MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Barbora Dohnalová

Kochenova-Stoneova nerovnost

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Ráda bych poděkovala vedoucímu mé bakalářské práce doc. RNDr. Danielovi Hlubinkovi, Ph.D. za trpělivost, ochotu a za užitečné rady, které mi poskytoval v celém průběhu psaní práce.

Název práce: Kochenova-Stoneova nerovnost

Autor: Barbora Dohnalová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce se zabývá Kochenovou-Stoneovou nerovností a jejími alternativami. První kapitola shrnuje Borel-Cantelliho lemma a je doplněna o několik příkladů, ve kterých je dokázané lemma využíváno různými způsoby. Druhá kapitola se věnuje důkazu samotné Kochenovy-Stoneovy nerovnosti a zmiňuje další zobecnění Borel-Cantelliho lemmatu. Třetí kapitola patří pár příkládům na využití Kochenovy-Stoneovy nerovnosti.

Klíčová slova: Kochenova-Stoneova nerovnost Borelovo-Cantelliho lemma 0-1 zákony Chung-Erdösova nerovnost V.V.Petrov

Title: Kochen-Stone inequality

Author: Barbora Dohnalová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The main theme of this work is the Kochen-Stone inequality and its alternatives. The first chapter summarizes the Borel-Cantelli lemma and is supplemented with several examples in which the proven lemma is utilized in various ways. The second chapter focuses on the proof of the Kochen-Stone inequality itself and mentions further generalizations of the Borel-Cantelli lemma. The third chapter presents a few examples of utilizing the Kochen-Stone inequality.

Keywords: Kochen-Stone inequality Borel-Cantelli lemma zero-one laws V.V.Petrov Chung-Erdös inequality

Obsah

Úvod **2**

1 Úvod do 0-1 zákonů **3**
1.1 Borel-Cantelliho lemma 3
1.2 Jednoduché příklady 5

2 Zobecnění Borel-Cantelliho lemmatu **7**
2.1 Kochenova-Stoneova nerovnost 7
2.2 Alternativní zápisy K-S nerovnosti 11
2.3 Zobecnění Valentina V. Petrova 15

3 Příklady **19**

Závěr **21**

Seznam použité literatury **22**

Úvod

Borel-Cantelliho lemma je jedním z nejznámějších 0-1 zákonů. Určuje nám pravděpodobnost, se kterou pro nekonečně mnoho n nastane určitý jev. Jako jednoduchý ilustrační příklad lze uvést hod mincí, kdy nás zajímá, s jakou pravděpodobností padne rub pro nekonečně mnoho n. Takový případ nám Borel-Cantelliho lemma rychle vyřeší, hlavně proto, že se jedná o nezávislé jevy. Ale vzhledem k tomu, že pro jeho použítí je třeba splnit vcelku striktní podmínky, tak nám ve spoustě dalších případů nedává žádný výsledek.

Mnoha matematikům tedy připadalo toto lemma nedostatečné a po mnoho let se pokoušeli o jeho vylepšení. Několika z nich se určitým způsobem povedlo podmínky zeslabit, s tím se však pojí, že výsledkem je odhad pravděpodobnosti. Mezi takové inovace se řadí i článek Kochena a Stonea. Ten vyšel v 70. letech 20. století a obsahuje tvrzení opřené o vlastnosti středních hodnot a dva důsledky. Oslabená podmínka, kterou uvádí důsledek předpokládající rekurentní jevy, se však v praxi těžko ověřuje, proto se ještě předkládá postačující podmínka, jež je pro nás snadněji ověřitelná.

Na následujích stránkach první kapitoly lze tedy najít podrobněji popsané Borel-Cantelliho lemma společně s důkazem a několika příklady na jeho použití.

Druhá kapitola se už věnuje samotné Kochenově-Stoneově nerovnosti spolu s důkazem. Dále je zde uvedena její alternativa také s důkazem, která se na danou problematiku dívá z trochu jiného úhlu, ale dochází k totožnému výsledku. Poslední část druhé kapitoly dokazuje, že jedno z nejnovějších zobecnění Borel-Cantelliho lemmatu je důsledkem tvrzení z článku Kochena a Stonea.

Třetí kapitola uvádí několik příkladů, které lze vyřešit pomocí Kochenovy-Stoneovy nerovnosti, kdy jsou k řešení použity obě dokázaná tvrzení. Zároveň se zde znovu objevuje jeden příklad z první kapitoly pro srovnání náročnosti výpočtu.

1. Úvod do 0-1 zákonů

1.1 Borel-Cantelliho lemma

V prvních desetiletích dvacátého století přišli Émile Borel a Francesco P. Cantelli s lemmatem o posloupnosti náhodných jevů ze σ-algebry $\mathcal{A}$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Lemma lze rozdělit na dvě části, kdy jedna část pracuje jen s posloupností náhodných jevů a druhá část požaduje nezávislost jevů.

Jako první si zavedeme následující značení.

Značení. Mějme A_1, A_2,... náhodné jevy z $\mathcal{A}$. Pak následující množiny jsou také z $\mathcal{A}$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \text{ a } \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Z rovností výše nám vyplývá, že $\limsup_{n\to\infty} A_n$ je množina elementárních jevů, které jsou prvkem nekonečně mnoha z jevů A_n. Na druhou stranu $\liminf_{n\to\infty} A_n$ značí množinu elementárních jevů, které jsou prvkem všech až na konečně mnoho z jevů A_n.

