

Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vytváření výukového programu na téma zlomky za pomoci chatbotu

Creating an educational course on fractions using a chatbot

Eliška Lörinczová

Vedoucí práce: doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: B M–PG

2024

Odevzdáním této bakalářské práce na téma *Vytváření výukového programu na téma zlomky za pomoci chatbotu* potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha 11. 7. 2024

Velké poděkování patří vedoucímu mé bakalářské práce docentovi Antonínovi Jančaříkovi za pomoc a podporu při psaní bakalářské práce i při vytváření výukového kurzu, a především za to, že si našel čas na zpětnou vazbu k mé bakalářské práci. Dále chci poděkovat přátelům a rodině za podporu a trpělivost.

ABSTRAKT

Bakalářská práce popisuje proces vytváření výukového kurzu na téma zlomky v prostředí chatbotu. Cílem práce je vytvoření prakticky využitelného kurzu pro přípravu na jednotnou přijímací zkoušku.

Teoretická část práce se věnuje přiblížení problematiky programovaného učení a programovaných strojů včetně jejich historického vývoje. Na to následně navazuje kapitola zaměřená na problematiku umělé inteligence, její současné problémy a aplikace v podobě chatbotů, zejména v kontextu jejich využití v oblasti vzdělávání. Dále práce přibližuje specifika výuky zlomků na českých základních školách, a to především za pomoci analýzy kurikulárních dokumentů a výsledků jednotné přijímací zkoušky.

V praktické části je nejprve představeno prostředí chatbota EDU AI a jeho specifika. Následuje popis tvorby kurzu a diskuze nad problematikou jednotlivých lekcí kurzu a jejich dílčích úloh. Samostatná kapitola je věnována prostupnosti, struktuře, návaznosti lekcí a práci s chybou. Závěrem je zhodnocení vytvořeného kurzu a rozvaha nad možným rozšířením nejen kurzu, ale i využitého výukového prostředí.

KLÍČOVÁ SLOVA

chatbot, doučování, on-line kurzy, zlomky, AI

ABSTRACT

The bachelor's thesis describes the process of creating an educational course on the topic of fractions in a chatbot environment. The aim of the thesis is to develop a practically usable course for preparation for the unified entrance exams.

The theoretical part of the thesis focuses on explaining the issues of programmed learning and programmed machines, including their historical development. This is followed by a chapter focused on the issues of artificial intelligence, its current problems, and applications in the form of chatbots, particularly in the context of their use in education. Additionally, the thesis outlines the specifics of teaching fractions in Czech elementary schools, primarily through the analysis of curricular documents and the results of the unified entrance exam.

In the practical part, the EDU AI chatbot environment and its specifics are first introduced. This is followed by a description of the course creation and a discussion of the issues related to individual lessons and their tasks. A separate chapter is dedicated to the continuity, structure, sequence of lessons, and error handling. The conclusion evaluates the created course and considers possible expansions not only of the course but also of the utilized educational environment.

KEYWORDS

chatbot, tutoring, online courses, fractions, AI

Obsah

1. Úvod	6
2. Teoretická část	7
2.1 Programované učení	7
2.1.1 Teorie, pilíře a vývoj programovaného učení.....	7
2.1.2 Programované stroje	10
2.2 AI a chat boty ve vzdělávání	15
2.2.1 Vznik a vývoj AI	15
2.2.2 Chatboty	16
2.2.3 Využití AI a Chatbotů ve vzdělávání	18
2.3 Výuka zlomků	22
2.3.1 Kurikulární dokumenty a klíčové kompetence.....	22
2.3.2 Metodika výuky zlomků na základní škole	25
2.3.3 Nejčastější chyby při práci se zlomky	27
3. Praktická část	29
3.1 Specifika a zaměření Chatbotu	29
3.2 Vytváření vlastního kurzu na téma zlomky	31
3.2.1 Struktura lekcí	31
3.2.2 Typy a příklady úloh	34
3.2.3 Prostupnost, struktura a návaznost lekcí.....	38
3.3 Zhodnocení kurzu	46
3.3.1 Velikost a přizpůsobení obrázků	46
3.3.2 Prostupnost kurzu	47
3.3.3 Větší snaha o přiblížení se žákovi	49
3.3.4 Vyvážení obtížnosti jednotlivých lekcí	50
4. Závěr.....	51
Seznam použitých informačních zdrojů	52

1. Úvod

Má bakalářská práce s názvem „*Vytváření výukového programu na téma zlomky za pomoci chatbotu*“ se skládá z teoretické a praktické části.

Hlavním cílem mé práce bylo vytvořit výukový program na téma zlomky v prostředí chatbotu využitelný v praxi pro přípravu na jednotnou přijímací zkoušku. Tento kurz by měl obsahovat vhodně zvolené úlohy podobné těm, které se objevily v předchozích didaktických testech přijímacích zkoušek. Dále by měl kurz motivovat žáky k samostatné a kontinuální práci bez pomoci pedagoga, s čímž souvisí také má snaha o to, aby žák zároveň v kurzu našel dostatečnou oporu v případě, že nebude schopen úlohy vyřešit sám na první pokus.

Proces zpracování tohoto výukového kurzu jsem popsala v této bakalářské práci včetně teoretického kontextu, ze kterého jsem vycházela.

Teoretická část práce je rozdělena do tří kapitol, ve kterých popisuji témata, která souvisí s praktickou částí mé práce nebo ze kterých jsem při zpracování praktické části přímo vycházela. Prvním takovým tématem je programované učení. V této kapitole zmiňuji teoretické modely výukových programů včetně jejich autorů a přínosu těchto teorií pro aktuální výzkum a pedagogickou praxi. Také mi přišlo vhodné uvést zde první snahy o zkonstruování přístrojů schopných edukovat žáka bez pomoci učitele. V druhé kapitole píšou na základě aktuálních odborných článků o umělé inteligenci, a především o její zapojení do procesu vzdělávání včetně aktuálních možností učitelů využití umělé inteligence ve výuce. Třetí kapitola se týká zlomků. V této části popisuji pohled kurikulárních dokumentů na výuku zlomků v českých školách, ale třeba také obtíže žáků základní školy při práci se zlomky, a zejména se tady zaměřuji na úspěšnost žáků u státních přijímacích zkoušek, co se zlomků týče. Z výzkumů v této kapitole jsem také z velké části vycházela při samotném vytváření výukového kurzu pomocí chatbotu, které detailněji popisuji v praktické části.

V praktické části popisuji proces vytváření svého výukového kurzu pro žáky devátých ročníků na téma zlomky. V první řadě zde popisuji prostředí chatbotu, ve kterém pracuji, a jeho specifika ve srovnání s konkurenčními modely. Dále popisuji samotné tvoření kurzu včetně výběru vhodných úloh, motivací při volení přístupu k chybě atd. Podstatnou kapitolou v praktické části je zhodnocení funkčnosti kurzu a jeho reflexe.

2. Teoretická část

2.1 Programované učení

2.1.1 Teorie, pilíře a vývoj programovaného učení

Pedagogický slovník definuje programované učení jako soubor dvou aktivit (vyučování a učení) vykonávaných vyučovaným a vyučujícím, který nemusí být nutně živý učitel, může jít i o počítač nebo specializovaný přístroj či „programovanou učebnici“. Vždy je ale programovaná výuka zaměřená na dosažení přesně definovaných cílů a jejich výsledky jsou pečlivě vyhodnocovány (Průcha et al., 1995, s. 183).

Prvky programovaného učení se začaly ve výuce užívat už v době starověku. Dochovaly se nám například rozhovory Sokrata se svými žáky. Ten ve svých lekcích vyžadoval, aby žáci okamžitě vyhodnocovali vlastní odpovědi a v případě chyby se je snažili okamžitě opravit. I později v novověku se objevovaly didaktické metody, které připomínali dnešní programované učení. Descartes například mluvil o potřebě stupňovitosti učení. Mnohem známější jsou poté Komenského pedagogické zásady, ve kterých zdůrazňuje, že žáci mají postupovat od snadné a známé látky k té obtížnější a méně známé (Liškař, 1981).

Samotný vznik programovaného učení, jak ho známe dnes, bývá spojován se dvěma událostmi. První z nich můžeme datovat do roku 1920, kdy S. L. Pressey vytvořil stroj prvotně sloužící pro testování inteligence. Při jeho používání ovšem zjistil, že stroj zároveň testující subjekty i učí. Druhá významná událost nastala roku 1954, kdy Burrhus Frederic Skinner na vědecké konferenci v Pittsburghu přednesl svůj referát Věda o učení a umění učit, ve kterém vyslovil první myšlenky a pilíře pro vznik hnutí programovaného učení (Pelikán, 1998).

Teorie podporující, ale i kritizující Skinnerovo práci na sebe nenechaly dlouho čekat. Začaly vznikat laboratoře a odborné publikace o programovaném učení. Ze Spojených států amerických se tyto myšlenky dostaly i do bývalého SSSR a v roce 1961 i k nám na území současné České republiky (Tollingerová et al., 1966).

B. F. Skinner

Jak už bylo výše zmíněno, základní kámen pro vznik teorií programovaného učení položil psycholog a zastánce behaviorismu B. F. Skinner. Ten ve své práci vytvořil jednoduchý model procesu programovaného učení. Jeho myšlenky vycházely z kritiky tehdejšího školství. Výuka by podle něj neměla probíhat verbálně, ale měla by být souborem problémů, které subjekty výuky řeší samostatně, maximálně za pomoci nápověd. To by mělo zvyšovat angažovanost žáků ve třídě, a tedy zvyšovat zájem a motivaci o pochopení daného problému. Mluvil také o nežádoucí prodlevě mezi odpovědí žáka na otázku a následným vyhodnocením. Také by podle jeho názoru při procesu učení neměl být používán trest, pouze odměna (Tollingerová et al., 1966).

Při svých experimentech F. B. Skinner dále vycházel z behavioristických zákonů učení, především z klasické teorie podmiňování od I. P. Pavlova. Z této teorie Skinner využíval například zákon cviku, podle kterého se opakováním určitého chování posilují spoje mezi podnětem a reakcí (Liškař, 1981).

Všechny své postřehy zformuloval B. F. Skinner do několika principů, které měly utvářet a definovat programované učení. Prvním z nich byl princip aktivní odpovědi. Tohoto principu mělo být dosaženo pomocí pěti metod výuky. Sokratická metoda nahrazuje pasivní verbální výuku problémovými situacemi, před které je žák stavěn. Metoda nápovědy zajišťuje, že vyučovaný nakonec dojde ke správnému výsledku sám, pouze za pomoci nápověd vedoucích k cíli. Metoda postupného mizení odpovědi nám říká, že čím více je vyučovaný zasvěcený do tématu, tím menší nápovědu potřebuje. Poslední dvě metody popisují, jak má vypadat odpověď a proces jejího utváření. Odpověď by měla být konstruovaná (metoda konstruovaných odpovědí) což znamená, že by k jejímu dosažení mělo být použito patřičné mentální úsilí. I přes to by ale odpověď měla být zjevná, měřitelná a v nejlepším případě někde zapsaná či vyčtená. Další Skinnerovy principy, konkrétně princip malých kroků a princip vlastního tempa, uvažují o kvantitativní stránce učení. Učení by podle něj mělo probíhat postupně, bez časového nátlaku a otázky předložené před vyučovaného by se měly postupně a pomalu ztěžovat. Na to navazuje princip zpevnění, který by podle Skinnera měl zajišťovat krom plynulého ztěžování otázek hlavně potvrzení, a tedy bezprostřední zpevnění. Vyučovaný by neměl mít možnost udělat chybu a za každou svou

odpověď by měl být odměněn. Dostatečnou odměnou by mělo být i pouhé potvrzení správné odpovědi. O roli vyučujícího pojednává princip řízení, podle kterého je zapotřebí u učení určitý systém a řád. Jak už ale bylo výše zmíněno, není k tomuto zapotřebí živého vyučujícího, stačí předem naprogramovaný přístroj či programovaná učebnice (Tollingerová et al., 1966).

Všechny tyto pilíře dávají dohromady funkční učební model, ve kterém žák dostane otázku, kterou správně vyřeší na základě nápověď, odpověď si upevní pomocí potvrzení správného výsledku a případné odměny a poté pokračuje další obtížnější otázkou. Tento model byl následně vystaven kritice především pro svou linearitu.

Sidney L. Pressey – regulační řízení

Jednou ze Skinnerových tezí, která byla po svém zveřejnění hojně napadána, bylo odmítání pozitivních dopadů chyby na průběh učení. Vyučovaný by podle něj neměl mít možnost chybu udělat, protože chyba může narušit průběh výuky. Stejně jako může být už samotné správné vyřešení problému odměnou, může být také chyba trestem a těm se Skinner snažil ve své teorii direktivního řízení vyhnout. Americký profesor pedagogické psychologie Sidney L. Pressey naopak ve své teorii regulačního řízení nepovažuje chybu za hrozbu, ale za jev napomáhající upevňování učiva. Ve své práci zdůrazňuje, že nevadí, pokud žák několikrát na otázku odpoví nesprávně, pokud nakonec sám dojde ke správné odpovědi. Pressey se odkazuje na zákon novosti, podle kterého si lépe vybavujeme novější zážitky. Podstatné ale je, aby se žák před posunutím k další otázce dobral ke správnému výsledku nezávisle na čase. (Tollingerová et al., 1966)

Pressey také na rozdíl od Skinnera nepřipouští nutnost krátkých kroků a pozvolného uspořádání úloh podle obtížnosti. V jeho teoriích měli mít žáci¹ nejdříve k dispozici učební text k prostudování a po jeho přečtení měli odpovídat na otázky týkající se předloženého textu. Pressey tedy své programované materiály zamýšlel využívat pouze jako doplněk k jinému stylu samostudia a sloužily spíše pouze jako testovací nástroj, zatímco Skinnerovy programy měly samy o sobě sloužit jako učební materiál (Fry, 1966).

¹ V jeho případě šlo o vysokoškolské studenty, na kterých své programy testoval

Norman A. Crowder – adaptivní řízení

Ještě propracovanější model, tedy model adaptivního řízení, přinesl do této problematiky v roce 1960 Norman A. Crowder. Vytvořil větvený program, který stejně jako Presseyho model umožňoval práci s chybou, v mnoha ohledech ale Presseyho práci předčil.

Crowder podobně jako Pressey ještě před položením otázky předkládá žákovi stručný text jako počáteční informaci, jejíž porozumění až poté testuje otázkou. Stejně jako Pressey nabízí několik odpovědí, z nichž ne všechny jsou správné, a vyučovaný tedy nemusí pokaždé zvolit správnou odpověď. Crowder ovšem v tomto bodě navíc nabízí další větvení. V případě chyby přidává doplňující informace, popřípadě může i žáka vrátit k jednodušším částem programu, dokud si žák dostatečně neupevní předchozí informace. Naopak i umožňuje plynulejší přesun mezi jednotlivými kroky v případě, že má žák už probíranou látku dostatečně upevněnou. Hlavním přínosem Crowderovy práce tedy bylo vnést do modelu programovaného učení diagnostiku a posuzování dosažené úrovně pochopení a osvojení vyučovaným. (Liškař, 1981)

Tento algoritmus se Crowder pokusil realizovat ve své takzvané „zmatené knize“, ve které žák přeskakuje ze stránky na stránku, podle svých odpovědí. Například pokud žák na otázku odpoví správně, bude odkázán na další stránku s dalším a o trochu komplikovanějším problémem. Pokud odpoví špatně, učebnice ho přesune zpět k prvotní informaci, případně k doplňkovému učivu. To žákovi umožňuje se přiměřeně posouvat látkou, tato učebnice tedy splňuje Skinnerovy principy, a navíc zvyšuje zájem tím, že žákovi přizpůsobuje obtížnost problémových situací, a tedy nehrozí znučení či dlouhé a odrazující trápení se s jedním problémem. (Tollingerová et al., 1966, 40)

2.1.2 Programované stroje

Podstatnou Skinnerovu myšlenkou, která ještě v této práci nezazněla, je jeho požadavek k individualizaci procesu učení. Dle svých výzkumů odhadl, že v prvních čtyřech letech školní docházky by jen v matematice mělo dojít zhruba ke dvaceti pěti tisícům upevnění, ale že reálná čísla se pohybují pouze v několika málo tisících. Kritizuje také nedostatečnou bezprostřednost zjišťování výsledků žáků po dokončení práce. To všechno přivádí Skinnera k myšlence, že každý žák by potřeboval svého osobního informátora, tedy někoho, kdo by

zadával otázky a kontrolovat správnost odpovědí. Tímto informátorem podle Skinnera nemusí být nutně člověk (Tollingerová et al., 1966).

