpodobně volena, protože jsou nízká a lze jimi násobit a případně i dělit z hlavy, což usnadňuje výpočty.

V závěru části kapitoly, která je věnována metodě sčítací, jsou uvedena řešení dvou soustav tří rovnic o dvou neznámých. V první soustavě

$$x - 3y = 11$$
$$x + 2y = -8$$
$$3x + y = 5$$

je první rovnice ponechána a k druhé rovnici je přičten (-1)-násobek první rovnice a ke třetí rovnici je přičten (-3)-násobek první rovnice, čímž je eliminována neznámá x. Z druhé a třetí rovnice je pak získáno rozdílné řešení pro neznámou y, tedy soustava nemá řešení.

Způsob řešení opět vnímám jako nejvýhodnější, jelikož ve dvou rovnicích má neznámá x stejný koeficient a neznámá y má v každé rovnici odlišný koeficient, je vhodnější k eliminaci volit neznámou x. Zároveň, co se týče výběru jednotlivých rovnic ke sčítání, pokud by byla ponechána druhá rovnice a k ostatním rovnicím by byl přičten její n-násobek, obtížnost řešení by byla srovnatelná s vybraným řešením. Pokud by byla ponechána třetí rovnice a k prvním dvěma rovnicím by byl přičten její n-násobek, případně pokud by byl n-násobek této rovnice přičten k n-násobkům první a druhé rovnice, řešení by obsahovalo více kroků.

Koeficienty jsou zde zvoleny tak, že řešení není vidět na první pohled. Opět se zde vyskytují koeficienty 1, 2, 3 a -3, jako v předchozích příkladech, ale tentokrát zde není celočíselné řešení. Konkrétně všechny tři soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, které lze získat kombinací rovnic dané soustavy mají jedno řešení, kterým je uspořádaná dvojice racionálních čísel. Stejně jako u metody dosazovací jsou zde zařazeny nejprve příklady s celočíselným řešením a později, po dostatečném vysvětlení a demonstrování metody, je zde zařazen příklad, jehož řešení obsahuje racionální čísla.

Následuje druhá soustava rovnic:

$$s + 2t = 1$$
$$2s - t = -3$$
$$4s + 3t = -1.$$

Kde je v ilustračním řešení opět ponechána první rovnice a k druhým dvěma rovnicím je přičten její n-násobek. Zároveň je zde opět eliminována první uvedená neznámá, tedy s. Tentokrát má soustava jedno celočíselné řešení. Po sečtení n-násobků rovnic na místě druhé a třetí rovnice získáváme rovnici $-5t = -5$.

Výběr neznámé k eliminaci je opět výhodný, stejně jako výběr rovnice, jejíž n-násobek je přičten k druhým dvěma rovnicím. Tato volba zde není okomentována a rovněž není uvedeno, že se jedná o jedno z možných řešení. Na žáky to může působit tak, že u soustav tří rovnic o dvou neznámých vždy eliminujeme první neznámou ve druhé a třetí rovnici pomocí první rovnice, protože tento postup se objevuje u obou řešených úloh.

Jelikož je v první rovnici u vybrané neznámé koeficient 1, stačí tuto rovnici pouze vynásobit číslem -2 a poté číslem -4 a není potřeba upravovat zbylé dvě rovnice. Koeficienty jsou zde opět zvoleny tak, že řešení není vidět na první pohled.

Předchozí soustava je zadána obdobně (tedy k druhé a třetí rovnici je rovněž přičten n-násobek první rovnice, kde je koeficient u eliminované neznámé 1), postup řešení obou soustav je tedy téměř identický a jejich zadání je podobné, kromě rozdílné množiny řešení.

V učebnici Matematika pro střední školy (Cizlerová et al., 2013) je sčítací metoda demonstrována opět na soustavě dvou rovnic o dvou neznámých s nulovou pravou stranou:

$$2x - 3y + 3 = 0$$
$$3x + 2y + 11 = 0,$$

která má jedno celočíselné řešení. Koeficienty u neznámých jsou 2, -3 a 3, 2, jsou tedy shodné s koeficienty v soustavě rovnic $(2u - 3v = 19, 3u + 2v = -4)$ z učebnice Matematika pro Gymnázia (Charvát et al., 2009). Soustava je zde řešena úplně stejně jako v této publikaci, první rovnice je zde násobena číslem 2 a druhá rovnice číslem 3. Opět je tedy zvolena neznámá, při jejíž eliminaci budou průvodní operace subjektivně co nejjednodušší. Koeficienty jsou malá čísla a při výpočtu není potřeba násobit zápornými čísly, což přispívá k subjektivní jednoduchosti soustavy.

V přehledu středoškolské matematiky (Polák, 2008) je sčítací metoda opět znázorněna na soustavě rovnic

$$2x - y = 1$$
$$x + 3y = 11.$$

Zde opět autoři volí netradiční řešení. Nejprve první rovnici násobí číslem 3 a rovnice sčítají, čímž eliminují neznámou y a dopočítáním získávají neznámou x. Poté nedosazují získanou hodnotu do jedné z původních rovnic, ale opakují řešení metodou sčítací. Tentokrát druhou rovnici násobí číslem -2 a sečtením rovnic tak eliminují neznámou x a dopočítávají y.

V obou řešeních je úprava rovnic před sečtením výhodná vzhledem k eliminaci požadované neznámé. V každém řešení je potřeba upravit pouze jednu z rovnic. V porovnání s metodou dosazovací řešení rovněž neobsahuje lomené výrazy a postup má stejný počet kroků. Je možné, že proto byly v soustavě zvoleny daná čísla, lze na ní jednoduše ilustrovat obě tyto metody.

V ostatních posuzovaných publikacích není metoda sčítací uvedena.

Shrnutí

Metodu sčítací je dle Charváta et al. (2009) vhodné volit u soustav rovnic, kde jsou všechny koeficienty u neznámých nenulové. Tuto metodu je rovněž vhodné použít u soustav, kde lze bez úprav jejich sečtením eliminovat jednu z neznámých, tedy když jsou koeficienty u jedné neznámé opačné nebo se rovnají (v tom případě jednu z rovnic od druhé odečteme). Využijeme ji také v případě, pokud lze rovnice jednoduše vynásobit tak, aby byly koeficienty u jedné neznámé opačná čísla. Pro ilustraci metody sčítací ve středoškolských učebnicích jsou ve většině voleny soustavy, kde stačí upravit pouze jednu z rovnic.

Metodu je vhodné použít u soustav s nízkým počtem rovnic. U posuzovaných učebnic je demonstrována ve většině případů na soustavách obsahujících dvě rovnice o dvou neznámých. Charvát et al. (2009) ji prezentuje i na soustavě tří rovnic se dvěma neznámými.

Celkově se u metody sčítací setkáváme u příkladů v učebnicích s následujícími parametry:

Explicitně řešené charakteristiky:

- obor řešitelnosti soustavy rovnic
- volba metody na základě hodnoty koeficientů (Charvát et al., 2009)

Charakteristiky příkladů, které jsou relevantní, ale na které autoři explicitně neupozorňují:

- pořadí proměnných v zápisu rovnice (vždy uvedeno ve standardním tvaru)
- pojmenování proměnných rovnice (ve dvou případech jsou použita různá písmena, Charvát et al., 2009; Cizlerová et al., 2013)
- zadání soustavy s nulovou pravou stranou (Cizlerová et al., 2013)

Další charakteristiky popsaných příkladů:

- koeficienty členů rovnic jsou relativně náhodně, ale s ohledem na obor řešitelnosti soustavy (a ilustraci různých možností) a v některých případech tak, aby byl jeden násobkem druhého a řešení tak obsahuje méně kroků

Zároveň z analýzy učebnic poměrně jednoznačně vyplývá, že většina středoškolských učebnic matematiky často klade důraz na efektivitu a minimalizaci počtu kroků při řešení soustav rovnic. Tento přístup implicitně naznačuje, že je z pohledu matematiky zásadní dospět k výsledku co nejrychleji a nejpřímější cestou. Tento "aspekt jednoduchosti" je zdůrazňován (např. komentáři o volbě vhodné metody a neznámé k úpravám) možnosti experimentování s různými metodami řešení i úpravami, které by neovlivnily množinu řešení, ale mohly by přispět k lepšímu porozumění celému tématu.