Lemma 1 (Borel-Cantelli I.část)**.** *Buďte A_1, A_2,... náhodné jevy, pak platí implikace*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0. \tag{1.1}$$

Důkaz. Předpokládejme, že platí $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$.
Ze značení výše dostáváme

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

Kdy druhá rovnost plyne ze spojitosti pravděpodobností a poslední rovnost využívá předpokladu $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$.

□

Poznámka. Z vlastností doplňku plyne, že

$$(\limsup_{n\to\infty} A_n)^C = (\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)^C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^C = \liminf_{n\to\infty} A_n^C.$$

Poznámka. Pokud platí $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, pak z Lemma 1 dostáváme důsledek

$$P(\liminf_{n\to\infty} A_n^C) = 1.$$

Lemma 2 (Borel-Cantelli II.část)**.** *Buďte A_1, A_2,... nezávislé náhodné jevy, pak platí následující ekvivalence*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Leftrightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0, \tag{1.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Leftrightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1. \tag{1.3}$$

Důkaz. Jako první si dokážeme následující implikaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Rightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Ze vztahu

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = (\liminf_{n\to\infty} A_n^C)^C$$

plyne

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1 - P(\liminf_{n\to\infty} A_n^C).$$

Z faktu, že pravděpodobnost nabývá hodnot z intervalu [0,1], plyne nerovnost

$$\begin{aligned}
0 \leq P(\liminf_{n\to\infty} A_n^C) &= P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^C) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^C) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^C) = \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} (1 - P(A_k)) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} e^{-P(A_k)} = \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{N} P(A_k)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

V první rovnosti využíváme $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Druhá a třetí rovnost plyne ze spojitosti pravděpodobností. Čtvrtá rovnost vychází z předpokladu nezávislosti jevů ($P(\bigcap_{l\in L} A_l) = \prod_{l\in L} P(A_l)$, kdy L je konečná množina) a vlastnosti doplňku $P(A^C) = 1 - P(A)$.
V nerovnosti

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} (1 - P(A_k)) \leq \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} e^{-P(A_k)}$$

využíváme známého odhadu exponenciály

$$1 - x \leq e^{-x} \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Poslední rovnost vyplývá z předpokladu tvrzení, že $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$.

Z věty o dvou strážnících(skripta k Matematické analýze(Pick a kol. (2020)), věta 2.2.46) dostáváme

$$P(\liminf_{n\to\infty} A_n^C) = 0, \text{ a tedy } P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Máme dokázané následující dvě implikace

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Rightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Ekvivalence plynou z faktu, že $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ nemůže dosáhnout jiného výsledku než $< \infty$ nebo $= \infty$.

$\square$

Důkazy jsou čerpány ze skript k přednášce Pravděpodobnost a matematická statistika (Prokešová (2023)).

1.2 Jednoduché příklady

Příklad 1. Nechť X_1, X_2... je posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin s normálním rozdělením s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$. Určete, s jakou pravděpodobností pro nekonečně mnoho n nastane jev $A_n = [X_n \geq 0]$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že X_1, X_2... jsou ze zadání nezávislé jevy, pak i A_n jsou nezávislé. Navíc víme, že hustota normálního rozdělení s danými parametry je $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Pak můžeme za pomoci gamma funkce spočítat

$$P(A_n) = P(X_n \geq 0) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}.$$

Dále dosadíme do sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty.$$

K řešení tedy použijeme druhou část Borel-Cantelliho lemmatu (1.3).
Dostáváme, že $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$. Jev A_n tedy nastane pro nekonečně mnoho n s pravděpodobností 1.

Příklad 2. Nechť X_1, X_2... je posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin s normálním rozdělením s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$. Určete, s jakou pravděpodobností pro nekonečně mnoho n nastane jev $A_n = [X_1 \geq 0]$.

Řešení. Zde si musíme dát pozor, neboť A_n nejsou nezávislé, nelze tím pádem použít Borel-Cantelliho lemma pro nezávislé jevy. Z příkladu výše víme, že $P(A_n) = \frac{1}{2}$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$. Nepomůže nám ani první část lemmatu (1.1), budeme muset využít definice $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} (X_1 \geq 0)) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} (X_1 \geq 0) = \lim_{n\to\infty} P(X_1 \geq 0) = \frac{1}{2},$$

kde v předposlední rovnosti můžeme za $P(X_1 \geq 0)$ dosadit $\frac{1}{2}$.
Jev A_n tedy nastane pro nekonečně mnoho n s pravděpodobností $\frac{1}{2}$.

Příklad 3. Nechť X_1, X_2... je posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda = 2$. Určete, s jakou pravděpodobností pro nekonečně mnoho n nastane jev $A_n = [X_n \geq \log n^3]$.

Řešení. Opět máme, že X_1, X_2... jsou nezávislé jevy, stejně tak i A_n. Dále známe hustotu exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda = 2$, což je $f(x) = 2e^{-2x}$. Následně postupujeme podobně jako v Příkladu 1

$$P(A_n) = P(X_n \geq \log n^3) = \int_{\log n^3}^{\infty} 2e^{-2x}dx = [-e^{-2x}]_{\log n^3}^{\infty} = \frac{1}{n^6}.$$

Výsledek opět dosadíme do sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} < \infty.$$

Dostáváme, že $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$ z (1.2). Jev A_n tedy nastane pro nekonečně mnoho n s pravděpodobností 0.

Příklad 4. Nechť X_1, X_2... je posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda = 2$. Určete, s jakou pravděpodobností pro nekonečně mnoho n nastane jev $A_n = [X_1 \geq \log n^3]$.