První mechanické stroje programovaného učení

Programy můžeme rozdělit na dva základní typy – programy se zvolenou odpovědí a programy s konstruovanou odpovědí. Programy s konturovanou odpovědí můžeme spojit především se jménem B. F. Skinnera. Tyto typy programů vyžadovali po žákovi, aby sám vytvořil odpověď na otázku (například zapsal výsledek početního příkladu). Efektivitu svého programu se snaží zajistit především pomocí principu malých kroků. Jednotlivé úlohy programu jsou vždy jen nepatrně obtížnější než ty předchozí. Skinner také hovoří o nutnosti nízké chybovosti žáka při procházení kurzu, jelikož potvrzení správně odpovědi podle něj samo o sobě slouží pro žáka jako odměna. Výskyt chyb se snaží udržovat pod 10 % (Fry, 1966).

První takový přístroj sestrojil B. F. Skinner pro svou psychologickou praxi více než třicet let předtím, než v Pittsburghu prezentoval své principy programovaného učení. Jeho přístroj pracoval na velice jednoduchém mechanismu pohyblivého kotouče, na kterém byly otázky, mezi kterými se dalo přeskakovat pomocí páčky. Subjekt vždy odpověděl na otázku, svou odpověď zafixoval a schoval, čímž si zobrazil správnou odpověď. Až po roce 1954 přišel Skinner s propracovanějším přístrojem pro výuku matematiky na základě svých principů. V něm je žákovi předložen příklad, žák napíše do okének svůj výsledek a v případě správného vypočítání nabídne žákovi další příklad. Nedostatek toho přístroje tkvěl v tom, že žák zůstal na stejném příkladu, dokud ho nespočítal správně. V případě zaseknutí se žáka na některém z příkladů zde není možnost žádné nápovědy a žák je tedy odkázán na pomoc učitele.

Programy s volenou odpovědí se zabýval především Pressey. Ani jemu se ovšem do svého přístroje nepodařilo vložit možnost nápovědy. Jeho zařízení tedy mělo sloužit spíše jako doplněk běžné výuky a řídicí roli tedy měl stále zastávat učitel, kterému mělo toto zařízení pouze ulehčovat práci, jelikož už nemusel kontrolovat výsledky žáků a dávat jim zpětnou vazbu. V tomto ohledu velice praktický byl Presseyho takzvaný punchborad, což byla krabička s dírami na odpovědi, do které žáci mohli zaznamenávat své výsledky a poté si ověřit správnost svých odpovědí. (Tollingerová et al, 1966)

Crowder stejně jako Pressey a Skinner předběhl svými prvními prototypy výukových strojů myšlenku programovaného učení téměř o 30 let. Jeho výcvikový stroj s výběrovou odpovědí z roku 1924 má také více možností odpovědí a sérií otázek. Jako první ovšem pracuje i se zpětnou vazbou a hodnotí posun žáka. Daná série otázek se totiž v tomto přístroji točí dokola tak dlouho, dokud žák neodpoví na všechny otázky lekce správně. To zajišťuje, že si žák upevňuje jednodušší látku a zároveň si při každém projetí série osvojí novou schopnost. Přístroj po zvládnutí lekce navíc žákovi vydá malé osvědčení o zvládnutí lekce a přesune ho na další. (Tollingerová et al., 1966)

Pokročilejší elektrifikované přístroje programovaného učení

Dlouho na sebe nenechaly čekat ani elektronické alternativy. Za zmínku stojí například Briggsův jednoúčelový výcvikový stroj, který nabízí větší množství variant, ze kterých žák vybírá. Správnost výběru se mu potvrdí či vyvrátí rozsvícením světýlka u správné odpovědi. Tento přístroj už především ale není lineárního charakteru a umožňuje vyučovanému vracet se k jednodušším otázkám. (Fry, 1966)

Pro nás největší význam měl nejspíše pozdější vynález Crowdera, který se pokusil přenést do přístroje svůj model adaptivního řízení, který už předtím využil ve svých učebnicích. Přístroj vznikl v roce 1960, a nese název Auto-Tutor. Tento už plně elektrický přístroj umožňoval velmi kvalitní výuku až téměř na úrovni dnešních e-learningových programů. Umožňoval práci s chybou a jeho základem byl na tu dobu poměrně složitý algoritmus umožňující přizpůsobovat výuku na základě žakových schopností a zároveň doplňovat jeho znalostní nedostatky bez potřeby korigování či doplňování učitelem (Crowder, 1966).

Rozvoj programovaného učení aplikací kybernetiky

V 70. letech 20. století se objevily nové přístupy k programovanému učení. V této době ustupuje trend konstruování výukových strojů a zájem se přesouvá k vytváření co nejpracovanějších výukových programů s větší možností personifikace výuky. Tyto programy byly vytvářeny pro Crowderovo Auto-Tutor a jeho alternativy. K otázce programovaného učení se začalo přistupovat z perspektivy matematiky a informatiky.

Jedním z protagonistů toho přístupu byl L. N. Landa. Ten se nejprve věnoval pouze algoritmům, která jsou schopné „řešit jednou metodou libovolnou úlohu ze zkoumané třídy

úloh stejného typu“. Později se začal věnovat i úlohám didaktického typu. Oproti předchozím modelům výukových programů Landa přidal do svého modelu podmínky a operátory (tedy konkrétní úkony), které na ně reagují. Pokud je splněna podmínka, následuje operátor A1, pokud není, následuje operátor A2. Podmínky také umožňují vracet se k jednotlivým krokům nebo jiné kroky přeskokovat, čímž model zajišťuje plynulost průběhu (Tollingerová, 1966, s. 51).

Gordon Pask se ve svém práci Adaptivní vyučování a adaptivní vyučovací stroje snažil přirovnat proces učení ke strategické hře, ve které se vyučující a vyučovaný (v tomto případě dva hráči, z nichž jeden má určité zkušenosti a informace, díky kterým dominuje nad druhým hráčem) vzájemně ovlivňují svými strategiemi. Podle Paska totiž když spolu komunikují dvě osoby, jsou schopny částečně předvídat reakci toho druhého a v souladu s tím se vzájemně ovlivňovat. Pask dále pojednává o potřebě motivovat žáka a vyvolat v něm potřebu učit se za pomoci oboustranně vyrovnané výukové konverzace, ve které se kromě plnění úkolů a odpovídání na otázky vyskytuje i přesah ve vzájemném analyzování tahů druhého hráče (Liškař, 1981).

Na základě této teorie také přišel s vlastním vyučovacím strojem pojmenovaném SAKI (Solartron Automatic Keyboard Instructor). Tento stroj dokázal z dnešního pohledu velmi zásadní věc, a to sám se učit na základě žákových odpovědí, a vybírat tedy vhodnou obtížnost a správný způsob výuky (Tollingerová et al., 1966).

Počítačová éra

Významným milníkem v oblasti programovaného učení byl příchod a rozšíření osobních počítačů. Ty umožnily navázat na myšlenky programovaného učení a přinést je do praxe širokému publiku v podobě počítačových výukových programů. Spojení behavioristického přístupu programovaného učení a výpočetní kapacity dnešních osobních počítačů navíc umožnilo vytvářet výukové programy, které poskytují individualizovaný přístup učebními materiály a přizpůsobují se potřebám jednotlivých žáků (Pritchard, 2009).

Další vývoj programového učení byl ovlivněn příchodem internetu. Vývoj internetových technologií se dá rozdělit na dvě hlavní období. První období (cca od roku 1989) označujeme jako tzv. *Web 1.0*, který umožňoval převážně jednostranné předávání informací, jelikož k publikování zde neměl přístup zdaleka každý, stejně tak komentování a evaluace

jednotlivých webových stránek zprvu nebyla možná. Změna přišla v podobě tzv. *Webu 2.0* kolem roku 2005, který se naproti tomu zakládá na principu interakce mezi všemi uživateli (Zounek et al., 2021, 195-196).

To umožnilo vznik e-learningových kurzů jakožto trendu, který vychází z programovaného učení. U nás se tyto programy jako první začaly využívat na vysokých školách, a to především v rámci distančního vzdělávání, tedy cca. po roce 1998. Zprvu u nás byly e-learningové kurzy také hojně využívány pro vzdělávání dospělých na pracovištích. Až postupem času se kurzy dostávaly i na střední a základní školy. Jejich hlavní výhodou je možnost personalizace a přizpůsobení. Každý pedagog si může vytvořit sám svůj vlastní kurz přizpůsobený konkrétnímu tématu nebo učebnímu stylu. Navíc oproti původním výukovým strojům mohou být obsahově bohatší, a především vysoce interaktivní díky doplnění o výuková videa, grafy a animace. Upevnění pak probíhá formou her, spojovaček, doplňovaček, pexesa a podobných druhů testových úloh (Bednaříková, 2013).

2.2 AI a chat boty ve vzdělávání

2.2.1 Vznik a vývoj AI

AI je zkratka pro termín *artificial intelligence*, v překladu *umělá inteligence*. Jedná se o schopnost počítače nebo počítačem kontrolovaného robota plnit úkoly, které bývají běžně vykonávány inteligentními bytostmi (Copeland, 2024).

V současnosti se k umělé inteligenci přistupuje jako k novému nástroji využitelného ve vědě a vzdělávání, zdravotnictví, průmyslu, kultuře, finančnictví ale i jiných oborech.

S termínem umělé inteligence a jejího počátku bývá nejčastěji spojováno jméno Alana Turinga. Tento vědec je známý v první řadě pro své úspěchy na poli matematiky a kryptoanalýzy. Za druhé světové války byl jedním z vědců, kteří se zasloužili o dešifrování Enigmy. Mimo to se ale také pokládá za zakladatele moderní informatiky, který hned dvěma způsoby přispěl k pozdějšímu vzniku a vývoji umělé inteligence. Prvním z nich byl takzvaný Turingův stroj z roku 1942, což je teoretický výpočetní model počítače a v širším kontextu slouží jako základní koncept pro pochopení toho, co může být výpočetně provedeno. Na tomto základu poté stavěli další matematici a informatici. Na pozdější vznik umělé inteligence ovšem měla mnohem větší dopad Turingova esej „Computing Machinery and Intelligence“ z roku 1950. V této eseji byla poprvé položena zásadní otázka „Mohou stroje myslet?“ Pro tuto dobu, kdy teprve vznikaly první počítače, byla tato myšlenka až příliš odvážná. Alan Turing tedy přispěl k vývoji AI především svými teoretickými modely, jejich praktická využití na sebe ovšem nenechaly dlouho čekat. (Tvrdý, 2021)

Prvními, kdo se pokusili o konstrukci skutečné AI, byl tým matematiků², kteří za tímto účelem v roce 1956 založili letní školu na Dartmouth College. Vycházeli z myšlenky, že každý aspekt učení nebo jakýkoli jiný rys inteligence lze principiálně popsat natolik přesně, že bude možné sestavit stroj, který je bude simulovat (Russell, 2019). Tato škola nebyla ve svých snahách úspěšná, ale vidina vytvoření umělé inteligence si v této době našla několik následovníků. V následujících letech bylo dosaženo několika dílčích úspěchů, například program Arthura Samuela umějící hrát dámu. Naprostá většina podobných pokusů se ovšem

² John McCarthy, Marvin Minsky, Claud Shannon a tvůrce prvního komerčního počítače Nathaniel Rochester

setkala s neúspěchem. Tato vize zkrátka předběhla dobu a na svou realizaci si musela několik let počkat.

Značný posun pro umělou inteligenci znamenal zájem o takzvaný Deep Learning (hluboké učení) v 90. letech minulého století. Tato subdisciplína strojového učení je založena na učení umělých neuronových sítí. Zabývá se také algoritmy schopnými získávání ucelených informací z nezpracovaných dat ve formě textu, obrázků ale i zvuku. (Deng, Yu, 2013).

Po roce 2010 se začalo mluvit o „revoluci hlubokého myšlení“, která urychlila vývoj umělé inteligence. V následující dekádě se umělá inteligence začala vyrovnávat lidským schopnostem, což umožnilo její komerční využívání v rozličných oblastech. (Deng, Yu, 2013, s. 202).

Zájmu od široké veřejnosti se tématu umělé inteligence dostalo v letech 2016 a 2017, kdy se umělé inteligenci podařilo porazit bývalého a současného mistra ve hře go, což byla jedna z hranic (spolu například se strojovým překladem a rozpoznáváním vizuálních objektů), jejímž překročením se umělá inteligence vyrovnala v některých oblastech lidským schopnostem, nebo je dokonce předčila. (Russel, 2021).

2.2.2 Chatboty

V roce 1950 přišel již zmiňovaný Alan Turing s myšlenkou tzv. Imitační hry, která později vešla ve známost jako Turingův test. Šlo o pokus, který měl pomoci rozhodnout, zda je počítač dle Turingovy definice inteligentní, tedy jestli „dokáže samostatně myslet“. V tomto pokusu figurují tři objekty: tazatel, počítač a člověk. Tazatel pokládá rozličné otázky, na které náhodně odpovídá buď člověk nebo počítač. Tazatel člověka ani počítač nevidí a neslyší, tedy neví, kdo mu na otázku odpovídá. Pokud pouze z odpovědí není tazatel schopen odhalit, kdo mu v jednotlivých případech odpovídá, a tedy není schopen rozlišit člověka od počítače, pak se počítač považuje za inteligentní (Tvrdý, 2011, s. 21).

Příkladem počítače, o kterém mluvil Turing, schopným odpovídat na otázky z různých odvětví, mohou být programy označované jako chatboty.

Využívání chatbotů pro ulehčení nebo nahrazení lidské práce je v současné době často skloňovaným tématem. Tím jsou ovšem většinou myšleny moderní chatboty založené na AI, jako například ChatGPT. V širším slova smyslu je ale chatbot jakýkoliv dialogový systém

komunikující s člověkem. První chatboty vznikaly už v 70. letech 20. století. Tyto programy ovšem ještě nesplňovaly Turingův test a využívaly pouze systém předem připravených otázek a odpovědí. Motivacemi pro vytváření podobných systému bylo hned několik. Chatboty měly mít široké uplatnění v zákaznické podpoře, v poskytování psychologické podpory, ale i v oblastech vzdělávání, například pro procvičování se v jazycích (Lee et al., 2024).

Úplně prvním takovým chatbotem byl program ELIZA vyvinutý už v roce 1964 Josephem Weizenbaume, který měl nabízet pacientům pomocí konverzace psychologickou pomoc bez potřeby přímého setkání s lékařem. Tento program kladl jednoduché otázky a pomocí zaznamenávání a vyhodnocování klíčových slov v odpovědi pacienta byl schopen dále pokračovat v konverzaci.