2.3 Grafické řešení

Na lineární rovnice se dvěma neznámými lze nahlížet jako na předpisy přímek nacházejících se v kartézské soustavě souřadnic v rovině. Množinu všech řešení (x, y)[9] jedné rovnice o dvou neznámých lze potom v souladu s tímto přístupem znázornit jako přímku. Rovnici $ax + by + c = 0$, lze převést do tzv. *směrnicového tvaru* vyjádřením y: $y = (-ax - c)/b, b \neq 0$. Tento tvar je shodný s předpisem lineární funkce, jejíž graf je přímka. (Zhouf, 2019)

Soustavu rovnic graficky vyřešíme tak, že všechny zadané přímky (rovnice) zaneseme do kartézské soustavy souřadnic. Získáme bod, případně body, o souřadnicích (x, y), které

[9] Můžeme se setkat se zápisem množiny řešení v hranatých závorkách: $[x, y]$.

jsou pro všechny přímky společné, tedy přímky se v nich protínají. Souřadnice bodů průniku jsou rovny uspořádané dvojici, která je řešením dané soustavy. (Zhouf, 2019)

Abychom zakreslili přímku do kartézské soustavy souřadnic, musíme znát alespoň dva body ležící na přímce. Souřadnice bodu, kterým přímka prochází, získáme dosazením libovolného čísla za x nebo y v rovnici a dopočítáme hodnotu druhé neznámé. Dosazené a získané číslo tvoří souřadnice bodu. Pro zisk druhého bodu volíme jiné číslo. Body poté zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a spojíme.

Lineární rovnici se třemi neznámými lze interpretovat jako předpis roviny nacházející se v kartézské soustavě souřadnic v prostoru. Grafické řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých vyžaduje vynesení tří rovin do trojrozměrného prostoru, což je obecně nemožné udělat s potřebnou přesností na papíře. Můžeme však využít různé počítačové programy, které nám znázorní roviny a jejich průnik/y ve 3D modelu. Známými a používanými grafickými kalkulátory a software jsou například GeoGebra, Desmos nebo MATLAB.

Soustavy se čtyřmi a více neznámými nelze vizualizovat.

Pomocí grafického znázornění lze ilustrovat princip sčítací metody (dále také Gaussovy a Gauss-Jordanovy eliminace) zakreslením přímek do soustavy souřadnic. Mějme soustavu dvou rovnic, které představují dvě přímky v rovině. Záměnou těchto rovnic se grafické znázornění a tedy ani řešení nemění. Pokud libovolnou rovnici vynásobíme libovolným nenulovým číslem, poloha přímek se rovněž nezmění. Pokud n-násobek jedné rovnice přičteme k n-násobku druhé rovnice tak, abychom eliminovali jednu neznámou (tedy koeficient této neznámé bude roven nule), v případě, že mají původní přímky průsečík, získáme rovnici, jejímž grafickým znázorněním bude přímka rovnoběžná s osou v kartézské soustavě souřadnic. Tato přímka prochází průsečíkem původních přímek. V předpisu přímky figurují proměnné x a y, přičemž pokud eliminujeme neznámou x, získáme přímku rovnoběžnou s osou x o předpisu $y = a$, kde a je číslo z daného definičního oboru a pokud eliminujeme neznámou y, získáme přímku předpisem $x = b$, tedy přímku rovnoběžnou s osou y. Získané řešení je pak uspořádaná dvojice $(x, y) = (a, b)$. Pokud původní přímky nemají průsečík, součtem jejich n-násobků nezískáme rovnici, jejímž grafem je přímka.

Obdobně je to s rovinami v prostoru. Součtem dvou rovnic o třech neznámých, při kterém dojde k eliminaci jedné neznámé, získáme rovnici, jejímž znázorněním je rovina kolmá k dané ose procházející přímkou, ve které se protínají původní roviny. Pokud v dané rovnici ekvivalentními úpravami pomocí další rovnice eliminujeme i druhou neznámou, získáme rovinu, která je rovnoběžná se dvěma osami soustavy souřadnic a je tedy kolmá k třetí ose soustavy. Pokud takto upravíme všechny tři rovnice, přičemž v každé z rovnic eliminujeme jinou dvojici neznámých, získáme tři roviny s předpisem $x = a, y = b, z = c$, kde a, b, c jsou čísla z daného definičního oboru, které se protínají v bodě (a, b, c), stejně jako roviny, které jsou grafickým znázorněním původních rovnic soustavy. Řešením soustavy rovnic je pak uspořádaná trojice $(x, y, z) = (a, b, c)$. Toto znázornění využívá principu lineární kombinace. (Goldman & Rodriguez, 2016)

Ve středoškolské učebnici Matematika pro Gymnázia (Charvát et al., 2009) je grafické řešení soustav lineárních rovnic demonstrováno pouze na soustavách dvou rovnic o dvou neznámých. První příklad obsahuje tři soustavy rovnic a každé řešení obsahuje převedení těchto rovnic na směrnicový tvar, grafické znázornění, komentář autorů k podobě grafického znázornění a zápis kořenů soustavy. Není zde uveden postup zanesení přímek do kartézské soustavy souřadnic. První soustava rovnic

$$x + 2y = 4$$
$$2x - y = \frac{11}{2}$$

obsahuje kolmé přímky. Tato soustava má tedy jedno řešení. Lomený výraz v absolutním členu druhé rovnice je zde zřejmě zvolen záměrně z toho důvodu, aby i řešení obsahovalo lomený výraz. Autoři totiž přidávají poznámku, že se „může stát, že souřadnice průsečíku nevyčteme přesně, ale pouze přibližně“ (Charvát et al., 2009, s. 96).

Následuje soustava rovnic

$$x + 2y = 1$$
$$2x + 4y = 4,$$

která nemá řešení, protože přímky jsou zde rovnoběžné různé. Lze vypozorovat, že koeficienty u neznámých druhé rovnice jsou dvojnásobkem koeficientů v první rovnici, ale absolutní člen druhé rovnice není dvojnásobkem první rovnice.

Dále je zde vyřešena soustava

$$-2x + y = 1$$
$$4x - 2y = -2,$$

která má nekonečně mnoho řešení, protože přímky jsou totožné. To autoři ukazují převedením rovnic na směrnicový tvar $y = 2x + 1$, který je pro obě rovnice shodný.

Tyto tři soustavy rovnic tedy demonstrují všechny možné polohy dvou přímek v rovině a tedy i všechna možná řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých.

Další řešené příklady jsou soustavy tří rovnic o dvou neznámých. Nejprve je zde uvedena soustava, která byla vyřešena v předchozí podkapitole, ale neznámé s, t jsou zde zaměněny za x a y. Rovnice soustavy

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x - y &= -3 \\ 4x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

zde již nejsou převedeny na směrnicový tvar, ale jsou pouze znázorněny v kartézské soustavě souřadnic. Autoři uvádějí, že jelikož se jedná o různé přímky procházející jedním bodem, tak je tento bod jediným řešením soustavy. Řešení je opět celočíselné.

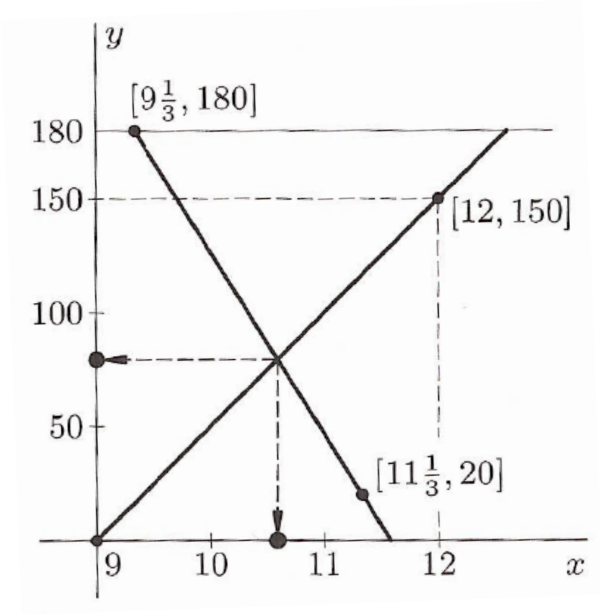
Následuje soustava tří rovnic o dvou neznámých, která nemá řešení. Rovnice jsou zadány netradičně oproti předchozím zápisům, protože jsou zde uvedeny i neznámé s nulovým koeficientem namísto toho, aby byly vynechány:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ x + 0 \cdot y &= 1 \\ 0 \cdot x + y &= 2. \end{aligned}$$

Rovnice jsou zde později převedeny na tradiční tvar bez nulových koeficientů a znázorněny v kartézské soustavě souřadnic.