Řešení. Stejně jako v Příkladu 2 jevy A_n nejsou nezávislé. Ale vzhledem k tomu, že už máme spočítané $P(A_n) = \frac{1}{n^6}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, můžeme příklad dopočítat pomocí první části Borel-Cantelliho lemmatu (1.1). Podmínku máme splněnou, takže $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.
Jev A_n tedy nastane pro nekonečně mnoho n s pravděpodobností 0.

Příklad 5. Mějme k dispozici klasickou šestistěnnou kostku. Chceme určit, s jakou pravděpodobností padne dvojka v nekonečně mnoha hodech.

Řešení. Vzhledem k tomu, že máme k dispozici nekonečně mnoho hodů, tak se nabízí myšlenka, že dvojka určitě padne. Zkusíme to však ověřit početně.

Skutečnost, že padne dvojka, je nezávislý jev, předchozí hody očividně ten další nijak neovlivní. Dostáváme tedy nezávislou posloupnost jevů. Pravděpodobnost padnutí dvojky je $\frac{1}{6}$. Můžeme psát

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} = \infty.$$

Z (1.3) plyne, že $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.
Tím pádem dvojka padne v nekonečně mnoha hodech s pravděpodobností 1, což potvrzuje naši prvotní myšlenku.

Příklad 6. Mějme jednu urnu s jedním bílým míčkem. Po každém vytažení míčku přidáme k černých míčků. Jaká je pravděpodobnost, že nekonečně-krát vytáhneme bílý míček?

Řešení. Označíme $A_n = \mathbf{1}_{[\text{v n-tém tahu vytáhneme bílý míček}]}$ a zajímá nás, jak vyjde $P(\limsup_{n\to\infty}(A_n))$. V prvním tahu se v urně nalézá jediný míček a navíc bílý, takže pravděpodobnost jeho vytažení je 1.

Pro druhý tah už máme v urně k+1 míčků, takže $P(A_2) = \frac{1}{k+1}$.

Ve třetím tahu se pravděpodobnost změnila na $P(A_3) = \frac{1}{2k+1}$.
Dostáváme tedy, že $P(A_n) = \frac{1}{nk+1}$. Můžeme obecně psát

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nk+1} = \infty.$$

Řada diverguje, použijeme druhou část Borel-Cantelliho lemmatu (1.3), tedy $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

2. Zobecnění Borel-Cantelliho lemmatu

2.1 Kochenova-Stoneova nerovnost

Pokud nemáme nezávislé náhodné jevy a platí $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, tak nám Borel-Cantelliho lemma nedává žádný výsledek. A vzhledem k tomu, že B-C lemma už tu s námi je pár desítek let, tak se několik matematiků snažilo dosáhnout jeho vylepšení a přinejmenším odhadnout dolní mez $P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$, pokud A_1, A_2,... nejsou nezávislé jevy a $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$.

V roce 1964 publikovali Charles Stone a Simon Kochen (Stone a Kochen (1964)) zobecnění Borel-Cantelliho lemmatu, na které se v této kapitole pokusíme podívat podrobněji. Kochen a Stone přišli s myšlenkou, že by se lemma dalo zpřesnit, pokud bychom uvažovali náhodné veličiny $X_n/\mathbb{E}X_n$, kdy X_n označuje počet jevů A_1,...,A_n, které nastanou. Použití této náhodné veličiny přináší velkou výhodu, neboť pokud jsou jevy A_n nezávislé a $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ diverguje, tak pak lze aplikovat silný zákon velkých čísel, takže $\lim_{n\to\infty} X_n/\mathbb{E}X_n = 1$ skoro jistě.

Definice 1. *Konvergence skoro jistě: Nechť X_1, X_2,... jsou náhodné veličiny na stejném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega,\ A,\ P)$. Posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje skoro jistě k náhodné veličině X, jestliže*

$$P\bigg(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\bigg) = 1.$$

Tvrzení 3. *Nechť X_1, X_2,... je posloupnost náhodných veličin, kdy každá z veličin má nezápornou střední hodnotu a konečný kladný druhý moment.*
Dále předpokládejme, že $\limsup_{n\to\infty} \frac{(\mathbb{E}X_n)^2}{\mathbb{E}X_n^2} > 0$. Pak

i) $P(\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} \le 1) > 0$,

ii) $P(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} \ge 1) > 0$,

iii) $P(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} > 0) \ge \limsup_{n\to\infty} \frac{(\mathbb{E}X_n)^2}{\mathbb{E}(X_n)^2}$.

Důkaz. Označme $Y_n = \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n}$. Pak $\mathbb{E}Y_n = \mathbb{E}\frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} = \frac{\mathbb{E}X_n}{\mathbb{E}X_n} = 1$. Rozptyl bude vypadat následovně $\operatorname{var} Y_n = \mathbb{E}Y_n^2 - (\mathbb{E}Y_n)^2 = \mathbb{E}Y_n^2 - 1 < \mathbb{E}Y_n^2 < \infty$.
Podmínku $\limsup_{n\to\infty} \frac{(\mathbb{E}X_n)^2}{\mathbb{E}X_n^2} > 0$ můžeme přepsat jako $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\mathbb{E}Y_n^2} > 0$. Pak

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \ge n_0 : \sup_{n\ge n_0} \frac{1}{\mathbb{E}Y_n^2} > \epsilon.$$

Neboli

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \ge n_0 : \inf_{n\ge n_0} \mathbb{E}Y_n^2 < \frac{1}{\epsilon}.$$

Označíme-li $M = \frac{1}{\epsilon}$, pak platí, že $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n^2 \le M < \infty$.

