Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Analýza úlohy č. 15 z Jednotné přijímací zkoušky pro 9. ročníky a identifikace strategií žáků při jejím řešení

Analysis of the task 15 from entrance examinations, 9th grade and identifying pupils' solving strategies

Lenka Dolanská

Vedoucí práce: PhDr. Gabriela Knapová, Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice (B7507)

Studijní obor: B M (7504R015)

2024

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Analýza úlohy č. 15 z Jednotné přijímací zkoušky pro 9. ročníky a identifikace strategií žáků při jejím řešení potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 11. července 2024

Chtěla bych poděkovat vedoucí mé bakalářské práce paní PhDr. Gabriele Knapové, Ph.D., za odborné vedení, cenné rady, podněty a čas, který mi věnovala. Dále bych také chtěla poděkovat žákům, kteří mi pomohli ke zpracování výzkumné části.

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá úlohou č. 15 z Jednotné přijímací zkoušky (JPZ) na střední školy z matematiky. Podle zaměření úlohy se věnuje nejvíce tématu procenta, ale okrajově i tématu poměr a zlomky. Cílem práce je přiblížit zmíněná témata, především procenta, analyzovat úlohy z dané části JPZ a následně provést vlastní výzkum, který se věnuje analýze řešitelských strategií čtyř vybraných žáků (Laura, Teodor, Josef a Aleš). V úvodu práce je analyzován přístup k výuce procent, poměrů a zlomků v osmi učebnicích matematiky pro druhý stupeň základních škol v České republice. Dále je rozebrána úloha č. 15 z JPZ z matematiky v letech 2017–2023 a sestavena přehledová tabulka. V praktické části se práce zaměřuje na deset vybraných žákovských testů s úlohami podobného typu jako úloha č. 15 z JPZ. Výsledky žákovských testů jsou analyzovány a znázorněny v grafech a tabulkách. Dále jsou identifikovány správné odpovědi, zlepšení, zhoršení i chybné odpovědi žáků v jednotlivých úlohách. V rámci výzkumu je zde uvedených deset vybraných testů od čtyř žáků, primárně ty, ve kterých byla u žáka zjištěna alespoň jedna chyba. K těmto testům se zde nachází i autorské vzorové řešení, žákovské strategie jsou následně porovnány s autorčiným vzorovým řešením, případně popsaná řešení žáků.

KLÍČOVÁ SLOVA

Jednotná přijímací zkouška, procenta, poměr, zlomky, řešitelské strategie

ABSTRACT

This bachelor’s thesis deals with the exercise no. 15 of the entrance exam (JPZ) for the secondary school mathematics. According to the focus of the the exercise this thesis deals mostly with the topic of percentages, but also marginally with the topic of proportions and fractions. The aim of this thesis is to explain the aforementioned topics, especially percentages, to analyze the exercises from the given part of JPZ and to conduct a research which is devoted to the analysis of the solving strategies of four selected students (Laura, Teodor, Josef and Aleš). The thesis begins with an analysis of the approach to teaching of percentages, proportions and fractions in eight mathematics textbooks for the second level of primary schools in the Czech Republic. It follows with an analysis of the exercise 15 of the JPZ from 2017 to 2023 from mathematics and a summary table is compiled. In the practical part the thesis focuses on tests of ten selected students with exercises similar to the exercise 15 of JPZ. The results of the tests are analysed and presented in graphs and tables. Furthermore, correct answers, improvement, deterioration and incorrect answers of students in each exercise are identified. Ten selected tests from four students are presented, primarily those in which the students made at least one error. The author's sample solutions for these exercises are presented and then the thesis compares the student’s strategies with the author's sample solutions or described students' solutions.

KEYWORDS

entrance examination, percentages, ratio, fractions, solving strategies

Obsah

Úvod

V bakalářské práci se věnuji analýze úlohy č. 15[1] z Jednotné přijímací zkoušky na střední školy z matematiky (dále jako JPZ). Během svého vyučování na zkouškách nanečisto, které se koná jednou týdně, v rámci soukromé společnosti, jsem zjistila, že žáci mají problém s procenty, zlomky a poměrem. Tato témata jsou obsažena přesně v této úloze. Dále se mi líbil styl zadání úlohy č. 15, jelikož zde žáci musí nejen najít výsledek, ale i vybrat správné řešení.

Tato úloha se skládá ze tří otázek, ke kterým je potřeba vždy přiřadit jednu z pěti odpovědí (A–F). Tři odpovědi zůstanou vždy nepřiřazeny. Pro lepší představu obsahu 15. úlohy jsem níže (viz kapitola Analýza úlohy č. 15) uvedla tabulku, která zobrazuje témata, která se objevují v jednotlivých zadáních 15. úlohy z různých ročníků JPZ.

Důkladněji pak rozebírám téma procenta, jelikož se v této úloze objevuje nejčastěji. Nejdříve se jimi zabývám jen obecně, kde se s nimi můžeme setkat, nebo co to vlastně procento je. Dále přidávám informace z rámcového vzdělávacího programu (RVP ZV) a ukazuji, co vše ohledně tohoto tématu musí žáci na základních školách umět.

Následně provádím analýzu učebnic, které jsem vybrala z knihovny naší fakulty po konzultaci s vedoucí práce. Věnuji se pouze devátým ročníkům, jelikož žáci na víceletých gymnáziích už přijímací řízení řešit nemusí. V teoretické části práce ještě obecně popisuji téma jednotná přijímací zkouška od společnosti CERMAT (JPZ). Odkazuji zde i na různé zákony, které se k tomuto tématu vztahují.

Dále rozebírám témata poměr a zlomky. Tato témata nepopisuji tak podrobně jako procenta, jelikož se v úloze, kterou zde analyzuji, objevují jen okrajově. Ukazuji, kde je můžeme najít v RVP ZV.

V druhé části své bakalářské práce se zabývám výzkumem, který jsem provedla v roce 2023. Z učebnice (Graja et al., 2022), určené pro přípravu na příjímací zkoušku, vybírám pět úloh, které jsou stejného typu jako je úloha č. 15 JPZ z matematiky. Dále úlohy variuji svým

[1] Od roku 2024 se jedná o úlohu č. 16.

kontextem (viz tabulka č. 4.1.1), ale nechávám stejná čísla. Výsledky, které se mají přiřadit k příslušným úlohám, zpřeházím a sestavím testy viz tabulky č. 4.1.2–4.1.6 na str. 37–38.

Cílem této práce je zaměřit se na vybranou úlohu z JPZ a popsat její strukturu a zaměření. Dále zjistit, jak se vybraní žáci v řešení úloh tohoto typu zlepšují, či zhoršují po vyřešení deseti testů. Pozoruji různé řešitelské strategie, které žáci používají, a zjišťuji, zda jsou pořád stejné, nebo žáci střídají různé postupy.

1 Jednotná přijímací zkouška – JPZ

Téma přijímacích zkoušek na střední školy v České republice nabývá v kontextu vzdělávacího systému značné důležitosti, jelikož tento didaktický test v 9. ročníku řeší skoro všichni žáci na základní škole. Každý uchazeč o studium na střední škole v České republice musí projít přijímacím řízením, které začíná podáním přihlášky[2] na příslušnou školu. Poté musí napsat Jednotnou přijímací zkoušku, která se skládá z českého jazyka a matematiky (Česká školní inspekce, 2022). JPZ je povinnou součástí prvního kola přijímacího řízení (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, 2024) do všech maturitních oborů s výjimkou oborů s talentovou zkouškou (kromě oboru Gymnázium se sportovní přípravou) a oborů zkráceného studia podle § 85 školského zákona.

Přijímací zkoušky jsou stanovené ve školském zákoně na základě §60 odstavec 5 zákona číslo 561/2004 Sbírky (Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, 2019), o předškolním, základním, středním, vyšším, odborném a jiném vzdělávání a dále pak ve znění pozdějších předpisů. Podrobnosti o zkouškách jsou nadále stanoveny prováděcím předpisem (vyhláškou) číslo 353/2016 Sbírky (Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, 2018), o přijímacím řízení ke střednímu vzdělávání a dále pak ve znění pozdějších předpisů. Zde je specifikováno vše ohledně JPZ.

Tato bakalářská práce se věnuje části přijímací zkoušky z matematiky, kterou žáci vykonávají na konci devátého ročníku. Z katalogu požadavků budu tedy používat pouze Část C1 – Specifikace didaktického testu pro čtyřleté obory vzdělaní a nástavbová studia s maturitní zkouškou (Specifikace Požadavků Pro Jednotnou Přijímací Zkoušku V Přijímacím Řízení Na Střední Školy V Oborech Vzdělání S Maturitní Zkouškou, 2022). V této práci se nebudu zabývat žáky s PUP.

Na základě apriori analýzy (viz Analýza úlohy č. 15) jsem zjistila, že úloha č. 15 z JPZ pro deváté ročníky se věnuje nejvíce procentům, vyskytují se v ní i zlomky a poměr, jelikož to jsou velmi příbuzná témata a úzce spolu souvisí. Způsob řešení této úlohy spočívá v přiřazení správného řešení tří nezávislých úloh z výběru šesti možností. Vzhledem

[2] Od letošního roku (2024) lze přihlášku podávat i online.

k umístění úlohy v závěrečné části testu (předposlední úloha) je zde riziko, že pomaleji pracující žáci zvolí strategii tipování či vynechání úlohy, která však jen málokdy vede k dosažení správného výsledku.

Test z matematiky JPZ je složen z 16 úloh. Vyskytují se zde úlohy otevřené i uzavřené. V případě otevřených úloh je hodnocen nejen konečný výsledek, ale i celý proces řešení, naopak v uzavřených úlohách je hodnocen pouze výsledek. V JPZ z matematiky rozlišujeme dva typy uzavřených úloh. Prvním typem je úloha, kdy žák vybere pouze jednu správnou odpověď a zaznačí pomocí křížku do záznamového archu. Druhým typem je právě analyzovaná úloha č. 15, ve které žáci odpovědi přiřazují k jednotlivým podúlohám.

2 Analýza úlohy č. 15

První dva ročníky (2015 a 2016) bylo v přijímacích zkouškách celkem 17 úloh. Od roku 2017 je v PZ úloh pouze 16, proto jsem se rozhodla analyzovat JPZ od tohoto roku do roku 2023. Jak již bylo popsáno výše, k analýze jsem si vybrala 15. úlohu, která je přiřazovací. Pro lepší přehled analýzy jsem vytvořila následující tabulku (viz tabulka č. 2.1.1), kde je zaměření jednotlivých úloh popsáno.

2.1 Tabulka analýzy úlohy č. 15 (2017–2023)

Tabulka č. 2.1.1 – Analýza 15. úlohy

Termín	Úloha 15.1	Úloha 15.2	Úloha 15.3
2017, 2.	Z 5 % vypočítat 1/4	**Úloha na zlomky**, z části vypočítat celek	Tabulka (součást zadání) – Z části 54 % vypočítat část
2017, 1.	Z části 70 % vypočítat zbylých 30 %	Z části 2 % vypočítat 102 %	Z části 80 % vypočítat 100 % (60 %) nakonec vypočítat 40 %
2018, 2.	Ze 120 % vypočítat 100 %	Z částí pomocí rovnice vypočítat x	**Poměr –** zjistit celek
2018, 1.	Obrázek (součást zadání) – z celku vypočítat část	Z celku vypočítat část	**Zadání celé ve zlomcích**. Z celku vypočítat část v procentech
2019, 2.	Z části vypočítat celek	Klasická úloha na zlevnění a následné zlevnění, vypočítat prostřední cenu.	Z části vypočítat celek, v zadání se objevují i **zlomky**.
2019, 1.	Z části (75 %) celek	Ze 120 % vypočítat 100 %	Z části (60 %) vypočítat celek
2020, 2.	Covid	Covid	Covid

2020, 1.	Z části vypočítat celek.	**Zlomky** – z části vypočítat celek	Z časti přes celek vypočítat část – v zadání i **zlomek**
2021, 4.	Z celků vypočítat část	**Obrázek** – Ve čtvercové síti z celku vypočítat část	Z celku vypočítat část
2021, 3.	Z celku vypočítat část (očkování)	Zadání **zlomky,** z celku vypočítat část	Zadání **zlomky,** z celku vypočítat část
2021, 2.	**Obrázek** (součást zadání) – z části vypočítat celek	**Obrázek** (součást zadání) – z celku část	**Obrázek** (součást zadání) - z části vypočítat celek
2021, 1.	Z části vypočítat celek, ale ještě přičíst 20 %	Z části 2 % vypočítat 24 %, nakonec vydělit 3	2 x z části celek
2022, 4.	100/20 je 5 % (Covid)	V zadání **zlomek.** Vypočítat rozdíl – na procenta	V zadání **zlomek.** O kolik se zvětší v procentech
2022, 3.	Z části 40 % vypočítat 60 %	V zadání **zlomek** a %. Sestavení rovnice, dopočítat zbytek	Zdvojené zdražení a zlevnění, z prostřední ceny výpočet tu poslední
2022, 2.	Z celku část	V zadání **zlomek** a % - z částí vypočítat část	O kolik % bylo zdraženo
2022, 1.	**Tabulka** – z části celek	Ze 120 % výpočet 100 %	Ze 150 % výpočet 100 %
2023, 4.	Ze 140 % vypočítat 100 %	Z části celek	Z části celek

2023, 3.	Ze 125 % výpočet 100 %	Ze 100 % výpočet 150 %	V zadání procenta a **zlomky**, výpočet třetí složky
2023, 2.	Z části celek	V zadání **zlomek**, výpočet procent	V zadání **zlomek**, výpočet procent
2023, 1.	Dvakrát výpočet procent (ze 100 % 120 %)	V zadání **zlomek**, z části celek	Z části celek

U analýzy této úlohy jsem se nejdříve zabývala tím, zda je to úloha na zjišťování části z celku, celku z části, anebo části z části (např. viz Hejný, 2014). V případě, že zadání úlohy obsahuje prvky odlišné od procentního vyjádření (zlomky, poměr), je tato informace tučně vyznačena. Tučně jsou v tabulce zvýrazněny také specifické formy zadání, které jsou odlišné od standardního textového zadání, např. tabulka, obrázek atd.

Při analýze této úlohy jsem zjistila, že 43 z 60 zadání je zaměřeno na procenta, proto se této tematice věnuji v následující kapitole důkladněji. Kromě procent se objevily zlomky (15 z 60), poměr se objevil jen jednou.

3 Teoretická část

V této kapitole se zabývám výskytem procent v matematice, ale i v běžném životě. Dále zde prezentuji relevantní část RVP ZV, týkající se problematiky procent a na závěr analyzuji vybrané učebnice, ve kterých se mohou žáci s procenty setkat.

3.1 Procenta

Procenta jsou základní matematický koncept, který má široké uplatnění v každodenním životě. Využívají se často při výpočtech slev, zisku, daní atd. K řešení těchto „problémů" je důležité znát převody mezi procenty, desetinnými čísly a zlomky.

Procenta umožňují vyjádřit část z celku, přičemž jedno procento představuje jednu setinu tohoto celku a zapisuje se jako %. Celek, ze kterého procenta počítáme, se nazývá základ a odpovídá vždy 100 %. Pro jednoduchý výpočet procent stačí rozdělit základ na sto částí a požadovaný počet procent vynásobit jednou setinou. Například, pokud chceme zjistit, kolik je 23 % ze 100, jednoduše zjistíme, že 1 % je rovno 1, tudíž 23 % je 23.

V případě, že se základní hodnota liší od 100, je nutné provést výpočet modifikovaným způsobem. Například, pro zjištění, kolik je 23 % ze 150, nejprve rozdělíme základ na setiny (150/100 = 1,5), což znamená, že 1 % je rovno 1,5. Následně vynásobíme 23 % číslem 1,5, čímž získáme 34,5. Existuje i alternativní přístup, kdy stovkou vydělíme počet procent a výsledným číslem násobíme základ (viz komutativita násobení). Například, pro výpočet 42 % z 25 kilogramů, vypočítáme 0,42 . 25 = 10,5 kilogramů.

Procenta jsou velmi důležitá i ve finanční sféře, např. úrokové sazby, růst nebo pokles hodnoty investic, splácení půjček apod. S procenty se můžeme setkat i v každodenních situacích, jako jsou slevy v obchodech, zdanění při nákupu zboží a služeb, dokonce i při vaření a pečení.

3.1.1 Procenta obecně a v literatuře[3]

Procenta představují jedno z nejběžněji používaných matematických témat v každodenním životě a mají významné místo ve školním kurikulu napříč různými obory (Baroody et al.,

[3] Toto téma se v odborné literatuře objevuje četně, proto jsem vybrala jen základní informace. Čerpala jsem nejen z české, ale i ze zahraniční literatury.

1998; Parker a Leinhardt, 1995; Schwartz et al., 1994). Správné porozumění procentům je klíčové pro korektní interpretaci informací v oblasti společenských věd.

Žáci by měli být schopni porozumět, analyzovat a hodnotit informace z různých oblastí života, kde se používají procenta, a umět řešit praktické úlohy (Odvárko, 2005). Výuka by měla začít vysvětlením základních pojmů jako procento, základ a procentová část (Čuhajová, Rosecká & Růžička, 2021). Je vhodné zařazovat i schémata a diagramy, které mohou názorně ukázat sledované situace a pomoci s jejich pochopením.

Významnou roli hraje i fakt, že procentová část nemusí být vždy menší než základ a že počet procent nemusí být vždy celé číslo. Je důležité pochopit vztah mezi procentovou částí a počtem procent při daném základu. Jako efektivní metoda pro řešení úloh s procenty je často vyučována trojčlenka, která pomáhá algoritmicky najít vztah mezi dvěma poměry a neznámým členem (viz analýza učebnic, oddíl 3.1.4). Řešit můžeme i např. pomocí zlomků či poměru (viz oddíly **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** a 3.2).

Zadávané úlohy by měly být na začátku jednoduché, aby se žáci mohli soustředit na pochopení základních pojmů (Hejný, 2014). Důležitý je také nácvik převodů mezi procenty, desetinnými čísly a zlomky. Při práci s procenty je dle Odvárka (2005) užitečné provádět odhady viz následující ukázka úlohy: *„Cestovní kancelář poskytuje na letní zájezdy zakoupené do 31. 1. slevu ve výši 7 %. Uvažuji o zájezdu k moři, jehož plná cena je 7 690 Kč. Bude mně stačit na zájezd se slevou 7 000?*

1 % ze 7 690 Kč je menší než $\frac{1}{100}$ *. 8 000 Kč, tj. 80 Kč; 7 % je méně než 560 Kč; 7 000 Kč stačit nebude.“*

Úlohy z dnešní doby mohou být inspirovány informačními materiály z praxe, přičemž sběr dat mohou provádět sami žáci, čímž se podpoří jejich aktivní zapojení do výuky a lepší pochopení aplikace procent v různých situacích (Houser, 2006).

Podle Novotné (2000) při řešení slovních úloh s procenty, ale i obecně i jiných matematických úloh, je důležité zaměřit se na rozbor zadaných podmínek, které se objevují v otázce dané úlohy. Žák musí správně rozlišovat informace, které jsou uvedeny v otázce jako zadané, a informace, které je potřeba vypočítat. Správné pochopení tohoto principu pak vede k volbě vhodného matematického postupu pro dosažení správného řešení. V případech, kdy je to možné, představuje důležitou součást analýzy vizualizace zadaného objektu a vztahů mezi ním a informacemi v otázce. To pomáhá žákům lépe porozumět kontextu úlohy a najít cestu k řešení. V mnoha případech lze ze samotné vizualizace odvodit správný postup pro dosažení výsledku.

V ekonomických diskusích se často používá pojem procentní bod (Košťáková, 2016), který vyjadřuje rozdíl mezi dvěma procentními údaji vycházejícími ze stejného základu. Pokud například banka zvýší úrok z 3 % na 6 %, znamená to zvýšení o 3 procentní body, nikoliv o 3 %. Zvýšení o 100 % by znamenalo zdvojnásobení původní hodnoty na 6 %, což může být matoucí, pokud se chybně interpretuje jako nárůst na 103 %.

V realistické matematické výuce (Van den Hauvel-Panhuizen, 1994), která je založena na neformálních znalostech žáků, je důležité, aby učitelé poskytovali žákům příležitosti prozkoumat konkrétní situace z jejich každodenního života, ve kterých se procenta uplatňují. Tento přístup podporuje hlubší porozumění matematickým konceptům a umožňuje žákům vidět, jak se teoretické učivo promítá do reálného světa.