Je zřejmé, že autoři v rovnicích volí malá přirozená čísla, aby přímky protínaly souřadnicové osy co nejblíže počátku a aby tedy obrázky znázorňující dané grafické řešení obsahovaly vedle případného průsečíku i počátek soustavy souřadnic. Obrázky jsou tak pro žáky přehledné a lze z nich vyčíst souřadnice průsečíků. Autoři rovněž u různoběžných přímek volí přímky s velkou odchylkou, konkrétně ve všech případech různoběžných přímek se vyskytují kolmé přímky, což činí obrázek přehlednějším. Zároveň lze souřadnice všech průsečíků zapsat celými nebo racionálními čísly.

Na závěr části učebnice, která se věnuje grafickému řešení soustav rovnic, uvádí autoři příklad praktického využití této metody na slovní úloze. Jedná se o úlohu o pohybu, kde se objekty pohybují proti sobě a otázkou je v kolik hodin a kde se objekty setkají. V řešení na osu x nanáší čas v hodinách a na osu y vzdálenost od jednoho místa. Na osu pak nanáší úsečky, jejichž počáteční bod má souřadnice [čas odjezdu; vzdálenost od daného místa] a dle zadaných rychlostí objektů určují pro každý objekt druhý bod, kterým úsečka prochází. Obě úsečky se protínají v jednom bodě. Jelikož je ve zvoleném obrázku (viz obr. 1) na ose x jeden centimetr jedna hodina a na ose y jeden centimetr padesát kilometrů, výsledek nelze určit přesně. Je odečteno řešení $(10{,}5; 80)$. Úloha je zde řešena i početně, zde je získán přesný výsledek $(10{,}59; 79{,}5)$. Autorským záměrem bylo představit grafickou metodu na praktické úloze a pravděpodobně i znázornit její nepřesnost.



Obr. 1: Grafické řešení slovní úlohy (Charvát et al., 2009, s. 98)

Po této úloze je navázáno grafickým řešením soustav lineárních nerovnic.

V učebnici Matematika pro střední školy (Cizlerová et al., 2013) není grafické řešení oficiálně zařazeno mezi ostatní metody řešení soustav rovnic, ale je postupně v kapitole představeno ve vedlejším sloupci, kde se obvykle vyskytují „informace charakteru historického či odkazy ke každodenním souvislostem“ (Cizlerová et al., 2013, s. 2). Nejprve je zde v rámečku *Víte, že?* představena uspořádaná dvojice a její souvislost s bodem v kartézské soustavě souřadnic, na což navazuje rámeček *Zamyslete se!*, kde je uvedena podoba řešení soustav s jedním řešením a soustav s nekonečně mnoho řešeními. Dále je v kapitole rámeček *Kam dál?*, kde je vysvětleno, že každou rovnici soustavy lze zanést do kartézské soustavy souřadnic jako přímku a řešením soustavy je pak průsečík těchto přímek. Následně jsou zde grafická znázornění tří soustav dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými. Rovnice soustav zde nejsou uvedeny, je zde vložen obrázek a komentář k počtu řešení. Každý z obrázků, stejně jako v předchozí rozebírané publikaci, obsahuje počátek soustavy souřadnic, dále červenou přímku p, která se nachází v každém z obrázků na stejném místě a modrou přímku q, jejíž poloha se mění. Předpisy přímek zde nejsou uvedeny, osy zároveň nejsou očíslované. Nejprve je zde grafické znázornění soustavy, která má jedno řešení, tedy přímka q je různoběžná s přímkou p. Jejich průsečík je označen jako $[x; y]$, konkrétní čísla zde nejsou uvedena. Přímky nejsou kolmé, ale jejich odchylka se blíží 90° a obrázek je tak přehledný. Následuje znázornění soustavy, která nemá žádné řešení, přímky jsou zde tedy rovnoběžné. Na závěr je uvedeno grafické znázornění soustavy, která má nekonečně mnoho řešení, přímky jsou tedy totožné. To je graficky znázorněno tak, že přímka je červenomodrá.

V závěru kapitoly se vyskytuje ještě jeden rámeček *Víte, že?*, kde je uvedena a graficky znázorněna podoba kartézské soustavy souřadnic v prostoru. Podoba grafického znázornění rovnic se třemi neznámými zde není uvedena. Obecně se dá říci, že tato metoda je brána v této učebnici spíše jako nadstavba pro představené metody sčítací a dosazovací.

V Přehledu středoškolské matematiky (Polák, 2008) je grafické řešení demonstrováno rovněž na třech soustavách dvou rovnic se dvěma neznámými. Na rozdíl od předchozích, tato publikace uvádí celkový postup, nikoliv pouze obrázek s komentářem. V prvních dvou soustavách je každá rovnice soustavy nejprve převedena na směrnicový tvar a jsou určeny dva body, kterými přímka, která je množinou bodů splňující danou rovnici, prochází. Postup získání souřadnic bodů, kterými přímka prochází, zde není uveden. Souřadnice bodů jsou celočíselné, případně je lze zapsat zlomkem s číslem 2 ve jmenovateli. Pomocí těchto bodů jsou konstruovány obě přímky a jsou určeny případné průsečíky. Obrázky opět obsahují počátek soustavy souřadnic. Různá řešení jsou zde uvedena ve stejném pořadí jako v předchozích publikacích. Nejprve je uvedena soustava, která má jedno řešení. Zde autoři používají stejnou soustavu, na které byla demonstrována metoda dosazovací, srovnávací a sčítací. Poté je uvedena soustava, která nemá žádné řešení

$$4x - 6y = 3$$
$$6x - 9y = 12.$$

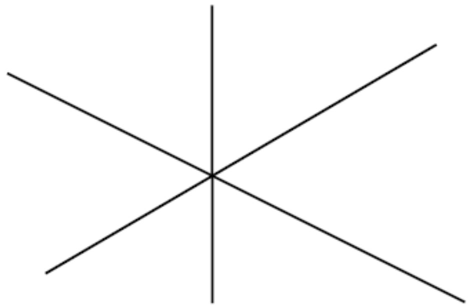
Směrnicové vyjádření této soustavy obsahuje lomené výrazy, zároveň souřadnice bodů, kterými prochází první přímka, jsou racionální čísla.

Na závěr uvádějí soustavu rovnic

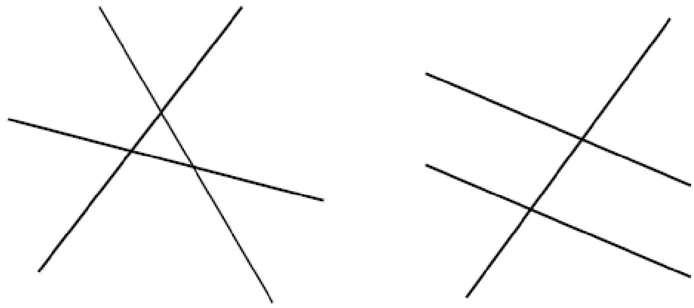
$$x + 2y = 4$$
$$3x + 6y = 12.$$

Řešení této soustavy obsahuje na rozdíl od předchozí soustavy celá čísla. Autor v řešení uvádí, že se jedná o totožnou přímku a rovnice zde nejsou převedeny do směrnicového tvaru, jsou pouze určeny body, kterými přímka prochází, konkrétně průsečíky s osami x a y. Tímto autor implicitně představuje způsob získání bodů pro zakreslení přímky do roviny, tedy nalezení souřadnic průsečíků přímky s osami. Čísla v této rovnici byla pravděpodobně zvolena záměrně tak, aby byly tyto průsečíky s osami celočíselné.

Vysokoškolská skripta k předmětu Lineární algebra (Barto & Tůma, 2023) neuvádí přímo grafickou metodu jako jednu z možných metod pro řešení soustav lineárních rovnic, nicméně část kapitoly věnující se tomuto tématu věnují geometrii soustav lineárních rovnic. Tu dělí na řádkový a sloupcový pohled na soustavy lineárních rovnic. V řádkovém pohledu autoři připomínají, že na každou rovnici o dvou neznámých lze hledět jako na přímku a „množina všech řešení je potom průnikem těchto přímek“ (Barto & Tůma, 2023, s. 57). Z toho usuzují podoby množin všech řešení: celá rovina, přímka, bod, prázdná množina. Poslední dvě podoby jsou zde zároveň znázorněny, viz obr. 2 a 3.