Nechť c je kladné číslo a I_n indikátor náhodného jevu $Y_n < c$. Pokud využijeme znalosti střední hodnoty z výpočtu výše, dostáváme nerovnost

$$1 = \mathbb{E}Y_n \leq \mathbb{E}Y_n I_n + \frac{\mathbb{E}Y_n^2}{c}.$$

Její pomocí můžeme odhadnout následující výraz

$$\begin{aligned} 1 - \frac{M}{c} &\leq \mathbb{E}Y_n I_n + \frac{\mathbb{E}Y_n^2}{c} - \frac{\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n^2}{c} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}I_n Y_n + \delta + \frac{\mathbb{E}Y_n^2 - \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n^2}{c}. \end{aligned}$$

Kdy využíváme, že z definice limes superior plyne

$$\forall \delta > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0 : \mathbb{E}I_n Y_n - \delta \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}I_n Y_n.$$

Označíme-li $\widetilde{M} = \frac{M - \mathbb{E}Y_n^2 + \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n^2}{c}$, pak

$$1 - \frac{\widetilde{M}}{c} - \delta \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}I_n Y_n \leq \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} I_n Y_n),$$

kdy střední hodnotu a limes superior lze zaměnit na základě Fatouova lemmatu[1]. Vzhledem ke skutečnosti, že c může být libovolně velké a δ libovolně malé, lze nerovnost přepsat jako

$$1 \leq \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} I_n Y_n) \leq \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} Y_n),$$

tedy dostáváme

$$0 \leq P(\limsup_{n\to\infty} Y_n \geq 1) = P(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} \geq 1).$$

Co by se ale stalo, kdyby nastalo $P(\limsup_{n\to\infty} Y_n \geq 1) = 0$? Pak by nutně muselo platit, že

$$\limsup_{n\to\infty} Y_n < 1 \Rightarrow \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} Y_n) < 1,$$

což je v přímém rozporu s odhadem $1 \leq \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} Y_n)$, který jsme získali výše. Víme, že $\mathbb{E}Y_n = 1$, není tedy možné, aby střední hodnota $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n$ byla menší. Proto platí

$$0 < P(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} \geq 1).$$

A tím máme dokázaný bod ii) z tvrzení.
Bod i) plyne víceméně analogicky, jen dále označíme $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n^2 \leq T < \infty$ pro nějaké kladné T a využijeme definice limes inferior

$$\forall \delta > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0 : \mathbb{E}Y_n + \delta \geq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n.$$

[1] Fatouovo lemma: Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou nějaké nezáporné měřitelné funkce na X, pak $\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

Pak můžeme psát

$$1 + \frac{T}{c} \geq \mathbb{E}Y_n + \frac{\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n^2}{c} \geq \mathbb{E}Y_n \geq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n - \delta \geq \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} Y_n) - \delta,$$

kdy jsme opět využili Fatouova lemmatu. Platí tedy

$$0 \leq P(\liminf_{n\to\infty} Y_n \leq 1) = P(\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} \leq 1).$$

Nula však opět nemůže nastat, protože pak by stejně jako v důkazu bodu ii) došlo k následujícímu sporu

$$\liminf_{n\to\infty} Y_n > 1 \Rightarrow \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} Y_n) > 1,$$

přičemž víme, že $1 \geq \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} Y_n)$ pro nějaké libovolně velké c.

Zbývá nám dokázat bod iii). Zjevně $\mathbb{E}I_nY_n < c$, a proto platí nerovnost $\mathbb{E}Y_n(1 - I_n) = 1 - \mathbb{E}I_nY_n \geq 1 - c$. Pak pro $0 < c < 1$ a z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti dostáváme, že

$$(1-c)^2 \leq (\mathbb{E}Y_n(1-I_n))^2 \leq \mathbb{E}Y_n^2\mathbb{E}(1-I_n)^2 = \mathbb{E}Y_n^2\mathbb{E}(1-I_n) = \mathbb{E}Y_n^2P(Y_n \geq c).$$

Neboli

$$\begin{aligned} P(\limsup_{n\to\infty}(\frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} \geq c)) &= P(\limsup_{n\to\infty}(Y_n \geq c)) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}(Y_k \geq c)) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty}(Y_k \geq c)) \geq \limsup_{n\to\infty} P(Y_n \geq c) \\ &\geq (1-c)^2 \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\mathbb{E}Y_n^2} = (1-c)^2 \limsup_{n\to\infty} \frac{(\mathbb{E}X_n)^2}{\mathbb{E}X_n^2}. \end{aligned}$$

A c může být libovolně malé, zvolíme ho tedy blízko nule, čímž je dokázán bod iii).

□

Důsledek 1. *Nechť předpoklady Tvrzení 3 platí.*
Dále předpokládejme, že $\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n}$ *a* $\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n}$ *jsou konstanty skoro jistě. Pak*

iv) $P(\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} \leq 1) = 1,$

v) $P(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} \geq 1) = 1.$

Další důsledek Tvrzení 3 předpokládá rekurentní jevy, proto si nejdříve uvedeme jejich definici a ilustrační příklad.

Definice 2. *Rekurentní jevy: Posloupnost jevů* $A_1, A_2,...$ *se nazývá systém rekurentních jevů, jestliže existují nezávislé stejně rozdělené kladné celočíselné náhodné veličiny* $Y_1, Y_2,...$ *takové, že pro jev* A_k *platí:* $Y_1 + Y_2 + ... + Y_j = k$ *pro nějaké* j.