Chatboty splňující Turingův test se začaly postupně objevovat až v posledních deseti letech a jejich vznik přímo souvisí s úspěchy na poli umělé inteligence po roce 2010.

Aktuálně nejrozšířenějším veřejně přístupným chatbotem je ChatGPT. GPT v tomto názvu je zkratka pro Generative pre-trained transformer (Generativní předtrénovaný transformátor) a jde o jazykový model z využívající hlubokého učení k vygenerování textu na stejné úrovni, jako by ho psal člověk. První tři verze ChatuGPT pracovaly na základě velkého množství rozličných dat (knihy, odborné články, webové stránky atd.), ze kterých se učily (Brown et al., 2020).

Současná verze ChatGPT 4 krom předem připravených dat využívá ke svému učení a zpracování informací navíc i celý internet. Dokáže tedy odpovídat i na aktuální otázky, využívat nejnovější zdroje a samozřejmě je také informovanější.

Je nutné dodat, že první dvě verze nebyly volně dostupné a přístupná širší veřejnosti se stala až třetí verze v roce 2020.

Mohlo by se zdát, že čím větší soubor počátečních dat má ChatGPT (ale i jiné chatboty), tím přesnější a kvalitnější budou jeho odpovědi. Všechna data, ze kterých chatbot vychází, jsou ovšem vytvořena člověkem a není možno kontrolovat korektnost a relevanci všech textů, ze kterých ChatGPT vychází, obzvláště u nejnovější verze, která čerpá ze všech volně dostupných dat na internetu. Následkem toho bývá zaznamenáván velký počet chyb

v textech generovaných tímto chatbotem a také například občasná formy diskriminace ve formě homofobie, rasismu a sexismu (Dwivedi et al., 2023).

2.2.3 Využití AI a Chatbotů ve vzdělávání

V online anketě z roku 2023 mezi 579 studenty středních a vysokých škol České republiky bylo zjištěno, že pomoc od umělé inteligence jako podporu při studiu využívá téměř třetina z nich (31 %). K tomu dalších 50 % studentů uvedlo, že mají s AI zkušenosti a v minulosti ji vyzkoušeli, přestože ji nadále aktivně nevyužívají („AI ve vzdělávání“). V průzkumu České školy a umělá inteligence z roku 2023 realizovaným společností e-Bezpečí, která se zabývala spíše názorem pedagogů, bylo dokonce procento aktivních uživatelů ještě vyšší – 53% (Kopecký et al.).

Z těchto statistik lze vyčíst, že ač je umělá inteligence pro širokou veřejnost relativně novým pojmem, v resortu školství se uchytila velmi rychle. V posledních letech také přibývají aplikace a webové stránky specializované na edukaci fungující právě na bázi AI. Tyto programy můžeme rozdělit na dvě podkategorie – na programy sloužící primárně k autoedukaci žáků (může jít například o interaktivní výukové programy sloužící k procvičování probraného učiva, pomoc při psaní seminárních prací nebo podpora při přípravě na přijímací zkoušky) a na programy sloužící především pro učitele.

Možností podpory školského systému za pomoci umělé inteligence je mnoho a v prostředí českých škol už jsou některé aktuální aplikace zažité a žáci se s nimi učí pracovat už od prvních ročníků. Každý rok ovšem vznikají i nové specializované projekty, které se snaží buď o přímé zefektivnění výuky za pomoci AI nebo přináší tipy a podporu při práci s ChatemGPT a podobnými službami. Dále uvedu několik příkladů.

Duolingo

Duolingo vzniklo jako aplikace pro mobilní telefony, která měla pomoci s výukou cizích jazyků za pomoci předem nastavených interaktivních otázek a odpovědí. Nově ovšem Duolingo využívá jazykový model GPT verze 4 a tak obzvláště v placené verzi poskytuje uživatelům personalizované kurzy a možnost procvičování rozhovorů v cizím jazyku. Tato aplikace může být využita pro potřeby autoedukace, ale může být originálně zapojena i do hodin cizího jazyka ve škole či pro domácí procvičování.

Quizlet

Stránka Quizlet nabízí v první řadě možnost vytvořit si výukové kartičky na procvičování látky a s těmi poté dále pracovat za použití „studijního partnera“ v podobě chat botu Q-chatu. Učitel zde může využít i možnost vytvoření testu z použitých materiálů. Většina funkcí Quizletu je ovšem dostupná pouze v placené verzi a jen v anglickém jazyce.

aidetem.cz

AI dětem je webový portál zabývající se osvětou v tématech AI ve vzdělávání. Přináší odborné webináře pro učitele o možnostech a výhodách zařazení především GhatGPT do procesu edukace. Dále tu lze najít tipy na další méně známé nástroje použitelné ve výuce jako je například Microsoft Copilot³, Canva⁴ nebo Sherpa Labs⁵. Podobným projektem je například Aignos.

ucimsai.cz a sciobot.cz

Učím s AI od společnosti SCIO poskytuje především metodickou podporu pro učitele. Krom rad a tipů, jak využít AI při výuce nabízí tato stránka služby ScioBota, který je opět za použití AI schopen vytvořit pro učitele osnovu na konkrétní hodinu, včetně cílů, materiálů a příkladů k procvičování. Všechny tímto způsobem připravené hodiny jsou interaktivní, splňují pedagogické zásady pro rozložení hodiny a nabízí různé interaktivní a alternativní způsoby výuky. Výslednou přípravu na hodinu jde i dále upravovat, aby co nejlépe vyhovovala podmínkám třídy i učitele. ScioBot nabízí možnost vygenerovat 10 takových příprav v bezplatné verzi, ale nadále je placený.

Jak už bylo výše zmíněno, některé tyto aplikace a webové stránky mohou používat žáci a studenti ve svém volném čase k individuální práci nad svými úkoly a dalšímu případnému seberozvoji, zatímco jiné slouží především pro podporu učitelů nebo jsou přímo určené k využití v hodině. Míra zapojení nejen umělé inteligence, ale obecně všech aktuálně dostupných technologií je jedním z největších současných témat mnoha oborů pedagogiky. Nástup umělé inteligence proběhl velmi náhle, čímž vznikl nátlak na přizpůsobení se českého školství novým technologiím. Z výzkumu České školy a umělé inteligence z roku

³ Chatbot od společnosti Microsoft s možností generování obrázků.

⁴ Grafický pomocník pro tvorbu audiovizuálního obsahu za pomoci umělé inteligence.

⁵ Pomocník především pro třídní učitele pro zvládnání třídního managementu, ideální pro předávání si zpětné vazby ohledně úkolů žáků mezi sebou a pro skupinové práce.

2023 bylo zjištěno, že kolem poloviny učitelů se necítí připravena na nasazení umělé inteligence do běžné výuky. V tom samém výzkumu také 90 % učitelů uvedlo, že neabsolvovali žádné školení nebo přípravný kurz na toto téma.

Z tohoto bychom mohli usuzovat, že české školství ještě není na využití podobných nástrojů z pohledu vzdělání učitelů ani materiálního zabezpečení připravené. Ze strany státu ovšem jde vidět snaha o posun. Například v jednom z klíčových dokumentů vydaných MŠMT Strategie vzdělávací politiky ČR do roku 2030+ je definováno pět strategických linií pro vývoj českého školství. Hned první z těchto linií s označením *SL1: Proměna obsahu, způsobů a hodnocení vzdělávání* v sobě obsahuje podkapitulu *1.4 Digitální vzdělávání*. Píše se tedy ne jenom o potřebě zvyšovat digitální kompetence u žáků, ale také je pomocí dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků zlepšovat i u učitelů. O práci přímo s umělou inteligencí se v tomto dokumentu sice nedočteme, podrobné návody, jak jí zapojit do procesu vzdělávání, ovšem můžeme najít na Metodickém portálu Národního pedagogického institutu (NPI). Ten nabízí hned několik odborných článků, statistik, a především metodik pro učitele. NPI také připravil projekt zaměřený na ředitele škol nabádající je k zavedení umělé inteligence do škol. Na stránkách NPI najdeme rozcestník s webináři, často kladenými otázkami o AI, podcasty a inspirací. V neposlední řadě vydává NPI informační plakáty a brožury i pro rodiče.

S užíváním umělé inteligence ve školství je samozřejmě také spojené množství hrozeb. Krom výše zmíněných potencionálně nesprávných výsledků generovaných nástroji jako ChatGPT se hovoří především o zvýšení případů plagiátorství a podvádění při vypracovávání školních prací. V současné době množství plagiátů především na vyšších stupních studia stále narůstá. Důvodem může být zvýšení dostupnosti prostředků a veřejné publikování prací na internetu, ale také právě platformy na bázi umělé inteligence (Malik et al., 2021).

Výsledky výzkumu České školy a umělá inteligence (2023) udávají, že 24,71 % respondentů z řad učitelů základních a středních škol s má zkušenosti s domácími úkoly vypracovanými umělou inteligencí.

Plagiáty školních prací jsou aktuálně velkým tématem především na půdách vysokých škol, kde může hrozit zneužití pomocníků jako je například ChatGPT při zpracování

závěrečných prací. Falzifikované práce pomocí AI nejdou vždy nejdou na první pohled odhadnout.

Naštěstí se spolu se stále inteligentnějšími verzemi umělé inteligenci vyvíjí i nástroje, umožňující odhalit text, obrázky a zvuk generovaný AI. Jedním takovým nástrojem je například RoBERTa detector, který má přesnost detekování vyšší než 98 % (Desaire et al., 2023). Podobné úspěšnosti dosahuje například také známější software Turnitin. Většina těchto nástrojů je bezplatná a veřejně přístupná. Kontrola autentičnosti textu tedy je možná, maximálně může připadat některým pedagogům časově náročnější.

Víme tedy, že plagiáty zkonstruované AI se dají odhalit, nastává ale otázka, jestli je potřeba, obzvláště na vysokých školách, nadále po studentech vyžadovat psaní vlastních autentických textů, pokud existují nástroje, které tuto práci mohou ulehčit či nahradit. Vysoké školy v České republice na tento trend odpovídají různě. Například Technická univerzita v Liberci za jistých podmínek svým studentům povoluje při psaní závěrečných prací využívat pomoc umělé inteligence. Student pouze ve své práci musí uvést, že AI využil. (Kočárková, 2023) Podnikohospodářská fakulta VŠE v Praze na podzim roku 2023 na rozmach využívání AI při psaní závěrečných prací reagovala dokonce nahrazením klasických bakalářských prací za praktické bakalářské projekty. Podobnou změnu zvažují i jiné vysoké školy (Horáková, 2023).

2.3 Výuka zlomků

2.3.1 Kurikulární dokumenty a klíčové kompetence

Rámcový vzdělávací program

Do roku 2020 byl ústředním dokumentem upravujícím plán vzdělávání na celostátní úrovni Národní program rozvoje vzdělávání v České republice, jinak známý jako Bílá kniha. Tento dokument nově nahradila Strategie vzdělávací politiky České republiky. Dále je školský systém upravován zákonem č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon). Z těchto dvou dokumentů vychází rámcový vzdělávací program (dále RVP), který mimo jiné determinuje obsah a způsob výuky na českých školách.

V současné době se připravuje nová revidovaná verze RVP. Tato verze by měla reagovat na nové vědecké poznatky a změny ve vzdělávání ve světě a na projekty jako je například Future of Education and Skills 2030 od Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj (OECD), který klade velký důraz na well-being ve školách ale i o širší revizi světových kurikulárních dokumentů odpovídající 21. století.

Předpokládané změny v novém RVP byly definovány v dokumentu Hlavní směry revize Rámcového vzdělávacího programu pro základní školy. Jsou zde uvedeny kroky, které by měli přispět k modernizaci českého školského systému. Jde například o zavedení pojmu gramotnost v RVP, celková modernizace vzdělávacího obsahu a zapojení průřezových témat do výuky. Nadále by také RVP nemělo být pouze dokumentem, ale digitálním nástrojem. Podle revidovaného RVP by mělo být možné vyučovat už od září roku 2024 a povinné pro první a šesté ročníky od září 2025.

Revidované RVP ovšem v tuto chvíli ještě není uveřejněno, proto budu nadále vycházet z RVP pro základní vzdělávání z roku 2023.

Na základě RVP školy vypracovávají školský vzdělávací program (dále jen ŠVP), který už konkrétně popisuje konkrétní témata výuky, cíle a klíčové kompetence žáků podle možností a obtížnosti dané školy. Metody výuky se tak mohou v jednotlivých zařízeních různit stejně jako to, do jaké hloubky a s jakou časovou náročností je téma probíráno. Výstupy by však měly být na všech základních školách podobné.

Podle aktuálního RVP pro základní vzdělávání vydaného v roce 2023 by výuka zlomků měla probíhat na prvním i druhém stupni základní školy. Očekávané výstupy prvního stupně základní školy, co se zlomků týče, jsou následovné:

- **M-5-1-05 modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku;**
- **M-5-1-06 porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel;**
- **M-5-1-07 přečte zápis desetinného čísla a vyznačí na číselné ose desetinné číslo dané hodnoty.**

Budování těchto kompetencí je doporučeno pro 2. období prvního stupně. Nejčastěji se ale s formální výukou zlomků začíná ve 4. ročníku základní školy. Před přechodem na druhý stupeň by tedy žáci měli být schopni plně rozumět pojmu celek a určovat jeho části pomocí zlomku.

Dále se výuka zlomků objevuje na druhém stupni základní školy. V aktuálním RVP můžeme opět najít očekávaný výstup:

- **M-9-1-04 užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek–část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem).**

V sekci učivo dále můžeme najít konkrétní hesla, kterým by žáci měli po dokončení povinné školní docházky rozumět a umět s nimi pracovat. Těmi jsou: „rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě; převrácené číslo, smíšené číslo, složený zlomek.“ S tímto se žáci setkávají povětšinou v sedmém ročníku. Ohledně zlomků jsou stejné výstupy očekávány i na prvních stupních osmiletých gymnázií.

CERMAT

Rámcový vzdělávací program je v oblasti konkrétních výstupů velmi benevolentní a umožňuje školám volnost při vytváření vlastních ŠVP. V roce 2017 se však objevil nový faktor, který částečně ovlivnil obsah vyučování na základních školách, a tím bylo zavedení jednotné přijímací zkoušky na středoškolské obory zakončené maturitní zkouškou.

Přijímací řízení na střední školy jsou tedy nově zřizovány centrálně Centrem pro zjišťování výsledků vzdělávání (CERMAT⁶), který opět na základě RVP každý rok aktualizuje Specifikace požadavků k jednotné přijímací zkoušce. Tento soubor dokumentů informuje o požadovaných schopnostech a vědomostech uchazečů. Školy tedy projevují snahu o to podřídit obsah výuky tomu, aby byli její žáci na střední školu přijati.

Aktuální dokument Specifikace k jednotné přijímací zkoušce z matematiky například definuje kompetence uchazeče osmiletého gymnázia v oblasti zlomků takto:

• modeluje a určí část celku, užívá s porozuměním pojmy polovina celku, třetina, čtvrtina atd., o polovinu více nebo méně (o třetinu, o čtvrtinu atd.), čte zápis zlomku, porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel a pracuje s grafickým zobrazením celku a jeho částí.