3.1.2 Historie procent

Termín „procento" pochází z latinského „per centum" nebo italského „per cento", což znamená „na sto" nebo „ze sta" (Hoad, 1996). Weaver (1997) uvádí, že procenta se začala používat již na konci 15. století v obchodních záležitostech, jako je výpočet úroku, zisku, ztrát a také v oblasti daní. O procentu začali Římané přemýšlet ale již dříve; například za císaře Augusta existovala v Římě a Itálii daň nazývaná „centesima rerum venalium", podle níž se musela odvádět setina z veškerého zboží určeného k veřejné dražbě (Smith, 1830). Daň za propuštění otroka byla $\frac{1}{20}$ ceny, a za prodej otroka $\frac{1}{25}$ ceny.

Římané však neuvažovali v procentech jako takových, nýbrž ve zlomcích (Weaver, 1997). Weaver (1997) dále vysvětluje, že ve středověku byla hodnota 100 často používána jako základ pro výpočty a v italských rukopisech z 15. století se objevovaly výrazy jako „20 p 100" a „XX p cento", které označovaly 20 % (římská číslice X se pro deset používá stále). V sedmnáctém a osmnáctém století již s procenty počítali běžně.

Symbol procenta %, s šikmou čárou mezi dvěma malými nulami nahoře a dole, je poměrně moderní a vyvinul se zkrácením výrazů „p 100" a „p cento". Herman, Chrápavá, Jančovičová a Šimša (1994) ve své publikaci uvádějí, že symbol % pravděpodobně vznikl z nedbalého zápisu „cto“, což je zkratka pro „cento“, a mohl vypadat zhruba takto: $^{c}t_{o}$.

3.1.3 Rámcový vzdělávací program (RVP) a procenta

RVP (2023) se dělí na čtyři části (A–D). V rámci této bakalářské práce se budu zabývat pouze částí C vzdělávací oblastí č. 5.2 Matematika a její aplikace, konkrétně část Číslo a proměnná. Níže jsou ukázány očekávané výstupy pro oblast procent (viz obrázek č. 3.1.3.1).

2. stupeň

ČÍSLO A PROMĚNNÁ

Očekávané výstupy

žák

M-9-1-01	***provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel; užívá ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu***
M-9-1-02	***zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností, účelně využívá kalkulátor***
M-9-1-03	***modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel***
M-9-1-04	***užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek–část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem)***
M-9-1-05	***řeší modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem; pracuje s měřítky map a plánů***
M-9-1-06	***řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek)***
M-9-1-07	***matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním***

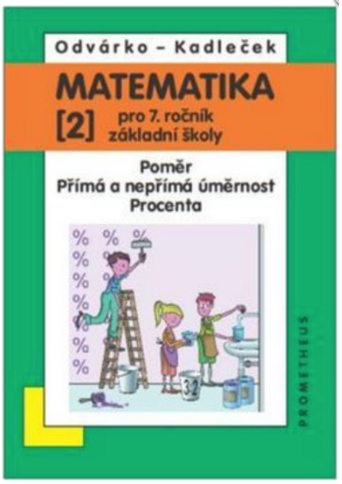
Obrázek č. 3.1.3.1 – Ukázka procent v RVP (Zdroj: RVP ZV, 2023, s. 35)

Z části číslo a proměnná lze konstatovat, že žák umí řešit aplikační úlohy na procenta, včetně úloh z oblasti finanční matematiky, používá s porozuměním základní pojmy finanční matematiky (jistina, úroková míra, úrok, úrokovací období, daň, inflace), vypočítá úrok z vkladu za jeden rok a daň z úroku, získá základní informace o půjčkách a úvěrech.

3.1.4 Procenta ve vybraných českých učebnicích

V tomto pododdílu se zaměřím na analýzu výskytu procent v učebnicích pro základní školy v České republice. Rozhodla jsem se prozkoumat učebnice, se kterými se žáci mohou setkat během výuky na základní škole. Nejvíce používaná učebnice, se kterou jsem se setkala i na praxích, je učebnice č. 1. (Kadleček, Odvárko, 2011) viz obrázek č. 3.1.4.1. Další učebnice jsem vybrala s pomocí vedoucí této práce a mně dostupných zdrojů.

Učebnice č. 1 – nakladatelství Prometheus (Kadleček, Odvárko, 2011)



Obrázek č. 3.1.4.1 – Učebnice č. 1, nakladatelství Prometheus

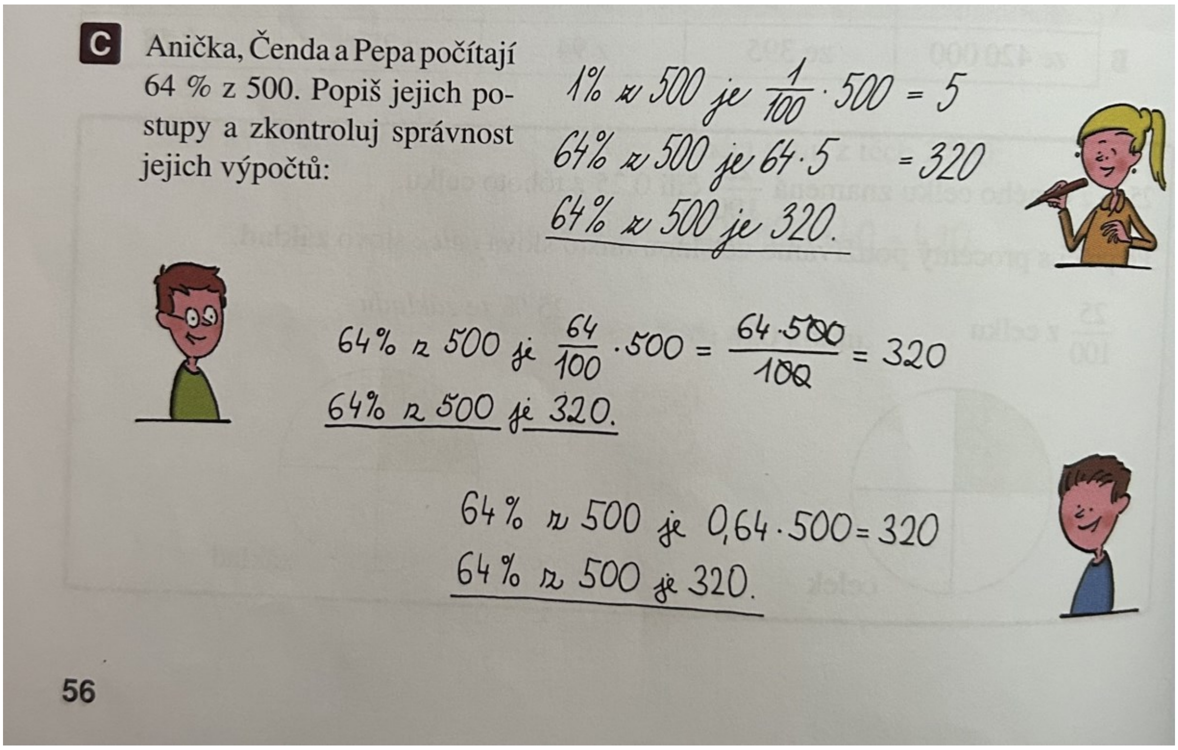
První učebnice je z nakladatelství Prometheus. Má dva autory: O. Odvárka a J. Kadlečka. Učebnice pro 7. ročník má tři díly. První díl: Zlomky, celá čísla a racionální čísla, druhý: Poměr, přímá a nepřímá úměrnost a procenta a třetí díl: Shodnost, středová souměrnost a čtyřúhelníky, hranoly. Vydavatelství vydalo také pracovní sešity a příručky pro učitele. Na konci učebnice jsou uvedené výsledky, takže si žáci mohou zkontrolovat správnost svých řešení.

V této práci se budu věnovat pouze druhému dílu učebnice. Tato učebnice se zabývá poměrem, přímou a nepřímou úměrností a především procenty. K tomu, aby žáci dobře pochopili pojem procento, autoři začínají u poměru a úměrnosti.

Na první stránce, věnované procentům, se nachází obrázek, na kterém je zobrazeno 100 % jako obdélník rozdělený do 10 rámečků po 10 %. Žák si tak může lépe představit, jak procenta fungují. Na druhé stránce se nachází další obrázek, kde je zobrazen celek jako velký čtverec rozdělený na 100 malých čtverečků. Nejprve se žáci naučí počítat procenta z různých celků (např. vypočítej 1 % ze 425), dále se učí žáci počítat procenta pomocí přímé úměrnosti (trojčlenky). Překvapilo mě, že zde není ukázáno, jak úlohy s procenty řešit pomocí jednoho procenta.

Úvod kapitoly o procentech zahrnuje úlohy formulované tak, že žáci mají vypočítat 1 %. Následují úlohy s vizuálními pomůckami, kde žáci určují procentuální vyjádření vybarvených částí apod. Součástí kapitoly jsou také úlohy propojující zlomky a procenta, v nichž žáci převádějí zlomky na procentuální vyjádření.

Můžeme zde nalézt i úlohu s prezentovanými řešeními, která slouží k pocvičení dovednosti žáků posuzovat správnost provedených výpočtů viz obrázek č. 3.1.4.2. níže.



Obrázek č. 3.1.4.2 – Úloha ze str. 56 – nakl. Prometheus

V rámci kapitoly autoři integrují slovní úlohy, jako je například:„*Automobilka vyrobila během roku 152 000 osobních automobilů. 35 % z nich bylo vyvezeno do zahraničí. Kolik automobilů bylo vyvezeno?*“ (Kadleček, Odvárko, 2011, s. 57). V podkapitole 4.3 (Procenta všude kolem nás) autoři dále rozvíjejí myšlenku praktického využití procent v běžném životě. Ukazují na příkladech z různých oblastí, kde se s procenty setkáváme a jak je můžeme používat pro řešení každodenních úloh.

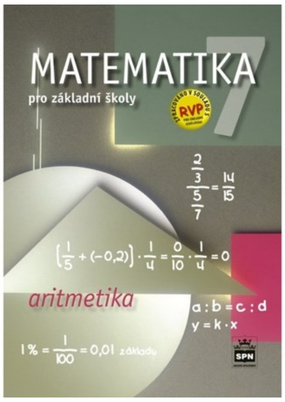
Na závěr kapitoly autoři zařazují úlohy, které se typem podobají úlohám v JPZ, avšak s několika klíčovými odlišnostmi. Tyto úlohy obvykle zahrnují více dílčích otázek, např. „*Má Marek pravdu?*“ nebo „*Odhadni …*“. Navíc bývá text zadání delší, čímž se odlišují od úloh v JPZ, kde by pravděpodobně byla použita pouze jen jedna z možností otázky z uvedené úlohy. Ukázka níže:

„Pan Adámek i pan Beránek začali prodávat sadu fotografií hokejistů NHL za cenu 100 Kč. Pan Adámek nejprve zlevnil sadu o 10 % a po čase snížil novou cenu ještě o 20 %. Pan Beránek sadu fotografií zlevnil o 30 %.

a) Odhadni, zda jsou po těchto sníženích ceny stejné.
b) Kolik korun stojí po zlevnění sada fotografií u pana Beránka?
c) Za kolik korun prodává po dvojím zlevnění sadu pan Adámek?“

(Kadleček, Odvárko, 2011, s. 79)

Učebnice č. 2 – nakladatelství SPN (Půlpán, 2008)

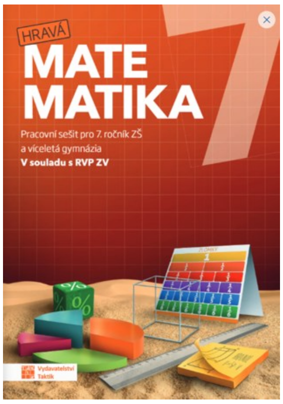


Obrázek č. 3.1.4.3 – Učebnice č. 2, nakl. SPN

Autorem této učebnice (viz obrázek č. 3.1.4.3) je Zdeněk Půlpán. Toto nakladatelství vydalo dvě učebnice: aritmetiku a geometrii. Ke zmíněné učebnici jsou dále k dispozici doplňkové materiály, a to sbírka úloh a pracovní sešit.

V úvodu kapitoly procent autoři vysvětlují pojem základ (celek). Aby žáci lépe pochopili procenta, autoři je zde zobrazují pomocí různých obrazců (např. vybarvená část kruhu, vybarvené kostičky v obdélníku, nebo velkého čtverce, rozděleného do shodných 100 kostiček). Je zde i ukázáno, jak procenta převést na desetinná čísla. V další části tématu si zde žáci procvičí 1 % z různých celků. Nejdříve je zde ukázáno počítání úloh pomocí jednoho procenta a v další kapitole i pomocí trojčlenky. Na konci tématu je také ukázáno počítání jednoduchého úrokování. Poté následují různé úlohy na procvičení. V závěru učebnice jsou také uvedené výsledky, takže si žáci mohou zkontrolovat správnost svých řešení.

Učebnice č. 3 – nakladatelství Taktik (Půlpán, 2023)

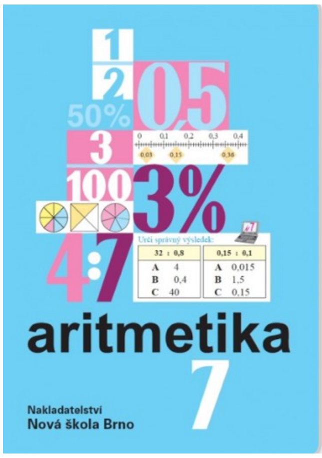


Obrázek č. 3.1.4.4 – Učebnice č. 3, nakl. Taktik

Třetí učebnice (viz obrázek č. 3.1.4.4) je z nakladatelství Taktik (Půlpán, 2023). Autorem této učebnice je také Zdeněk Půlpán. Toto nakladatelství vydalo dvě učebnice: aritmetiku a geometrii. K této učebnici jsou dále také k dispozici doplňkové materiály, a to sbírka úloh a pracovní sešit

Tato učebnice je už od prvního pohledu velmi barevná. V úvodu učebnice jsou zařazeny ukázkové úlohy s jednoduchými procenty (50 %, 25 %, atd.), které jsou řešené krok za krokem, čímž autoři žákům demonstrují principy řešení podobných úloh. Nejprve jsou zde jednoduché úlohy zaměřené na procvičování převodu procent na desetinná čísla a poté naopak. V této učebnici se nacházejí i zajímavosti, např. že procento pochází z latinského *per centum*, což značí „ze sta“. Kromě procent autoři vysvětlují i pojem promile. Počítání procent je zde vysvětleno pomocí trojčlenky i přes jedno procento. Vyskytují se zde úlohy, kde má žák rozpoznat pravdu či nepravdu. Závěr učebnice tvoří sloupcové a kruhové diagramy, s nimiž se žáci učí lépe pracovat.

Učebnice č. 4 – nakladatelství Nová škola – DUHA s.r.o. (Rosecká, 2019)



Obrázek č. 3.1.4.5 – Učebnice č. 4, nakl. Nová škola – DUHA s.r.o.

Čtvrtá učebnice (viz obrázek č. 3.1.4.5) je z nakladatelství Nová škola. Autory této učebnice jsou Zdena Rosecká, Vladimíra Čuhajová a Jiří Růžička. Nakladatelství, pro daný ročník, s cílem usnadnit výuku a procvičování látky, vydalo jak učebnici, tak i pracovní sešit.

V této učebnici autoři na začátku kapitoly zmiňují, kde se mohou žáci s procenty setkat. Poté vysvětlují pojem 1 % a základní procenta (50 % je polovina, 25 % je čtvrtina apod.). Dále pracují s diagramy. Vyskytuje se zde také třetí metoda výpočtu procent, která zahrnuje použití vzorce. Ukázka níže:

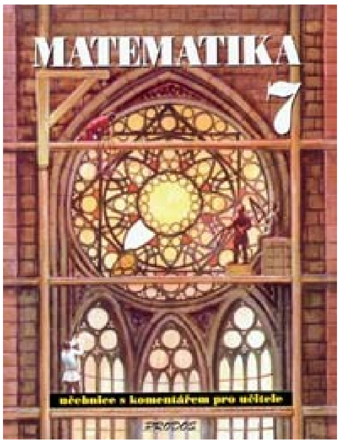
Základ 100 % – označení *z*

Počet procent – označení *p*

Procentová část – označení *č*

$$č = \frac{z \times p}{100} = z \times \frac{p}{100}$$

Učebnice č. 5 – nakladatelství Prodos (Molnár et al., 2017)



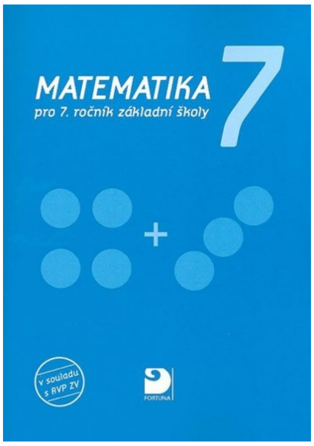
Obrázek č. 3.1.4.6 – Učebnice č. 5, nakl. Prodos

Autory páté učebnice (viz obrázek č. 3.1.4.6) jsou Josef Molnár, Libor Lepík, Hana Lišková a Jan Slouka. Na začátku této kapitoly o procentech je zdůrazněno, že procenta jsou velmi důležitá, jelikož je potkáváme i v běžném životě, např. u stavebního spoření, slev apod. Jsou zde zobrazena procenta i v různých obrázcích, grafech či schématech.

V této učebnici autoři ukazují, že procenta se dají také počítat pomocí vzorce $z = \frac{č}{p}$, jako tomu bylo např. v učebnici č. 5. Do barevných okrajů autoři píší různé zajímavosti nebo úkoly pro žáky pro zpestření výuky.

Podobně jako v předchozích učebnicích zde vysvětlují i témata úroky a promile. Na konci každé kapitoly jsou vždy souhrnná cvičení, kde si žáci mohou vyzkoušet, jak danou látku ovládají.

Učebnice č. 6 – nakladatelství Fortuna (Coufalová et al., 2007)



Obrázek č. 3.1.4.7 – Učebnice č. 6, nakl. Fortuna

Autory této učebnice jsou Jana Coufalová, Šárka Pěchoučková, Jiří Hejl a Miroslav Lávička. Tato učebnice (viz obrázek č. 3.1.4.7) je psaná pouze třemi barvami: černou (písmo), šedou a modrou. Není tedy tak barevná, jako např. učebnice č. 5 a 8. Na začátku kapitoly je obrázek čtverce rozdělený na 100 dílků, ve kterém jsou vybarvena různá pole, pomocí něhož vysvětlují pojem procento.

Procenta zde počítají třemi způsoby: zaprvé pomocí 1 %, zadruhé pomocí úměry (tak tomu bylo i ve dříve zmiňovaných učebnicích) a zatřetí pomocí desetinných čísel.

Ukázka výpočtu pomocí desetinných čísel:

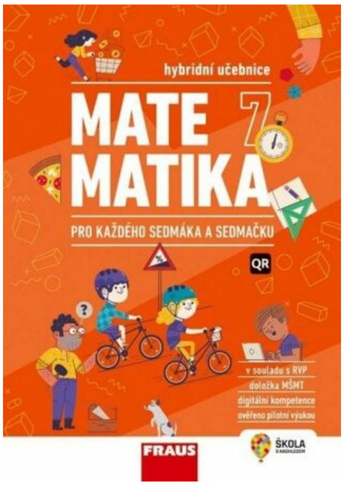
5 % ze 300 = ?

$\frac{5}{100}$ ze 300 = ?

0,05 . 300 = 15

Ani zde nechybí téma úroků a promile. V učebnici se objevují úlohy z praxe nebo úlohy pro chytré hlavy. Nakonec je zde prezentována také práce s grafy a diagramy.

Učebnice č. 7 – nakladatelství Fraus (Kašparová et al., 2023)



Obrázek č. 3.1.4.8 – Učebnice č. 7, nakl. Fraus

Tato učebnice (viz obrázek č. 3.1.4.8) je na pohled velice výrazná, jelikož je hodně barevná a vyskytuje se zde mnoho obrázků. Na úvodní stránce jsou tři textová pole. V prvním jsou formulovány otázky pro žáky, které slouží k aktivaci jejich znalostí a zkušeností s procenty a základními pojmy daného tématu. Druhé pole shrnuje obsah kapitoly a třetí pole obsahuje zajímavosti ze světa související s procenty.

Pomocí této učebnice se žáci naučí počítat procenta třemi způsoby: pomocí 1 %, pomocí úměry (trojčlenky) a pomocí desetinných čísel. Dále je seznamuje s principy práce s grafy a diagramy a také s konceptem promile.

Učebnice č. 8 – nakladatelství H-mat, o. p. s. (Hejný et al., 2015)

Obrázek č. 3.1.4.9 – Učebnice č. 8, nakladatelství H-mat, o. p. s.