Pro lepší představu definice si rozepíšeme, jak by mohlo vypadat několik prvních členů posloupnosti $A_1, A_2, \ldots$. Důležitou skutečností je, že náhodné veličiny $Y_1, Y_2, \ldots$ jsou kladné a celočíselné. Potom tedy

$$\begin{aligned}
&A_1 = [Y_1 = 1],\\
&A_2 = [Y_1 = 2] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 1],\\
&A_3 = [Y_1 = 3] \cup [Y_1 = 2, Y_2 = 1] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 2] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1],\\
&A_4 = [Y_1 = 4] \cup [Y_1 = 3, Y_2 = 1] \cup [Y_1 = 2, Y_2 = 2] \cup [Y_1 = 2, Y_2 = 1, Y_3 = 1]\\
&\quad \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 3] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 2, Y_3 = 1] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 2]\\
&\quad \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1, Y_4 = 1].
\end{aligned}$$

Poznámka. Pro systém rekurentních jevů platí následující vztah

$$P(A_m \cap A_k) = P(A_m)P(A_{k-m}) \text{ pro } 1 \leq m < k,$$

z čehož je jasně vidět, že jevy nejsou nezávislé.

Tento vztah lze nahlédnout z rozepsaných členů rekurentní posloupnosti. Označme $p_i = P[Y_l = i]$.
Pak můžeme psát

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= p_1,\\
P(A_2) &= p_2 + p_1^2,\\
P(A_3) &= p_3 + 2p_2p_1 + p_1^3,\\
P(A_4) &= p_4 + 2p_3p_1 + p_2^2 + 3p_2p_1^2 + p_1^4.
\end{aligned}$$

Vezměme například $m = 1$ a $k = 3$, pak by podle poznámky mělo platit následující

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2).$$

Obě části rovnosti si rozepíšeme zvlášť

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_3) &= p_2p_1 + p_1^3\\
P(A_1)P(A_2) &= p_1(p_2 + p_1^2) = p_2p_1 + p_1^3,
\end{aligned}$$

vidíme, že levá i pravá strana se rovnají, podobným způsobem bychom postupovali i pro další členy naší posloupnosti.

Nyní už uvedeme samotný důsledek Tvrzení 3.

Důsledek 2. *Nechť $A_1, A_2, \ldots$ je systém rekurentních jevů. Dále nechť $m_1, m_2, \ldots$ je striktně rostoucí posloupnost kladných čísel a nechť $N(n)$ označuje počet jevů $A_{m_1}, \ldots, A_{m_n}$, které nastanou. Jestliže*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_{m_n}) = \infty$$

a

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\left(\sum_{1\leq k\leq n} P(A_{m_k})\right)^2}{\sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_{m_i})P(A_{m_j-m_i})} \right) > 0, \tag{2.1}$$

pak skoro jistě platí

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{N(n)}{\sum_{1\leq k\leq n} P(A_{m_k})} \right) \leq 1 \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{N(n)}{\sum_{1\leq k\leq n} P(A_{m_k})} \right). \tag{2.2}$$

Podmínku (2.1) lze v praxi velmi těžko ověřit, proto si uvedeme postačující podmínku.
Mějme libovolné konstanty $\alpha \geq 1$ a $\beta > 0$ takové, že

$$P(A_{m_j - m_i}) \leq \beta P(A_{m_{[(j-i)/\alpha]}}) \ pro\ 1 \leq i \leq j - \alpha. \tag{2.3}$$

Pak (2.3) je postačující podmínka pro (2.1), protože platí

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{(\sum_{1\leq k\leq n}\ P(A_{m_k}))^2}{\sum_{1\leq i<j\leq n}\ P(A_{m_i})P(A_{m_j - m_i})}\right)\\
&\geq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{(\sum_{1\leq k\leq n}\ P(A_{m_k}))^2}{\sum_{1\leq i<j-\alpha\leq n}\ P(A_{m_i})\beta P(A_{m_{\frac{j-i}{\alpha}}})}\right)\\
&= \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{(\sum_{1\leq k\leq n}\ P(A_{m_k}))^2}{\beta\sum_{1\leq i<j-\alpha\leq n}\ P(A_{m_i})P(A_{m_{\frac{j-i}{\alpha}}})}\right)\\
&= \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_{m_i})P(A_{m_k}) + \sum_{k=1}^{n} P(A_{m_k})^2}{\beta\sum_{1\leq i<j-\alpha\leq n}\ P(A_{m_i})P(A_{m_{\frac{j-i}{\alpha}}})}\right)\\
&\geq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_{m_i})P(A_{m_k})}{\beta\sum_{1\leq i<j-\alpha\leq n}\ P(A_{m_i})P(A_{m_{\frac{j-i}{\alpha}}})}\right) = \frac{2}{\beta} > 0.
\end{aligned}$$

2.2 Alternativní zápisy K-S nerovnosti

Ještě dříve než Kochen a Stone vydali své výsledky maďarský matematik Paul Erdös s Kai Lai Chungem v roce 1952, čímž se řadí mezi první, kteří se o nějaké vylepšení pokusili. Vzhledem k tomu, že byl P.Erdös velmi činný autor, tak se k Borel-Cantellimu lemmatu vyjádřil ještě o sedm let později společně s Alfrédem Rényim. Nyní se však podíváme na jeho výsledek společné práce s K.L.Chungem, který je zmíněn v článku od Jia-An Yana (Yan (2006)). Tato nerovnost nám bude užitečná pro alternativní důkaz Kochenovy-Stoneovy nerovnosti.