Obr. 2: Geometrie jednoznačně řešitelné soustavy o dvou neznámých (Barto & Tůma, 2023, s. 58)



Obr. 3: Geometrické důvody neřešitelnosti soustavy o dvou neznámých (Barto & Tůma, 2023, s. 58)

Zároveň jsou zde zmíněny podoby množin všech řešení soustav rovnic se třemi neznámými. Ty jsou zde uvedeny bez obrázků. Význam řádkového pohledu je tedy dát řešiteli představu, jak může vypadat množina řešení soustavy. Obsažené obrázky dostatečně demonstrují tento význam.

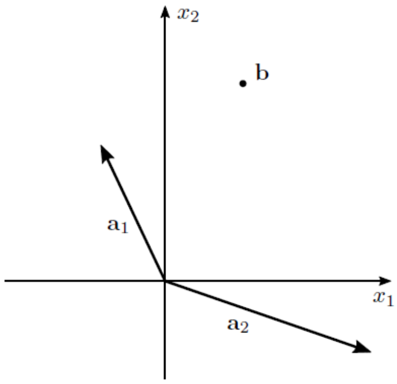
Co se týče sloupcového geometrického pohledu, ten je zde demonstrován na příkladu soustavy dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 3. \end{aligned}$$

Tuto soustavu přepisují pomocí sloupcových vektorů na tvar

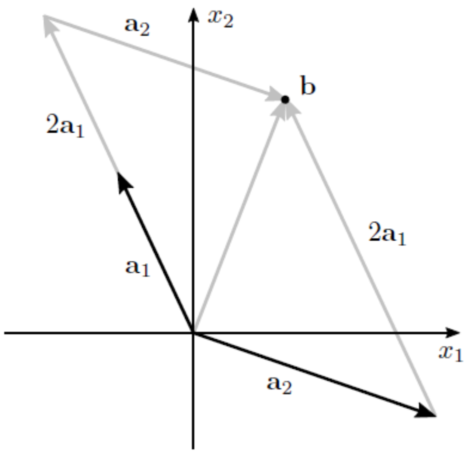
$$x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Z tohoto přechází ke geometrickému znázornění této soustavy, viz obr. 4.



Obr. 4: Sloupcové zadání soustavy o dvou neznámých (Barto & Tůma, 2023, s. 59)

Barto a Tůma řešení interpretují následovně: Máme dány dva vektory $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ a hledáme nějaké jejich násobky tak, abychom se součtem těchto násobků „trefili“ do bodu se souřadnicemi $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. Řešení je zde rovněž zveřejněno, platí: $2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, viz obr. 5.



Obr. 5: Geometrické řešení soustavy o dvou neznámých sloupcově (Barto & Tůma, 2023, s. 60)

Autoři zároveň uvádí, že „z geometrického náhledu vidíme, že vhodnou volbou násobků vektorů se můžeme trefit do jakéhokoliv bodu roviny“ (Barto & Tůma, 2023, s. 60), protože sloupcový zápis $x_1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ je parametrickým vyjádřením roviny. Soustava je tedy řešitelná pro jakoukoliv pravou stranu (pro shodnou soustavu rovnic s rozdílnými absolutními členy). Na tomto příkladu autoři demonstrují, že „soustava lineárních rovnic $Ax = b$[10] je řešitelná, právě tehdy, když lze sloupcový vektor pravých stran b vyjádřit jako lineární kombinaci sloupcových vektorů matice soustavy A (Barto & Tůma, 2023, s. 62). Což je významem sloupcového geometrického pohledu. To znovu demonstrují na soustavě tří rovnic o dvou neznámých a obecně, tentokrát již bez obrázku.

V ostatních posuzovaných publikacích není metoda grafická uvedena.

Shrnutí

Grafická metoda řešení je, co se týče počtu kroků, náročnější než předchozí metody. Posuzované publikace ji ve většině využívají pro znázornění množiny řešení soustav se dvěma neznámými. Grafická metoda je vizuální a intuitivní, což můžeme využít pro pochopení soustav rovnic. Grafické řešení nám, kromě propojení algebry s geometrií, dává nový náhled na řešení soustav – kořeny lze odhadovat a počty řešení určovat vizuálně. Zároveň je vhodné žáky seznámit s grafickým řešením před řešením nerovnic a jejich soustav.

Pod grafickou metodu spadají dva podstatně odlišné přístupy. Středoškolské učebnice pod názvem grafická metoda řešení soustav rovnic představují postup, při kterém se soustava zejména dvou rovnic s dvěma neznámými řeší pomocí grafického znázornění těchto rovnic v kartézské soustavě souřadnic. Ve skriptech Lineární algebra (Barto & Tůma, 2023) se můžeme seznámit i s principem bližším pohledu známému z lineární algebry.[11]

Explicitně řešené charakteristiky:

- obor řešitelnosti soustavy rovnic
- počet rovnic a neznámých
- počet řešení jednotlivých soustav

Charakteristiky příkladů, které jsou relevantní, ale na které autoři explicitně neupozorňují:

- pořadí proměnných v zápisu rovnice (vždy uvedeno ve standardním tvaru)

[10] A je zde matice koeficientů u neznámých a b je sloupcový vektor pravých stran, tedy absolutních členů, x je množina neznámých. Tento zápis si podrobněji vysvětlíme v následující podkapitole.

[11] Zatímco představa zobecnění pro vyšší dimenze prostřednictvím přímek a rovin je dost náročná na představivost, tento druhý přístup prostřednictvím vektorů je přístupnější.

- pojmenování proměnných rovnice je vždy x a y (výjimkou je publikace Barto & Tůma, 2023; kde jsou proměnné x_1 a x_2)
- grafické řešení soustavy bez zadání (Cizlerová et al., 2013; Barto & Tůma, 2023)
- uvedení řešení (postupu při řešení) soustavy bez postupu zakreslení přímek do soustavy souřadnic

Další charakteristiky popsaných příkladů:

- koeficienty členů rovnic jsou voleny s ohledem na obor řešitelnosti soustavy (a ilustraci různých možností), ve většině se jedná o nízká čísla, aby bylo grafické znázornění přehledné (tedy obsahuje počátek soustavy souřadnic)
- pro různoběžné přímky jsou koeficienty voleny tak, aby přímky měly velké odchylky, případně byly kolmé

2.4 Gaussova a Gauss-Jordanova eliminační metoda

V následujících metodách řešení soustav rovnic budeme využívat *matice*. Bečvář (2019, s. 32) ji definuje následovně:

> **Definice**. Nechť X je neprázdná množina a m, n přirozená čísla. *Maticí typu* $m \times n$ *nad množinou* X budeme rozumět obdélníkové schéma
>
> $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$
>
> kde $a_{ij} \in X$ pro každé $i = 1, \dots, m$ a každé $j = 1, \dots, n$.

Zjednodušeně řečeno, matice je množina čísel uspořádaná do m řádků a n sloupců. Matice budeme značit velkými písmeny ($A, B, C, \dots$) a jejich prvky (reálná čísla) malými písmeny ($a, b, c, \dots$).

I-tý řádek matice značíme: $a_i = (a_{i1},\ a_{i2},\ a_{i3}, \dots,\ a_{in})$. J-tý sloupec matice značíme:

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Pokud platí $m = n$, jedná se o čtvercovou matici *řádu* n, pokud $m \neq n$, jedná se o obdélníkovou matici.

Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,$$

kde a_{ij} jsou reálné koeficienty u neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ nacházejících se na levých stranách rovnic a b_j jsou absolutní členy rovnic nacházející se na pravých stranách rovnic, lze zapsat do *matice soustavy*, která vypadá následovně:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Řešením soustavy je sloupcová matice

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Matici vzniklou spojením dvou matic $(A|B)$ také nazýváme *rozšířená matice*. (Bican, 2000)

Před zapsáním soustavy do rozšířené matice musíme rovnice soustavy upravit tak, aby na levé straně byly neznámé a jejich koeficienty a na pravé straně absolutní členy. Koeficienty u neznámých pak vepisujeme do levé strany rozšířené matice ve stejném pořadí pro všechny rovnice.