Tato učebnice (viz obrázek č. 3.1.4.9) se odlišuje od předchozích v tom, že není určena striktně pro jeden ročník. Jelikož se jedná o čtvrtý díl v pořadí, nese označení D. Téma procenta se zde poprvé objevuje cca v polovině této knihy, konkrétně na str. 38. V prvním odstavci, na obrázku č. 3.1.4.10, autor klade důraz na aktivní zapojení žáků do výuky a nutí je k samostatnému myšlení a řešení problémů, což je klíčovým principem celé série učebnic. Např. je zde uvedeno, aby žák zkusil ostatním vysvětlit zkušenost se slevou v nějakém obchodě, jelikož se s cedulí, na které je přeškrtnutá stará cena a nahrazena novou, již určitě v obchodě setkal.

S procenty se žáci již okrajově seznámili v dílech B a C. Následující díl E se zabývá úročením. Pro analýzu jsem vybrala pouze díl D, teprve v něm se žáci seznámí s potřebnou terminologií, kterou je základ, procentová část a počet procent.

Úlohy, které se zde vyskytují, s výjimkou jedné tradiční tabulky pro doplnění uvedených údajů, se výrazně liší od předchozích. Především se jedná o geometrické úlohy, kde mají žáci za úkol vyjádřit procentuální podíl vybarvené části. Dále zde nenajdeme řešené úlohy, jako v předchozích učebnicích. Úlohy nekončí pokynem „spočítej“, nebo „vypočítej“, ale nějakou otázkou, která vede žáka k zamyšlení.

PROCENTA I

V obchodech se často setkáváme s informací o tom, že některé zboží bylo zlevněno třeba o 40 %. Popište některou vaši zkušenost s takovou slevou a vysvětlete ji spolužákům.

Podívejte se na obrázek, který byl na letáku.
Je jasné, že cena rajčat byla snížena z 29,90 Kč na 17,90 Kč.

1. Vysvětlete, co znamená –40 % napsaných na letáku.

2. Vysavač stál 3 600 Kč. Určete, kolik bude stát po slevě:

   a) 50 % b) 25 % c) 10 % d) 15 % e) 18 %.

3. Doplňte scházející data do tabulky.

původní cena v Kč	100	200	240	100	300	300	400			
sleva v %	20 %	20 %	25 %					50 %	25 %	35 %
sleva v Kč				40	60		160		55	
cena po slevě v Kč						240		250		130

Obrázek č. 3.1.4.10 – Ukázka ze str. 38 – nakladatelství H-mat, o. p. s.

Shrnutí

Téměř všechny učebnice jsou napsány spíše transmisivním způsobem, jelikož je v nich vždy ukázán daný postup, kterým má žák úlohu na procenta řešit. Opakem je např. učebnice Hejného (viz učebnice č. 8), která používá konstruktivistický přístup (Hejný, Kuřina, 2009) pro naučení nejen tohoto tématu. Účelem tohoto přístupu je, aby žák dané problematice hloubkově rozuměl a uměl své znalosti převést i do praxe.

Všechny popsané učebnice, kromě učebnice č. 8, začínají vysvětlením pojmu procento a celek, dále ukazují jednoduché počítání procent z celků, objevují se i různé tabulky, či modely pro lepší znázornění. Dále jsou v učebnicích uvedeny ilustrativní příklady vyřešených úloh. Tyto příklady demonstrují dva různé přístupy k řešení: výpočet pomocí jednoho procenta a výpočet pomocí trojčlenky. Výjimkou je učebnice od Hejného (učebnice č. 8), která žáky učí řešit úlohy s procenty metodou jen přes 1 %, nebo tzv. metodou „krájení“, kdy si žáci celek, neboli 100 %, rozdělí na polovinu, tedy na 50 %, dále si 50 % rozdělí na 5 částí, kdy každá část bude mít 10 %, a tímto způsobem postupují dále podle zadání konkrétní úlohy.

3.2 Zlomky

Zlomky představují další základní matematický koncept, který je součástí vzdělávacího procesu od raných školních let a nachází široké uplatnění jak ve vědeckých, tak v každodenních situacích. Zlomek je číslo, které vyjadřuje část celku nebo poměr dvou čísel, kde čitatel udává počet částí a jmenovatel celkový počet částí, ze kterých se celý objekt skládá. Například zlomek $\frac{1}{2}$ znamená, že uvažujeme jednu část ze dvou, což může představovat například polovinu nějakého objektu (Tichá, Macháčková, 2006).

Zlomky umožňují přesné vyjádření částí a podílů, které nemusí být celými čísly. Zároveň jsou základem pro porozumění dalším matematickým konceptům, jako jsou desetinná čísla, procenta a poměry (Umíme matematiku, 2024). Žáci se učí provádět operace se zlomky jako sčítání, odčítání, násobení a dělení, a také je aplikovat v různých kontextech, například při dělení dortu mezi přáteli nebo při výpočtech ve vědeckých experimentech.

Zlomky mohou být reprezentovány různými způsoby včetně kruhových diagramů, grafických zobrazení nebo slovních popisů. Základní porozumění zlomkům umožňuje žákům efektivněji řešit matematické problémy a aplikovat své znalosti ve skutečném životě, což podporuje jejich schopnost abstraktního myšlení a řešení složitějších úloh (Molnár, 1999).

Podle Rendla (2015) zlomky patří mezi matematické téma, které žákům dělá velké potíže. Podle pedagogů se problémy projevují již od počátečních fází výuky a negativně ovlivňují i pochopení navazujících témat. Mezi nejčastěji uváděné potíže patří počítání se zlomky (sčítání, odčítání, násobení a dělení). Žáci se potýkají i s potížemi s ekvivalentními úpravami, jako je krácení zlomků nebo převod na smíšená čísla.

Základní operace se zlomky se vyučují již ve druhém období prvního stupně, oproti procentům, která se probírají až později (viz obrázek č. 3.2.1).

Očekávané výstupy – 2. období

žák

M-5-1-01	***využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení***
M-5-1-02	***provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel***
M-5-1-03	***zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací v oboru přirozených čísel***
M-5-1-04	***řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel***
M-5-1-05	***modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku***
M-5-1-06	***porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel***
M-5-1-07	***přečte zápis desetinného čísla a vyznačí na číselné ose desetinné číslo dané hodnoty***
M-5-1-08	***porozumí významu znaku „−“ pro zápis celého záporného čísla a toto číslo vyznačí na číselné ose***

Obrázek č. 3.2.1 – Ukázka zlomků (1. stupeň) v RVP (Zdroj: RVP ZV, 2023, s. 33)

Na druhém stupni (viz obrázek č. 3.2.2 níže)

M-9-1-04	***užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek–část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem)***

M-9-1-01p	*pracuje se zlomky a smíšenými čísly, používá vyjádření vztahu celek–část (zlomek, desetinné číslo, procento)*

Obrázek č. 3.2.2 – Ukázka zlomků (2. stupeň) v RVP (Zdroj: RVP ZV, 2023, s. 35–36)

3.3 Poměr

Poměr je jedním ze základních matematických pojmů, často vyučovaným ve školách a aplikovaným v různých kontextech. Definuje vztah mezi dvěma nebo více částmi či členy, které jsou vzájemně spojeny. Poměr může být vyjádřen jako zlomek (racionální číslo) a vždy se týká stejných druhů veličin. Například poměr chlapců k dívkám ve třídě může být 1:2, což značí, že na každého chlapce připadají dvě dívky.

V matematice hraje poměr klíčovou roli při řešení různých typů úloh, jako jsou procenta a aplikace ve statistice, ekonomii a dalších oborech. Žáci se učí porozumět poměru jako základnímu konceptu a rozpoznávat jeho význam v různých situacích. Například v oblasti financí se poměr často používá ke srovnání výnosnosti investic nebo k výpočtům v obchodní sféře (Černohorský, 2020).

Poměr lze vyjádřit různými způsoby, včetně grafických zobrazení, jako jsou číselné kruhové diagramy nebo slovní popisy (Kadleček, Odvárko, 2011). Základní porozumění poměru umožňuje žákům efektivněji řešit problémy a aplikovat matematické koncepty v reálném životě, což podporuje jejich schopnost kritického myšlení a analytického uvažování.

V RVP ZV (viz obrázek č. 3.3.1) se poměr objevuje stejně jako téma procenta v oblastech M-9-1-04 a M-9-1-05.

M-9-1-04	***užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek–část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem)***
M-9-1-05	***řeší modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem; pracuje s měřítky map a plánů***

Obrázek č. 3.3.1 – Ukázka zlomků (1. stupeň) v RVP (Zdroj: RVP ZV, 2023, s. 35)

3.4 Souvislost procent, poměru a zlomků

Domnívám se, že základním pilířem těchto oblastí je zlomek. Žák se nejdříve naučí, co zlomek znamená, že obsahuje čitatele a jmenovatele, které jsou odděleny zlomkovou čarou. Toto je velmi důležité, jelikož např. 10 % lze zapsat jako $\frac{10}{100}$; když tento zlomek převedeme na desetinné číslo, dostaneme 0,1. V tématu poměr se zlomky objevují také, např. v následující úloze (autorská úloha): „V košíku je 30 kusů ovoce, jablek a hrušek, toto ovoce je rozděleno v poměru 1:2, kdy je více jablek. Kolik hrušek je v košíku?“. Ze zadání této úlohy je zřejmé, že na každé jablko připadá jedna polovina hrušky.

Pro dobré pochopení pojmu procenta je důležité uvědomění, co procenta znamenají a jak se vztahují k celkovým hodnotám. Může pomoci si je vizualizovat graficky. Důležité je zapamatování těchto základních hodnot: 20 % znamená jednu pětinu$\left(\frac{1}{5}\right)$, 25 % znamená jednu čtvrtinu $\left(\frac{1}{4}\right)$ celkového množství, 50 % znamená polovinu $\left(\frac{1}{2}\right)$ celkového množství, 75 % znamená tři čtvrtiny $\left(\frac{3}{4}\right)$ celkového množství, 100 % znamená jeden celek (Umíme matiku, 2024).

Zatímco zlomky vyjadřují poměr mezi dvěma celými čísly, procenta vyjadřují část celku rozděleného na sto dílů a mají své vlastní využití v procentuálním měření. Odvozují svůj význam z omezení zlomků, protože zlomky může být obtížné vzájemně srovnávat a jejich škála může být neúplná nebo nedostatečně přesná pro určité aplikace (Galen et al., 2008).

3.5 Shrnutí

V rámci teoretické části práce jsem nejprve provedla obecnou charakteristiku problematiky JPZ, s následným zaměřením na oblast matematiky. Dále jsem vybrala a analyzovala úlohu č. 15 z oblasti matematiky v JPZ za období od roku 2017 do roku 2023. Následně jsem provedla analýzu vybraných učebnic zaměřených na téma procent, které se v cílové úloze vyskytuje nejčastěji. Dále jsem popsala procenta obecně a jejich vnímání v literatuře. Okrajově jsem se věnovala tématům zlomků a poměrů, jelikož se v úloze rovněž objevují, i když v menší míře. V navazující kapitole popisuji část výzkumu, který jsem realizovala na vzorku čtyř vybraných žáků.

4 Výzkum

Ze souboru žáků, které jsem ve školním roce 2022/2023 ve své třídě připravovala na přijímací zkoušky formou nanečisto, jsem vybrala vzorek čtyř žáků. Výběr byl proveden na základě splnění následujících kritérií: absolvování všech testů a udělení souhlasu s účastí v projektu ze strany rodičů. Snažila jsem se vybrat žáky, kteří v testech udělali alespoň jednu chybu a u kterých byly postupy řešení nejvíce patrné.

Před zadáním prvního testu jsem jim v předchozích lekcích ukázala postup pomocí trojčlenky i postup pomocí jednoho procenta. Řekla jsem jim, že výběr postupu nechávám na jich, pouze jsem je poprosila, aby celý svůj postup zapisovali. Zadávala jsem jim každou hodinu (jednou týdně) test, který jsem vytvořila následovně: Čerpala jsem z výše uvedené učebnice (Graja et al., 2022) pro přípravu na přijímací zkoušky, Volba této učebnice byla motivována snahou o co nejpřesnější napodobení zadání úlohy č. 15, kterou jsem analyzovala v kapitole 2.

Příklad úlohy z výše uvedené učebnice, která zároveň sloužila jako zadání prvního tesu, je uveden níže:

15. Přiřaďte ke každé úloze (15.1–15.3) odpovídající výsledky (A–F).

15.1 40 % neznámého čísla je rovno dvěma třetinám čísla 120. Jaké je neznámé číslo? …………….

15.2 40 % neznámého čísla je o 12 menší než 20 % z čísla 700. Jaké je neznámé číslo? …………….

15.3 Boty byly zlevněny o 10 % a později ještě o třetinu nové ceny. Po tomto dvojím zlevněním stály boty 600 Kč. Jaká byla původní cena bot? …………….

A) menší než 220
B) 250
C) 320
D) 380
E) 1 000
F) větší než 1 000

(Graja et al., 2022)

Žákům jsem zadala celkem deset testů. Pět z nich bylo v původní podobě, zbývajících pět jsem modifikovala následujícím způsobem: zaměnila jsem slova (kontext) v jednotlivých zadání, přičemž číselné hodnoty zůstaly zachovány. Dále jsem zpřeházela úlohy, čímž jsem zabránila žákům jejich řešení v identickém pořadí (viz tabulka č. 4.1.2–4.1.6, str. 37–38). Touto modifikací jsem chtěla zjistit, zda žáci dokáží vyřešit stejnou úlohu s pozměněným kontextem, a to jak v případě správného, tak i chybného řešení v prvním pokusu.

Z 22 žáků jsem vybrala čtyři, od nichž jsem získala souhlas zákonných zástupců s výzkumem. Vzala jsem řešení jedné dívky a tří kluků. Vybírala jsem žáky, kteří ve svých řešeních nebyli vždy stoprocentní, aby se dal analyzovat vývoj v řešení úloh, viz graf č. 4.2.1–4.2.5 (s. 39–42), nebo jejich řešení bylo něčím zajímavé.

4.1 Sestavení testů

V následujících odstavcích je důkladněji popsáno, jak jsem připravila testy pro žáky. Nejdříve jsem vzala pět různých zadání úlohy č. 15 učebnice (Graja et al., 2022) a na základě těchto úloh jsem vytvořila testy 1-5. V testech č. 6–10 jsem pak modifikovala kontext úloh, kdy jsem u všech podstatných jmen v zadání provedla změnu. V testu č. 1 jsem například původní zadání na zjištění neznámého čísla transformovala na úkol zjištění neznámého nákladu.

Tabulka č. 4.1.1 (str. 34–36) shrnuje veškerá zadání testů, a to jak v původní, tak i v pozměněné verzi. Dále je zde uvedeno označení jednotlivých zadání v rámci testů. Původní zadání jsou pro snazší rozlišitelnost na konci označena písmenem „a“, zatímco pozměněná zadání písmenem „b“.

Během tvorby testů se bohužel vyskytly dvě nesrovnalosti, kdy jsem v testu č. 8 chybně zadala úlohu č. 4.3b: Jakub měl našetřeno o dvě pětiny více peněz než Jana, která má 360 Kč.

Kolik korun má Jana našetřeno? Prohodila jsem v otázce Jakuba za Janu. Žáci byli před vypracováním testu s touto chybou seznámeni a byli instruováni k opravě, která spočívala ve vyškrtnutí jména Jany a napsání Jakuba. Tato instrukce by měla zabránit chybnému hodnocení jejich řešení. Druhou nesrovnalostí je shoda podúloh č. 3.1a a 3.1b.

Tabulka č. 4.1.1 – Původní a pozměněná zadání

1.1 a: 40 % neznámého čísla je rovno dvěma třetinám čísla 120. Jaké je neznámé číslo?	1.2 a: 40 % neznámého čísla je o 12 menší než 20 % z čísla 700. Jaké je neznámé číslo?	1.3 a: Boty byly zlevněny o 10 % a později ještě o třetinu nové ceny. Po tomto dvojím zlevněním stály boty 600 Kč. Jaká byla původní cena bot?
1.1 b: 40 % neznámého nákladu je rovno dvěma třetinám ze 120 kg. Kolik kg váží neznámý náklad?	1.2 b: 40 % čočky je o 12 g lehčí než 20 % ze 700 g hrachu. Kolik g je čočky?	1.3b: Kalhoty byly zlevněny o 10 % a později ještě o třetinu nové ceny. Po tomto dvojím zlevněním stály boty 600 Kč. Jaká byla původní cena kalhot?
2.1 a: Po zdražení o 15 % stál mobilní telefon 5 980 Kč. Jaká byla jeho původní cena?	2.2 a: Za ubytování a stravu zaplatili účastníci rekreačního pobytu 7 000 Kč. Kolik z této částky zaplatili za ubytování, jestliže strava tvořila 25 % platby?	2.3 a: Původní cena výrobku byla 6 300 Kč. Pro neprodejnost byl výrobek dvakrát zlevněn, vždy o 10 %. Jaká je jeho konečná cena?

2.1 b: Po zdražení o 15 % byla cena bezdrátových sluchátek 5 980 Kč. Jaká byla jejich původní cena?	2.2 b: Za návštěvu sauny a vířivky účastníci zaplatili 7 000 Kč. Kolik z této částky zaplatili za saunu, jestliže vířivka tvořila 25 % platby?	2.3 b: Původní cena štěněte byla 6 300 Kč. Pro nezájem bylo dvakrát zlevněno, vždy o 10 %. Jaká je jeho konečná cena?
3.1 a: Celodenní permanentka na vlek stojí 480 Kč. Kolik korun stojí odpolední jízdenka, která je o 40 % levnější?	3.2 a: V posezónním výprodeji se všechno zboží prodávalo o čtvrtinu levněji. O kolik korun byl zlevněn svetr, který se prodával ve výprodeji za 576 Kč?	3.3 a: Hodinová mzda údržbáře vzrostla o 20 % na 186 Kč. Jaká byla jeho hodinová mzda před přidáním?
3.1 b: Celodenní permanentka na vlek stojí 480 Kč. Kolik korun stojí odpolední jízdenka, která je o 40 % levnější?	3.2 b: Ve vánočním výprodeji se všechno zboží prodávalo o čtvrtinu levněji. O kolik korun byl zlevněn rolák, který se prodával ve výprodeji za 576 Kč?	3.3 b: Hodinová mzda uklízečky vzrostla o 20 % na 186 Kč. Jaká byla její hodinová mzda před přidáním?
4.1 a: Eva si koupila svetr zlevněný o 28 %. Zaplatila za něj 360 Kč. Jaká byla cena svetru před slevou?	4.2 a: Cena výrobku byla dvakrát zvýšena o 10 %. Původní cena výrobku byla 400 Kč. Jaká byla konečná cena výrobku?	4.3 a: Veronika má o dvě pětiny více peněz než Jirka, který má 360 Kč. Kolik korun má Veronika?

4.1 b: Pavel si koupil triko zlevněné o 28 %. Zaplatil za něj 360 Kč. Jaká byla cena trika před slevou?	4.2 b: Cena brýlí byla dvakrát zvýšena o 10 %. Původní cena brýlí byla 400 Kč. Jaká byla konečná cena brýlí?	4.3 b: Jakub měl našetřeno o dvě pětiny více peněz než Jana, která má 360 Kč. Kolik korun má Jakub našetřeno?
5.1 a: Sušička na ovoce stála původně 1 000 Kč. Nejprve byla o 40 % zlevněna, ale později o 50 % zdražena. Jaká je teď cena sušičky na ovoce?	5.2 a: Boty stály původně 1 000 Kč. Nejprve byly zlevněny o 10 %, později byly zlevněny o dalších 10 %. Jaká je teď cena bot?	5.3 a: Původní cena saka byla 1 000 Kč. Nejprve bylo sako zdraženo o 5 %, později bylo zdraženo o dalších 10 %. Jaká je teď cena saka?
5.1 b: Fritovací hrnec stál původně 1 000 Kč. Nejprve byl o 40 % zlevněn, ale později o 50 % zdražen. Jaká je teď cena fritovacího hrnce?	5.2 b: Šaty původně stály 1 000 Kč. Nejprve byly zlevněny o 10 %, později byly zlevněny o dalších 10 %. Jaká je teď cena šatů?	5.3 b: Původní kabátu byla 1 000 Kč. Nejprve byl kabát zdražen o 5 %, později byl zdražen o dalších 10 %. Jaká je teď cena kabátu?

Každou podúlohu jsem označila číslem, kde první číslo udává pořadí zadání v učebnici, číslo za tečkou specifikuje pořadí podúlohy v rámci daného zadání. Původní zadání z učebnice je vždy označeno písmenem „a“, zadání s pozměněnými formulacemi, odvozené od původního zadání, jsem označila písmenem „b“.