Tvrzení 4 (Chung-Erdösova nerovnost)**.** *Nechť $\{A_k, 1 \leq k \leq n\}$ je posloupnost jevů. Pak*

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \geq \frac{(\sum_{k=1}^{n}\ P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^{n}\ P(A_i \cap A_k)}. \tag{2.4}$$

Důkaz. Označme $X_k = \mathbf{1}_{A_k}$ a $Y_n = \mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}$. Z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti[2] plyne

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n}\ X_k)\right)^2 &= \left(\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n}\ X_k)(Y_n)\right)^2 \leq \mathbb{E}(Y_n)^2\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n}\ X_k)^2\\
&\leq \mathbb{E}Y_n\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n}\ X_k)^2 \leq P(\sum_{k=1}^{n}\ X_k > 0)\mathbb{E}((\sum_{k=1}^{n}\ X_k)^2).
\end{aligned}$$

[2]Cauchy-Schwarzova nerovnost: Mějme dvě náhodné veličiny Y a Z.
Pak $\mathbb{E}|ZY| \leq \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(Z^2)}$.

Vzhledem k tomu, že $P(\sum_{k=1}^n X_k > 0) = P(\bigcup\limits_{k=1}^n A_k)$, tak platí

$$\frac{(\mathbb{E}(\sum_{k=1}^n X_k))^2}{\mathbb{E}(\sum_{k=1}^n X_k)^2} \leq P(\bigcup_{k=1}^n A_k).$$

Přepíšeme-li nerovnost zpět, kdy $X_k = \mathbf{1}_{A_k}$ a $Y_n = \mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^n A_k}$, získáme znění Chung-Erdösovy nerovnosti, neboli

$$P(\bigcup_{k=1}^n A_k) \geq \frac{(\sum_{k=1}^n P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^n P(A_i \cap A_k)}.$$

□

Poznámka. Náhodné veličiny označujeme jako negativně korelované, pokud jejich korelační koeficient nabývá záporných hodnot na intervalu [-1,0). Korelační koeficient pro náhodné veličiny X, Y definujeme jako

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}X\mathrm{var}Y}}.$$

Následujícím způsobem je Kochenova-Stoneova nerovnost formulována v článku od Jia-An Yana ((Yan, 2006)) i s alternativním důkazem. Ač se jedná o stejný výsledek, tak zápis je překvapivě rozdílný a daný odhad $P(A_n, i.o.)$, což je ekvivalentní zápis $P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$, lze v této interpretaci snadno nahlédnout. I důkaz je značně odlišnější, kdy využívá primárně dvou rovností a Chung-Erdösovy nerovnosti.

Tvrzení 5. *Nechť $\{A_n\}$ je posloupnost jevů splňující podmínku*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty.$$

Pak

$$P(A_n, i.o.) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{(\sum_{k=1}^n P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^n P(A_iA_k)} \tag{2.5}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k)}{\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_iA_k)}. \tag{2.6}$$

Pokud jsou $\{A_n\}$ po dvou nezávislé či negativně korelované (tj. $P(A_iA_k) \leq P(A_i)P(A_k)$ pro $\forall\ i \neq k$), potom $P(A_n, i.o.) = 1$.

Důkaz. Označme $a_n = (\sum_{k=1}^n P(A_k))^2$, $b_n = \sum_{i,k=1}^n P(A_iA_k)$. Pak z předpokladu věty dostáváme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Navíc víme z (2.4), že $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ a $b_n \geq a_n$. Dále z (2.4) a z nerovnosti

$$\sum_{i,k=m+1}^{n} P(A_iA_k) \leq \sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k) - \sum_{i,k=1}^{m} P(A_iA_k) = b_n - b_m$$

máme, že pro $m < n$, $m, n \in \mathbb{N}$, m je pevné, platí

$$
\begin{aligned}
P(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} A_k) &= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=m+1}^{n} A_k) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{(\sum_{k=m+1}^{n} P(A_k))^2}{\sum_{i,k=m+1}^{n} P(A_iA_k)} \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{k=1}^{m} P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k) - \sum_{i,k=1}^{m} P(A_iA_k)} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_m})^2}{b_n - b_m} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n - 2\sqrt{a_m a_n} + a_m}{b_n - b_m} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}\left(\frac{1 - \frac{2\sqrt{a_m}}{\sqrt{a_n}} + \frac{a_m}{a_n}}{1 - \frac{b_m}{b_n}}\right) = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)}.
\end{aligned}
$$

Pošleme-li nyní $m \to \infty$, získáme nerovnost (2.5).
Z předpokladu $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ a dvou následujících rovností

$$\left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^2 = 2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2, \tag{2.7}$$

$$\sum_{i,k=1}^{n} P(A_kA_i) = 2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_iA_k) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k), \tag{2.8}$$

plyne

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)} = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)}\right).$$

Budeme-li dál upravovat výraz v limes superior a využijeme-li z diskuze výše, že $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, tak získáme

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{b_n} = 0. \tag{2.9}$$

Tedy z věty o dvou strážnících (skripta k Matematické analýze(Pick a kol. (2020)), věta 2.2.46) dostáváme

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)} = 0.$$

Dále nám pomůže výše zmíněná rovnost (2.8)

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k)}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)}\right) \\
&= \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k)}{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_iA_k) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k)}\right) \\
&= \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k)}{\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_iA_k)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)}{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_iA_k)}}\right).
\end{aligned}
$$

Člen $\limsup_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)}{2\sum_{1\leq i<k\leq n}P(A_iA_k)}\right)^{-1}$ můžeme rozepsat jako

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)}{2\sum_{1\leq i<k\leq n}P(A_iA_k)}}\right)\\
&=\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{2\sum_{1\leq i<k\leq n}P(A_iA_k)+\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{k=1}^{n}P(A_k)}{2\sum_{1\leq i<k\leq n}P(A_iA_k)+\sum_{k=1}^{n}P(A_k)}\right)\\
&=\limsup_{n\to\infty}\left(1-\frac{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)}{\sum_{i,k=1}^{n}P(A_iA_k)}\right)=1,
\end{aligned}$$

protože z (2.9) víme, že $\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)}{\sum_{i,k=1}^{n}P(A_iA_k)}=0$.