Dalo by se říct, že jde o rozšíření kompetencí z RVP. Ještě větší vliv na výuku zlomků na českých školách může mít přijímací řízení na šestiletá gymnázia ze sedmé třídy základní školy. Pro toto řízení potřebuje žák následující kompetence:

• provádí početní operace se zlomky, rozšíří a krátí zlomek, zapíše zlomek v základním tvaru, zapíše převrácený zlomek, užívá nejmenší společný násobek při určování společného jmenovatele zlomků, porovnává zlomky, užívá algoritmů pro sčítání, odčítání, násobení a dělení zlomků, převádí zlomek na smíšené číslo a opačně, upraví složený zlomek na jednoduchý, převádí zlomek na desetinné číslo včetně čísla s periodou.

RVP nijak neupřesňuje, v jakém pořadí a ve kterém ročníku se mají probírat jednotlivá témata, CERMAT ale nepřímou vyžaduje, aby žák sedmé třídy už se zlomky uměl operovat.

Školy každopádně nemají přímo povinnost připravit dítě na přijímací zkoušku (obzvláště na víceletá gymnázia), rodiče žáků se tedy často obracejí na přípravné kurzy s rozšířenou výukou podle podmínek CERMATu.

⁶ Původně Centrum pro reformu maturitní zkoušky

2.3.2 Metodika výuky zlomků na základní škole

Jelikož didaktické aspekty přesahují možnosti bakalářské práce, budou zde dále zmíněna pouze základní východiska, která byla použita při tvorbě výukového kurzu na zlomky a jejich kontext.

Prekompetence

Chápání konceptu zlomků může být pro žáka základní školy náročná, a tak je nezbytné pracovat s konceptem „části a celku“ už dříve. S pojmy jako jako polovina nebo čtvrtina by se dítě mělo poprvé setkávat už v předškolním vzdělávání například ve spojitosti s časem nebo se spravedlivým rozdělováním. Děti v tomto věku (3–6 let) ovšem ještě často těmto pojmům zcela nerozumí, a tak se můžeme v mateřských školách setkat s nesprávným pochopení velikosti částí typu „Dej mi větší polovinu koláče“ (Tichá, Macháčková, 2006, s. 10).

První stupeň ZŠ

Marie Tichá ve své práci (2006) uvádí, že učitel by při výuce zlomků neměl začínat výkladem zlomku a operaci s nimi, ale měl by jako první vytvořit u dětí určitý prekoncept zlomku a práci s ním. Stejného názoru je i Milan Hejný (2004), který se v tomto ohledu opírá o vývojovou teorii psychologa Jeana Piageta založenou na vývoji kognitivních funkcí. V mladším školním věku je podle této teorie dítě schopné uvažovat logicky o konkrétních operacích a objektech, mohou mu ovšem dělat obtíže abstraktnější představy a konstrukty. Při výuce zlomků na prvním stupni bychom se tedy měli především ze začátku opírat o konkrétní a známé příklady, pracovat na základě zkušeností a zapojovat do výuky co největší množství praktických pomůcek a příkladů z reálného života.

Dobrým začátkem a úvodní motivací může být právě rozvoj prekompetencí z mateřské školy a prvních ročníků prvního stupně základní školy, jako je například práce s časem (žáci už díky práci s hodinami z prvního ročníku znají pojmy jako *půl* a *čtvrt*) nebo dělení celku a porovnávání částí.

Typickým příkladem, který může být zadán například pro práci ve skupinách a žáci k jeho vyřešení nepotřebují žádné konkrétní znalosti zlomků, může být spravedlivé rozdělení tří koláčů mezi čtyři děti. Tato úloha má několik správných řešení a vede žáky k utváření

správných představ ohledně počítání se zlomky. Skupinovou práci můžeme nadále doplnit o následnou diskusi, při které přiblížíme žákům některé pojmy a myšlenky (například to, že $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$).

Dalšími materiály vhodnými pro utváření předpojmových představ mohou být krom klasického koláčového grafu i různé kostičky, obdélníky nebo číselná osa. V tuto dobu je příhodné vštípit žákům myšlenku, že základem nemusí být nutně jeden kousek koláče, ale že právě i třeba výše zmíněné tři koláče můžou být základem, který nadále rozdělujeme. To pro žáky může být zpočátku neintuitivní.

Cílem využívání těchto materiálů je, aby si žák později spojil operace mezi zlomky s konkrétní představou a neučil se poté postupy sčítání a dalších operací mechanicky, ale viděl za operacemi vnitřní souvislosti.

I při zavádění operací se zlomky do výuky bychom se měli opírat o praktické pomůcky. V praxi se jako nejnázornější pomůckou dlouhodobě prokazuje koláčový graf. Ten můžeme buď kreslit, nebo ještě lépe si vytvořit s dětmi kolečka a ty pak rozstříhávat na části. Tím zařadíme do výuky prvek interaktivity, který může podpořit zapamatování a pochopení probírané látky.

Očekávaným výstupem pak na prvním stupni není porozumění zlomkům v plném rozsahu, ale pouze o vytváření úvodní motivace, na kterou bude nadále navázáno na druhém stupni základní školy.

Druhý stupeň ZŠ

I na druhém stupni je při výuce zlomků vhodné začít na základě intuitivních znalostí a podpořit výpočty vhodnými pomůckami, nákresy, případně příklady ze života žáků. Obsahem výuky pak je rozšiřování zlomků a krácení na základní tvar, porovnávání zlomků, převádění na společný základ, operace se zlomky (sčítání, odčítání, násobení, dělení), ale také řešení slovních úloh se zlomky. Žáci se také učí převádět mezi desetinnými čísly a zlomky a vytváří si asociace mezi poměry, procenty a zlomky.

2.3.3 Nejčastější chyby při práci se zlomky

Zlomky považuje mnoha autorů i učitelů jako jedno z nejobtížnějších učiv základní školy (Tichá, Macháčková, 2006, s. 3). Ve výzkumu z roku 2015 *Kritická místa matematiky základní školy: Metodický portál pro učitele* jsou zlomky zmíněné jako jedno z nejkritičtějších míst matematiky druhého stupně (Vondrová). Dále pokud se podíváme na agregovaná položková data od společnosti CERMAT z jednotné přijímací zkoušky v deváté třídě z roku 2024, zjistíme, že úspěšnost žáků při počítání příkladu se zlomkem byla jedna z nejvyšších v celém testu. V prvním i druhém pokusu se objevily dva takové příklady a průměrná úspěšnost žáků při jejich řešení byla okolo 60 %⁷. Úspěšnější byli žáci už jen při řešení uzavřených slovních úloh na procenta, poměry a u některých uzavřených úloh s možnostmi ANO/NE. Na druhou stranu se ve druhém řádném termínu přijímací zkoušky pro devátou třídu vyskytla slovní úloha na zlomky, ve které byla chybovost žáků už mnohem větší. Ke správnému výsledku se dopočítalo pouze 32,7 % žáků i přesto, že šlo o uzavřenou úlohu (tato úspěšnost byla nejnižší, ze všech uzavřených úloh v tomto testu). Velmi podobné údaje poskytl CERMAT i z roku 2023. Můžeme tedy usuzovat, že pro žáky není náročné operativní počítání se zlomky, ale spíše jejich praktické využití ve slovních úlohách.

Chyby na úrovni intuitivních znalostí

Marie Tichá (2006) ve svém článku *Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice* uvádí příklad, ve kterém měli žáci bez předchozích zkušeností se zlomky v koláčovém grafu rozděleném na 12 částí modře vybarvit $\frac{1}{6}$ a červeně $\frac{1}{4}$ a poté sečíst, jaká část koláče je vybarvená. Žáci se často dopouštěli té chyby, že modře vybarvili šest částí, červeně čtyři části a jejich odpovědí bylo, že vybarvená je jedna desetina.

Příkladem další chyby, která se ovšem objevuje i ve vyšších ročnících základních škol, je nesprávné porovnávání zlomků založené na předchozí zkušenosti s porovnáním přirozených čísel. Mějme položenou otázku: „Pan Hájek nabízí boty zlevněné o $\frac{1}{3}$ a pan Malý boty zlevněné o $\frac{1}{4}$, u kterého obchodníka koupím boty levněji?“ Žáci mají tendenci odpovídat, že pan Hájek zlevnil více, jelikož 4 je víc než 3. K demonstraci chyby můžeme v tuto chvíli

⁷ V prvním řádném termínu byla úspěšnost u příkladu se zlomky 62,2 % a 63,5 % a v druhém termínu 72,6 % a 57,8 %.

použít znázornění na koláčovém grafu, na kterém jde jasně vidět, že $\frac{1}{3}$ je více než $\frac{1}{4}$. Ani to ovšem není zcela korektní odpověď. Vzhledem k tomu, že nám nebyla zadána původní cena bot u obou prodejců, nemůžeme prokazatelně rozhodnout, které boty jsou po slevě levnější. To nás přivádí k dalšímu druhu chyby v práci s různými základy, která se u dětí může vyskytovat.

Chyby ve strukturálních modelech

Další potencionální chyba při práci se zlomky může pramenit ze špatného zápisu zlomku. Hejný v publikaci z roku 2006 hovoří o tom, že je podstatné žákovo uvědomění „rozdílu mezi objektem, s nímž pracuje, a jménem, pomocí něhož objekt uchopuje“. V tomto případě tím naráží na zápis výsledného zlomku v základním tvaru.

K chybám může dojít i ve chvíli, kdy se do úloh se zlomky zapojí záporná čísla. Krom rizika nezvládnutí předešlé látky záporných čísel, a tedy snížení schopnosti žáka pracovat se zápornými zlomky, se tu objevuje další potíž. Záporný zlomek totiž můžeme zapsat třemi možnými způsoby. Znaménko mínus můžeme zapsat před celý zlomek, před číselnou část nebo před jmenovatel zlomku. Pokud se pak nachází záporné znaménko i před číselnou částí i jmenovatelem, je pak celý zlomek kladný. Tato skutečnost může být pro žáky neintuitivní a tedy problematická (Hejný, 2006, s. 25).

Chyby ve slovních úlohách

Součástí práce se zlomky jsou také slovní úlohy s nimi. Slovní úlohy obecně dělají žákům základních škol potíže, které povětšinou plynou ze špatného porozumění úloze. Příčiny nepochopení úlohy můžeme rozdělit na tři typy: „(1) žák nerozumí textu slovní úlohy (nerozumí jednotlivým slovům, slovním spojením nebo syntaktické stránce textu), (2) žák nerozumí matematické podstatě slovní úlohy (nechápe vztahy mezi objekty úlohy, její matematickou strukturu), (3) žák nerozumí určitému konceptu, pojmu, který v úloze vystupuje (jinými slovy nerozumí matematické látce, např. nechápe, co je jedna sedmina, průměr, objem aj.“ Nepochopení úlohy dále vede k neschopnosti využít vhodné početní operace a tedy k chybě (Vondrová et al., 2015, s. 64).

O zvolení špatné početní operace při řešení slovních úloh jako o časté chybě mezi žáky se už ve své studii z roku 1924 zmiňuje Morton.

3. Praktická část

V praktické části své bakalářské práce jsem vytvářela výukový program na téma zlomky v prostředí AI Chatbota EDU-AI.EU. Při tvorbě jsem vycházela z metodiky zpracované Antonínem Jančaříkem, Jakubem Michalem a Jarmilou Novotnou (Jančařík et al., 2023).

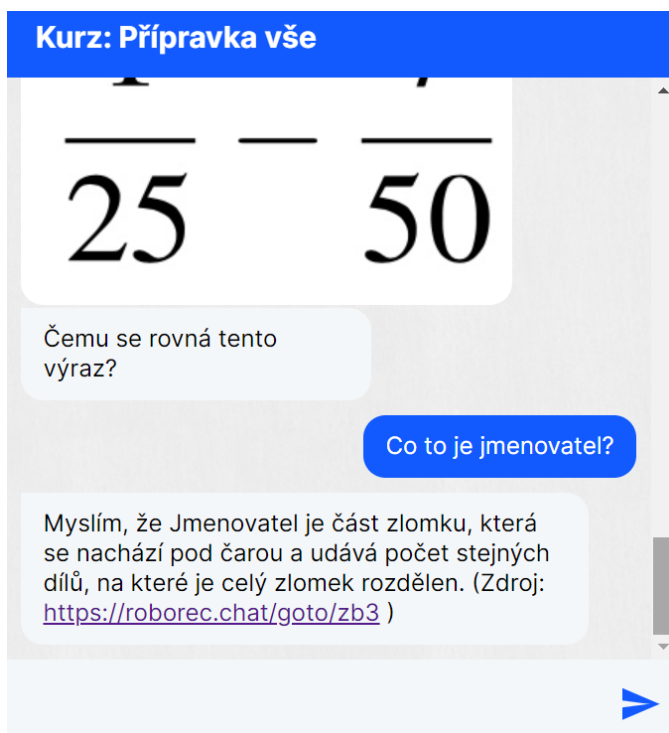
3.1 Specifika a zaměření Chatbotu

Chatbot EDU AI byl vyvinut v rámci projektu Technologické agentury ČR – *AI asistent pro žáky a učitele*. Na jeho tvorbě se podílela Asociace pro lepší IT řešení Národního pedagogického institutu ČR, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy a Katedra matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy. Zaměřuje se na individuální přípravu na jednotnou přijímací zkoušku pro čtyřleté obory z matematiky a několika lekcemi i z českého jazyka. Jelikož je program bezplatný, jde o alternativu aktuálně velmi rozšířených přípravných kurzů na střední školy a soukromému doučování.

Chatbot EDU AI lze využívat přímo na webových stránkách *edu-ai.eu* ale nabízí i možnost otevřít si chatbota v aplikacích jako je Messenger nebo Telegram, čímž se pro žáka stává přístupnější a umožňuje mu učit se v prostředí, které mu je důvěrně známé.

Jednotlivé výukové programy jsou vytvářeny manuálně a na webových stránkách EDU AI je i možnost vytvoření personalizovaných lekcí pro učitele. Ti tak pro své žáky k procvičování mohou vytvářet vlastní výukové programy v rozsahu učiva probíraném na hodině. Mimo předem nastavených odpovědí umí chatbot odpovídat i na otázky, které nebyly předem nastaveny, za pomoci AI. Využití AI je ale pro chatbota až poslední možností. Pokud například žák položí otázku, která se netýká právě probíraného učiva, chatbot dotaz zanalyzuje a pokusí se nejdříve vyhledat odpověď ve vlastních zdrojích. Až v případě, že v databázi vlastních materiálů (v jednotlivých lekcích nebo na Wikipedii) nenalezne vhodnou odpověď, poskytne odpověď zkonstruovanou pomocí ChatGPT. V současné době chatbot využívá ChatGPT verze 4.0.

Toto analyzování může žákovi velice ulehčit práci s Chatbotem. Například ve chvíli, kdy je před žáka předložena otázka a žák jí zcela neporozumí, může se zeptat na definici konkrétního termínu, který nezná.