Pro prvních pět testů jsem použila shodnou strukturu jako v užité učebnici. Test č. 6 jsem sestavila následovně: vzala první podúlohu prvního testu, druhou podúlohu druhého testu a třetí podúlohu třetího testu. Analogicky jsem sestavila i test č. 7: první úloha čtvrtého testu, druhá podúloha pátého testu a třetí úloha prvního testu. Zbývající testy jsem složila stejným způsobem a jsou prezentovány ve druhém sloupci tabulek uvedených níže.

Tabulka č. 4.1.2 – Test č. 1 a 6

Test č. 1	Test č. 6
1.1 a	1.1 b
1.2 a	2.2 b
1.3 a	3.3 b

Tabulka č. 4.1.3 – Test č. 2 a 7

Test č. 2	Test č. 7
2.1 a	4.1 b
2.2 a	5.2 b
2.3 a	1.3 b

Tabulka č. 4.1.4 – Test č. 3 a 8

Test č. 3	Test č. 8
3.1. a	2.1 b
3.2 a	3.2 b
3.3 a	4.3 b

Tabulka č. 4.1.5 – Test č. 4 a 9

Test č. 4	Test č. 9
4.1 a	5.1 a
4.2 a	1.2 b
4.3 a	2.3 b

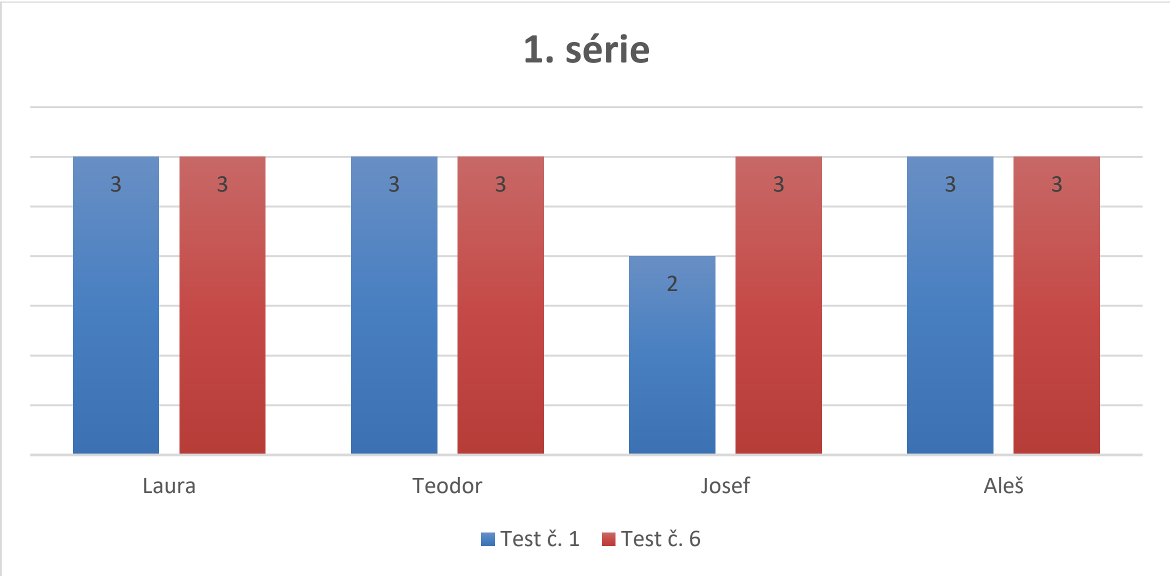
Tabulka č. 4.1.6 – Test č. 5 a 10

Test č. 5	Test č.10
5.1 a	3.1 b
5.2 a	4.2 b
5.3 a	5.3 b

4.2 Úspěšnost žáků

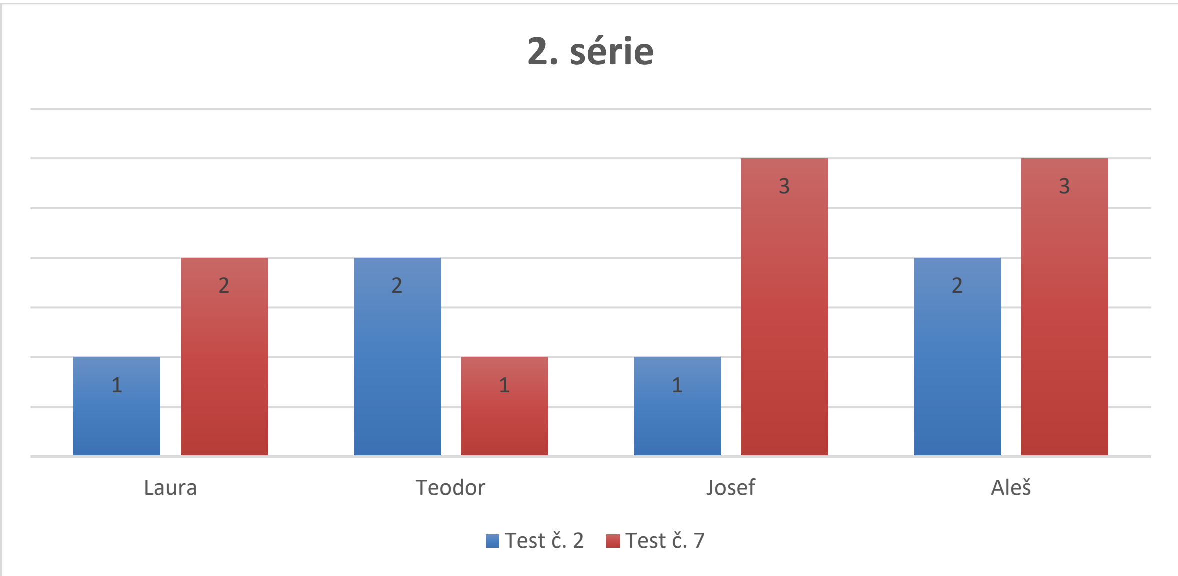
Všechna jména žáků byla nahrazena pseudonymy, čímž jsem zajistila anonymitu jejich identity. Následující grafy znázorňují výsledky dosažené žáky v testech, přičemž modrou barvou jsou znázorněny původní testy a červenou barvou testy pozměněné. Pro srovnání výsledků jsem testy rozdělila do pěti sérií, kde každá série páruje původní test s jeho modifikovanou verzí (např. test č. 1 s testem č. 5, test č. 2 s testem č. 6 atd.).

Z grafu č. 4.2.1 je patrné, že v první sérii testů nedošlo k výrazným změnám v počtu dosažených správných odpovědí. Tato série se ukázala jako nejjednodušší pro všechny žáky, jelikož ji tři ze čtyř žáků zvládli bezchybně. Žák Josef nejprve dosáhl jedné chyby, kterou však následně opravil a dosáhl tak plného počtu bodů stejně jako zbylí žáci.



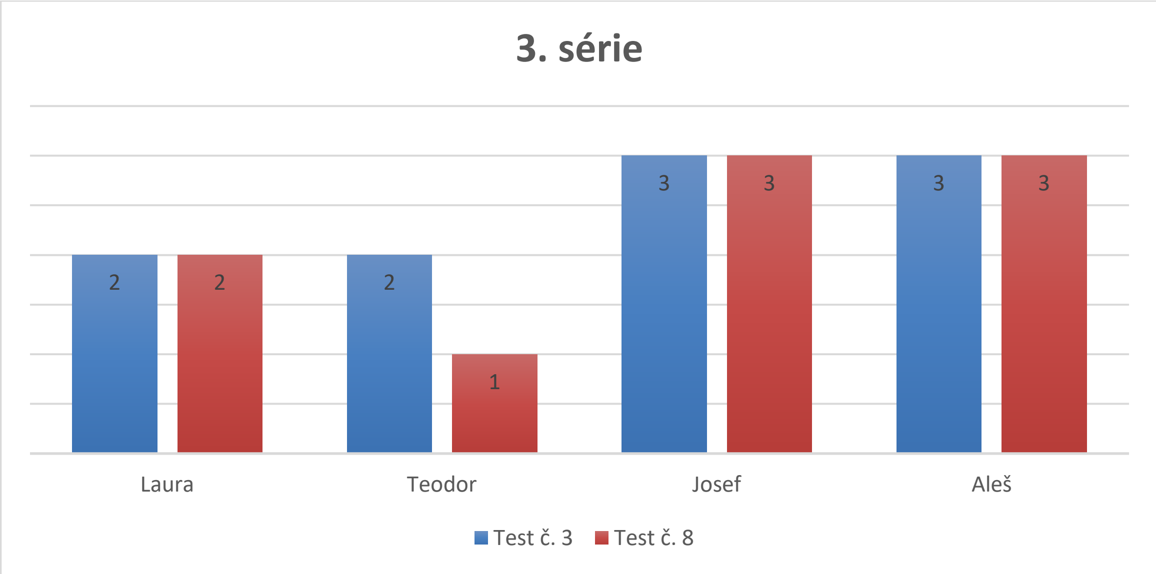
Graf č. 4.2.1 – Úspěšnost v 1. sérii

Graf č. 4.2.2 zobrazuje výsledky dosažené žáky v testu č. 2. Je patrné, že v tomto testu žáci dosáhli horších výsledků v porovnání s testem č. 1, jelikož žádný z žáků nezískal plný počet bodů. Na druhou stranu lze pozorovat značné zlepšení u tří ze čtyř žáků. Zatímco Josef v původní verzi testu dosáhl pouze jedné správné odpovědi, v modifikované verzi zvládl všechny úlohy bezchybně. Naopak u Teodora došlo k nepatrnému zhoršení výkonu.



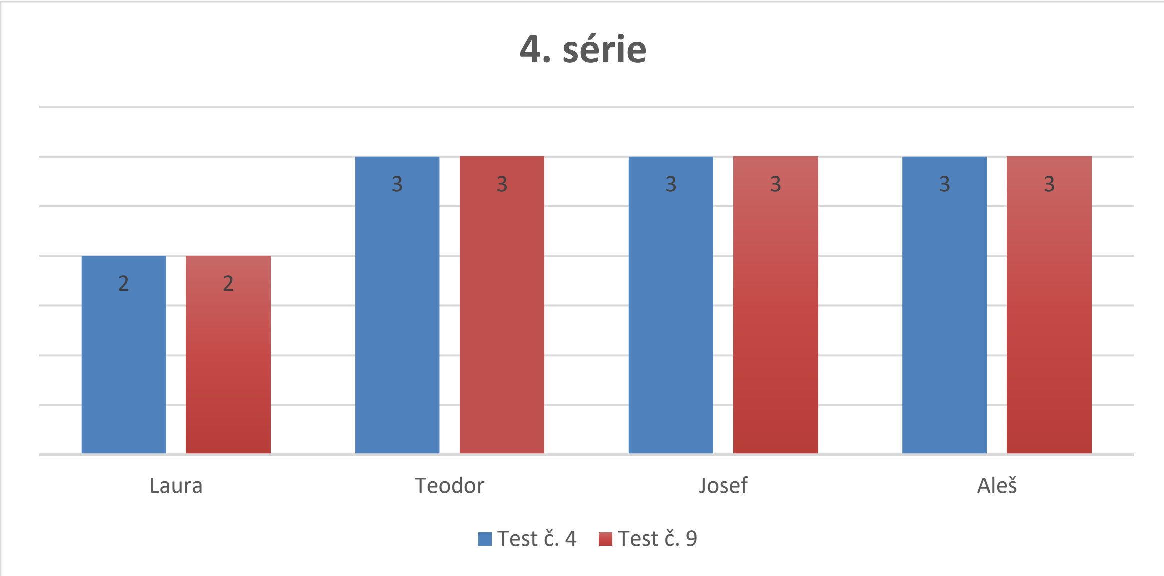
Graf č. 4.2.2 – Úspěšnost ve 2. sérii

V rámci 3. série testů (viz graf č. 4.2.3) dosáhli Josef a Aleš plného počtu bodů v testu č. 3 a testu č. 8, a to jak v původní, tak v modifikované verzi. U tohoto testu tedy u nich nedošlo ani ke zlepšení, ani ke zhoršení výkonu. V případě Laury se výsledky v obou verzích testů taktéž nezměnily, avšak v každém testu dosáhla správně pouze dvou podúloh. U Teodora došlo v testu č. 8 ke zhoršení o jednu správnou odpověď v porovnání s původní verzí testu.



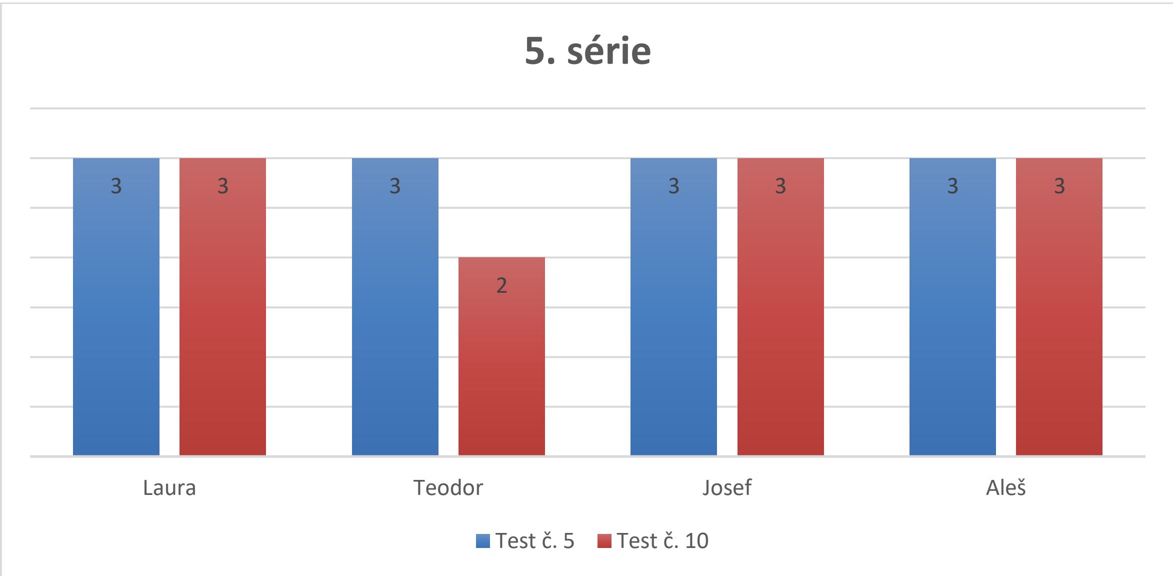
Graf č. 4.2.3 - Úspěšnost ve 3. sérii

V rámci 4. série testů (viz graf č. 4.2.4) se výsledky Josefa a Aleše v obou testech nezměnily v porovnání s původními testy. U Laury se rovněž výsledky v modifikovaných testech nelišily od výsledků v původních testech, v obou případech dosáhla správně všech úloh s výjimkou jedné v každém testu. U Teodora nedošlo také k žádné změně a stejně jako předchozí chlapci měl vše správně.



Graf č. 4.2.4 - Úspěšnost ve 4. sérii

Test č. 5 (viz graf č. 4.2.5) má stejně jako test č. 6 stoprocentní úspěšnost. V případě testu č. 10 se však tuto úroveň úspěšnosti nepodařilo udržet. U dvou žáků, Laury a Teodora, došlo ke zhoršení výkonu. Teodor dosáhl v modifikované úloze o jednu správnou odpověď méně než v původní verzi, zatímco Laura dosáhla stejného výsledku jako Josef a Aleš.



Graf č. 4.2.5 – Úspěšnost v 5. sérii

Změny při řešení původních a upravených testů[4]

Jak bylo popsáno výše, Laura, Teodor i Aleš se alespoň jednou zhoršili. Josef se nezhoršil ani jednou, dvakrát měl vše správně a dvakrát se zlepšil.

Tabulka č. 4.2.1 – Sledování změn v podúlohách začínající na 1

	1.1a	1.1b	1.2a	1.2b	1.3a	1.3b
Laura	správně	správně	správně	správně	správně	chybně
Teodor	správně	správně	správně	správně	správně	správně
Josef	správně	správně	správně	správně	chybně	správně
Aleš	správně	správně	správně	správně	správně	správně

Tabulka č. 4.2.2– Sledování změn v podúlohách začínající na 2

	2.1a	2.1b	2.2a	2.2b	2.3a	2.3b
Laura	chybně	správně	správně	správně	chybně	chybně
Teodor	chybně	chybně	správně	správně	správně	správně
Josef	správně	správně	chybně	správně	chybně	správně
Aleš	správně	správně	správně	správně	chybně	správně

[4] Pro lepší přehlednost jsem označila zlepšení zelenou barvou, zhoršení červenou barvou a obě chybné odpovědi šedou barvou.

Tabulka č. 4.2.3 – Sledování změn v podúlohách začínající na 3

	3.1a	3.1b	3.2a	3.2b	3.3a	3.3b
Laura	správně	správně	chybně	chybně	správně	správně
Teodor	správně	chybně	chybně	chybně	správně	správně
Josef	správně	správně	správně	správně	správně	správně
Aleš	správně	správně	správně	správně	správně	správně

Tabulka č. 4.2.4 – Sledování změn v podúlohách začínající na 4

	4.1a	4.1b	4.2a	4.2b	4.3a	4.3b
Laura	správně	správně	správně	správně	chybně	správně
Teodor	správně	chybně	správně	správně	správně	správně
Josef	správně	správně	správně	správně	správně	správně
Aleš	správně	správně	správně	správně	správně	správně

Tabulka č. 4.2.5 – Sledování změn v podúlohách začínající na 5

	5.1a	5.1b	5.2a	5.2b	5.3a	5.3b
Laura	správně	správně	správně	správně	správně	správně
Teodor	správně	správně	správně	chybně	správně	správně
Josef	správně	správně	správně	správně	správně	správně
Aleš	správně	správně	správně	správně	správně	správně

4.3 Diskuse zjištění a úspěšnosti žáků

V této části jsem udělala diskusi výsledků žáků v jednotlivých podúlohách a demonstruji individuální zlepšení, zhoršení, či stagnaci výkonu žáků (viz tabulky 4.2.1–4.2.5

v předchozím oddíle na str. 42–43). Následně se zaměřuji na konkrétní žákovské strategie u vybraných testů.

Obecné shrnutí:

1. Laura:

Prokázala pokles ve výkonu v úloze 1.3b, kde odpověděla chybně, což naznačuje možné potíže s výměnou slov v zadání. To mohlo vést k matoucí interpretaci ze strany žákyně a následnému nezohlednění správně vyřešené analogické podúlohy. Naopak u podúloh 2.1b a 4.3b došlo ke zlepšení, kdy v upravené verzi již odpověděla správně. U podúloh 3.2a a 3.2b Laura pokaždé odpověděla chybně. Tato podúloha je zaměřená na zlomky, s nimiž má Laura při počítání potíže (viz Laura).

2. Teodor:

Ve verzi 3.1b prokázal pokles ve výkonu, jelikož odpověděl chybně na zadanou otázku. Analogicky žák chybně odpověděl i na zadání v podúlohách 4.1b a 5.2b. Celkově měl dvě podúloh (2.1 a 3.2) v původní i přeformulované verzi chybně. Domnívám se, že u obou podúlohách si Teodor chybně přečetl zadání. U podúloze 2.1a bohužel není viditelný jeho postup, ale u podúlohy 2.1b již ano. V zadání je napsáno „zdraženo“, ale on řešil tuto podúlohu, jako kdyby v něm bylo „zlevněno“. U podúlohy 3.2a a 3.2b jsou již viditelné oba Teodorovy postupy. Obě podúlohy řešil analogickým způsobem, bohužel u každé z nich je v zadání napsáno: „O kolik korun byl zlevněn …“, ale Teodor řešil cenu před zlevněním.

3. Josef:

U Josefa byla zaznamenána četná zlepšení v podúlohách 1.3b, 2.2b a 2.3b, celkem v počtu tří. Žák v daných podúlohách neprojevil opakované chyby, jelikož buď správně zodpověděl obě zadané otázky, nebo došlo ke zlepšení.

4. Aleš:

V porovnání s ostatními žáky dosáhl Aleš nejlepších výsledků. Pouze jednou odpověděl poprvé chybně, ale následně se zlepšil v podúloze 2.3b. V ostatních testech žák dosáhl bezchybných výsledků.