Dohromady dostáváme

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{(\sum_{k=1}^{n}P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^{n}P(A_iA_k)}=\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{1\leq i<k\leq n}P(A_i)P(A_k)}{\sum_{1\leq i<k\leq n}P(A_iA_k)},$$

čímž máme dokázanou rovnost (2.6).

Pokud jsou jevy po dvou nezávislé nebo negativně korelované, tak je snadné nahlédnout, že $P(A_n,i.o.)=1$, neboť

$$\begin{aligned}
P(A_n,i.o.)&\geq\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{1\leq i<k\leq n}P(A_i)P(A_k)}{\sum_{1\leq i<k\leq n}P(A_iA_k)}\\
&\geq\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{1\leq i<k\leq n}P(A_i)P(A_k)}{\sum_{1\leq i<k\leq n}P(A_i)P(A_k)}=1\\
&\Rightarrow P(A_n,i.o.)=1.
\end{aligned}$$

Tato podmínka je značně slabší než nezávislost jevů, je zde tedy patrné určité vylepšení oproti Borel-Cantellimu lemmatu, které vyžaduje striktní nezávislost.

□

Poznámka. Jak spolu souvisí Tvrzení 3 a Tvrzení 5?
Pokud označíme $X_n=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{A_k}$, pak bod iii) z Tvrzení 3

$$P(\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\mathbb{E}X_n}>0)\geq\limsup_{n\to\infty}\frac{(\mathbb{E}X_n)^2}{\mathbb{E}(X_n)^2}$$

můžeme přepsat jako

$$P(\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{A_k}}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)}>0)\geq\limsup_{n\to\infty}\frac{(\sum_{k=1}^{n}P(A_k))^2}{\sum_{j,k=1}^{n}P(A_kA_j)}.$$

Je-li $\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{A_k}}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)}>0$ a zároveň platí $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty$, pak i

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{A_k}=\infty.$$

Tím pádem dostáváme

$$P(\limsup_{n\to\infty}A_n)\geq\limsup_{n\to\infty}\frac{(\sum_{k=1}^{n}P(A_k))^2}{\sum_{j,k=1}^{n}P(A_kA_j)},$$

což je znění Tvrzení 5.

Petrov ve svém článku (Petrov (2004)) zmiňuje následující další dvě možná zobecnění.

Poznámka. Erdös a Rényi (Erdös a Rényi (1959)) přišli s následujícím tvrzením: Pokud $\{A_n\}$ je posloupnost jevů splňující

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \text{ a } \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{j,k=1}^{n} P(A_k A_j)}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2} = 1,$$

pak $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

Poznámka. Ortega a Wschebor (Ortega a Wschebor (1983)) dokázali, že pokud jsou splněny podmínky

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \text{ a } \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\le i<k\le n} (P(A_i A_k) - P(A_i)P(A_k))}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2} \le 0,$$

pak $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

2.3 Zobecnění Valentina V. Petrova

Borel-Cantelliho lemma zůstalo aktuální i v následujících letech, obzvláště zaujalo ruského matematika Valentina V. Petrova. V roce 1990 vydal o lemmatu článek společně s A.I. Martikainenem zabývající se nutnými a postačujícími podmínkami pro $P(A_n, i.o.) = \alpha, \alpha \in [0{,}1]$, kde $\sum P(A_n) = \infty$. O dvanáct let později publikoval práci (Petrov (2002)), která zobecňuje verzi Borel-Cantelliho lemmatu od Paula Erdösa a Alfréda Rényiho. Dva roky poté vydal nový článek zabývající se B-C lemmatem, kdy část dřívějších zobecnění jsou speciálními případy výsledku V.V.Petrova (Petrov (2004)). A na toto poslední zobecnění se zaměříme v následující podkapitole.

Jako první si uvedeme, jak vypadá výsledek prvního článku Petrov (2002).

Tvrzení 6 (Petrov I.)**.** *Nechť $A_1, A_2,...$ je posloupnost jevů splňujících podmínku*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$$

a

$$P(A_k A_j) \le C P(A_k) P(A_j)$$

pro všechna $k,j > L$ taková, že $k \ne j$ a pro nějaké kladné konstanty $C \ge 1$ a L. Pak platí

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) \ge 1/C.$$

Důsledek 3. *Pokud se $C = 1$, pak dostáváme Tvrzení 6 v následujícím tvaru: Nechť $A_1, A_2,...$ je posloupnost jevů splňujících podmínku*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$$

a

$$P(A_kA_j) \leq P(A_k)P(A_j) \tag{2.10}$$

pro všechna k,j taková, že $k \neq j$. Pak platí

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq 1.$$

Pokud jsou navíc dané jevy po dvou nezávislé, tak dostáváme v (2.10) rovnost.