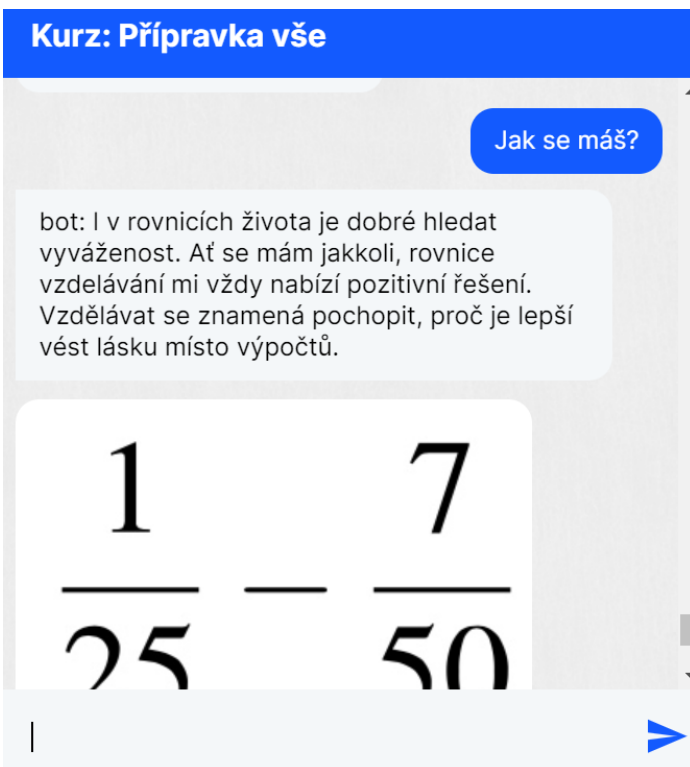


Obrázek 1 Ukázka položení otázky (zdroj autor)

Chatbot mu nabídne odpověď včetně odkazu na Wikipedii, na kterém najde uživatel více informací ohledně daného tématu. U většiny věcných otázek tedy chatbot předloží odpověď získanou z Wikipedie jako na obrázku 1.

V případě, že žák při procvičování dojde k uvědomění, že danému tématu dostatečně nerozumí, přesměruje bot žáka k dalším obecným materiálům na toto téma z portálu Ema.RVP.cz. Může se ale i stát, že žák sice v obecném měřítku tématu porozuměl, ale neodkáže si poradit s konkrétním případem. V tu chvíli odkáže chatbot žáka na výukové video, ve kterém je vypočítáván typově podobný příklad. Tato videa nejsou zpracována přímo EDU AI, ale jsou využívána videa například od Khan Academy nebo Isibalo. Jelikož ovšem v současné době nejsou zpracována videa v českém jazyce na všechny okruhy matematiky, u některých témat videa nedávají uživateli dostačující odpovědi na jejich dotazy.

K odpovědím vygenerovaným pomocí ChatGPT se uživatel dostane až ve chvíli, kdy vede s chatbotem volnou konverzaci týkající se například pocitů žáka nebo otázkami nesouvisejícími s probíranou látkou. V této situaci se ale chatbot snaží nabídnout odpověď alespoň částečně spojenou s matematikou a navrátit tak pozornost žáka zpátky ke konkrétnímu příkladu (viz Obrázek 2).



Obrázek 2 Ukázka položení nesouvisející otázky (zdroj autor)

V neposlední řadě je třeba zmínit, že se aplikace snaží žákům uživatelsky přizpůsobit jazykem i grafikou. Po každém správně vypočítaném příkladu přichází upevnění formou pochvaly, případně gifu nebo povzbuzujícího obrázku. Jazykem se chatbot snaží připomínat spíše komunikaci mezi vrstevníky, než aby působil na žáka autoritativně.

3.2 Vytváření vlastního kurzu na téma zlomky

3.2.1 Struktura lekcí

Při vytváření výukového programu na téma zlomky jsem začala vytvoření stanovením předem jasně dané struktury lekcí, které na sebe budou volně navazovat a rozšiřovat se. Vycházím z předpokladu, že aby žák mohl přejít na další lekci, musí nejdřív perfektně porozumět té předchozí. Seznam lekcí, se kterými jsem pracovala byl následující:

- 1.1. Krácení a rozšiřování zlomků – krácení
- 1.2. Krácení a rozšiřování zlomků – rozšiřování
- 2.1. Sčítání a odčítání zlomků – sčítání
- 2.2. Sčítání a odčítání zlomků – odčítání

2.3. Sčítání a odčítání zlomků – sčítání a odčítání

3. Násobení zlomků

4.1. Dělení zlomků

4.2. Dělení zlomků – v kombinaci s násobením zlomků

4.3. Výpočty se zlomky

5.1. Převody – smíšená čísla

5.2. Převody – desetinná čísla

5.3. Převody – smíšené převody

6.1. Slovní úlohy – určování části celku

6.2. Slovní úlohy – zvětšování/zmenšování a neznámé číslo

6.3. Slovní úlohy – dopočítávání do celku

Uvažovala jsem i o přidání lekce, která bude zaměřená na utváření vhodných předpojmových představ ohledně zlomků a bude se skládat z úloh s číselnou osou, koláčovým grafem a porovnávání zlomků. Jelikož je ale výukový program určen primárně pro žáky 9. ročníku základní školy a jejich přípravu k přijímacím zkouškám, vycházím z toho, že žáci už mají učivo zlomků dostatečně probrané a upevněné. Zaměřila jsem se tedy pouze na opakování všech druhů příkladů a slovních úloh.

První část je tvořena deseti jednoduchými příklady na krácení a rozšiřování zlomků. Předpokládám, že většina žáků deváté třídy by tyto dvě lekce mohla přeskočit, jelikož toto téma už mají zvládnuté ze sedmého ročníku. Rozhodla jsem se tam tyto dvě lekce ale stejně nechat pro případ, že by žák neměl práci se zlomky dostatečně upevněnou. V tom případě může být krácení a rozšiřování zlomků klíčová predispozice pro následné sčítání, odčítání a násobení zlomků.

Pro případ, že by ovšem žáci měli zvládnuté krácení a rozšiřování zlomků velmi dobře, a jejich procvičování by je mohlo od kurzu odradit, jsem ještě před spuštěním lekce přidala možnost lekci přeskočit a přejít tedy hned na další lekci (viz Obrázek 3).

Kurz: M PedF (Zlomky) 2.0.

Chci začít

Spouštím kurz M PedF (Zlomky)

Vítej v úvodní lekci na zlomky. Začneme zlehka procvičováním krácení zlomků.

Pokud ti přijde, že krácení zlomků můžeš přeskočit, protože ti jde dobře, můžeme klidně přejít na další lekci. 😊

Radši si to procvičím!

Přejdu na další lekci.



Obrázek 3 Ukázka možnosti přeskočit na další lekci (zdroj autor)

Ve druhé, třetí a čtvrté části (celkem 7 lekcí) si žák procvičí jednodušší i těžší příklady na jednotlivé zlomkové operace. Pátá lekce je poté souhrnným opakováním veškerých příkladů na sčítání, odčítání, násobení a dělení zlomků zároveň na krácení a rozšiřování zlomků.

V páté části si žák procvičí převádění mezi zlomky, smíšenými a desetinnými čísly v podobě příkladů, ve kterých jsou tyto tři formy nakombinovány (je tedy veden k tomu, aby nejdříve převedl na jednu zvolenou formu a až poté s čísly operoval).

Poslední část tvořená z celkem tří lekcí se týká různých typových slovních úloh.

3.2.2 Typy a příklady úloh

Každá lekce se skládá z pěti úloh, z nichž každá je náročnější než ta předchozí. Krom úvodních dvou lekcí jsem se snažila, aby vždy jedna úloha byla obtížností na úrovni úloh z jednotné přijímací zkoušky a poté dvě jednodušší a dvě těžší. Také jsem cíleně do lekcí začleňovala typové úlohy, které byly statisticky pro žáky při řešení přijímacích zkoušek nejobtížnější.

Při vytváření úloh jsem se inspirovala především právě jednotlivými testy jednotné přijímací zkoušky z minulých let, ale vhodné ilustrační úlohy jsem hledala také na internetových stránkách zaměřujících se na bezplatné doučování matematiky jako je například KhanAcademy nebo priklady.eu a v učebnici Testy 2023–2024 z matematiky pro žáky 9. tříd ZŠ.

Při konstrukci lekcí jsem využívala dva typy úloh. Slovní úlohy, které jsem do programu pouze přepsala jako text a žákovi se tedy zobrazí formou otázky od chatbota, a poté klasické příklady se zlomky. Příklady jsem ovšem nemohla vložit do programu přímo, jelikož nepodporuje matematický jazyk a můj případný slovní přepis příkladu nebo jakákoliv jiná alternativa by mohla být pro uživatele matoucí. Také bych poté nemohla zařadit do lekcí složené zlomky. Proto jsem si příklady nejdříve připravila v LaTeXu a poté je vygenerovala do formy obrázků, které jsem poté vkládala do programu a doplnila instrukce k příkladu.

V úlohách jsem také často používala termíny, které se mohou objevit v přijímacích zkouškách. Neptala jsem se ovšem na přímo definici termínu, ale zapojovala jsem je do jednotlivých otázek. Jako příklad můžu uvést dvě úlohy z lekce rozšiřování zlomků:

1.2.4 Převed' číslo 2 na zlomek, který bude mít ve jmenovateli číslo 102.

1.2.5 Rozšiř číslo 7 tak, aby v čitateli bylo číslo 21.

V obou příkladech má žák rozšířit zlomek, ovšem aby došel ke správnému výsledku, musí znát pojmy *čítatel* a *jmenovatel* a rozumět jim. V případě, že význam těchto termínů zapomněl, může se žák před rozšířením zlomku chatbotu na význam pojmu chatbotu zeptat, jak už bylo zmíněno výše.

Dalšími pojmy, které jsem v příkladech využívala, byl součet, součin, rozdíl a podíl, ale také převrácené a opačné číslo, jelikož schopnost pracovat s těmito termíny je přímo uveřejněná v dokumentu Specifikace požadavků pro jednotnou přijímací zkoušku vytvořenou společností CERMAT. Jako příklad uvádím dvě úlohy z lekce Smíšené převody.

5.3.2 *Kolikrát je větší $2\frac{1}{5}$ než součet čísel 0,25 a $\frac{1}{10}$? Výsledek zapiš jako smíšené číslo.*

5.3.4 *O kolik je převrácené číslo k $3\frac{1}{5}$ větší než opačné číslo k $3\frac{1}{5}$? Výsledek zapiš jako desetinné číslo.*

Také jsem do příkladů zapojovala i jiná témata, jako je práce se zápornými čísly nebo převody, pro komplexní procvičování žáka v matematice. Například u těchto příkladů musí žák vědět, jak se sčítají a násobí záporná čísla.

$$2.3.3 \quad -\frac{-1}{2} + \frac{-3}{-2} \quad 2.3.4 \quad 5 - \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{3}\right) \quad 4.1.2 \quad \frac{4 + \frac{5}{4}}{3 - \frac{18}{5}}$$

Dále jsem kombinovala znaménka dělení (:) a zlomkovou čáru, v sekci nápovědy jsem se ale žáky snažila vést k uvědomění, že jde o stejnou matematickou operaci.

$$4.1.4 \quad \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4} : \frac{1}{8}\right)}{\frac{-2}{3} - \frac{4}{6}}$$

Upevňování převodů jednotek jsem využívala především u obtížnějších slovních úloh:

6.1.3 *Konzerva obsahuje mimo jiné $\frac{3}{8}$ fazolí a $\frac{1}{7}$ kukuřice. Celý obsah konzervy váží 0,28 kilogramů. Kolik gramů fazolí a kukuřice dohromady konzerva obsahuje?*

Po uvážení jsem nezařadila do lekcí příklady, které by propojovaly zlomky, procenta a poměry. Chtěla jsem dodržet zásadu postupnosti a ač je chatbot určen primárně pro žáky 9. třídy, využívala jsem pouze látky, které ve škole bývají probírány před zlomky. Takto kombinované příklady by se potenciálně mohly objevit právě v lekci na procenta nebo poměry.

Problémem pro žáky také může být porozumění textu a převedu ze slovního zadání do odpovídajícího příkladu. Proto jsem zařadila do lekcí úlohy týkající se o *kolik* se zlomky od sebe liší a *kolikrát* je jeden z nich větší. Příklady úloh už jsou uvedeny výše. Tyto úlohy mají žáka vést k vytvoření příkladu na odčítání nebo dělení. Podobně obtížný může být pro žáky následující úloha z lekce Smíšené převody:

5.3.1 *Kolik je $\frac{5}{4}$ z 0,3? Výsledek zapiš jako desetinné číslo.*

Tady je nutné $\frac{5}{4}$ a 0,3 vynásobit. Součástí všech podobných úloh je i mnou vytvořená nápověda, která žákovi v případě potřeby poradí s vytvořením vhodného příkladu. Tyto úlohy jsem se do celého kurzu pokusila zařadit pokud možno vícekrát, aby si tyto typové úlohy žáci lépe upevnili.

Slovní úlohy

Ze statistik zveřejňovaných společnostmi CERMAT vyplývá, že největší obtíže, co se zlomků týče, žákům dělají slovní úlohy. Proto jsem slovními úlohám v kurzu věnovala hned 4 lekce. Jednu souhrnnou a tři předchozí, orientované na určitý druh typových úloh.

První z nich se zaměřuje na určování částí celku, ve které žák zná celek a dopočítává danou část celku. Například v následující úloze je celek 150 hektolitrů a úkolem žáka je spočítat $\frac{3}{10}$ z celku:

6.1.1 *Sud má objem 150 hl. Kolik vody v něm bude, bude-li naplněn do $\frac{3}{10}$ svého objemu?*

Ne všechny úlohy z této lekce jsou ovšem takto přímočaré. V této úloze si žák musí nejdříve dopočítat, na jakou část celku se ho vlastně ptáme:

6.1.2 *Ve třídě je 30 žáků, z toho jsou tři pětiny chlapců. Kolik je ve třídě dívek?*

A do této lekce jsem také zařadila úlohy zaměřené na dělní zlomků, kde opět známe celek a snažíme se zjistit, kolikrát daný zlomek do celku vejde:

6.1.4 *Honzova bota dělá stopu dlouhou $\frac{2}{9}$ m. Kolik stop těsně za sebou nechá Honza na vzdálenosti 2 m?*

6.1.5 *Pro kolik osob vystačí 60 l limonády, jestliže počítám, že každý dostane $\frac{2}{11}$ litrů limonády?*

Další lekce je na zaměřená na zvětšování a zmenšování zlomků a na dopočítávání neznámého čísla, tedy celku:

6.2.1 Neznámé číslo jsme zmenšili o šestinu jeho hodnoty a vyšlo nám 55. Jaké číslo to bylo?

V nápovědách u těchto úloh se snažím vést žáky k tomu, aby především u těchto úloh využívali vhodný zápis. V tomto případě by měli dojít k tomu, že $\frac{5}{6}$ odpovídá číslu 55 a můžeme tedy spočítat $\frac{1}{6}$ vydělením čísla 55 číslem 5 a následně vynásobit číslem 6 pro dopočítání se k celku. Dále uvedu příklady jednoho jednoduššího a jednoho obtížnějšího příkladu z této lekce:

6.2.2 Neznámé číslo zvětšíme o $\frac{3}{5}$ jeho hodnoty a dostaneme 160. Jaké číslo to bylo?

6.2.4 Jedna třetina z neznámého čísla je o 20 menší než jeho polovina. Urči neznámé číslo.

Ve třetí lekci na slovní úlohy je zaměřená na dopočítávání do celku. Jde o úlohy, ve kterých máme některé části zadány zlomkem některé zlomkovou částí a snažíme se dopočítat do celku:

6.3.3 Tři kluci se vydali na výlet. Adam nesl batoh s jídlem $\frac{1}{6}$ cesty, Petr $\frac{2}{5}$ cesty a Honza zbylých 13km. Jak dlouhá byla cesta?

Tyto úlohy se dají spočítat pomocí algoritmu, kde nejdříve sečteme zlomkové části a poté dopočítáme, jakému zlomku odpovídá zlomková část (v tomto případě 13 km) a dále dopočítáme celek. I u těchto slovních úloh vedu žáky k vhodnému zápisu a případně i znázornění na koláčového grafu pro lepší představu. Pro příklad opět uvádím jeden jednodušší a jeden složitější příklad:

6.3.1 V sáčku jsou 2 sedminy bonbonů ovocných a zbylých 35 je čokoládových. Kolik je v sáčku bonbonů?

6.3.5 Laura četla knihu. První den přečetla $\frac{1}{9}$ stránek. Druhý den přečetla dvakrát tolik. Třetí den přečetla $\frac{3}{7}$ zbytku stránek. Čtvrtý den přečetla 10 stránek a do konce jí zbývalo už pouze 5 stran. Kolik stran má kniha?