Zároveň lze soustavu zapsat součinem matic $A \cdot x = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Při Gaussově eliminaci, taktéž Gaussově eliminační metodě, budeme levou stranu rozšířené matice soustavy převádět do tzv. *odstupňovaného tvaru*, z něhož můžeme určit řešení soustavy.

Pro řádkově odstupňovanou rovnici platí, že v každém nenulovém řádku nazýváme první číslo, které není nula, pivotem. Každý pivot je více napravo, než pivot v řádku nad ním. Nulové řádky jsou v matici pod nenulovými řádky. (Anthony & Harvey, 2012)

V odstupňovaném tvaru matice každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než ten předchozí (pokud předchozí řádek existuje). Druhý řádek (pokud existuje) začíná alespoň jednou nulou, třetí řádek dvěma nulami, čtvrtý řádek třemi nulami a obecně i-tý řádek začíná minimálně $(i-1)$ nulami. Matice soustavy lineárních rovnic je v řádkově odstupňovaném tvaru, pokud je její matice koeficientů v řádkově odstupňovaném tvaru. (Bečvář, 2019)

Matice budeme převádět na odstupňovaný tvar pomocí *elementárních řádkových transformací*. Pokud lze jednu matici získat z druhé pomocí elementárních řádkových transformací, označujeme je jako *řádkově ekvivalentní* matice, zapisujeme $A \sim B$. Platí, že pokud je matice A řádkově ekvivalentní s maticí B, pak je i matice B řádkově ekvivalentní s maticí A. (Anthony & Harvey, 2012)

Elementární úpravy řádků vychází z ekvivalentních úprav rovnic, tedy nemění množinu řešení soustavy rovnic. Při řešení soustav lineárních rovnic využijeme tyto transformace: prohození dvou řádků, vynásobení řádku nenulovým číslem, přičtení n-násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Prohození dvou řádků

Lze libovolně zaměnit dva řádky matice. Tato transformace je podobná zaměnění dvou rovnic v soustavě. Soustavy rovnic, které obsahují stejné rovnice v libovolném pořadí jsou ekvivalentní a mají stejnou množinu řešení. Matice těchto soustav budou řádkově ekvivalentní.

Vynásobení řádku nenulovým číslem

Stejně jako lze rovnici vynásobit jakýmkoliv číslem různým od nuly, lze totéž učinit i s jakýmkoliv řádkem matice.

Přičtení n-násobku jednoho řádku k jinému řádku

Stejně jako při řešení soustavy rovnic metodou sčítací můžeme n-násobek jedné rovnice přičíst k n-násobku druhé, můžeme n-násobek jednoho řádku přičíst k n-násobku druhého. Pokud sečteme dva řádky, součet umístíme namísto jednoho z řádků a druhý ponecháme.

Vhodnou volbou elementárních úprav lze každou matici soustavy převést na odstupňovaný tvar, ze kterého lze přepsáním na soustavu rovnic a zpětnou substitucí určit množinu všech řešení. (Friedberg et al., 2014)

Záměna sloupců matice není ekvivalentní úpravou, protože vede ke změně pořadí neznámých v rovnicích, tedy mění množinu řešení soustavy. Samozřejmě je možné sloupce zaměnit, pokud při přepisu zpět na soustavu zapíšeme neznámé ke správným koeficientům. Obecně je doporučeno měnit pouze řádky, nikoli sloupce, aby nedošlo k chybě při interpretaci řešení.

Abychom určili počet řešení u různých soustav, musíme se nejprve seznámit s pojmem *hodnost matice.* Hodnost matice je rovna počtu nenulových řádků po Gaussově eliminaci. Hodnost značíme $hod(A)$, taktéž $h(A)$ nebo $rank(A)$.

Platí, že pokud lze jednu matici získat pomocí elementárních řádkových úprav z druhé, matice mají stejnou hodnost, tedy $A{\sim}B \ \Rightarrow hod(A) = hod(B)$. Hodnost matice nikdy není větší než počet jejích sloupců. (Goode & Annin, 2007)

Počty řešení v jednotlivých soustavách lze určit pomocí Frobeniovy věty. Bican (2000, s. 35) ji uvádí následovně:

> Nehomogenní[12] soustava lineárních rovnic je řešitelná, právě když hodnost matice soustavy $h(A)$ je rovna hodnosti matice rozšířené $h\big((A,b)\big)$[13].

Důsledkem této věty je, že soustava má:

1. 1 řešení $\Leftrightarrow hod\ (A) = hod\ (A,B), hod(A) = n$,

[12] V lineární algebře rozlišujeme homogenní a nehomogenní soustavu rovnic. Homogenní soustava rovnic obsahuje při převedení do rozšířené matice na pravé straně pouze nuly, tedy absolutní člen je v každé rovnici soustavy roven nule.

[13] V této práci jsou matice označovány velkými písmeny, v citované literatuře je sloupec pravých stran v matici soustavy označen malým písmenem b.

2. 0 řešení $\Leftrightarrow hod\ (A) < hod\ (A, B)$,
3. nekonečně mnoho řešení $\Leftrightarrow hod\ (A) = hod\ (A, B), hod(A) < n$

kde A je matice levých stran a B matice pravých stran.

Například:

1. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 4 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 6 & 30 \end{array}\right), hod(A) = 3, hod(A, B) = 3, \mathrm{n} = 3 \Rightarrow$ 1 řešení ($x_3 = 6, \ldots$),
2. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 4 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{array}\right), hod(A) = 2, hod(A, B) = 3 \Rightarrow$ 0 řešení ($0 \cdot x_3 \neq 30$),
3. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 4 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), hod(A) = 2, hod(A, B) = 2, \mathrm{n} = 3 \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení ($0 \cdot x_3 = 0$).

U této metody musíme soustavu rovnic přepsat do tvaru rozšířené matice a po eliminaci přepsat zpět na soustavu a postupným dosazováním hledat kořeny. Tomuto kroku se lze vyhnout využitím *Gauss-Jordanovy eliminace*.

Při Gauss-Jordanově eliminaci postupujeme na začátku stejně jako při Gaussově eliminaci. Matici ale nepřevádíme pouze do řádkově odstupňovaného tvaru, nýbrž do *redukovaného (řádkově) odstupňovaného tvaru*.

Pro matici v redukovaném (řádkově) odstupňovaném tvaru platí, že každý pivot je vždy více napravo, než pivot v předchozím řádku, nulové řádky jsou v matici pod nenulovými řádky a každý sloupec, kde se nachází pivot má mimo pivot nuly. Nemusí platit, že každý řádek, kde se nachází pivot je mimo pivot nulový. (Anthony & Harvey, 2012)

Postupujeme tak, že nejprve provedeme Gaussovu eliminaci a u každého nenulového řádku určíme pivoty, tedy první nenulové prvky v každém řádku. Poté pomocí elementárních úprav řádků upravíme matici tak, aby byly pivoty rovny číslu 1 a ostatní prvky ve sloupcích, kde se nachází pivot, byly nulové.

Po Gauss-Jordanově eliminaci lze z pravé strany jednoduše vyčíst řešení soustavy a není třeba zde zařazovat zpětnou substituci.

Ve středoškolské učebnici Matematika pro Gymnázia (Charvát et al., 2009) je zařazena pouze Gaussova eliminační metoda, ale bez využití matic. Metoda je zařazena v podkapitole s názvem Soustavy lineárních rovnic s více neznámými, výklad je však demonstrován pouze na soustavách se třemi neznámými. V úvodu podkapitoly autoři uvádějí, že představený postup je podobný metodě sčítací. Autoři konstatují, že lze pro soustavy s více neznámými použít i metodu dosazovací, ale výpočty pak nejsou přehledné.