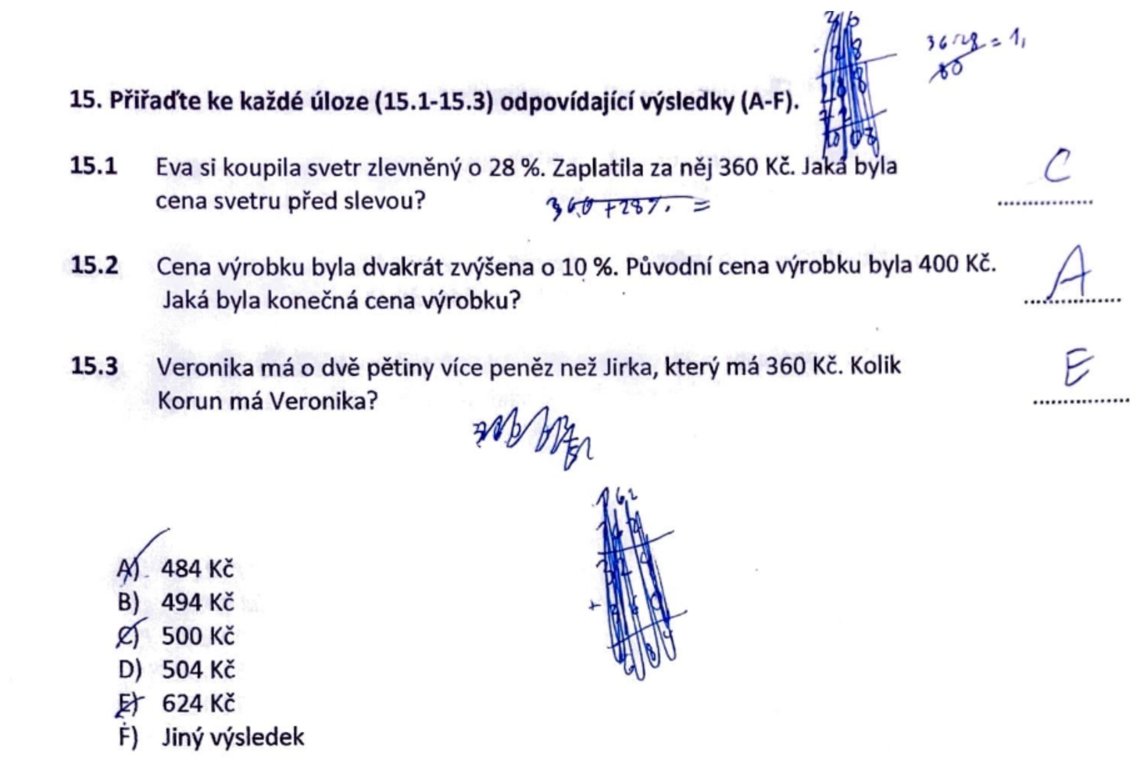
4.4 Analýza konkrétních řešitelských strategií vybraných testů

Tento oddíl je zaměřen na rozbor řešení testů zvolených žáků. Pro analýzu jsem vybrala testy od Laury a Teodora (celkem 3 testy), u nichž se vyskytl nejvyšší počet chyb, a dále 2 testy od Aleše a Josefa. Celkem jsem tedy zpracovala deset testů. Testy jsem vybírala na základě alespoň jedné chyby u daného žáka, případně dle mého uvážení zajímavých postupů řešení.

V předchozí kapitole již bylo zhodnoceno, zda žák řeší úlohy správně, či nikoliv. V rámci této analýzy jsem prošla řešení podúlohy jednotlivých žáků a zadání doplnila o svá vzorová řešení. Následně jsem porovnala postupy žáků se svým vzorovým řešením a snažila se zjistit, jak a proč žák dané podúlohy řešil zvoleným způsobem.

4.4.1 Laura

Z grafu č. 4.2.4 (str. 41) můžeme vidět, že Laura udělala v testu č. 4 jednu chybu. Konkrétně ve třetí podúloze. Z obrázku 4.4.1.1, kde vidíme řešení Laury, je patrné, že s podobnými typy úloh má Laura potíže. Její řešení obsahuje pouze přeškrtnuté postupy, naštěstí je viditelné, jak Laura chtěla postupovat, alespoň v podúloze 15.1. I když se Laura snažila úlohu na procenta vyřešit (podle mě) náhodným násobením, tato metoda se v tomto případě ukázala jako nevhodná. Správné řešení by vyžadovalo použití trojčlenky nebo výpočet přes jedno procento. I přes tyto chyby se Laura dopracovala ke správnému výsledku, avšak správný postup není patrný, můžeme se tedy jen dohadovat jak.



15. Přiřaďte ke každé úloze (15.1-15.3) odpovídající výsledky (A-F).

15.1 Eva si koupila svetr zlevněný o 28 %. Zaplatila za něj 360 Kč. Jaká byla cena svetru před slevou? 360 + 28 % = ……C……

15.2 Cena výrobku byla dvakrát zvýšena o 10 %. Původní cena výrobku byla 400 Kč. Jaká byla konečná cena výrobku? ……A……

15.3 Veronika má o dvě pětiny více peněz než Jirka, který má 360 Kč. Kolik Korun má Veronika? ……E……

A) 484 Kč
B) 494 Kč
C) 500 Kč
D) 504 Kč
E) 624 Kč
F) Jiný výsledek

Obrázek č. 4.4.1.1 – Řešení Laury testu č. 4

Laura k první podúloze přiřadila možnost C (500 Kč). Z analýzy Lauřiny práce, konkrétně ze škrtlého postupu řešení, můžeme identifikovat dva chybné přístupy, které zvažovala: Laura pravděpodobně nejprve chybně interpretovala zadání a domnívala se, že je nutné 28 % přičíst k původní ceně svetru. To vedlo k pokusu o sestavení rovnice, která by tuto chybnou interpretaci odrážela. V zadání je však uvedeno zlevnění svetru, nikoliv jeho navýšení. Správný postup by tedy zahrnoval odečtení 28 % od původní ceny. Navíc, s ohledem na zlevnění, by odhad výsledku (původní ceny) musel být vyšší, než je uvedená cena v zadání.

Druhým chybným přístupem, který Laura pravděpodobně zvažovala, bylo vynásobení čísla 28 s číslem 36, nebo vydělení čísla 36 číslem 28. I tento postup by však vedl k chybnému výsledku. Laura i přes zvolení chybných strategií dospěla ke správnému výsledku (500 Kč), pravděpodobně odhadem.

Vzorové řešení:

15.1 *Eva si koupila svetr zlevněný o 28 %. Zaplatila za něj 360 Kč. Jaká byla cena svetru před slevou?*

Řešení pomocí trojčlenky:

72 % ……………………. 360

100 % ……………………. x

$$\frac{100}{72} = \frac{x}{360}$$

$x = 500$

Správná odpověď byla C (500).

V druhé podúloze Laura zvolila správnou odpověď. Její zdůvodnění a postup řešení však nelze s jistotou z dostupného materiálu zhodnotit. V řešení testu, který mi bylo předloženo ke kontrole, se Lauřino řešení nenachází. Je také možné, že Laura úlohu vyřešila jen úvahou a na papír nenapsala žádné zdůvodnění. V tomto případě by bylo obtížné zhodnotit její myšlenkový proces a úroveň pochopení dané problematiky. Je také možné, že Laura úlohu vypracovala na jiný papír, který následně neodevzdala.

15.2 *Cena výrobku byla dvakrát zvýšena o 10 %. Původní cena výrobku byla 400 Kč.*

Jaká byla konečná cena výrobku?

Řešení:

100 % $\rightarrow$ 110 %

100 % $\rightarrow$ 110 %

Použijeme dvě trojčlenky:

100 % …………………. 400

110 % …………………. x

$$\frac{110}{100} = \frac{x}{400}$$

$x = 440$

100 % …………………. 440

110 % ………………… x

$$\frac{110}{100} = \frac{x}{440}$$

$x = 484$

Správnou možností je A (484).

Ani u třetí podúlohy nelze říci, jak Laura postupovala, jelikož zde nevidíme žádný postup řešení, ani náznak. Bohužel zde není vidět ani výsledek. Laura u této podúlohy označila možnost E (624 Kč). Můžeme se domnívat, že ho pouze tipla.

15.3 *Veronika má o dvě pětiny více peněz než Jirka, který má 360 Kč. Kolik korun má Veronika?*

Řešení:

Jana. ….. pět pětin …... 360

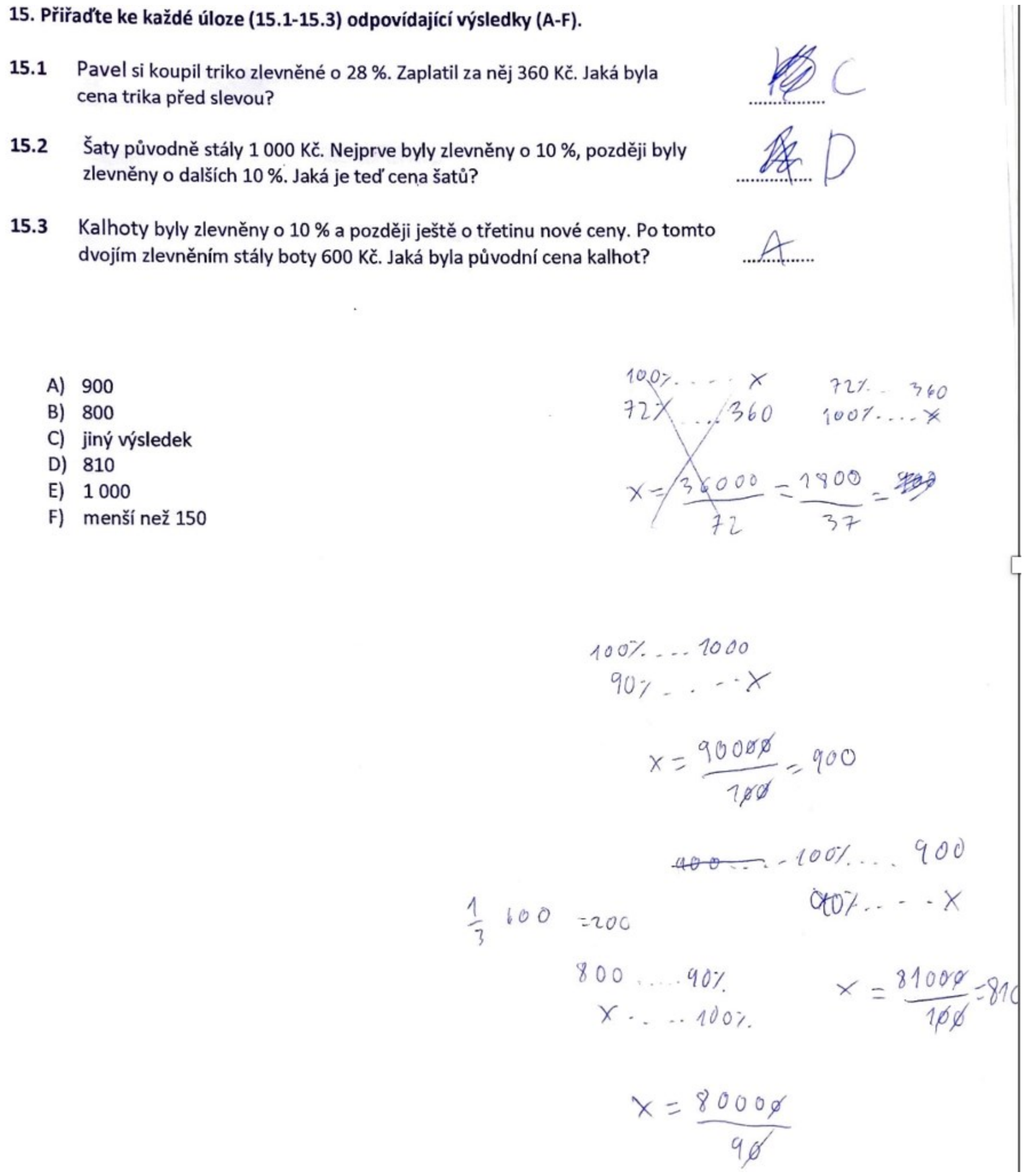
Jakub …. sedm pětin ……. x

Vypočítáme jednu pětinu: $360 : 5 = 72$

Výsledek vynásobíme sedmi: $72 \cdot 7 = 504$

Správným řešením je možnost D (504).

Z grafu č. 4.2.2 (str. 39) je zřejmé, že Laura v testu č. 7 měla jednu chybu, a to v poslední podúloze. Na obrázku 4.4.1.2 vidíme, že Laura neměla problém s počítáním procent, avšak chybně pochopila zadání a následně chybně zkrátila zlomky.



15. Přiřaďte ke každé úloze (15.1-15.3) odpovídající výsledky (A-F).

15.1 Pavel si koupil triko zlevněné o 28 %. Zaplatil za něj 360 Kč. Jaká byla cena trika před slevou? C

15.2 Šaty původně stály 1 000 Kč. Nejprve byly zlevněny o 10 %, později byly zlevněny o dalších 10 %. Jaká je teď cena šatů? D

15.3 Kalhoty byly zlevněny o 10 % a později ještě o třetinu nové ceny. Po tomto dvojím zlevněním stály boty 600 Kč. Jaká byla původní cena kalhot? A

A) 900
B) 800
C) jiný výsledek
D) 810
E) 1 000
F) menší než 150

100 % ... x
72 % ... 360

$x = \frac{36000}{72} = \frac{1800}{37}$

100 % ... 1000
90 % ... x

$x = \frac{9000\cancel{0}}{1\cancel{00}} = 900$

100 % ... 900
90 % ... x

$x = \frac{8100\cancel{0}}{1\cancel{00}} = 810$

$\frac{1}{3}$ 600 = 200

800 ... 90 %
x ... 100 %

$x = \frac{8000\cancel{0}}{9\cancel{0}}$

Obrázek č. 4.4.1.2 – Řešení Laury testu č. 7

V testu č. 7 odpověděla Laura na první podúlohu správně. Když se podíváme na její řešení, je vidět, že začala správně a chtěla ji řešit pomocí trojčlenky. Zlomek $\frac{36\,000}{72}$ je správně sestaven a vede ke správnému výsledku, poté ale pokračovala úpravou zlomku, která nedává smysl a nejedná se o stejný (jen zkrácený) zlomek. Z Lauřiny práce není jasné, zda ke správnému výsledku dospěla výpočtem nebo odhadem, jelikož je část jejího řešení přeškrtnutá a nevidíme zde výsledek (500 Kč).

Vzorové řešení testu č.7:

15.1 *Pavel si koupil triko zlevněné o 28 %. Zaplatil za něj 360 Kč. Jaká byla cena trika před slevou?*

Řešení této podúlohy je stejné jako podúloha č. 15.1 testu č. 4 (viz Laura ,str. 47).

Na řešení Lauřiny druhé podúlohy vidíme, že postupovala analogicky s mým vzorovým řešením (viz níže). Nejdříve vypočítala prostřední cenu (900 Kč), následně aplikovala druhou trojčlenku, kde konktrétně zvolila nový základ (900) a vypočítala z něho 90 %. V souladu s očekáváním dospěla ke správnému výsledku 810 Kč (možnost D).

15.2 *Šaty původně stály 1 000 Kč. Nejprve byly zlevněny o 10 %, později byly zlevněny o dalších 10 %. Jaká je teď cena šatů?*

Řešení: c

100 % → 90 %

100 % → 90 %

K řešení této úlohy je potřeba použít dvě trojčlenky.

100 % …………… 1 000

90 % …………… x

$$\frac{90}{100} = \frac{x}{1\,000}$$

$x = 900$

100 % …………………… 900

90 % …………………… x

$$\frac{90}{100} = \frac{x}{900}$$

$x = 810$

Správným řešením je možnost D (810).

Ve třetí podúloze Laura bohužel zvolila chybnou strategii řešení a dospěla k chybnému výsledku. Z analýzy její práce je patrné, že chybně interpretovala zadání. Laura se domnívala, že dvě třetiny představují konečnou částku 600 Kč, avšak v zadání i ve vzorovém řešení je jasně uvedeno, že 600 Kč je pouze část, která tvoří dvě třetiny. To znamená, že celek nemůže být 600, jak Laura chybně uvažovala.

Laura si dle mého názoru neuvědomila, že zadání „zlevnění o jednu třetinu" znamená, že výsledná cena bude dvě třetiny, nikoliv jedna třetina, jak se domnívala. Dále tedy počítala, že dvě třetiny jsou 800, a i když použila správnou trojčlenku, výsledek byl zkreslen kvůli zvolení původního čísla, které získala předchozí chybnou úvahou.

15.3 *Kalhoty byly zlevněny o 10 % a později ještě o třetinu nové ceny. Po tomto dvojím zlevněním stály boty 600 Kč. Jaká byla původní cena kalhot?*

Řešení:

$$\frac{2}{3} = 600$$

Jedna třetina ……………. $600 : 2$……… 300

Tři třetiny (celek) ………. $300 \cdot 3 = 900$

90 % …………………… 900

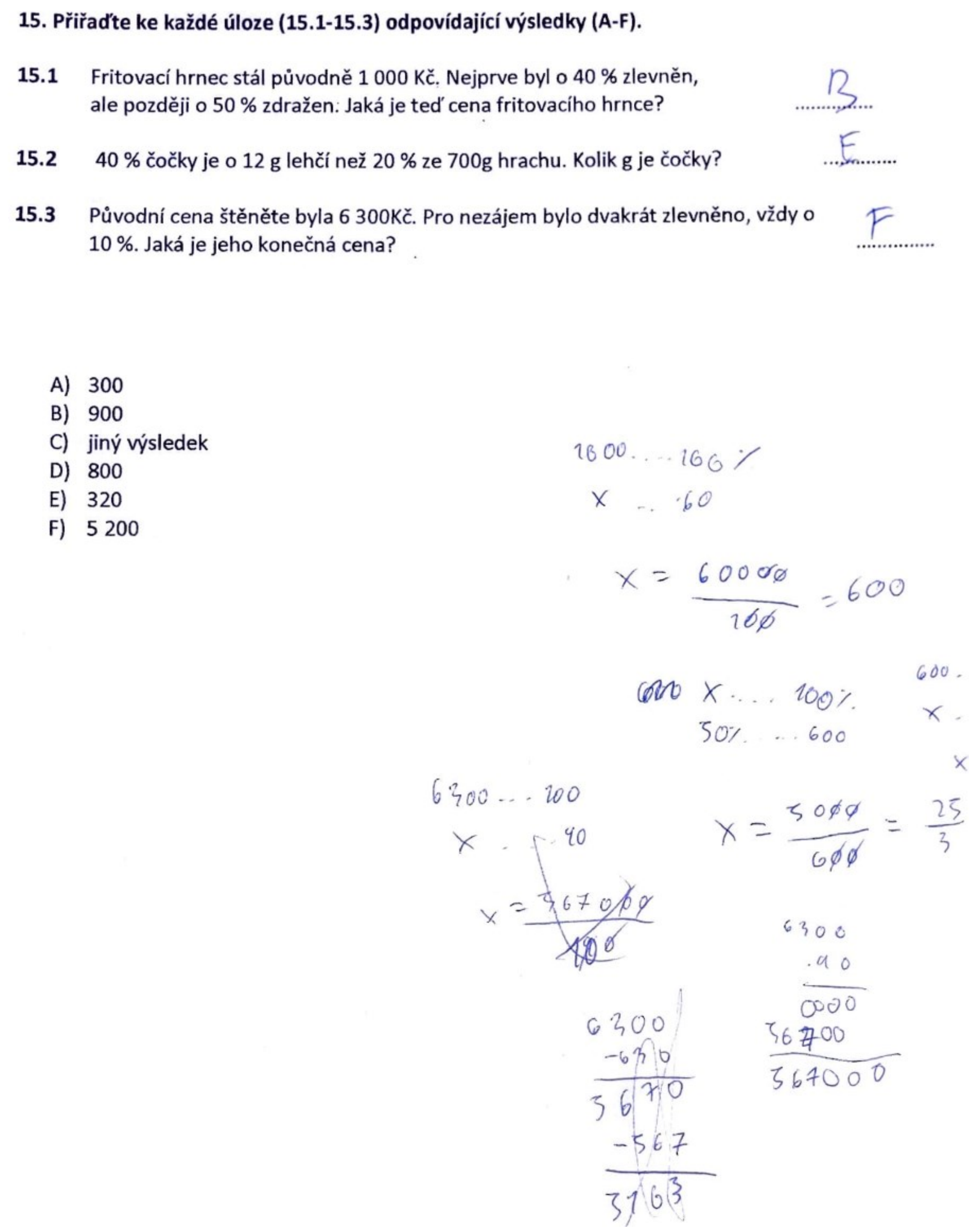
<u>100 % …………………… 1 000</u>

$$\frac{100}{90} = \frac{1\,000}{900}$$

$$x = 1\,000$$

Správnou odpovědí je E (1 000).

V rámci hodnocení Lauřiných řešení jsem se zaměřila také na test č. 9, ve kterém udělala jednu chybu, konkrétně v podúloze č. 15.3. Na obrázku č. 4.4.1.3 Můžeme pozorovat Lauřin postup v první a třetí podúloze tohoto testu.