V poslední úloze by žák mohl nevděkovat, že v úloze se pracuje s „3/7 zbytku stránek“ a chybně sečíst všechny zlomky a dále počítat dle algoritmu. Na tuto možnou chybu opět upozornuji v nápovědě.

Poslední lekce je věnována souhrnnému opakování nejtěžších úloh se zlomky a propojení všech přechozích lekcí.

3.2.3 Prostupnost, struktura a návaznost lekcí

Při plánování větvení lekcí jsem vycházela především z už hotových lekcí, ale přidala jsem navíc v některých případech do svých lekcí aspekt práce s chybou dle aktuálnějších teorií programovaného učení. Proto se v mém kurzu vyskytují dva druhy prostupnosti otázek.

První druh jsem využívala především u jednodušších lekcí, kde nebyla potřeba žákům tolik napovídat a neočekávala jsem u úloh větší chybovost. Jak je naznačeno v Diagramu 1, v těchto lekcích je žákovi položena otázka a v nabídkách odpovědi může žák zvolit buď správnou odpověď nebo kliknout na „Nevím“.

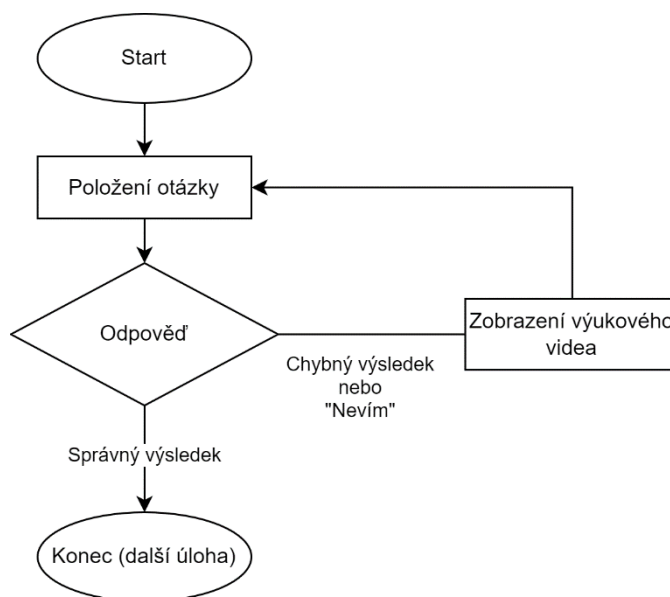


Diagram 1 Příklad jednoduchého prostupu lekcí

Po kliknutí na správnou odpověď chatbot položí žákovi další otázku, při zvolení druhé možnosti chatbot odpoví takto:

To nevadí! Podívej se na video o krácení a rozšiřování zlomků a pak na to určitě přijdeš.

A dál chatbot vloží do konverzace odkaz na video vysvětlující krácení zlomků. Poté následuje znovu ta samá otázka. U všech otázek se žák nedostane v lekcí dále, dokud na danou otázku neodpoví správně, což je myšlenka opět vycházející z teorií programovaného učení.

Prostupnost u obtížnějších lekcí je už komplikovanější (viz Diagram 2). Vstupují tady do hry nápovědy a chybné odpovědi. Například u některých těžších slovních úloh neexistují v českém jazyce vhodná videa a materiály, které by srozumitelně vysvětlovala určité typové úlohy, a zároveň jde u úloh, které mají u státních přijímacích zkoušek vysokou chybovost. Žáci v těchto úloh často vlastní chyby jen obtížně hledají, a proto se je snažím nasměrovat ke správné odpovědi.

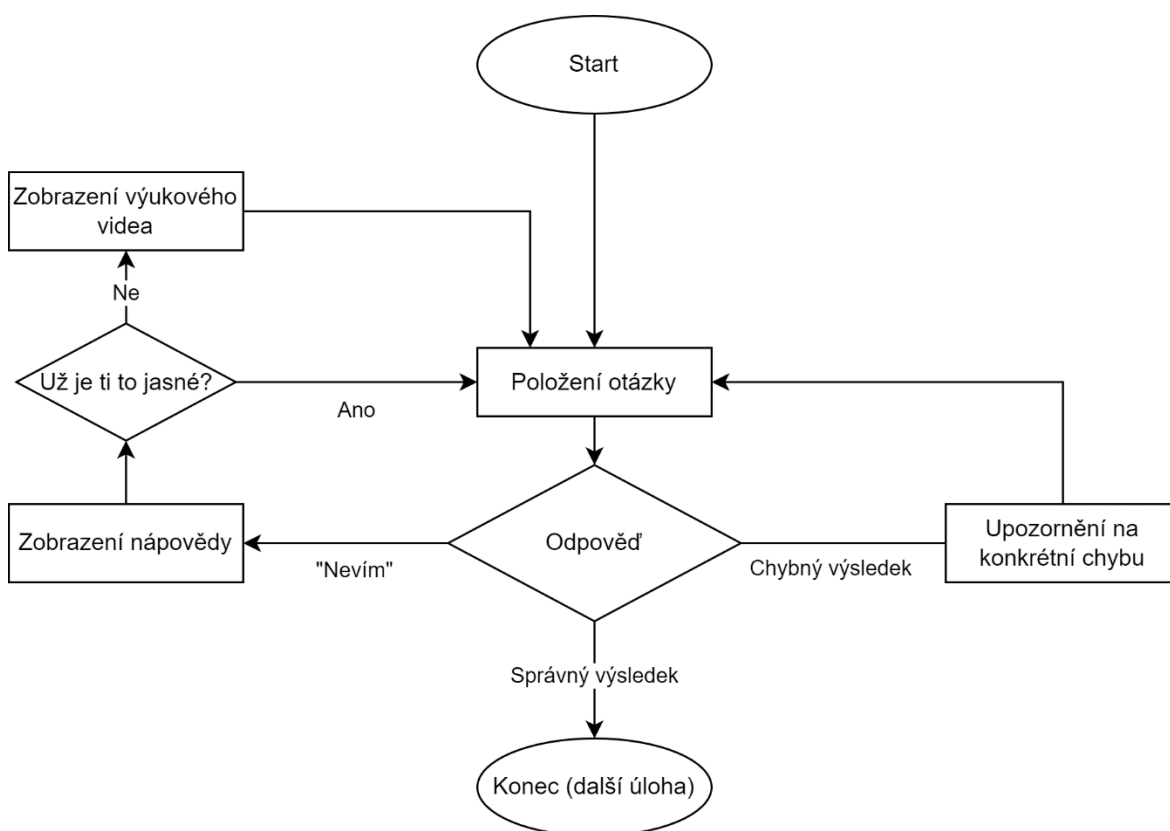
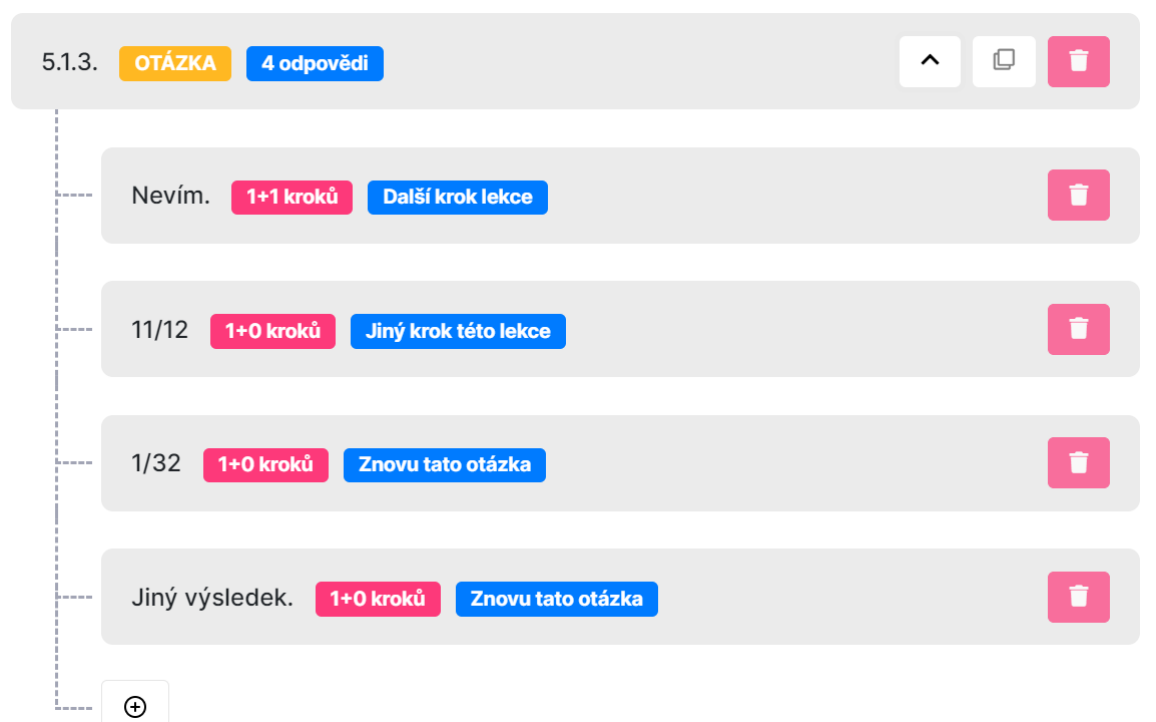


Diagram 2 Příklad větveného prostupu lekcí

U těchto úloh se tedy po položení otázky na obrazovce objeví více možností. Jedna z nich je vždy správná, poté se objeví jedna či více chybných odpovědí a také možnost „Vyšel mi jiný výsledek“ a možnost „Nevím“ (viz Obrázek 4).



Obrázek 4 ukázka možných odpovědí (zdroj autor)

Po zvolení správného výsledku přejde chatbot rovnou na další otázku. Pokud ovšem žák zvolí konkrétní chybnou odpověď, může to implikovat, jaké chyby se dopustil. Úloha 5.1.3. z obrázku 4 například vypadá takto:

$$4.1.3 \quad \frac{17}{12} - \frac{16}{12} : \frac{8}{3}$$

Žák by mohl u tohoto příkladu zapomenout na přednost operací a jako první zlomky odečíst a až poté je vydělit. V tom případě by mu vyšel výsledek $\frac{1}{32}$. To se nachází mezi nabízenými výsledky, žák tuto možnost tedy může zvolit. V tom případě mu chatbot předloží odpověď: „Pozor, to není dobře. Nezapomínej, že dělení má přednost před odčítáním. Zkus to znovu.“ Tím ho nasměruje na správné řešení, a tedy se předpokládá, že by se napodruhé už měl dostat ke správnému výsledku, a přitom není potřeba žákovi vysvětlovat celý příklad nebo mu pouštět naučné video.

Pokud žák zvolí možnost „Jiný výsledek“ chatbot mu odpoví, že výsledek není správně, připomene mu, aby například nezapomínal výsledek krátit a povzbudí ho k dalšímu počítání.

Pokud bude žák úplně bezradný a zvolí možnost „Nevím“. Bude mu nabídnuta nápověda. Nápovědy se různí podle obtížnosti příkladu. Na obrázku 5 můžeme vidět, že u této konkrétní úlohy je součástí nápovědy jeden krok úpravy příkladu a upozornění na možnou chybu.

Dělení má přednost před odčítáním. Nejdřív tedy vydělíme zlomky a až potom výsledek dělení odečteme.

The screenshot shows a user interface for a math problem. At the top, there is a dropdown menu labeled "Obrázek" with a downward arrow. Below it are two icons: a copy icon and a trash icon. The main area contains a math problem: $\frac{17}{12} - \frac{1}{2}$. A red 'X' icon is positioned above the fraction $\frac{1}{2}$, indicating an error. The entire interface is set against a light gray background.

Obrázek 5 Ukázka nápovědy (zdroj autor)

V případě, že žák zvolí jednu z nesprávných odpovědí nebo odpověď „Nevím“, následuje v lekci ještě jeden mezikrok před tím, než bude žák vrácen na původní příklad. Tím je ověřující otázka chatbotu, jestli žák už tuší, jak se příklad počítá a chce se do něj pustit znovu. Pokud žák chatbotu odpoví, že už chápe princip výpočtu příkladu, bude na příklad navrácen, aby ho vypočítal znovu, pokud ovšem ani po nápovědě nebude vědět, bude odkázán na výukové video s podobným příkladem.

Tímto přístupem se snažím o to, aby se žák snažil k výsledku dojít pokud možno sám a nebyla mu odpověď přímo předložena. Nepřímo tedy využívám Presseyho teorii programovaného učení. Žákovi může tímto způsobem sice zabrat příklad více času, ale za to je pravděpodobnější, že danou chybu už vícekrát nebude opakovat.

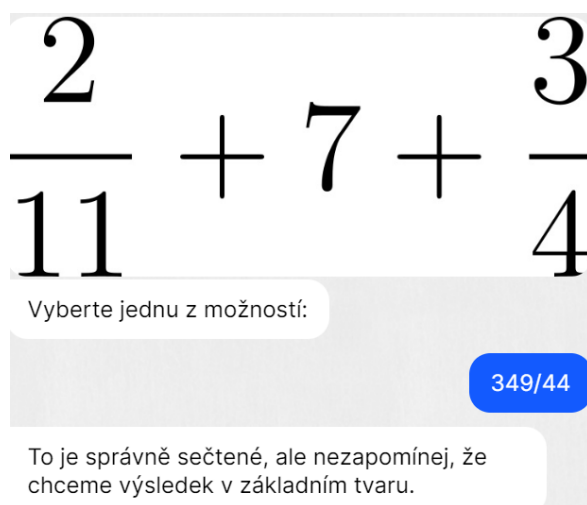
Po dokončení celé lekce bude žák přesměrován na další lekci.

Ukázky prací s chybou

Jak už jsem zmiňovala výše, u řady jednodušších úloh, které mají sloužit jako opakování jednodušších příkladů, a slovních úloh ze sedmé třídy, jsem neměla pocit, že by žák potřeboval větší podporu ze strany chatbota, než nabídnutí výukového videa nebo odkazu na doplňující materiály. Naopak u slovních úloh a příkladů, jejichž typově podobné úlohy ve výsledcích jednotných přijímacích zkouškách zaznamenaly nízké procento (kolem 30 %) úspěšnosti žáků při jejich řešení, jsem se snažila nabídnout co největší množství nápověd.

Jelikož se žáci při práci se zlomky dopouští různých chyb, snažila jsem se personalizovat nápovědy na základě toho, jakou chybu udělali. Jedním z příkladů je možnost učinění chyby v otázce přednosti operací z předchozí podkapitoly.

Další možnou chybou by mohlo být zapomenutí na zkrácení zlomku. V takových případech jsem do odpovědí dávala jako jednu z možností i nezkrácený zlomek. Pokud žák zvolí tuto možnost, chatbot mu napoví, kde mohl udělat chybu a umožní žákovi spočítat příklad znovu (viz Obrázek 6).