Název metody zde zatím není uveden. Nejprve jsou zde uvedeny tři soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 13 \\ 2y + z &= 1 \\ 2z &= 6 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

$$\begin{aligned} x + 3y - z &= 2 \\ y + 3z &= -2 \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

$$2x - y + 3z = 1, \tag{2.4.3}$$

které odpovídají třem možnostem výsledku Gaussovy eliminace u soustavy tří rovnic o třech neznámých s nenulovými koeficienty. Tyto rovnice jsou zde postupně řešeny pomocí substituce, případně jsou zvoleny parametry. Autoři uvádí, že cílem představovaného postupu bude soustavy převést na jednu z těchto tří rovnic. Tento postup následně demonstrují na soustavě

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ -x + 3y + 2z &= 0 \\ 2x - y + 5z &= 5, \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

která po úpravách vede na tvar první rovnice. Autoři zde postupují stejně jako u předchozích soustav obsahujících tři rovnice. První rovnice je ponechána a pomocí n-násobku této rovnice je eliminována první neznámá, tedy x, ve druhé a třetí rovnici. Znovu je tedy ponechána první rovnice a eliminována první neznámá. Zároveň jsou koeficienty u neznámých opět voleny tak, že přičítáme n-násobek jedné rovnice k jiné rovnici, přičemž druhou rovnici není potřeba upravovat. K eliminaci y ve třetí rovnici je k této rovnici přičten n-násobek nově získané druhé rovnice.

Řešením výše uvedených rovnic jsou celá čísla a nebo až na jednu výjimku celočíselně zapsaná parametrická řešení. Koeficienty u neznámých jsou čísla 1 až 5, tedy čísla malá, což usnadňuje výpočty.

Následně autoři shrnují ekvivalentní úpravy a uvádí algoritmus pro převádění soustavy tří lineárních rovnic se třemi neznámými na soustavu některého z typů soustavy (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3). Rovněž uvádí, že tento postup byl demonstrován na soustavě (1.2.1). Obecný popis algoritmu Charvát et al. (2009, s. 109) uvádí následovně:

1. Soustavou upravíme tak, aby v první rovnici byl u neznámé, kterou zapisujeme jako první, nenulový koeficient. Pokud tomu tak není přímo v dané soustavě, změníme pořadí rovnic, popř. změníme pořadí, v němž v rovnicích zapisujeme neznámé.
2. První rovnici opíšeme, ke druhé a třetí rovnici (popř. k jejich nenulovým násobkům) přičteme takové násobky první rovnice, aby v obou těchto rovnicích neznámá zapisovaná jako první „zmizela“.
3. Soustavu upravíme tak, aby v druhé rovnici byl u neznámé, kterou zapisujeme jako druhou, nenulový koeficient. Pokud to je potřebné, můžeme navzájem vyměnit druhou a třetí rovnici nebo změnit pořadí zápisu druhé a třetí neznámé.
4. První a druhou rovnici opíšeme, k třetí rovnici (popř. k jejímu nenulovému násobku) přičteme takový násobek druhé rovnice, aby v ní neznámá zapisovaná jako druhá „zmizela“.

Tento algoritmus zde uvádím doslovně, protože v následujících příkladech autoři při řešení postupují přesně dle jeho kroků. Po výčtu kroků tohoto algoritmu teprve uvádí, že se jedná o Gaussovu eliminační metodu. Tu dále předvádí na soustavě:

$$-2y + z = 1$$
$$2y + y - 2z = 5$$

$$x + 2y - 4z = -14.$$

Na této soustavě je pak demonstrován krok „změna pořadí rovnic“. Po výměně je první rovnice uvedena jako druhá, druhá rovnice jako třetí a třetí rovnice uvedena jako první.

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= -14 \\ -2y + z &= 1 \\ 2x + y - 2z &= 5 \end{aligned}$$

Poslední uvedenou úpravu Charvát et al. (2009, s. 110) odůvodňují tím, že „koeficient 1 u první neznámé v první rovnici je zvlášť výhodný“, na což následuje výzva „rozmyslete si proč“. Odůvodnění není v kapitole ani později uvedeno, vysvětlení tedy zůstává na učiteli.

Tato soustava je upravena přesně dle algoritmu na tvar rovnice (2.4.1), rovnice dále nejsou zaměňovány. Postup je uveden bez slovního komentáře:

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= -14 \\ -2y + z &= 1 \\ -3y + 6z &= 33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= -14 \\ -2y + z &= 1 \\ 9z &= 63 \end{aligned}$$

$$z = \frac{63}{9} = 7$$

$$y = \frac{1}{2}(7 - 1) = 3$$

$$x = -14 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 7 = 8$$

Řešení je opět celočíselné. Charvát et al. (2009, s. 110) dodávají, že rovnici $-3y + 6z = 33$ mohli „vydělit třemi a vyměnit ji s druhou rovnicí. Výpočty by pak byly poněkud jednodušší, museli bychom však psát větší množství soustav. Záleží na vás, čemu dáte přednost.“ Uvádí tedy, že existuje i jiné vhodné řešení a tato řešení porovnávají, co se týče počtu kroků a jednoduchosti výpočtů.

Následují dvě podobné soustavy rovnic. První soustava rovnic

$$x + y - 2z = -2\sqrt{2}$$
$$2x + 2y + 3z = 3\sqrt{2}$$
$$5x + 5y + 4z = 4\sqrt{2}$$

je nejprve upravena na tvar

$$x + y - 2z = -2\sqrt{2}$$
$$z = \sqrt{2}.$$

Z tohoto tvaru však není určeno řešení soustavy, ale je nejprve upraven na typ rovnice (2.4.2):

$$x - 2z + y = -2\sqrt{2}$$
$$z + 0y = \sqrt{2},$$

z něhož je určeno řešení. Je zde tedy uvedeno řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých vedoucí na typ soustavy (2.4.2), která má nekonečně mnoho řešení. Další uvedená soustava rovnic je podobná:

$$x + y - 2z = -2\sqrt{2}$$
$$2x + 2y + 3z = 3\sqrt{2}$$
$$5x + 5y + 4z = \sqrt{2}.$$

Je zde řešena podobným způsobem, jako soustava předchozí, ale je zde získána rovnice $0z + 0y = -3\sqrt{2}$. Soustava tedy nemá řešení. Možným autorským záměrem bylo porovnat dvě téměř totožné soustavy, přičemž jedna má nekonečně mnoho řešení a druhá žádné. Zároveň je zde poprvé zařazena soustava obsahující iracionální čísla, koeficienty jsou zde celočíselné a v řešení není třeba využít lomených výrazů.

Následuje řešení rovnice $2x + 0 \cdot y - z = -1$, tedy soustava typu (2.4.3). Autoři uvádějí, že soustava má nekonečně mnoho řešení a stejně jako u soustavy (2.4.3) volí y a z libovolně a dopočítávají x pomocí těchto parametrů.

Následně uvádí druhý způsob řešení, rovnici převádí do tvaru $-z + 2x + 0 \cdot y = -1$ a v zápisu množiny řešení neznámé x a y volí libovolně a z je zde dopočítáno. Autoři uvádí, že volit x a z a dopočítat y nelze. Odůvodnění zůstává na žácích, případně na učiteli.

Následně Charvát et al. (2009, s. 113) uvádějí důležitou poznámku: „Při troše zkušeností a dobrém přehledu není nezbytně nutné přesně se držet uvedeného obecného návodu a vyjadřování množin všech řešení způsobem použitým pro soustavy (1), (2), (3)[14].“ Čímž autoři indikují, že v předchozích třech soustavách není třeba zaměňovat neznámé a množinu řešení tak lze určit intuitivně. To zde ale přenechávají „zkušeným“.

Následuje slovní úloha o směsích: „Máme k dispozici 20%, 30% a 40% roztoky nějaké kyseliny. Kolik kilogramů kterého roztoku musíme smíchat, abychom dostali 15 kg 35% roztoku?“ (Charvát et al., 2009, s. 113). Počty jednotlivých roztoků jsou označeny neznámými x, y, z a ze zadání úlohy plyne soustava rovnic:

$$x + y + z = 15$$
$$20x + 30y + 40z = 35 \cdot 15.$$

Ta je zde upravena na soustavu:

$$x + y + z = 15$$
$$2y + 4z = 45.$$

Autoři opět volí parametr z a x, y je zde určeno pomocí tohoto parametru. Záměrem této úlohy bylo ukázat využití soustavy vedoucí na typ (2.4.2) v praxi.

Na závěr je uvedeno řešení soustavy čtyř rovnic o čtyřech neznámých:

$$x + y - 2z + u = -5$$
$$2x + 2y - z - u = 2$$
$$3x + y + z + u = 8$$
$$x - y + z - u = 6.$$

Tato soustava je rovněž vyřešena přesně dle algoritmu. Řešení je celočíselné a postup také neobsahuje lomené výrazy. Koeficienty u neznámých jsou nízká čísla, což napomáhá nízkému počtu kroků u postupu. Autoři pravděpodobně zařadili tuto soustavu aby

[14] V této práci jsou uvedeny jako soustavy (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3).

prezentovali Gaussovu eliminační metodu na soustavě obsahující více rovnic a více neznámých.