15. Přiřaďte ke každé úloze (15.1-15.3) odpovídající výsledky (A-F).

15.1 Fritovací hrnec stál původně 1 000 Kč. Nejprve byl o 40 % zlevněn, ale později o 50 % zdražen. Jaká je teď cena fritovacího hrnce? ......B......

15.2 40 % čočky je o 12 g lehčí než 20 % ze 700g hrachu. Kolik g je čočky? ......E......

15.3 Původní cena štěněte byla 6 300Kč. Pro nezájem bylo dvakrát zlevněno, vždy o 10 %. Jaká je jeho konečná cena? ......F......

A) 300
B) 900
C) jiný výsledek
D) 800
E) 320
F) 5 200

Obrázek č. 4.4.1.3 – Řešení Laury testu č. 9

U řešení první podúlohy Laury vidíme, že postupovala podobně jako já ve vzorovém řešení (viz níže). Nejdříve si sestavila trojčlenku na první zlevnění a následně ji vyřešila. Prostřední cena činila částku 600. Dále si udělala další dvě trojčlenky. První trojčlenka byla chybná, jelikož napsala, že 100 % je x a 50 % je 600. Toto správný postup není, jelikož základ musí být právě zmiňovaných 600. Výsledek první trojčlenky jí vyšel $\frac{25}{3}$, domnívám se, že si myslela, že výsledek nemá vyjít ve tvaru zlomku. Naštěstí tedy poté použila druhou trojčlenkou, která je podobná té mé, a vede ke správnému řešení. Tu již vyřešila správně a výsledek ji vyšel jako mně 900.

15.1 *Fritovací hrnec stál původně 1 000 Kč. Nejprve byl o 40 % zlevněn, ale později o 50 % zdražen. Jaká je teď cena fritovacího hrnce?*

Řešení:

100 % → 60 %

100 % → 150 %

Použijeme dvě trojčlenky:

100 % …………… 1 000

60 % …………… x

$$\frac{60}{100} = \frac{x}{1000}$$

$x = 600$

100 % …………………… 600

150 % …………………… x

$$\frac{150}{100} = \frac{x}{600}$$

$x = 900$

Správnou odpovědí je možnost B (900).

I když Laura v druhé podúloze dospěla ke správnému výsledku, bohužel nelze z dostupných materiálů zhodnotit její strategii řešení. Laura mohla ke správnému výsledku dospět opět odhadem, nebo mohla řešení vypracovat na jiném papíře, který následně neodevzdala. Jedná se o jednoduché výpočty s procenty, kdy musíme nejdříve vypočítat 20 % ze 700 a následně použít trojčlenku na výpočet 100 % (viz vzorové řešení).

15.2 *40 % čočky je o 12 g lehčí než 20 % ze 700 g hrachu. Kolik g je čočky?*

Řešení:

Nejdříve si vypočítáme 20 % ze 700. Poté víme, že 40 % čočky je o 12 g méně.

$700 \cdot 0{,}2 = 140$

$140 - 12 = 128$

40 % …………………. 128

<u>100% …………………. x</u>

$$\frac{100}{40} = \frac{x}{128}$$

$$x = 320$$

Správnou odpovědí je možnost E (320).

Na třetí podúlohu Laura odpověděla chybně. Z analýzy její práce je patrné, že Laura nejprve správně zapsala první trojčlenku. Číslice na začátku čitatele je obtížně rozeznatelná, avšak na základě předchozí podúlohy se zdá pravděpodobnější, že se jedná o pětku. Pokud by tomu tak bylo, Laura by dospěla ke správnému výsledku. Nicméně Laura tuto trojčlenku škrtla a dále v řešení nepokračovala. Označila možnost F (5 200), která se v jejím zpracovaném řešení nikde neobjevuje. Dle mého názoru je tedy pravděpodobné, že Laura tuto možnost pouze tipla.

15.3 *Původní cena štěněte byla 6 300 Kč. Pro nezájem bylo dvakrát zlevněno, vždy o 10 %. Jaká je jeho konečná cena?*

Řešení:

100 % …………… 6300

<u>90 % …………… x</u>

$$\frac{90}{100} = \frac{x}{6\,300}$$

$$x = 5\,670$$

100 % ……………………. 5 670

<u>90 % …………………… x</u>

$$\frac{90}{100} = \frac{x}{5\,670}$$

$$x = 5\,103$$

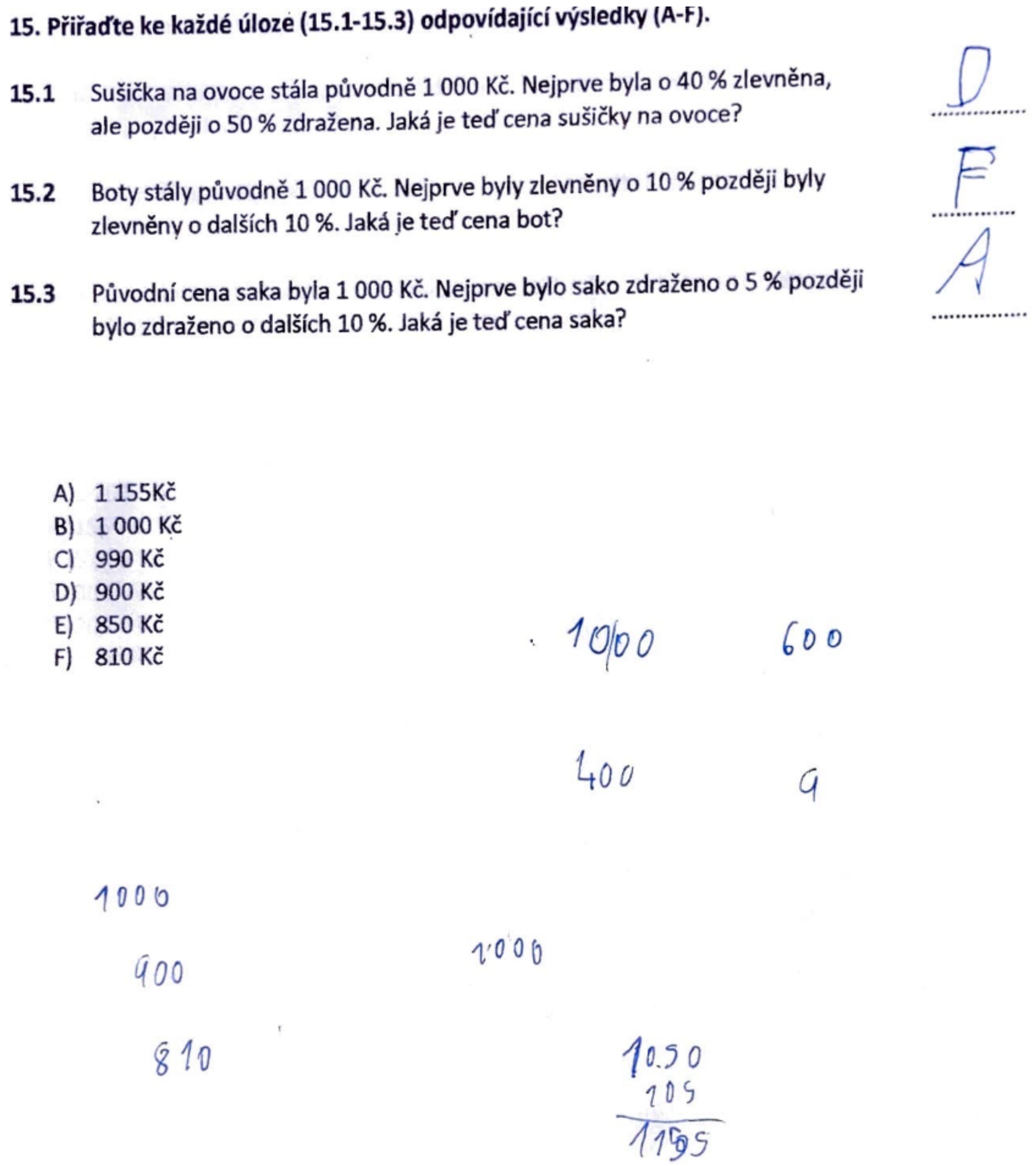
Správnou odpovědí je C (jiný výsledek).

Shrnutí:

Laura v každém ze tří zmiňovaných testů udělala jednu chybu. V prvním testu bohužel chybí záznam postupu, avšak z analýzy zbývajících dvou testů lze usuzovat, že Laura pro řešení úloh s procenty používá trojčlenku (stejně jako já ve vzorovém řešení). V případě, kdy Laura úlohu vyřešila správně, bohužel neuvedla ve zmiňovaných testech svůj postup. Všimla jsem si, že Laura má potíže s řešením úloh pomocí zlomků, jak je patrné z podúlohy č. 15.1 v testu č. 4. Je zajímavé, že Laura v žádné z úloh s procenty nepoužila metodu řešení pomocí jednoho procenta.

4.4.2 Teodor

Při hodnocení Teodorových testů jsem se nejprve zaměřila na test č. 5, který Teodor zvládl s maximálním počtem bodů (viz graf č. 4.2.5, str. 41). I když v dostupných materiálech chybí komplexní zápisy Teodorových postupů a můžeme pozorovat pouze čísla a dílčí výpočty, je pozoruhodné, že Teodor dospěl ke správným výsledkům ve všech podúlohách testu.



15. Přiřaďte ke každé úloze (15.1-15.3) odpovídající výsledky (A-F).

15.1 Sušička na ovoce stála původně 1 000 Kč. Nejprve byla o 40 % zlevněna, ale později o 50 % zdražena. Jaká je teď cena sušičky na ovoce? D

15.2 Boty stály původně 1 000 Kč. Nejprve byly zlevněny o 10 % později byly zlevněny o dalších 10 %. Jaká je teď cena bot? F

15.3 Původní cena saka byla 1 000 Kč. Nejprve bylo sako zdraženo o 5 % později bylo zdraženo o dalších 10 %. Jaká je teď cena saka? A

A) 1 155Kč
B) 1 000 Kč
C) 990 Kč
D) 900 Kč
E) 850 Kč
F) 810 Kč

1000 600
400 9
1000
900
810
1000
1050
105
1155

Obrázek č. 4.4.2.1 – Řešení Teodora testu č. 5

Teodor v první podúloze dosáhl správného výsledku. Analýza jeho postupu naznačuje, že se Teodor nesnažil o detailní zápis postupu. Z jeho práce (viz obrázek č. 4.4.2.1) můžeme pozorovat pouze čísla. I když Teodor nerozvádí svůj postup krok za krokem, v jeho řešení se objevuje číslo 600, které odpovídá prostřední ceně dle vzorového řešení. Je pravděpodobné, že Teodor k tomuto číslu dospěl odečtením 400 od 1 000. Zdá se, že Teodor dále provedl další výpočet, a to pravděpodobně zpaměti, jehož výsledkem je 900. Toto číslo Teodor následně správně přiřadil k možnosti D.

15.1 *Sušička na ovoce stála původně 1 000 Kč. Nejprve byla o 40 % zlevněna,*

ale později o 50 % zdražena. Jaká je teď cena sušičky na ovoce?

Řešení této podúlohy je stejné jako řešení podúlohy č. 15.1 v testu č. 9 (viz Laura, str. 53).

Teodor v druhé podúloze dosáhl správného výsledku. Nicméně z dostupných materiálů nelze s jistotou zhodnotit jeho postup, jelikož můžeme pozorovat pouze výsledná čísla, která se shodují s mým vzorovým řešením. Číslo 900 lze odvodit z paměti ze základu 1000, kde 10 % odpovídá 100, a tedy 90 % musí být 900. Na základě dostupných informací nelze s jistotou určit, jakou strategii Teodor pro řešení úlohy zvolil. Mohl použít trojčlenku, výpočet s jedním procentem nebo jiný postup. Důležité je, že Teodor dospěl ke správnému výsledku a označil možnost F (810).

15.2 *Boty stály původně 1 000 Kč. Nejprve byly zlevněny o 10 % později byly*

Zlevněny o dalších 10 %. Jaká je teď cena bot?

Řešení této podúlohy je stejné jako řešení podúlohy č. 15.2 v testu č. 7 (viz Laura, str. 50).

Třetí podúlohu měl Teodor také správně. U této podúlohy si uvědomuji, že byl tento test zadán opravdu jednoduše, jelikož ve všech třech případech byl dán vždy základ 1 000. Vzhledem k této skutečnosti je pravděpodobné, že Teodor úlohu vyřešil spíše z paměti než detailním výpočtem s psaným postupem. I přes tento přístup dosáhl Teodor správného výsledku a označil možnost A (1 155).

15.3 *Původní cena saka byla 1 000 Kč. Nejprve bylo sako zdraženo o 5 %, později bylo zdraženo o dalších 10 %. Jaká je teď cena saka?*

100 % → 105 %

100 % → 110%

Použijeme dvě trojčlenky:

100 % …………… 1 000	100 % …………………… 1 050
105 % …………… x	110 % …………………… x
$\frac{105}{100} = \frac{x}{1000}$	$\frac{110}{100} = \frac{x}{1\,050}$
x =1 050	$x = 1\,155$

Správnou odpovědí je možnost F (1 155).

Teodor v testu č.8 udělal dvě chyby viz graf č. 4.2.3 (str. 40), konkrétně v první a druhé podúloze. Díky podrobně zaznamenaným postupům v Teodorově testu můžeme blíže analyzovat jeho chyby a identifikovat jejich příčiny.

15. Přiřaďte ke každé úloze (15.1-15.3) odpovídající výsledky (A-F).

15.1 Po zdražení o 15 % byla cena bezdrátových sluchátek 5 980 Kč. Jaká byla jejich původní cena? ......C......

15.2 Ve vánočním výprodeji se všechno zboží prodávalo o čtvrtinu levněji. O kolik korun byl zlevněn rolák, který se prodával ve výprodeji za 576 Kč? ......B......

15.3 Jakub měl našetřeno o dvě pětiny více peněz než Jana, která má 360 Kč. Kolik korun má ~~Jana~~ našetřeno? ......A......

?

Jakub !

A) 504
B) 800
C) jiný výsledek
D) 192
E) 5 300
F) 5 200

$5980 = 85\,\%$ $\quad 85 : 5 = 17$, 35

$5980 : 10 = 598 : \cancel{5} =$

$598 : 2 = 299$, 19, 18

$$\begin{array}{r} 299 \\ \cdot 17 \\ \hline 2093 \\ 299 \\ \hline 5083 \end{array}$$

$576 = 75\,\%$ $\quad 75 : 5 = 15$, 25

$576 = \frac{3}{4}$

$576 : 3 = 192$, 27

$$\begin{array}{r} 192 \\ \cdot 4 \\ \hline 768 \end{array}$$

Jakub $= \frac{7}{5}x$

Jana $= 360$ Kč $= \frac{5}{5}$

$360 : 5 = 72$, 10

$$\begin{array}{r} 72 \\ \cdot 7 \\ \hline 504 \end{array}$$

Obrázek č. 4.4.2.2 – Řešení Teodora testu č. 8

Z analýzy Teodorova testu je patrné, že pro řešení úlohy nepoužil trojčlenku (viz obrázek č. 4.4.2.2, což samo o sobě není nutně chyba, jelikož existují i jiné postupy, které vedou ke správnému výsledku. Nicméně Teodorův zvolený postup obsahoval hned několik chyb, které vedly k chybnému závěru. Teodor chybně interpretoval zadání, když uvedl, že 85 % je částka uvedená v zadání (5 980 Kč). Správně by měl chápat 85 % jako procentuální vyjádření zdražení.

Vzhledem k tomu, že se jedná o zdražení, ne zlevnění, Teodor měl k 100 % přičíst 15 %, nikoliv je odečítat. Teodor následně provedl nesmyslné dělení $85 : 5$, čímž dále zkreslil svůj výpočet a ztratil přehled o poměrech v úloze. Vzhledem k výše uvedeným chybám Teodor dospěl k chybnému výsledku v první podúloze.

15.1 *Po zdražení o 15 % byla cena bezdrátových sluchátek 5 980 Kč.*

Jaká byla jejich původní cena?

Řešení:

115 % …………………… 5980

100 % …………………… x

$$\frac{100}{115} = \frac{x}{5980}$$

$$x = 5200$$

Správnou možností bylo F (5200).

Teodor bohužel nedosáhl správného výsledku ani v druhé podúloze. Z analýzy jeho postupu je patrné, že se mu podařilo dospět ke správnému mezivýsledku, tj. k výpočtu ceny roláku před zlevněním. Bohužel Teodor v dalším kroku chyboval, když vynásobil 192 (čtvrtinu původní ceny) čtyřmi, čímž došel k celku (ceně před zlevněním). Teodor si mohl chybně přečíst zadání a chybně pochopit, co se po něm v úloze požaduje. Mohl si také myslet, že má vypočítat celkovou cenu roláku po zlevnění namísto zjištění, o kolik se cena snížila. Dle mého názoru se jedná spíše o chybu z nepozornosti.

15.2 *Ve vánočním výprodeji se všechno zboží prodávalo o čtvrtinu levněji.*

O kolik korun byl zlevněn rolák, který se prodával ve výprodeji za 576 Kč?

Řešení:

Tři čtvrtiny …………. 576 Kč

Zboží bylo zlevněno o jednu čtvrtinu, tudíž ji stačí zjistit.

$573 : 3 = 192$

Správným řešením je D (192).

Ve třetí podúloze Teodor dosáhl správného výsledku. Z analýzy Teodorova testu v této podúloze je patrné, že postupoval shodně s mým vzorovým řešením. To naznačuje, že Teodor má dobrou znalost principů řešení slovních úloh se zlomky. Vzhledem k tomuto poznatku je pravděpodobné, že jeho chyba v předchozí podúloze pramenila z nedostatečného pochopení zadání, nikoliv z nedostatku znalostí.

15.3 *Jakub měl našetřeno o dvě pětiny více peněz než Jana, která má 360 Kč.*

Kolik korun má Jana našetřeno?

Řešení této podúlohy je stejné jako u podúlohy 15.3 testu č. 4 (viz Laura, str. 49).

Dále jsem vybrala test č. 10, v tomto testu Teodor chyboval pouze jednou (viz graf č. 4.2.5, str. 41). Jak uvidíme níže, bylo to konkrétně v podúloze č. 15.1. Dle mého názoru tato úloha patří mezi nejjednodušší úlohy na procenta v testu a vyžaduje pouze sestavení trojčlenky a následný výpočet jednoduché rovnice.

15. Přiřaďte ke každé úloze (15.1-15.3) odpovídající výsledky (A-F).

15.1 Celodenní permanentka na vlek stojí 480 Kč. Kolik korun stojí odpolední jízdenka, která je o 40 % levnější? ......C......

15.2 Cena brýlí byla dvakrát zvýšena o 10 %. Původní cena brýlí byla 400 Kč. Jaká byla konečná cena brýlí? ......B......

15.3 Původní kabátu byla 1 000 Kč. Nejprve byl kabát zdražen o 5 %, později byl zdražen o dalších 10 %. Jaká je teď cena kabátu? ......F......

A) 300
B) 484
C) jiný výsledek
D) 288
E) 1 000
F) 1 155

$$\begin{array}{r} 4{,}8 \\ \cdot 60 \\ \hline 00 \\ 288 \\ \hline 288 \end{array}$$

$400 : 10 = 40$

$440 : 10 = 44$

$$\begin{array}{r} 440 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$

$480 : 100 = 4{,}8$

$1000 : 100 = 10$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \cdot 5 \\ \hline 50 \end{array}$$

$1050 : 10 = 105$

$$\begin{array}{r} 1050 \\ 105 \\ \hline 1155 \end{array}$$

Obrázek č. 4.4.2.3 – Řešení Teodora testu č. 10

Teodor zvolil v první podúloze chybnou odpověď. Je však zajímavé, že v jeho řešení (viz obrázek č. 4.4.2.3) se nachází i správná varianta (288). Domnívám se tedy, že se Teodor v průběhu řešení úlohy překoukl a chybně označil jinou možnost. Teodor si mohl také nevšimnout, že možnost 288 se v nabízených odpovědích skutečně nachází.

15.1 *Celodenní permanentka na vlek stojí 480 Kč. Kolik korun stojí odpolední jízdenka, která je o 40 % levnější?*

Řešení:

100 % ……………. 480

60 % ……………. x

$$\frac{60}{100} = \frac{x}{480}$$

$x = 288$

Správnou odpovědí je možnost D (288).

Teodor v této podúloze dosáhl správného výsledku, i když jeho použitý postup se značně liší od mého vzorového řešení, které zahrnuje trojčlenku. Z hlediska matematiky je Teodorův postup neobvyklý a nelogický a jeho postup nedokážu vysvětlit, jelikož postupoval velmi zvláštně. Nejdříve dělil $400 : 10$ a následně výsledek (40) přičetl k částce ze zadání (400), tudíž dostal číslo 440. Dále dělil $440 : 10 = 44$, a toto číslo přičetl k 440. Výsledek mu vyšel 484 (možnost B).