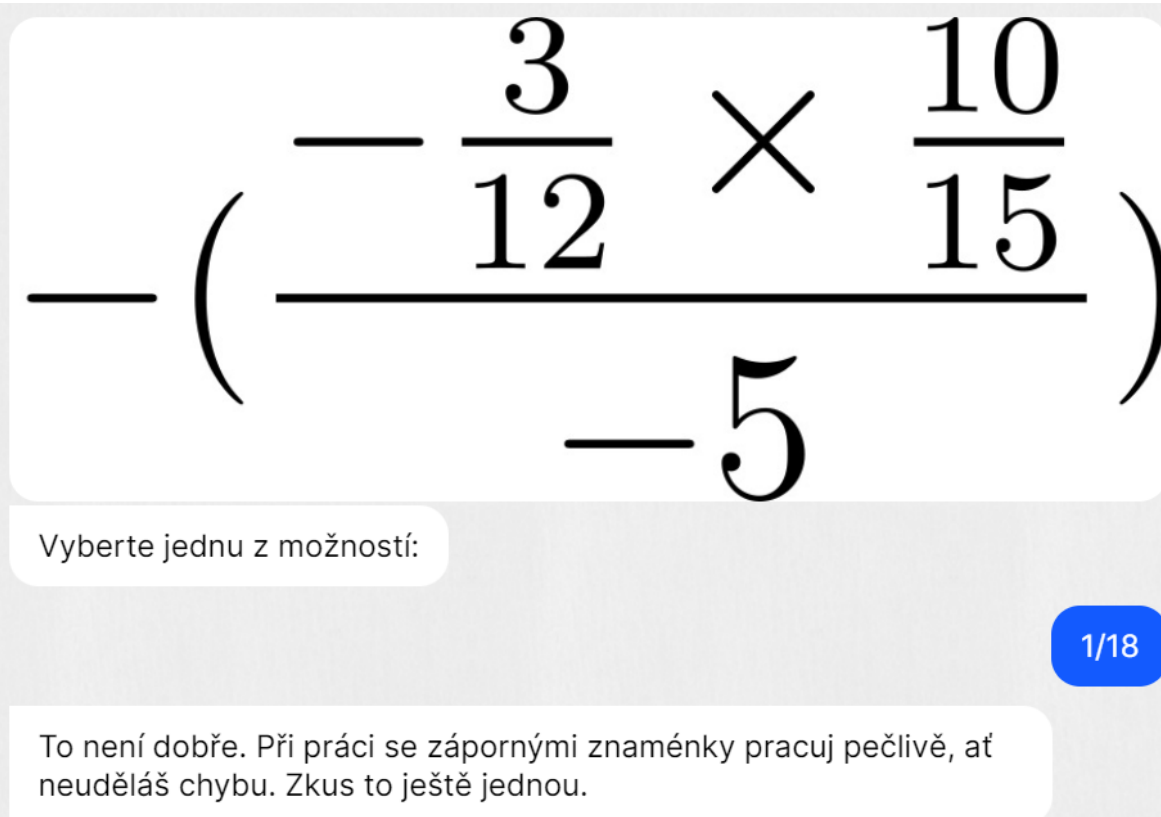


The screenshot shows a chatbot interface. At the top, a math problem is displayed: $\frac{2}{11} + 7 + \frac{3}{4}$. Below the problem, there is a text box with the prompt "Vyberte jednu z možností:". A blue button with the text "349/44" is visible. Below the button, a message box contains the text: "To je správně sečtené, ale nezapomínej, že chceme výsledek v základním tvaru."

Obrázek 6 Ukázka reakce chatbotu na nesprávnou odpověď (zdroj autor)

Možnosti nezkráceného výsledku jsem nevkládala do možností u všech příkladů, pouze u těch prvních, jednodušších příkladů, případně později u příkladů, jako je ten na obrázku 7, kde žáky na první pohled nemusí napadnout, že je čítec a jmenovatel soudělný.

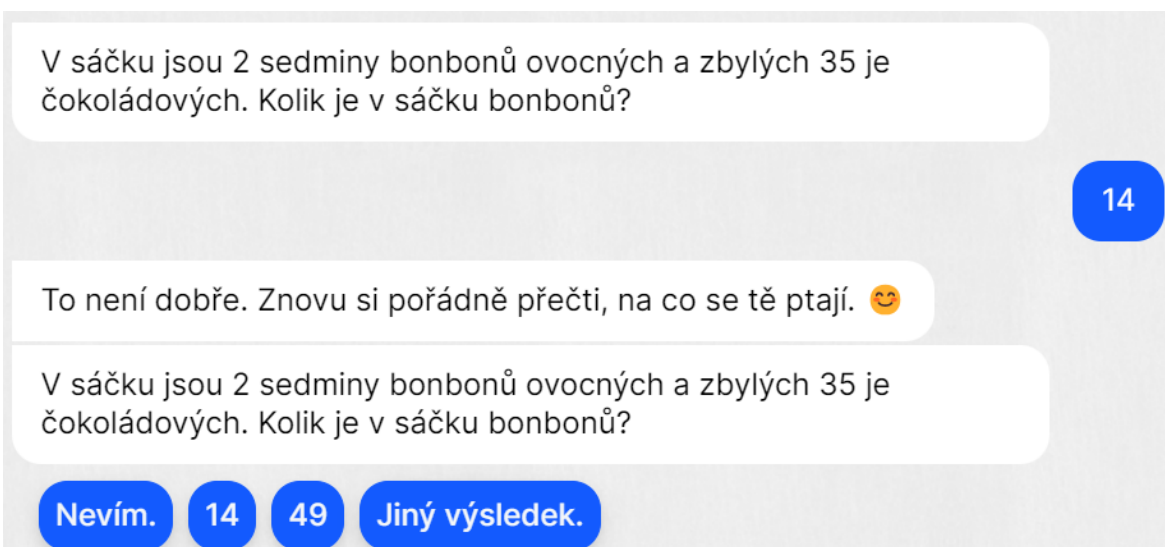
Dále pro žáky může být problematické propojení záporných čísel a zlomků. U obtížnějších příkladů, kde se vyskytují operace se zápornými čísly, jsem tedy přidala i možnost výsledku se špatným znaménkem. V případě, že žák v tomto udělá chybu, opět bude upozorněn jako v ukázce na Obrázku 7.



The image shows a chatbot interface. At the top, a math problem is displayed:
$$\frac{3}{12} \times \frac{10}{15}$$
 followed by a large closing parenthesis $)$ and a minus sign $-$ and the number 5 below it, indicating an incorrect answer. Below the problem, a text box says "Vyberte jednu z možností:". In the bottom right corner, there is a blue button with "1/18". At the bottom, a feedback message in a white box with a grey border says: "To není dobře. Při práci se zápornými znaménky pracuj pečlivě, ať neuděláš chybu. Zkus to ještě jednou."

Obrázek 7 Ukázka reakce chatbotu na nesprávnou odpověď (zdroj autor)

Další druh chyby, které se žáci dopouštějí konkrétně u slovních úloh, je správně zkonstruovaný i vypočítaný příklad dle úlohy, ale špatně zodpovězená otázka. Například v úloze z obrázku 8 může žák správně dopočítat, že $\frac{2}{7}$ balíčku odpovídá čtrnácti bonbonům. To může žák chybně považovat za výsledek. Po upozornění chatbotem na to, že chyba není ve výpočtu, ale že nejspíš pouze špatně odpověděl na otázku by už žák měl rychle dospět ke správnému výsledku a chybu dále neopakovat.



Obrázek 8 Reakce chatbotu na nesprávnou odpověď (zdroj autor)

Při plnění kurzu se žákovi samozřejmě může i stát, že je úplně bezradný a neví, jak si s příkladem poradit. Pokud se tak stane a žák zvolí možnost „Nevím“, bude mu nabídnuta nápověda, či u těžších příkladů přímé vysvětlení, jak ho spočítat. Nebude mu ovšem prozrazen výsledek, pouze postup, jak k němu dojít, aby ho poté mohl vyřešit znovu sám a tím se i něco naučit (viz obrázek 9).

Opět jsem se snažila, aby vysvětlení postupu bylo úměrné obtížnosti úlohy. U jednoduchých početních příkladů podle mého názoru stačí slovně připomenout postup nebo upozornit na konkrétní záludnost v příkladu, která mohla zapříčinit chybu. Pokud by si žák danou látku vůbec nemohl vybavit v průběhu celého kurzu, má možnost přejít na výukové video. U obtížnějších úloh jsem do vysvětlení ovšem vkládala i mezivýsledky. Ty si poté žák může porovnat se svým mezivýsledkem a zjistit, jestli chybu učinil v předchozím kroku, nebo až ke konci výpočtů, řekněme třeba v konečném krácení výsledku.

Nevím.

Nejprve spočítáme násobení nad velkou zlomkovou čarou a výsledek potom vydělíme číslem -5, tedy vynásobíme zlomkem $-1/5$

$$- \left(\frac{-5}{18} \times \frac{1}{-5} \right)$$

Teď už jen nesmíme zapomenout na záporná znaménka.

Už víš, jak příklad spočítat?

Obrázek 9 Ukázka nápovědy (zdroj autor)

U nejobtížnějších příkladů, u kterých je nejpravděpodobnější vznik početní chyby, jsem do odpovědí vkládala někdy i dva mezivýsledky.

V lekcích se slovními úlohami jsem u některých kromě mezivýsledků uváděla i podrobný zápis, abych žáky vedla k jeho automatickému konstruování a ukázala jim, že zápis jim může leckdy pomoci dopočítat se k výsledku.

3.3 Zhodnocení kurzu

Po dokončení kurzu v učitelském rozhraní jsem kurz spustila a pokusila se ho dokončit. Při plnění kurzu jsem nenarazila na žádné větší problémy s přístupností. Drobné chybičky v zadáních úloh či v nápovědách jsem průběžně ve svém kurzu opravovala. V kurzu jsem však také objevila několik zásadnějších problémů, které jsem buď nedokázala opravit, nebo by jejich změna vyžadovala kompletní změnu celého kurzu.

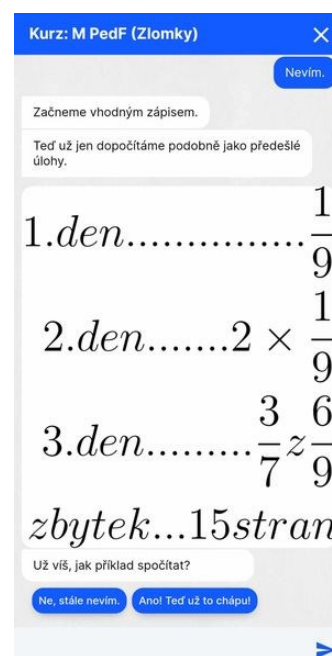
3.3.1 Velikost a přizpůsobení obrázků

Jedním z problémů celého kurzu je podle mého názoru zobrazování obrázků, které jsou na obrazovku moc velké a tím dělají celou práci s chatbotem uživatelsky méně přívětivou. Nejhuře se takto zobrazují ukázky zápisů u slovních úloh a některé obrázky příkladů, které jsou orientované spíše na výšku. Obrázky s příklady jsem se snažila vygenerovat co největší, aby se nestalo, že program bude automaticky obrázky zvětšovat a zhorší tak jejich čitelnost.

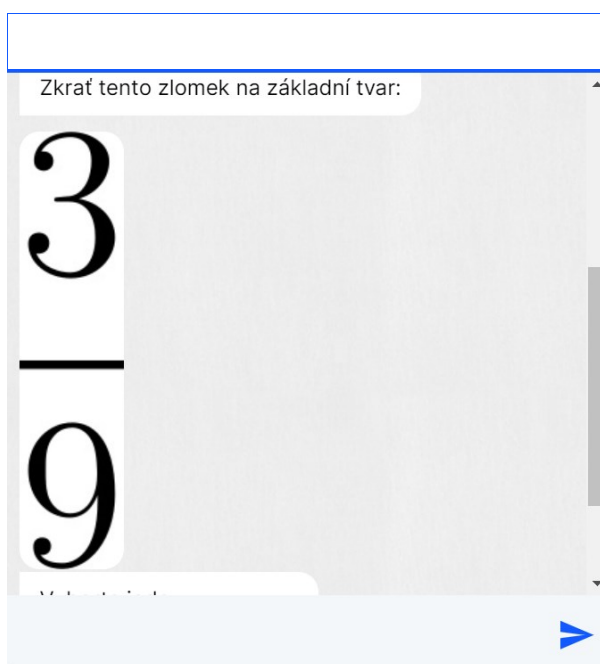
Tento problém nastává ovšem pouze při spuštění chatbotu na notebooku nebo stolním počítači. Při spuštění na mobilním telefonu je velikost obrázku na obrazovce optimální. Na ukázkou přikládám porovnání dvou částí kurzu spuštěného jednou na notebooku a jednou na mobilním zařízení (obrázky 10–13).



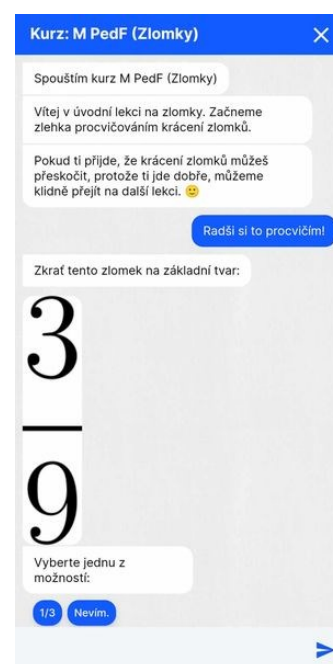
Obrázek 10 Ukázka zobrazení obrázku na notebooku (zdroj autor)



Obrázek 11 Ukázka zobrazení obrázku na mobilním zařízení (zdroj autor)



Obrázek 10 Ukázka zobrazení obrázku na notebooku (zdroj autor)



Obrázek 11 Ukázka zobrazení obrázku na mobilním zařízení (zdroj autor)

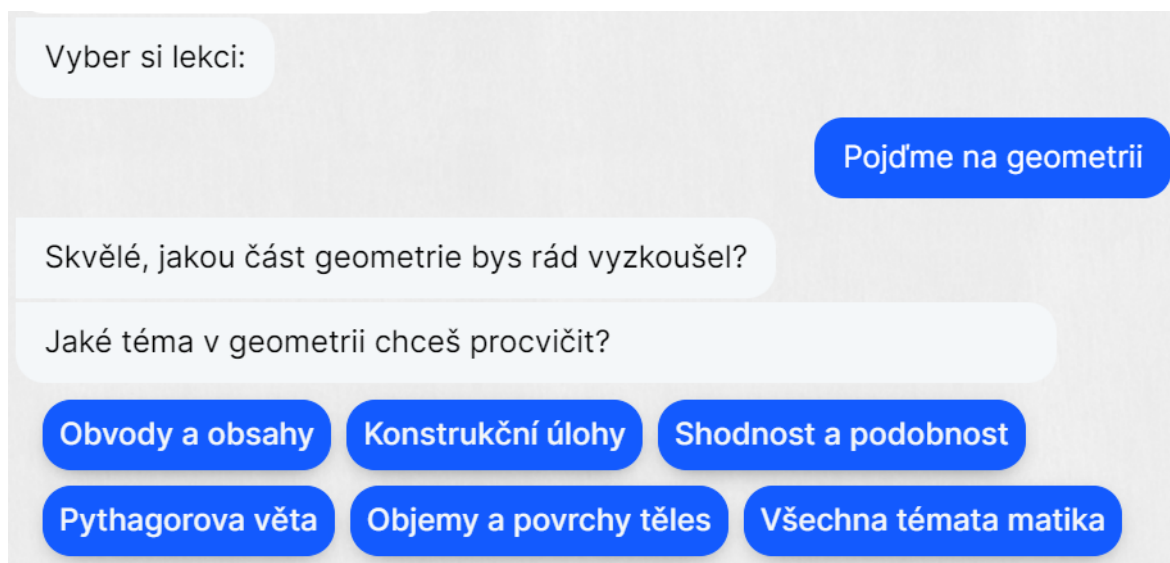
Řešením by mohlo být nahradit problematické příklady a obrázky textem, nebo vygenerovat všechny příklady a zápisy znovu v menší velikosti. Další možností by bylo využít pro reprezentaci matematických výrazů specializovaný značkovací jazyk, jako je např. MathML. Výhodou tohoto řešení by byla i snadná úprava jednotlivých příkladů. Stačilo by změnit zápis příkladu v editačním okně systému a nebylo by potřeba generovat stále nové obrázky. Problémem by naopak mohla být absence podpory tohoto jazyka v některých (zejména starších) webových prohlížečích a nutnost implementace řešení pro zadávání vykreslování takovýchto výrazů v prostředí výukového systému.