V učebnici Matematika pro střední školy (Cizlerová et al., 2013) je uvedena Gauss-Jordanova metoda ve vedlejším sloupci v rámečku *Víte, že?*. Název metody zde není přímo uveden, autoři ji nazývají řešením pomocí matic. K demonstraci je využita již jednou řešená soustava rovnic

$$\begin{aligned} a + b - 2c &= 0 \\ a - b - 8c &= 0 \\ 3a + 5b + 4c &= 4, \end{aligned}$$

která je zde přepsána do matice následovně:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right).$$

Soustava je zde řešena přesně podle algoritmu uvedeného v publikaci Matematika pro Gymnázia (Charvát et al., 2009), liší se tedy od intuitivního řešení sčítací metodou, které je uvedeno v hlavní části učebnice. Soustava je převedena na tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

Z něhož je určeno řešení: $a = 5, b = -3, c = 1$. Postup zde není vysvětlen, ani komentován, je však proložen činiteli, kterými jsou násobeny jednotlivé řádky a šipkami značícími součet dvou řádků. Z důvodu nekompletnosti uvedených informací usuzuji, že zde byla tato metoda uvedena pouze jako zajímavost. Jako jediná z uvedených středoškolských učebnic však uvádí Gauss-Jordanovu metodu, nikoli Gaussovu a zároveň demonstruje řešení pomocí matic.

V Přehledu středoškolské matematiky (Polák, 2008) je Gaussova eliminační metoda uvedena v podkapitole věnované soustavě tří rovnic o třech neznámých. Autor uvádí, že tuto soustavu lze řešit metodou dosazovací, srovnávací a sčítací, ale Gaussova eliminační metoda je výhodnější. Metoda je zde demonstrována bez využití matic, soustava je zde převedena na tzv. *trojúhelníkový tvar*. Polák (2008, s. 274) zde uvádí postup, tzv. přímý chod GEM:

1. Rovnice dané soustavy uspořádáme tak, aby koeficient 1. neznámé v 1. rovnici byl buď 1, anebo jiné číslo různé od nuly – v tomto případě 1. rovnici tímto číslem vydělíme, čímž dostaneme rovnici s koeficientem 1 u 1. neznámé.
2. Od 2. a 3. rovnice odečteme takové násobky upravené 1. rovnice, aby se v nich po odečtení eliminovaly členy z 1. neznámou.
3. Obdobně eliminujeme člen s 2. neznámou ve 3. rovnici.

Ze získané soustavy lineárních rovnic v trojúhelníkovém tvaru určíme již snadno její řešení tímto postupem (zvaným *zpětný* chod GEM): ze 3. rovnice vypočteme kořen z pak dosazením do 2. rovnice kořen y a nakonec po dosazení do 1 rovnice kořen x.

Tento postup je zde demonstrován na soustavě rovnic

$$\begin{aligned} 9x + 5y - 2z &= 15 \\ 8x + 6y + 3z &= 15 \\ 3x - 7y + 4z &= 27. \end{aligned}$$

Soustava má jedno celočíselné řešení, postup však obsahuje lomené výrazy. Postup už není demonstrován na soustavách rovnic, které mají nekonečně mnoho řešení nebo žádné řešení, autor však uvádí poznámku, že tyto možnosti mohou nastat. Na závěr je uvedena poznámka, že tuto metodu lze zapisovat stručněji pomocí matic a že ji lze použít na soustavy tří a více rovnic o třech a více neznámých. To může být pro žáky matoucí, protože tuto metodu lze použít i na soustavu dvou rovnic o libovolném počtu neznámých a na soustavu rovnic obsahující dvě neznámé.

Vysokoškolská skripta k předmětu Lineární algebra (Barto & Tůma, 2023) nejprve na příkladu ukazují, jak převést soustavu na tzv. *odstupňovaný tvar*. Soustava

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 18x_3 &= 33 \end{aligned}$$

$$2x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 16$$

je převedena pomocí ekvivalentních úprav (prohození dvou rovnic, vynásobení nějaké rovnice nenulovým číslem n a přičtení n-násobku jedné rovnice k jiné rovnici) převedena na soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 8 \\ -x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Posléze je řešení této soustavy dopočítáno tzv. *zpětnou substitucí*. Soustava má jedno celočíselné řešení. Tato soustava zde byla zařazena pro demonstraci ekvivalentních úprav a zároveň demonstraci odstupňovaného tvaru. Zmíněné ekvivalentní úpravy jsou v řešení znázorněny všechny, úloha tak byla zřejmě zadána záměrně. Nejprve je třetí rovnice násobena číslem $\frac{1}{2}$, přičemž koeficienty v rovnici zůstanou celočíselné a u první neznámé je získán koeficient 1. Tato rovnice je z tohoto důvodu prohozena s první rovnicí. Následně autoři přechází k eliminaci neznámých pomocí přičítání n-násobku jedné rovnice k jiné. Lze zaznamenat, že autoři zde využívají ekvivalentní úpravy „přičtení n-násobku jedné rovnice k jiné rovnici“ a nikoliv „přičtení n-násobku jedné rovnice k n-násobku jiné rovnice“, tedy vždy upravují jednu z rovnic obsahujících neznámou, kterou se chystají eliminovat, tak aby byl u této neznámé koeficient 1 nebo -1.

Následně autoři definují matici a rozšířenou matici a znázorňují řešení předchozí soustavy rovnic v maticovém zápisu. Jednotlivé kroky řešení jsou zde totožné, matice je tedy převedena do řádkově odstupňovaného tvaru. Autoři rovněž uvádějí výhody maticového zápisu a to přehlednost a zkrácení zápisu.

Dále autoři uvádějí soustavu tří rovnic o třech neznámých, která má nekonečně mnoho řešení. Soustava

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 5 & 15 \\ 2 & 8 & 3 & 16 \end{array}\right)$$

i její řešení je uvedeno v maticovém zápisu. Soustava je pomocí výše uvedených úprav vyřešena následovně:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 5 & 15 \\ 2 & 8 & 3 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Z tohoto tvaru je soustava zapsána opět nematicovým zápisem

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

a je určeno řešení pomocí parametru $x_2 = t$. Následně autoři uvádějí i řešení zapsané pomocí parametru $x_1 = s$ a porovnávají oba zápisy řešení. Můžeme pozorovat, že oproti středoškolským učebnicím tato publikace neznámou volenou libovolně nazývá *parametr* a parametr je zde označen odlišným písmenem než neznámá.

Zároveň si můžeme povšimnout, že v posledním kroku, tedy v posledním přepisu matice je vynechán nulový řádek, čímž jsou změněny rozměry matice. Přestože tento krok nemění množinu řešení, není uveden mezi ekvivalentními úpravami a může tak studenty zmást.

Následuje soustava rovnic, jejíž řešení je třeba zapsat pomocí více než jednoho parametru. To autoři demonstrují na soustavě tří rovnic o pěti neznámých, která je zapsána i vyřešena maticově následovně:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Autoři následně nezapisují soustavu bez pomoci matic, ale určují pivoty a za ostatní neznámé volí parametry $x_2 = t_2, x_4 = t_4, x_5 = t_5$. Dále určují řešení pomocí zpětné substituce. Oproti předchozímu příkladu nejsou parametry zapsány rozdílnými písmeny, ale je zvolena kombinace písmena a čísla v dolním indexu. Zároveň zde není v zápisu řešení vynechán nulový řádek, což opět může u studentů vyvolat otázky.

Tento a předchozí příklad byly zařazeny nejen pro demonstraci Gaussovy eliminační metody, ale i pro znázornění řešení pomocí parametrů. V publikaci je tedy uvedeno ilustrační řešení soustavy s jedním řešením, s nekonečně mnoha řešeními a jedním parametrem a s nekonečně mnoha řešeními a více parametry. Soustava s žádným řešením zde není uvedena, nicméně ve shrnutí kapitoly je uvedeno jak takovou soustavu poznat.

Autoři uvádějí, že z poslední řešené soustavy by měl být vidět obecný postup Gaussovy eliminační metody, který následně uvádějí. Postup dále není demonstrován na konkrétních příkladech.