Nemohu s jistotou říci, jak Teodor k tomuto výsledku dospěl a proč ho zvolil. Je možné, že se jednalo o náhodnou intuitivní strategii, která v tomto specifickém případě vedla k správnému výsledku. Zdá se, že Teodor pochopil principy řešení úloh tohoto typu a dokázal je, alespoň v tomto konkrétním případě, aplikovat logickým a systematickým způsobem. Pouhá náhoda v tomto případě by nezaručovala správný výsledek v budoucích úlohách.

15.2 *Cena brýlí byla dvakrát zvýšena o 10 %. Původní cena brýlí byla 400 Kč.*

Jaká byla konečná cena brýlí?

Tato podúloha má stejné řešení jako podúloha č. 15.2 u testu č. 4 (viz Laura).

Teodor měl třetí podúlohu také správně. Podle jeho postupu vidíme, že v jeho řešení se stále neobjevuje trojčlenka. Z analýzy Teodorova testu je patrné, že k výsledku dospěl spíše intuitivním a neformálním způsobem. Vzhledem k jednoduchosti čísel v zadání (kdy základ 100 % = 1000) a k Teodorově předchozí zkušenosti s řešením podobných úloh, se domnívám, že v tomto případě nepovažoval za nutnost používat trojčlenku.

15.3 *Původní cena kabátu byla 1 000 Kč. Nejprve byl kabát zdražen o 5 %, později*

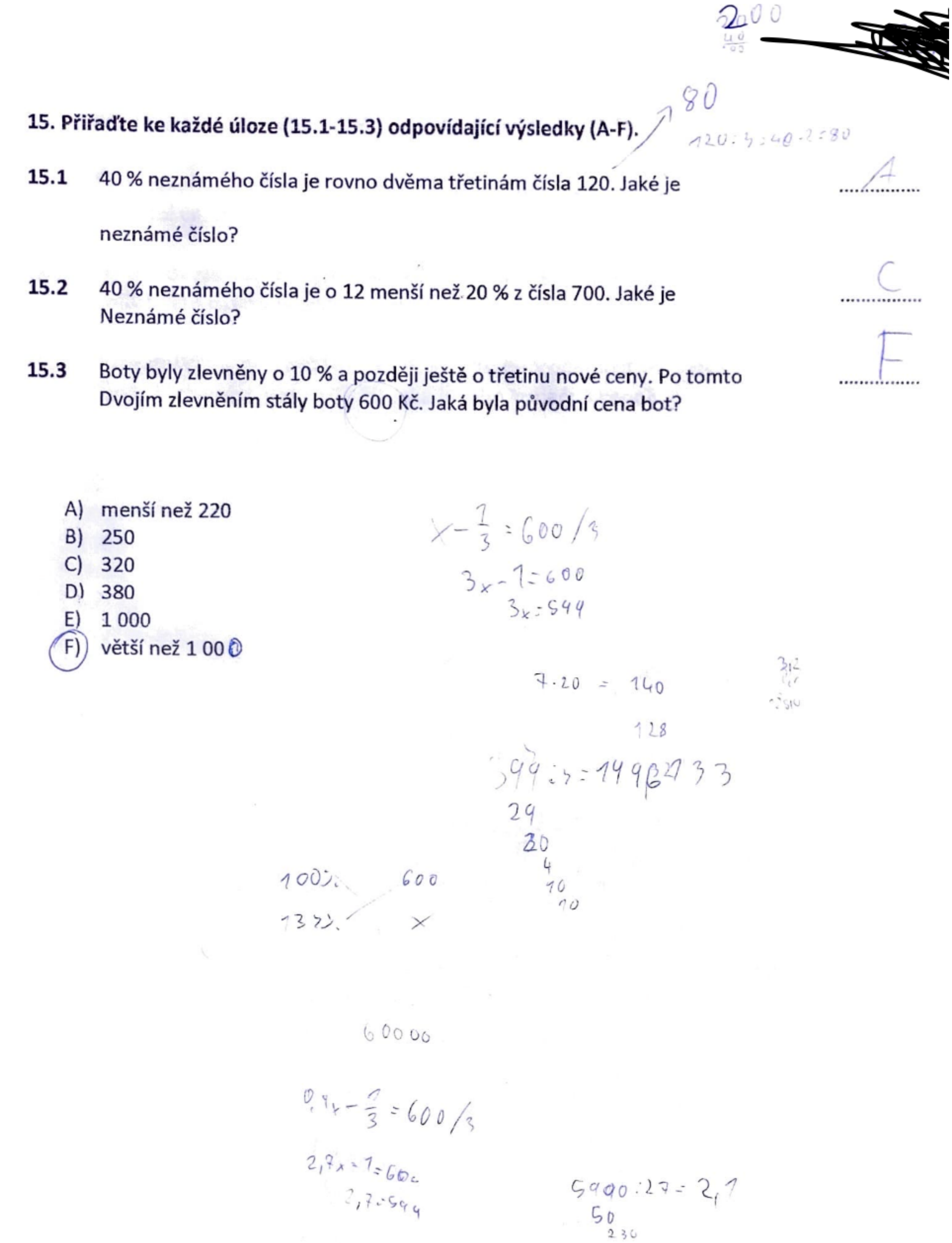
byl zdražen o dalších 10 %. Jaká je teď cena kabátu?

Řešení této podúlohy je stejné jako řešení podúlohy č. 15.2 v testu č. 5 (viz Teodor, str. 56).

K analýze Teodorových testů jsem si vybrala také tři testy (stejně jako u Laury). Teodor měl vždy alespoň jednu podúlohu v každém z vybraných testů správně. Teodor v řešení úloh nepoužívá trojčlenku. Místo toho procentní výpočty provádí pomocí dělení a násobení. V případě testu č. 5 Teodor do řešení nezahrnoval žádný popis postupu, pouze zapisoval čísla. I přes tuto neformální strategii dosáhl Teodor v tomto testu plného počtu bodů. Na rozdíl od Laury Teodor zvládá počítání se zlomky bez zjevnějších potíží.

4.4.3 Josef

U analýzy Josefa jsem si nejdříve vybrala test č. 1, ve kterém udělal jednu chybu (viz graf č. 4.2.1, str. 39). Podle jeho řešení můžeme vidět, že se jedná o třetí podúlohu v tomto testu.


2000 [redacted]

80

120 : 3 = 40 · 2 = 80

15. Přiřaďte ke každé úloze (15.1-15.3) odpovídající výsledky (A-F).

15.1 40 % neznámého čísla je rovno dvěma třetinám čísla 120. Jaké je neznámé číslo? ...A...

15.2 40 % neznámého čísla je o 12 menší než 20 % z čísla 700. Jaké je Neznámé číslo? ...C...

15.3 Boty byly zlevněny o 10 % a později ještě o třetinu nové ceny. Po tomto Dvojím zlevněním stály boty 600 Kč. Jaká byla původní cena bot? ...F...

A) menší než 220
B) 250
C) 320
D) 380
E) 1 000
F) větší než 1 000

$x - \frac{1}{3} = 600 / 3$

$3x - 1 = 600$

$3x = 599$

$7 \cdot 20 = 140$

100 % ... 600

133 % ... x

60000

$0{,}9x - \frac{1}{3} = 600 / 3$

$2{,}7x - 1 = 600$

$2{,}7 = 599$

5990 : 27 = 2,1

Obrázek 4.4.3.1 – Řešení Josefa testu č. 1

Josef ve třetí podúloze dosáhl správného výsledku. Nicméně z jeho postupu řešení můžeme vidět, že se jedná pouze o fragmentární řešení. Josef v prvním kroku správně určil dvě třetiny z čísla 120. Následně musel pro výpočet 100 % použít další matematickou operaci, která ale v jeho řešení není uvedena. Výsledek (menší než 220) však přiřadil správně (možnost A).

15.1 *40 % neznámého čísla je rovno dvěma třetinám čísla 120. Jaké je neznámé číslo?*

Řešení:

Nejdříve zjistíme dvě třetiny ze 120

$\frac{2}{3} \cdot 20 = 80$

40 % …………………. 80

100 % …………………. x

$\frac{100}{40} = \frac{x}{80}$

$x = 200$

Správným řešením je možnost A (menší než 220).

Josef v druhé podúloze dosáhl také správného výsledku. Nicméně v jeho odevzdaných materiálech se nenachází žádný dokumentovaný postup řešení. Je možné, že Josef úlohu vyřešil zpaměti, a proto nepotřeboval psát žádný postup. Výsledek mohl také tipnout, nebo mohl svůj postup zapsat na jiný papír, který bohužel neodevzdal.

15.2 *40 % neznámého čísla je o 12 menší než 20 % z čísla 700. Jaké je neznámé číslo?*

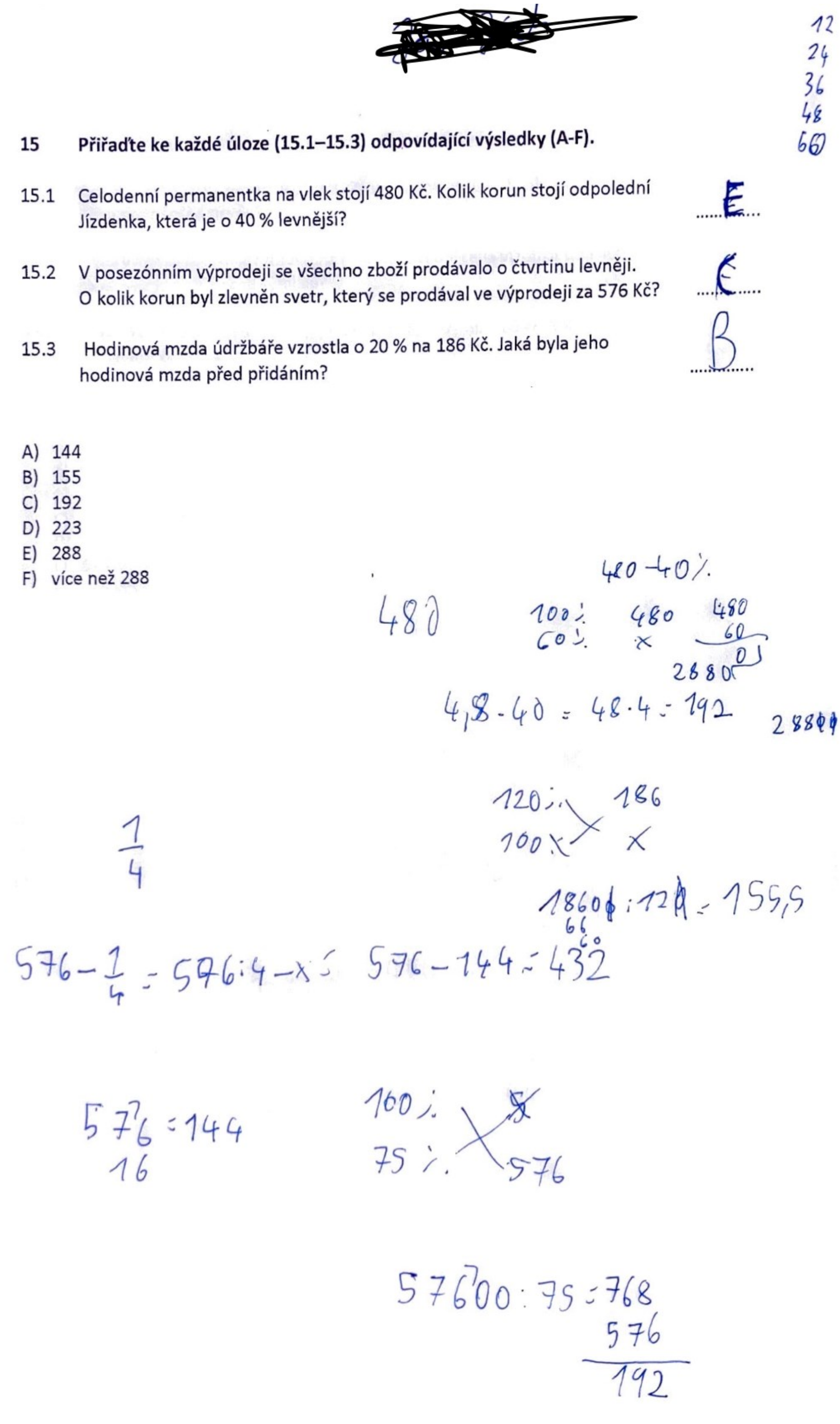
Tato podúloha má stejné řešení jako podúloha č. 15.2 testu č. 9 (viz Laura, str. 53–54).

Na třetí podúlohu již Josef správně neodpověděl, tudíž jeho test nebyl stoprocentně úspěšný. Josef se v řešení podúlohy pokusil použít trojčlenku. Z analýzy jeho postupu je však patrné, že trojčlenku aplikoval chybně. Zaměřil se na výpočet 33 % z 600, čímž by dospěl k zlevnění o 67 %. Toto však neodpovídá zadání, které vyžaduje výpočet celku ze dvou třetin. Také si myslím, že převod jedné třetiny na procenta v tomto případě není vhodný, jelikož nám vede k výsledku desetinného periodického čísla.

15.3 *Boty byly zlevněny o 10 % a později ještě o třetinu nové ceny. Po tomto dvojím zlevněním stály boty 600 Kč. Jaká byla původní cena bot?*

Řešení této podúlohy je stejné jako řešení podúlohy č. 15.3 testu č. 7 (viz Laura, str. 51).

Josef dosáhl v testu č. 3 plného počtu bodů viz graf č. 4.2.3 (str. 40). Přišlo mi zajímavé, že v podúlohách 15.1 a 15.2 Josef váhal mezi dvěma možnými odpověďmi. Z analýzy Josefova řešení podúlohy 15.2 vyplývá, že jeho výsledek se shoduje s jeho druhým chybným řešením v úloze viz níže.


[redacted]

12
24
36
48
60

15 Přiřaďte ke každé úloze (15.1–15.3) odpovídající výsledky (A-F).

15.1 Celodenní permanentka na vlek stojí 480 Kč. Kolik korun stojí odpolední Jízdenka, která je o 40 % levnější? ……E……

15.2 V posezónním výprodeji se všechno zboží prodávalo o čtvrtinu levněji. O kolik korun byl zlevněn svetr, který se prodával ve výprodeji za 576 Kč? ……C……

15.3 Hodinová mzda údržbáře vzrostla o 20 % na 186 Kč. Jaká byla jeho hodinová mzda před přidáním? ……B……

A) 144
B) 155
C) 192
D) 223
E) 288
F) více než 288

480 − 40 %

480

100 % 480
60 % x

480 · 60 = 28800

4,8 · 40 = 48 · 4 = 192

28800

120 % 186
100 % x

1860 : 12 = 155,5

$\frac{1}{4}$

576 − $\frac{1}{4}$ = 576 : 4 − x = 576 − 144 = 432

576 : 4 = 144

100 % x
75 % 576

57600 : 75 = 768
768 − 576 = 192

Obrázek 4.4.3.2 – Řešení Josefa testu č. 3

Josef v první podúloze dosáhl správného výsledku. Nicméně z jeho řešení (viz obrázek č. 4.4.3.2) je patrné, že v průběhu postupu zaváhal. Josef zpočátku postupoval správně a vhodně aplikoval trojčlenku. Správně vynásobil 60 číslem 480 a dostal výsledek 288 000. Následně tento výsledek korektně vydělil číslem 100 a dosáhl tak správného řešení. Dále však v řešení pokračoval i po dosažení správného výsledku. Snažil se vynásobit 4,8 číslem 40, čímž došel k chybnému číslu 192. I přes tento zbytečný krok se Josef nakonec rozhodl správně a označil možnost E (288).

15.1 *Celodenní permanentka na vlek stojí 480 Kč. Kolik korun stojí odpolední jízdenka, která je o 40 % levnější?*

Řešení této podúlohy je stejné jako u podúlohy č. 15.1 testu č. 10 (viz Teodor, str. 62).

Josef zvolil v druhé podúloze nealgoritmickou strategii řešení, a i přes odlišný přístup dospěl ke správnému výsledku. Nejdříve si správně určil, že tři čtvrtiny odpovídají 75 %, dále pokračoval trojčlenkou a vypočítal si celek (100 %). Jelikož bylo zboží zlevněno o jednu čtvrtinu, kterou potřeboval zjistit, musel částku ze zadání (576) odečíst od celku (768). Tímto výpočtem Josef dospěl ke správnému výsledku. Domnívám se, že Josef na základě svého výpočtu změnil svoji odpověď z E (288) na správnou odpověď C (192).

15.2 *V posezónním výprodeji se všechno zboží prodávalo o čtvrtinu levněji.*

O kolik korun byl zlevněn svetr, který se prodával ve výprodeji za 576 Kč?

Řešení:

Tato podúloha je stejná jako podúloha 15.2 z osmého testu. Vzorové řešení nalezneme v podúloze 15.2 testu č. 8 (viz Teodor, str. 60).

Josef ve třetí podúloze zvolil správný postup řešení a dosáhl tak správného výsledku. Nejprve správně sestavil trojčlenku a po dosazení čísel do trojčlenky Josef provedl dělení 18 600 : 120. V závěrečné fázi výpočtu došel k výsledku 155,5 (po zaokrouhlení 156), ačkoli správný výsledek je 155, musel tedy udělat chybu v postupu zmiňovaného dělení. Domnívám se, že pokud by v možnostech bylo na výběr číslo 156, mohl by Josef odpovědět chybně. Tato možnost se však v testu nevyskytovala a Josef odpověděl správně možnost B (155).

15.3 *Hodinová mzda údržbáře vzrostla o 20 % na 186 Kč. Jaká byla jeho hodinová mzda před přidáním?*

Řešení:

120 % …………… 186

<u>100 % …………… x</u>

$$\frac{100}{120} = \frac{x}{186}$$

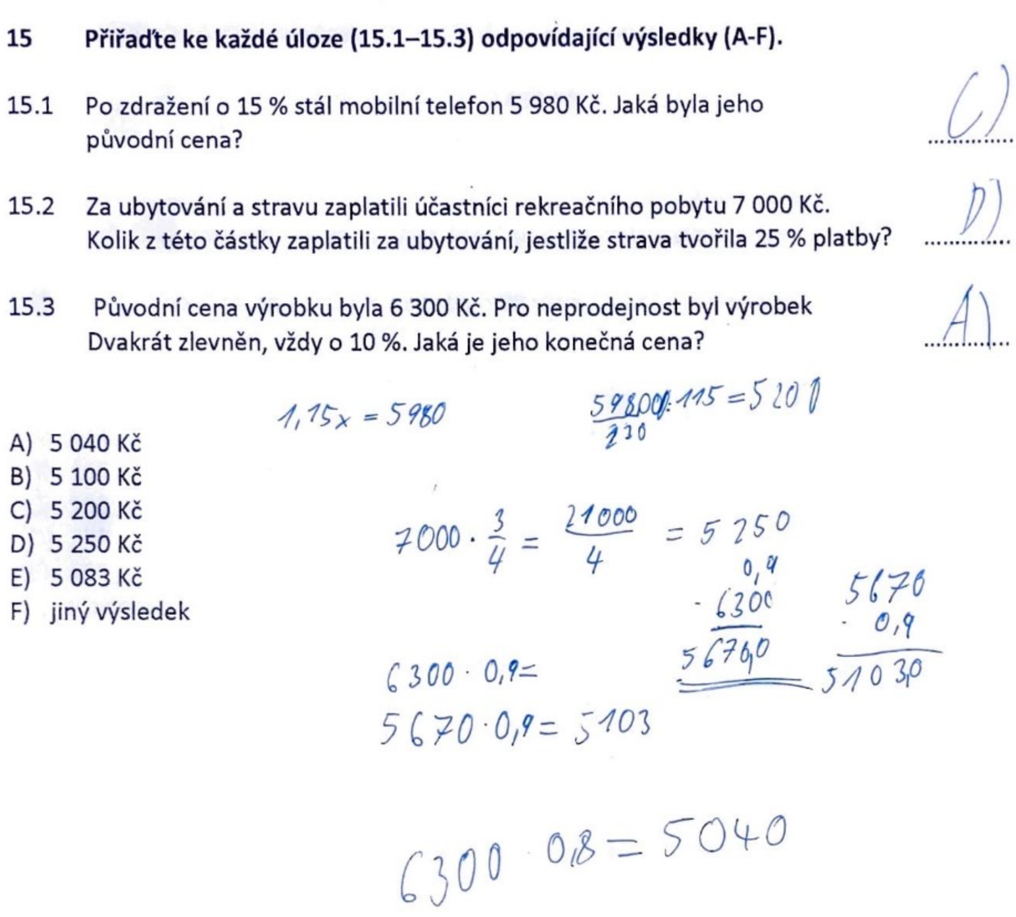
$x = 155$

Správnou odpovědí je možnost B (155).