3.3.2 Prostupnost kurzu

U prvních dvou lekcí jsem do programu přidala možnost celou lekci přeskočit, jelikož by některým žákům mohla připadat příliš elementární. Při procházení kurzem jsem ale došla k závěru, že by bylo ideální mít možnost volitelně přeskakovat mezi lekcemi a jednotlivými příklady v lekci. Žák v mém kurzu například nemá možnost si zopakovat celou lekci znovu od začátku.

Tento problém by šlo snadno eliminovat přidáním otázky na začátku nebo na konci lekce, jestli žák chce postoupit v kurzu dál, nebo se vrátit k nějaké úplně jiné lekci.

Ještě lepším řešením by bylo už na úplném začátku kurzu nabídnout uživateli rozcestník se všemi lekce v tomto kurzu a při jeho plnění mu umožnit, aby se na tento začátek mohl kdykoliv (i uprostřed lekce) vrátit a začít znovu případně zvolit jinou lekci. Podobně jsou řešené některé kurzy na veřejně přístupné verzi chatbotu na EDU.cz, například kurz geometrie (viz obrázek 14).



Obrázek 12 Ukázka větvení u kurzu geometrie (zdroj autor)

I kdybych tyto možnosti do svého kurzu přidala, stále by nebylo možné vracet se k jednotlivým příkladům. V případě, že by si žák chtěl znovu procvičit poslední příklad z konkrétní lekce, musel by se k němu proklikat.

Také mi toto řešení nepřijde úplně intuitivní. Ocenila bych v tomto bodě větší interaktivitu chatbotu. V případě, že uživatel přímo napíše chatbotu, že se chce vrátit na začátek kurzu, chatbot pokyn nepochopí a znovu mu předloží poslední otázku či informaci (viz obrázek 15).



Obrázek 13 Ukázka nesouvisějícího požadavku (zdroj autor)

Špatnou prostupnost mého kurzu vnímám jako jeho největší nedostatek a pokud bych tento kurz někdy chtěla využít v praxi, určitě bych nejdříve tyto komplikace odstranila. Při tom bych se i celý kurz snažila vystavět transparentněji a předem informovat o tom, jaké lekce se v kurzu vyskytují, kolik příkladů v lekci je a nakolik je obtížná.

3.3.3 Větší snaha o přiblížení se žákovi

V porovnání s některými jinými kurzy v oficiální verzi chatbotu mi můj kurz přijde příliš málo interaktivní a zábavný. Sice jsem se snažila využívat v textových částech kurzu žákovi co nejpřívětivější a nejsrozumitelnější jazyk, za zvážení by ovšem stálo přidání obrázků, případně vtipů. Na druhou stranu jsem podle mého názoru vhodně a dostatečně zapojovala povzbuzující výroky, které mohou žáka motivovat k pokračování v kurzu.

3.3.4 Vyvážení obtížnosti jednotlivých lekcí

Poslední připomínka k mému kurzu se týká rozvržení a obtížnost lekcí. Při vytváření kurzu jsem si nejprve rozložila téma na jednotlivé lekce a ke každé poté vyhledala či vytvořila pět příkladů. To se mi ovšem neosvědčilo jako nejvhodnější postup. Některé lekce jsou pro žáky příliš jednoduché a mohou tak ztrácet žákovu pozornost. Třeba první dvě lekce – krácení a rozšiřování zlomků by klidně mohly být spojené. Naopak poslední lekce mohou působit až příliš komplikovaně a šly by rozdělit do více lekcí. Na slovní úlohy se zlomky by mohlo být přínosné i vytvořit samostatný kurz, aby bylo možné se detailněji věnovat různým typům úloh.

Při využívání kurzu v praxi by také bylo vhodné přidat více příkladů k procvičování. Pět příkladů k jedné lekci mi nepřijde jako dostatečný počet pro správné upevnění látky. Uvítala bych možnost programu vložit do jedné lekce více příkladů, přiřadit jim obtížnost a žák by si poté v každé lekci mohl zvolit kolik příkladů chce k procvičování. Chatbot by mu poté náhodně vybral požadovaný počet příkladů tak, aby příklady byly obtížnostně vyvážené a aby byly podle obtížnosti seřazené, tedy aby žák začal u nejjednoduššího z vybraných příkladů a skončil tím nejsložitějším.

4. Závěr

Hlavním cílem mé práce bylo vytvořit výukový program na téma zlomky za pomoci chatbotu využitelný v praxi.

Při práci na kurzu, jeho závěrečného testování, ale také při zpracování teoretické části bakalářské práce, jsem narazila na několik možných překážek při využití kurzu podobných tomu svému.

Osobně jsem se nejvíce potýkala především s metodologickými otázkami při tvoření kurzu. Prostředí chatbotu pro mě bylo nové a ač mám zkušenosti s přípravou žáků na jednotnou přijímací zkoušku, nebyla jsem si vždy jistá, jak náročný kurz udělat a jaký přístup k chybě bude pro žáky nejvhodnější.

I přes tyto obtíže si ovšem myslím, že kurz by mohl být pro žáky devátých ročníků přínosný. Zvolené úlohy mi přijdou odpovídající schopnostem žáků devátého ročníku, ale zároveň se v kurzu objevují i obtížnější úlohy, po jejichž úspěšném vypočítání by žák měl být připraven na většinu úloh na úrovni jednotné přijímací zkoušky. Postupně zvyšující se náročnost úloh a lekcí by zároveň měla udržet žákovu pozornost a motivovat ho při pokračování v kurzu. Kurz motivuje žáky i slovy afirmace při správně vyřešené úloze a zároveň netrestá žáka za nevědomost, naopak se snaží žákovi napovědět a povzbudit ho k dalšímu počítání. Procházení kurzem je intuitivní a díky formě rozhovoru s chatbotem, který udává další pokyny, i jasné a srozumitelné. V případě zaseknutí se žáka na dané úloze nabízí chatbot hned trojí pomoc, nejprve v podobě malých nápověd přímo od chatbotu, poté poskytnutím edukačního videa na toto téma, případně vyhledáváním dalších zdrojů či konkrétních odpovědí na otázky skrze Wikipedii.

Všechny předem stanovené cíle práce byly tedy dle mého názoru splněny a kurz by po drobných technických úpravách mohl sloužit přinejmenším jako studijní podpora pro žáky devátého ročníku připravujících se na státní přijímací zkoušky. V budoucnu by bylo možné na tuto práci dále navázat v diplomové práci. Bylo by zajímavé například srovnat kurz s jinými konkurenčními kurzy, nebo ho nechat otestovat žáky devátých ročníků a poté na základě zpětné vazby formou dotazníku zkoumat efektivitu kurzu z pohledu uživatelů.

Seznam použitých informačních zdrojů

AI ve vzdělávání. (2023). Evropa v datech. Dostupné z:

<https://www.evropavdatech.cz/clanek/101-ai-ve-vzdelavani/#article-content>

Bednaříková, I. (2013). Možnosti a limity e-learningu ve středoškolském vzdělávání. *e-*

Pedagogium, 3. Dostupné z: <https://e-pedagogium.upol.cz/pdfs/epd/2013/03/09.pdf>

Brown, T. B., Mann, B., Ryder, N., Subbiah, M., Kaplan, J. D., Dhariwal, P., ... & Amodei,

D. (2020). Language Models are Few-Shot Learners. In *Advances in Neural Information*

Processing Systems (NeurIPS 2020). Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/2005.14165>.

CERMAT. (2022). Specifikace požadavků pro jednotnou přijímací zkoušku v přijímacím řízení na střední školy v oborech vzdělávání s maturitní zkouškou. Dostupné z:

https://prijimacky.ceremat.cz/files/files/dokumenty/specifikace-pozadavku/Specifikace_2022-2023/MASPECIFIKACEPOZADAVKU2022.pdf

CERMAT. (2024). Agregována položková data. Dostupné z webu:

<https://vysledky.ceremat.cz/statistika/Default.aspx>

Copeland, B. J. (2024). Artificial intelligence. *Britannica*.

Cruz-Benito, J., & Cruz-Benito, J. (2022). AI in Education. MDPI - Multidisciplinary Digital Publishing Institute.

Deng, L. & Yu, D. (2014). Deep Learning: Methods and Applications.. *Found. Trends Signal Process.*, 7, 197-387.

Desaire, H., Chua, A. E., Isom, M., Jarosova, R., & Hua, D. (2023). Distinguishing academic science writing from humans or ChatGPT with over 99% accuracy using off-the-shelf machine learning tools. *Cell Reports Physical Science*, 4(6).

Dwivedi, Y. K., Kshetri, N., Hughes, L., Slade, E. L., Jeyaraj, A., Kar, A. K., Baadullah, A., Koohang, A., Raghavan, V., Ahuja, M., Albanna, H., Albashrawi, M. A., Al-Busaidi, A. S., Balakrishnan, J., Barlette, Y., Basu, S., Bose, I., Brooks, L., Buhalis, D., . . . Wright, R. (2023). Opinion Paper: “So what if ChatGPT wrote it?” Multidisciplinary perspectives on opportunities, challenges and implications of generative conversational AI for research, practice and policy. *International Journal of Information Management*, 71.

- Hejný, M. (2004). Zlomky. In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (343-355),
- Hejný, M., Jirotková, D., Kratochvílová, J. (2006). *Práce s chybou jako strategie rozvoje klíčových kompetencí žáka.*
- Horáková, A.-M. (2023). První univerzitní oběť AI. Fakulta VŠE ruší bakalářské práce, změnu zvažují i další školy. E15. Dostupné z: <https://www.e15.cz/domaci/prvni-univerzitni-obet-ai-fakulta-vse-rusi-bakalarske-prace-zmenu-zvazuji-i-dalsi-skoly-1411760>
- Fry, E. (1966). *Vyučovací stroje a programované vyučování uvedení do problému* (V. Podlena & J. Volek, Trans.). Státní pedagogické nakladatelství.
- Fryč, J., Matušková, Z., Katzová, P., Kovář, K., Beran, J., Valachová, I., Seifert, L., Beťáková, M., Hrdlička, F., & kolektiv autorů Hlavních směrů vzdělávací politiky ČR do roku 2030+. (2020). *Strategie vzdělávací politiky České republiky do roku 2030+*.
- Jančařík, A., Michal, J., & Novotná, J. (2023). Metodika tvorby a využití výukových materiálů z matematiky v prostředí AI Chatbota EDU-AI.EU. Dostupné z: https://pedf.cuni.cz/PEDF-3082-version1-metodika_tvorby_a_vyuziti_pedf_uk.pdf
- Kněžů, V., Kulič, V., Pešinová, H., & Polanský, M. (1966). *Programované učení jako světový problém: [výbor statí ze světové literatury]*. Státní pedagogické nakladatelství.
- Kočárková, J. (2023). Umělá inteligence už může legálně pomáhat i při psaní studentských závěrečných prací. *Technický deník*. Dostupné z: https://www.technickytydenik.cz/rubriky/ict/umela-inteligence-uz-muze-legalne-pomahat-i-pri-psani-studentskych-zaverecnych-praci_59206.html
- Kopecký, K., Szotkowski, R., Voráč, D., Krejčí, V., & Dobešová, P. (2023). *České školy a umělá inteligence – výzkumná zpráva*. Pedagogická fakulta Univerzity Palackého v Olomouci. Dostupné z: <https://www.e-bezpeci.cz/index.php/ke-stazeni/vyzkumne-zpravy/163-ceske-skoly-a-umela-inteligence-2023/file>
- Lee, J. H., Yang, H., Shin, D., & Kim, H. (2020). Chatbots. *ELT journal*, 74(3), 338-344. <https://doi.org/10.1093/elt/ccaa035>

Lesáková, E., & Řídká, E. (2006). Některá zjištění vyplývající z projektu „Hodnocení výsledků vzdělávání žáků 9. tříd“ In Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu. 1. vyd. Praha: JČMF.

Liškař, Č. (1981). Základy programovaného učení. SPN.

Malik, M.A.; Mahroof, A.; Ashraf, M.A. (2021) Online University Students' Perceptions on the Awareness of, Reasons for, and Solutions to Plagiarism in Higher Education: The Development of the AS&P Model to Combat Plagiarism. Appl. Sci. Dostupné z: <https://doi.org/10.3390/app112412055>

MŠMT. (2022). Hlavní směry revize Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání. Dostupné z: <https://velke-revize-zv.rvp.cz/files/iii-hlavni-smery-revize-rvp-zv-po-vpr-final-230111.pdf>

Mareš, J., Walterová, E., & Průcha, J. (1998). Pedagogický slovník (2. rozš. a přeprac. vyd). Portál.

Morton, R. L. (1924). An Analysis of Pupils' Errors in Fractions, The Journal of Educational Research

Nulíček, V. (2024). Umělá inteligence na základních a středních školách v ČR. In Valenčík, R., Petrů, N. (Eds.), Human capital and investment in education: Artificial intelligence and strategic changes in education. SCIENCEpress.

<http://dx.doi.org/10.37355/LK-2023>

Okoye, K., Hosseini, S., Hiran, K. K., & Nganji, J. T. (2024). Impact and Implications of AI Methods and Tools for the Future of Education. <https://doi.org/10.3389/978-2-8325-5013-7>

Pritchard, A. (2009). Ways of learning: learning theories and learning styles in the classroom (2nd ed.). Taylor & Francis.

Programovaná výuka v kombinaci s hypertextem. (1998). Zpravodaj ÚVT MU, 9(2).

MŠMT. (2023) Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha.

<http://www.nuv.cz/file/4982/>

Russell, S. J. (S. J.). (2021). Jako člověk: umělá inteligence a problém jejího ovládní. Dokořán.

Tichá, M., & Macháčková, J. (2006) Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice. In Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP Studijní materiály k projektu. 1. vyd. Praha: JČMF.

Tollingerová, V., Kněžů, D., Kulič, V. (1966). Programované učení. Státní pedagogické nakladatelství.

Turing, S., Davis, M., & Turing, J. (2012). Alan M. Turing (Centenary ed). Cambridge University Press.

TVRDÝ, Filip. Turingův test: Filosofické aspekty umělé inteligence. (2011) Online. Disertační práce. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, Filozofická fakulta. Dostupné z: <https://theses.cz/id/st6pmz/>.

Vondrová, N., Havlíčková, R., Rendl, M., & Žalská, J. (2015). Kritická místa matematiky základní školy: Metodický portál pro učitele.

Zounek, J., Juhaňák, L., Staudková, H., & Poláček, J. (2021). E-learning, Učení (se) s digitálními technologiemi (2nd ed.). Wolters Kluwer.

Webové stránky:

<https://aidetem.cz/>

<https://blog.duolingo.com/>

<https://edu-ai.eu/>

<https://quizlet.com/>

<https://sciobot.cz/>

<https://www.ucimsai.cz/>