Gauss-Jordanova metoda je v této publikaci rovněž uvedena, ovšem pouze v kontextu hodnosti matice, není přímo doporučena pro řešení soustav rovnic, zároveň zde není demonstrována na žádné soustavě rovnic.

V učebnici Lineární algebra z anglického Linear Algebra: Concepts and Methods (Anthony & Harvey, 2012) je výklad Gaussovy a Gauss-Jordanovy metody spojen. Autoři tyto metody nerozlišují, vnímají je jako jednu metodu, která je známá dvěma názvy.

Nejprve je zde uveden algoritmus pro převedení rozšířené matice na řádkově odstupňovaný tvar. Ten je proložen řešením dvou soustav zapsaných v rozšířené matici:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} (B|B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Lze vypozorovat, že maticový zápis soustavy neobsahuje čáru dělící matici koeficientů a vektor/matici pravých stran. To může být matoucí pro čtenáře jiných publikací, kteří jsou zvyklí zapisovat rozšířenou matici s rozdělovací čárou.

Matice jsou převedeny na tvar

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} (B|B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Následně je na nově převedené matici $(A|B)$ ukázána zpětná substituce a je získáno řešení této soustavy. Autoři tak ukazují, že lze kdykoliv soustavu přepsat zpět z maticového tvaru a vyřešit jiným způsobem.

Soustava má jedno celočíselné řešení. Následně autoři uvádí postup pro redukovaný řádkově odstupňovaný tvar, přičemž postup je prokládán převáděním obou výše uvedených soustav na tento tvar. Z tohoto tvaru následně autoři získávají řešení soustav.

U první soustavy je řešení totožné s řešením pomocí převedení do řádkově odstupňovaného tvaru a zpětné substituce. U druhé soustavy autoři ukazují a zdůvodňují neřešitelnost soustavy.

Tyto soustavy byly zvoleny tak, aby na nich bylo možné demonstrovat a odůvodnit všechny kroky Gaussovy a Gauss-Jordanovy eliminace, tedy dle této publikace algoritmus pro získání řádkově odstupňovaného a redukovaného řádkově odstupňovaného tvaru. Zároveň jsou pomocí těchto příkladů porovnány soustavy, které mají jedno řešení a žádné řešení.

Autoři konstatují, že Gaussovu eliminaci lze použít pro jakýkoliv počet rovnic a neznámých v soustavě. Znovu ji ilustrují na soustavě rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 5 \\ x_1 + x_4 + x_5 &= 4. \end{aligned}$$

Tato soustava je převedena na redukovaný řádkově odstupňovaný tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a autoři určují řešení pomocí parametrů.

Pomocí této soustavy autoři znázorňují soustavu, která má nekonečně mnoho řešení a zároveň řešení zapsané pomocí parametrů. Zároveň je zde sděleno, jak pracovat s nulovým řádkem.

Touto soustavou řešené příklady určené k demonstraci Gaussovy eliminační metody končí. Autoři uvádí, že soustava může mít jedno řešení, nekonečně mnoho řešení nebo žádné řešení a předkládají důkaz tohoto tvrzení. Předchozí příklady tedy nesloužily pouze k demonstraci Gaussovy eliminační metody, ale i jako příklady demonstrující toto tvrzení.

Shrnutí

Množinu řešení z matice soustavy lze získat například Gaussovou eliminací a zpětným dosazením získaných kořenů nebo Gauss-Jordanovou eliminací.

Gaussova a Gauss-Jordanova eliminace je vhodná pro soustavy tří a více rovnic. U dvou rovnic bychom volili spíše metodu sčítací. Všechny rozebírané zdroje metodu demonstrují na soustavě tří a více rovnic. Metoda je vhodná u soustav, kde si nejsme jisti počtem řešení a je pro nás vhodné využít Frobeniovu větu. Zároveň je vhodné tuto metodu použít u rozsáhlých soustav rovnic, kde všechny rovnice neobsahují všechny neznámé. Srovnáním rovnic do rozšířené matice a zaměněním řádků tak, aby byla matice co nejblíže odstupňovanému tvaru, zachováme přehlednost (Barto & Tůma, 2023). Je výhodné použít tuto metodu u soustav, kde je více rovnic než neznámých. Řádky se nám zde vynulují nebo získáme neplatné rovnosti, a proto snadněji určíme řešení.

Gaussovu eliminaci bychom volili zejména u koeficientů ve tvaru zlomku, vysokých čísel a obecně tam, kde by bylo dokončit řešení Gauss-Jordanovou metodou náročnější kvůli tvaru koeficientů. Jelikož obě metody začínáme stejně, můžeme si vybrat, jak budeme pokračovat až po dokončení Gaussovy eliminace. Zároveň můžeme kdykoliv v průběhu řešení matici převést zpět na soustavu rovnic a dořešit ji jinými metodami. (Anthony & Harvey, 2012)

Explicitně řešené charakteristiky:

- obor řešitelnosti soustavy rovnic
- počet rovnic a neznámých
- počet řešení jednotlivých soustav, počet volených parametrů

Charakteristiky příkladů, které jsou relevantní, ale na které autoři explicitně neupozorňují:

- zápis soustavy (demonstrace metody bez využití maticového zápisu: Charvát et al., 2009; Polák, 2008)
- pojmenování neznámých rovnice (v některých případech je soustava zadána pouze v maticovém zápisu a autoři označení neznámé uveřejňují až v závěru řešení; Barto & Tůma, 2023; Anthony & Harvey, 2012)
- maticový zápis soustavy neobsahuje čáru rozdělující matici koeficientů a matici pravých stran (Anthony & Harvey, 2012)

Další charakteristiky popsaných příkladů:

- koeficienty u neznámých jsou většinou celá čísla a soustavy mají celočíselná řešení

Závěr

V práci je shrnut postup metod řešení lineárních rovnic, konkrétně metody dosazovací a srovnávací, sčítací, grafického řešení, Gaussovy eliminační metody a Gauss-Jordanovy eliminační metody.

Cílem práce bylo analyzovat řešené úlohy a jejich parametry ve vybraných učebnicích matematiky. Analýza je zaměřena na parametry, které mají příklady a jejich řešení společné a kterými se liší. Mezi analyzované parametry patří zejména koeficienty členů rovnic, obor řešitelnosti rovnic, volba konkrétních kroků postupu, počet rovnic a počet neznámých v soustavě, počet řešení soustavy, pořadí proměnných a jejich pojmenování, efektivita řešení a minimalizace počtu kroků při řešení.

V práci jsou zařazeny příklady ze tří středoškolských učebnic matematiky a dvou publikací určených studentům vysokých škol. Původním záměrem bylo zařadit do analýzy více vysokoškolských publikací, ale většina těchto publikací obsahuje pouze část metod, které zde nejsou demonstrovány na konkrétních příkladech.

Práce je vhodná zejména pro učitele matematiky na středních školách. Na tuto práci by se dalo navázat analýzou řešení nerovnic a jejich soustav ve středoškolských učebnicích.

Seznam použitých informačních zdrojů

Anthony, M., & Harvey, M. (2012). *Linear Algebra: Concepts and Methods*. Cambridge: Cambridge University Press.

Barto, L., & Tůma, J. (2023). *Lineární algebra*. https://www.karlin.mff.cuni.cz/~stovicek/dl/23-24-zs/skripta22.pdf

Bečvář, J. (2019). *Lineární algebra* (Vydání páté). Matfyzpress.

Bican, L. (2000). *Lineární algebra a geometrie*. Academia.

Cizlerová, M., Krupka, P., Polický, Z., & Škaroupková, B. (2013). *Matematika pro střední školy*. Didaktis.

Friedberg, S. H., Insel, A. J., & Spence, L. E. (2014). *Linear Algebra*. Pearson Higher Ed.

Goldman, S., & Rodriguez, M. (2016). *Algebra 56 - A Geometrical View of Gauss-Jordan Elimination.* https://www.youtube.com/watch?v=bnC848ie16Q

Goode, S. W., & Annin, S. A. (2007). *Differential Equations and Linear Algebra*. Pearson Higher Ed.

Charvát, J., Zhouf, J., & Boček, L. (2009). *Matematika pro gymnázia - Rovnice a nerovnice* (4. vydání). Prometheus, spol.

Polák, J. (2008). *Přehled středoškolské matematiky* (9., přeprac. vyd). Prometheus.

Zhouf, J. (2019). *Matematika s nadhledem: od prváku k maturitě*. Fraus.