Josef ve svých výpočtech u úloh s procenty používá trojčlenku, neaplikuje metodu výpočtu pomocí jednoho procenta. Josef měl ve vybraných testech pouze jednu chybu. Tato chyba se objevila v úloze, která měla v zadání kombinaci zlomků a procent.

4.4.4 Aleš

Aleš v testu č. 2 udělal jednu chybu viz graf č. 4.2.2 (str. 39). V Alešově řešení podúlohy 15.3, jak je patrné z obrázku č. 4.4.4.1, se správný výsledek nachází. Nicméně, následně v testu Aleš chybně zadal svoji odpověď.



15 Přiřaďte ke každé úloze (15.1–15.3) odpovídající výsledky (A-F).

15.1 Po zdražení o 15 % stál mobilní telefon 5 980 Kč. Jaká byla jeho původní cena? ...C)...

15.2 Za ubytování a stravu zaplatili účastníci rekreačního pobytu 7 000 Kč. Kolik z této částky zaplatili za ubytování, jestliže strava tvořila 25 % platby? ...D)...

15.3 Původní cena výrobku byla 6 300 Kč. Pro neprodejnost byl výrobek Dvakrát zlevněn, vždy o 10 %. Jaká je jeho konečná cena? ...A)...

A) 5 040 Kč
B) 5 100 Kč
C) 5 200 Kč
D) 5 250 Kč
E) 5 083 Kč
F) jiný výsledek

$1,15x = 5980$

$598000 : 115 = 5200$

$7000 \cdot \frac{3}{4} = \frac{21000}{4} = 5250$

$6300 \cdot 0,9 =$

$5670 \cdot 0,9 = 5103$

$6300 \cdot 0,8 = 5040$

Obrázek 4.4.4.1 – Řešení Aleše testu č. 2

Aleš v první podúloze zvolil efektivní přístup, který se podobá vzorovému řešení. Místo zápisu trojčlenky, kterou si pravděpodobně představil v hlavě, přešel přímo k výpočtu. Nejprve správně určil, že zadaná částka (5 980 Kč) představuje 115 % a následně provedl výpočet trojčlenky pro zjištění 100 %. Na základě výpočtu Aleš správně zvolil možnost C (5 200 Kč).

15.1 *Po zdražení o 15 % stál mobilní telefon 5 980 Kč. Jaká byla jeho původní cena?*

Řešení:

115 % …………………… 5 980

<u>100 % …………………… x</u>

$$\frac{100}{115} = \frac{x}{5\ 980}$$

$$x = 5\ 200$$

Správnou odpovědí je možnost C (5 200 Kč).

Aleš prokázal v druhé podúloze alternativní přístup k řešení, který se liší od vzorového řešení. Místo použití procent Aleš zvolil výpočet pomocí zlomků. Nejprve správně rozpoznal, že 25 % představuje jednu čtvrtinu a cílem úlohy je vypočítat trojnásobek této hodnoty. Následně Aleš vynásobil 7 000 Kč třemi čtvrtinami $\left(\frac{3}{4}\right)$, čímž dosáhl správného výsledku 5 250 Kč. Výsledek Alešova výpočtu se shoduje se správnou odpovědí D.

15.2 *Za ubytování a stravu zaplatili účastníci rekreačního pobytu 7 000 Kč. Kolik z této částky zaplatili za ubytování, jestliže strava tvořila 25 % platby?*

Řešení:

100 % ……………. 7 000

<u>75 % ……………... x</u>

$$\frac{75}{100} = \frac{x}{1\ 000}$$

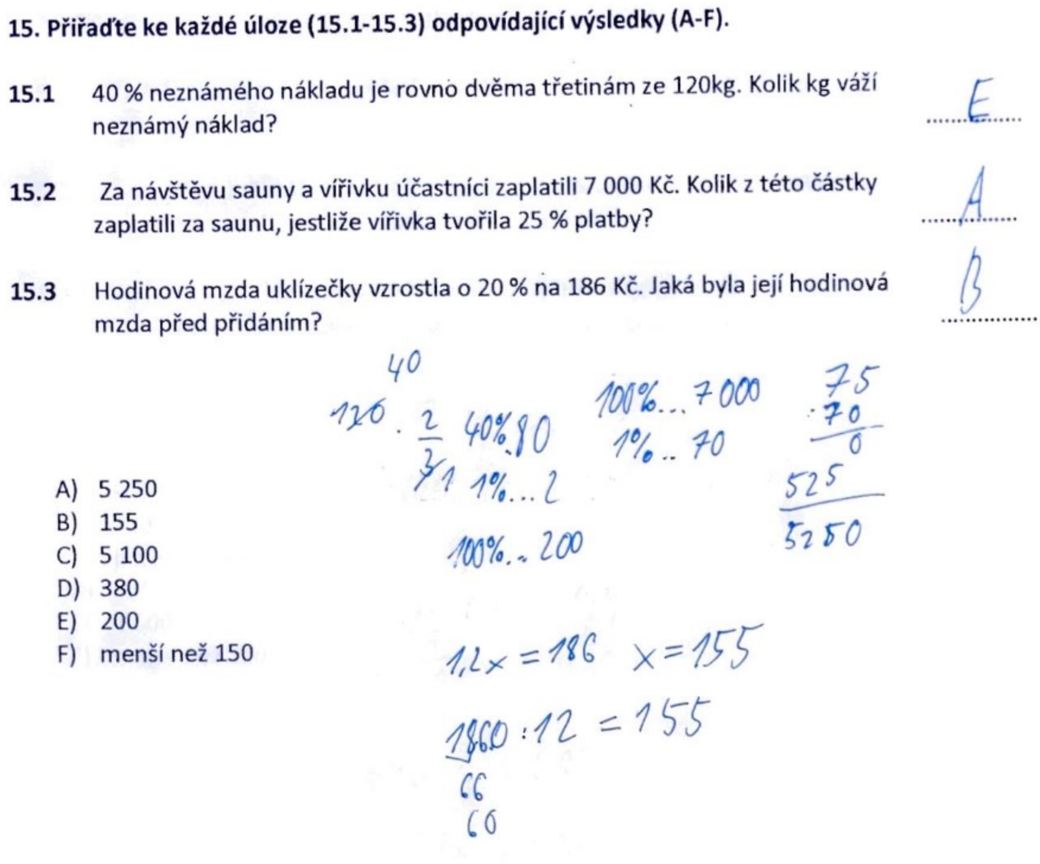
$$x = 5\ 250$$

Správný řešením je možnost D (5 250).

Aleš ve třetí podúloze chyboval. I když ze začátku postupoval správně (viz obrázek 4.4.4.1), v dalším kroku udělal chybu, která vedla k chybnému výsledku. Aleš v první části výpočtu postupoval správně, ale v určitém momentě se jeho postup odchýlil od správného řešení. Chybně vynásobil 6 300 Kč koeficientem 0,8, čímž dosáhl chybného výsledku 5 040 Kč. Vzhledem k tomu, že se hodnota 5 670 Kč nenacházela mezi nabídkami možností, zvolil jinou dostupnou možnost (5 040 Kč – možnost A). Je možné, že se Aleš obával zvolit možnost s odpovědí "jiný výsledek", a proto zvolil chybnou možnost A.

15.3 *Původní cena výrobku byla 6 300 Kč. Pro neprodejnost byl výrobek dvakrát zlevněn, vždy o 10 %. Jaká je jeho konečná cena?*

Řešení této podúlohy je stejné jako u podúlohy č. 15.3 testu č. 9 (viz Laura str. 54).



15. Přiřaďte ke každé úloze (15.1-15.3) odpovídající výsledky (A-F).

15.1 40 % neznámého nákladu je rovno dvěma třetinám ze 120kg. Kolik kg váží neznámý náklad? ......E......

15.2 Za návštěvu sauny a vířivku účastníci zaplatili 7 000 Kč. Kolik z této částky zaplatili za saunu, jestliže vířivka tvořila 25 % platby? ......A......

15.3 Hodinová mzda uklízečky vzrostla o 20 % na 186 Kč. Jaká byla její hodinová mzda před přidáním? ......B......

A) 5 250
B) 155
C) 5 100
D) 380
E) 200
F) menší než 150

40

$120 \cdot \frac{2}{3}$ 40% 80
1% ... 2
100% ... 200

100% ... 7 000
1% .. 70

75 · 70

525
5250

$1{,}2x = 186$ $x = 155$

$1860 : 12 = 155$

Obrázek 4.4.4.2 – Řešení Aleše testu č. 6

Pro další analýzu Alešova řešení jsem zvolila test č. 6. Tento test Aleš zvládl bezchybně, jak je patrné z grafu č. 4.2.1. Volba tohoto testu umožňuje prozkoumání Alešova postupu a můžeme tak provést komplexní analýzu jeho přístupu k řešení úloh.

Aleš dosáhl v první podúloze správného výsledku (viz obrázek č. 4.4.4.2), jeho přístup se však lišil od mého vzorového řešení, kdy jsem pro výpočet využívala trojčlenku. Aleš zvolil strategii výpočtu pomocí jednoho procenta. Nejprve si spočítal dvě třetiny ze 120 a následně si zaznamenal, že 40 % je 80. Dále si musel určit 1 %, které mu vyšlo 2 (myslím si, že tento krok by bylo možné provést i zpaměti, jelikož jde o jednoduché dělení (80 : 40). Následně vynásobil 100 a dospěl ke správnému výsledku 200, jako výsledek této podúlohy zvolil správnou možnost E (200).

15.1 *40 % neznámého nákladu je rovno dvěma třetinám ze 120 kg. Kolik kg váží neznámý náklad?*

Tato podúloha má stejné řešení jako podúloha č. 15.1 testu č. 1 (viz Josef).

V této podúloze Aleš opět dosáhl správného výsledku. Stejně jako v předchozí úloze používal metodu výpočtu pomocí jednoho procenta a nevyužíval trojčlenky, jako já ve vzorovém řešení. Aleš také dospěl ke správnému výsledku a zvolil tak správnou odpověď A (5 250).

15.2 *Za návštěvu sauny a vířivky účastníci zaplatili 7 000 Kč. Kolik z této částky zaplatili za saunu, jestliže vířivka tvořila 25 % platby?*

Tato podúloha má stejné řešení jako podúloha č. 15.2 testu č. 2 (viz Aleš).

Třetí podúlohu vyřešil Aleš správně. Podle jeho postupu řešení vidíme, že opět nepoužil trojčlenku. V tomto případě zvolil strategii řešení pomocí rovnice. Aleš správně na levou stranu rovnice umístil $1{,}2x$ a na pravou stranu 186. Následně Aleš rovnici vyřešil standardním postupem pro řešení rovnice s jednou neznámou a vyjádřil x, které vyšlo rovno 155. Dospěl tak ke správnému výsledku 155, kdy tato hodnota odpovídá správné odpovědi B (155).

15.3 *Hodinová mzda uklízečky vzrostla o 20 % na 186 Kč. Jaká byla její hodinová mzda před přidáním?*

Tato podúloha má stejné řešení jako podúloha č. 15.2 testu č. 3 (viz Josef).

Aleš dosáhl ze všech žáků celkově nejlepší skóre. Udělal totiž ve všech deseti testech jen jednu chybu. Je však zajímavé, že v této konkrétní podúloze, i když se správný výsledek v jeho řešení objevil, zvolil Aleš chybný postup řešení. Pokusil se úlohu vyřešit jiným způsobem, který se ukázal jako chybný, ale shodou okolností mu vyšel jeden z nabízených výsledků. Obecně lze pozorovat, že Aleš pro řešení úloh na počítání procent preferuje strategii „jednoho procenta" a řešení pomocí rovnic. Zdá se, že Aleš tuto strategii vnímá jako jednodušší. Aleš je jediný z těchto čtyř žáků, který tuto strategii při řešení testů využil.

Závěr

Cílem mé práce bylo nastudovat typologii úloh a literaturu, která se věnuje tématům procenta, poměr a zlomky. Zanalyzovala jsem úlohu č. 15 z Jednotné přijímací zkoušky (9. ročník) za posledních šest let. Ukázalo se, že úloha je skutečně primárně zaměřená na procenta, dále na poměr a zlomky. Našla jsem úlohy podobného typu, které jsem postupně zadávala žákům, a řešení několika vybraných žáků jsem zarchivovala a zanalyzovala. Zkoumala jsem také jednotlivé řešitelské strategie, sledovala především ty chybné, a sledovala řešení žáků daného typu vybraných úloh.

V teoretické části jsem popsala celkový přehled o JPZ obecně i v zaměření na matematiku. Důkladně jsem zanalyzovala úlohu č. 15., všechny její podúlohy úlohy č. 15 od roku 2017 do roku 2023. Zjistila jsem, jaké znalosti by měl žák získat v daných oblastech z RVP ZV a téma procenta jsem popsala obecně i v literatuře. Udělala jsem analýzu osmi učebnic, ze kterých jsem se snažila zjistit, jak mají být témata podle autorů učebnic vyučována. Okrajově jsem zmínila i téma zlomky a poměr; jelikož se v úloze č. 15 nevyskytují tak často, nedělala jsem jejich analýzu tak důkladně jako u tématu procenta.

Praktická část začala ukázkou jedné z úloh č. 15. Pokračovala jsem tabulkou, která obsahuje znění všech zadání podúloh. Testy jsem vždy po dvou (původní a přeformulované zadání) rozdělila do pěti sérií. Nejúspěšnější sérií byla pátá série, která obsahuje pátý a desátý test. Změny v řešení žáků jsem popsala.

Nakonec jsem vybrala deset testů, které jsem důkladně zanalyzovala. Nejprve jsem napsala vzorové řešení u každé podúlohy a následně se dívala do žákovských řešení. Bohužel ne vždy byl viditelný postup žáka. Nejmenší úspěšnost v testech měli Laura a Teodor (sedm chyb), naopak nejlépe si vedl Aleš, který měl pouze jednu chybnou podúlohu v jednom testu.

U Laury došlo dvakrát ke zlepšení, jednou ke zhoršení a dvakrát měla původní a přeformulovanou úlohu/test chybně. Teodor se třikrát zhoršil, ani jednou u něj nedošlo ke zlepšení a dvakrát zůstal jeho výkon chybný (v původní i přeformulované verzi). Celkem měl tři podúlohy chybně. U Josefa došlo třikrát ke zlepšení výkonu, jinak měl ostatní podúlohy správně. Aleš se pouze jednou zlepšil, jinak jeho výkon zůstal konstantní (obě podúlohy dokázal vyřešit správně). Laura, Teodor a Josef používali při řešení úloh na procenta především trojčlenku, zatímco Aleš použil spíše metodu výpočtu pomocí jednoho procenta. Při analýze úloh jsem pracovala s těmito typy – z celku vypočítat počet procent, z počtu procent určit celek apod. Při analýze žákovských testů jsem podobné tendence neobjevila, žáci chybovali různě.

Přínosem mé práce je přiblížení témat procent, okrajově zlomků a poměru. Podařilo se mi zanalyzovat úlohu č. 15 za posledních šest let a následně vytvořit přehlednou tabulku se zaměřením úloh. Má práce obsahuje i různé grafy a tabulky, které pomáhají shrnout výsledky vybraných žáků u jednotlivých testů, či jednotlivých úloh. Zadařilo se mi i ve výběru žáků, jelikož každý udělal alespoň jednu chybu, někteří se zlepšili, zhoršili, nebo obě jejich odpovědi byly chybné. Bohužel se mi nepodařilo žáky přimět, aby všechny postupy důkladně zapisovali. Někteří své postupy nezapisovali, a to i přes to, že jsem je o ně výslovně žádala.

Případné navázání na mou práci by bylo možné, například lze zanalyzovat řešení všech žáků a všech jejich testů. Také je možné tyto testy zadat v jiné třídě jiným žákům a zanalyzovat jejich řešitelské strategie případně je porovnat s žáky, které zmiňuji v mé práci.

Jsem ráda, že jsem mohla tento výzkum provést. Myslím si, že tento, nebo i podobný výzkum, je prospěšný pro oblast učitelství matematiky. Lze z něj vyvodil, které řešitelské strategie jsou pro žáky příjemnější a v čem případně mohou chybovat.

Seznam použitých informačních zdrojů

Coufalová, J., Pěchoučková, Š., Hejl, J., & Lávička, M. (2007). *Matematika pro 7. ročník základní školy* (druhé, upravené vydání). Fortuna.

Černohorský, J. (2020). *Finance: od teorie k realitě*. Grada Publishing

Diktatorek.cz. (n.d.). *Procenta: Výpočet procentové části*. Získáno 26. června 2024 z https://www.diktatorek.cz/Scholasticus/Matematika/Aritmetika/Procenta/Procenta-vypocet-procentove-casti-help.html

Graja, T., Šrubař, K., Fridrichová, A., Švehlíková, L., & Weinlich, R. (2022). *Přijímačky v pohodě 9: Příprava na jednotné přijímací řízení SŠ*. Taktik.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy.

Hejný, M., Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J., Kuřík Sukniak, A., & Urbánek, L. (Ilustrátor). (2015). *Matematika* (2. vydání). Praha: H-mat.

Hejný, M., & Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha: Portál.

Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (2004). *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií. Racionální čísla. Procenta.* Praha: Prometheus.

Hoad, T. F. (1996). *per cent*. In *The Concise Oxford Dictionary of English Etymology*. Encyclopedia.com. Retrieved from http://www.encyclopedia.com/doc/1O27-percent.html

Kašparová, M., Frank, J., Honzík, L., & Pěchoučková, Š. (2023). *Matematika 7: pro každého sedmáka a sedačku*. Fraus.

Košťáková, T. (2016). Procentní bod a procento. *Statistika a my. Praha, Český statistický úřad*.

Matematika.cz. (2024). Procenta. Matematika.cz.https://www.matematika.cz/procenta/

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. (2018). Vyhláška č. 353/2016 Sb., o přijímacím řízení ke střednímu vzdělávání, ve znění účinném od 1. 11. 2018.

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. (2019). Zákon č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání, Školský zákon ve znění účinném od 15. 2. 2019.

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. (2023). Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Rámcové vzdelávací programy. https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

Molnár, J., Lepík, L., Lišková, H., & Slouka, J. (2017). *Matematika 7*. Prodos

Molnár, J. (1999). *Matematika 7*. Olomouc: Prodos.

Národní pedagogický institut České republiky. (2022). *Specifikace požadavků pro přijímací zkoušky pro školní rok 2022/2023*. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/specifikace-pozadavku/Specifikace_2022-2023/MASPECIFIKACEPOZADAVKU2022.pdf

Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Odvárko, O. (2005, 12. října). Procenta a jejich užití. *Metodický portál: Články*. Citováno dne 25. června 2024 z https://clanky.rvp.cz/clanek/324/PROCENTA-A-JEJICH-UZITI.html

Odvárko, O., & Kadleček, J. (2011). *Matematika pro 7. ročník základní školy* (3. vydání). Prometheus.

Půlpán, Z. (2008). *Aritmetika pro 7. třídu*. SPN.

Půlpán, Z. (2021). *Hravá matematika*. Taktik.

Rendl, M. (2015). Zlomky – obtíže žáků 2. stupně a jejich možné příčiny. In N. Vondrová, M. Rendl a kol. (2015), *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků* (s. 181–252). Praha: Univerzita Karlova v Praze

Rianasari, V. F., Budaya, I. K., & Patahudin, S. M. (2012). Improvement of (didactical) assessment by improvement of problems: An attempt with respect to percentage. *Journal on Mathematics Education, 3*(1), 29–40. Retrieved from https://ejournal.unsri.ac.id/index.php/jme/article/view/621

Rosecká, Z. (2019). *Aritmetika: 7*. Nová škola – DUHA s.r.o.

Smith, W. (1870*). Dictionary of Greek and Roman Antiquities. Boston: C. Little, and J. Brown. Retrieved from http://www.ancientlibrary.com/smith-dgra/0274.html*

Šteflíčková, A. (2010). *Slovní úlohy s procenty* (Bakalářská práce). Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky.

Tichá, M., & Macháčková, J. (2006). Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice. *Jemná ciselářská matematika pro děti, JČMF*.

Umíme matiku. *Zlomky, procenta, desetinná čísla*. Umíme matiku. Získáno 26. června 2024 z https://www.umimematiku.cz/book/zlomky_procenta_desetinna

Weaver, D. (1997). *The history of mathematical symbols*. University of South Australia. Retrieved from http://www.unisanet.unisa.edu.au/07305/split.htm

Seznam zkratek

JPZ	Jednotná přijímací zkouška
RVP	Rámcový vzdělávací program
RVP ZV	Rámcový vzdělávací program pro základní školy

Seznam příloh

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam grafů