Poznámka. Kochenova-Stoneova nerovnost implikuje V.V.Petrovovo zobecnění, což samotný Petrov neuvádí, ale provádí vlastní důkaz, který K-S nerovnosti přímo nevyužívá. Na propojení poukázal ve svém článku Jia-An Yan(Yan (2006)). Že se opravdu jedná o důsledek K-S nerovnosti, je ukázáno v následujícím důkazu společně se zněním druhého vylepšení od Petrova.

Tvrzení 7 (Petrov II.)**.** *Nechť $\{A_n, n \geq 1\}$ je taková posloupnost jevů, že platí $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$. Nechť H je reálná konstanta. Položme*

$$\alpha_H = \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\leq i<k\leq n}\Big(P(A_iA_k) - HP(A_i)P(A_k)\Big)}{\Big(\sum_{k=1}^n P(A_k)\Big)^2}.$$

Pak $P(A_n, i.o.) \geq \frac{1}{H+2\alpha_H}$.

Důkaz. K důkazu použijeme nám už známé dvě rovnosti 2.5 a 2.6

$$2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_iA_k) = \sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k) - \sum_{k=1}^{n} P(A_k),$$

$$2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2.$$

Můžeme psát

$$\begin{aligned}
2\alpha_H &= 2\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\leq i<k\leq n}(P(A_iA_k) - HP(A_i)P(A_k))}{(\sum_{k=1}^n P(A_k))^2} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_iA_k) - 2H\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k)}{(\sum_{k=1}^n P(A_k))^2} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i,k=1}^n P(A_iA_k) - \sum_{k=1}^n P(A_k) - H(\sum_{k=1}^n P(A_k))^2 + H\sum_{k=1}^n P(A_k)^2}{(\sum_{k=1}^n P(A_k))^2} \\
&= \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i,k=1}^n P(A_iA_k)}{(\sum_{k=1}^n P(A_k))^2} - \frac{1}{\sum_{k=1}^n P(A_k)} - H + \frac{H\sum_{k=1}^n P(A_k)^2}{(\sum_{k=1}^n P(A_k))^2}\right).
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy následující vztah

$$H + 2\alpha_H = \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i,k=1}^n P(A_iA_k)}{(\sum_{k=1}^n P(A_k))^2} - \frac{1}{\sum_{k=1}^n P(A_k)} + H\frac{\sum_{k=1}^n P(A_k)^2}{(\sum_{k=1}^n P(A_k))^2}\right).$$

Z předpokladu $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ plyne, že

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)} = 0.$$

Ze vztahu $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)^2$ a předpokladu tvrzení máme

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2} &= \frac{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot \sum_{k=1}^{n} P(A_k)} \\
&\leq \frac{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot \sum_{k=1}^{n} P(A_k)} \\
&\leq \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)} \to 0 \text{ pro } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Pokud vše spojíme dohromady, tak dostáváme

$$H + 2\alpha_H = \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_i A_k)}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2},$$

což lze přepsat jako

$$\frac{1}{H + 2\alpha_H} = \limsup_{n\to\infty} \frac{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_i A_k)}.$$

Máme tedy dokázáno, že Tvrzení 5 implikuje Tvrzení 7.

Navíc použitím Cauchy-Schwarzovy nerovnosti dostáváme, že

$$(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2 \leq \sum_{i,k=1}^{n} P(A_i A_k),$$

z čehož plyne

$$\frac{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_i A_k)}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2} \geq \frac{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_i A_k)}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_i A_k)} = 1,$$

tedy $H + 2\alpha_H \geq 1$, ať už volíme konstantu H kladnou nebo zápornou.

□

Můžeme ještě ověřit, že pro nezávislé jevy dostaneme stejný výsledek jako při použití Borel-Cantelliho lemmatu.
Předpokládejme, že $\{A_n, n \geq 1\}$ je posloupnost nezávislých jevů, pro které platí $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$. Pak

$$\begin{aligned}
\alpha_H &= \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\leq i<k\leq n}(P(A_i A_k) - HP(A_i)P(A_k))}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\leq i<k\leq n}(P(A_i)P(A_k) - HP(A_i)P(A_k))}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\leq i<k\leq n}((1-H)P(A_i)P(A_k))}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{(1-H)\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k)}{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2}.
\end{aligned}$$

Díky tomu, že předpokládáme nezávislost jevů, můžeme psát

$$2\sum_{1\le i<k\le n} P(A_i)P(A_k) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k) = (\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2.$$

Tedy

$$2\sum_{1\le i<k\le n} P(A_i)P(A_k) = (\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)(\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - 1).$$

Víme, že

$$2\sum_{1\le i<k\le n} P(A_i)P(A_k) \ge 0,$$

z toho plyne

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k)(\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - 1) \ge 0.$$

Pro dostatečně velké n a z předpokladu věty platí

$$2\sum_{1\le i<k\le n} P(A_i)P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)(\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - 1) \ge \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \ge \sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2.$$

Dostáváme, že výraz $\sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2$ je vůči $2\sum_{1\le i<k\le n} P(A_i)P(A_k)$ zanedbatelný, tudíž

$$\alpha_H = \liminf_{n\to\infty} \frac{(1-H)\sum_{1\le i<k\le n} P(A_i)P(A_k)}{2\sum_{1\le i<k\le n} P(A_i)P(A_k) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2} = \frac{1-H}{2}.$$

Celkově tedy platí

$$P(A_n, i.o.) \ge \frac{1}{H + 2\frac{1-H}{2}} = 1,$$

což je v souladu s výsledky Borel-Cantelliho lemmatu.

Výše jsem si ukázali, že pro nezávislé jevy se $\frac{1}{H+\alpha_H}$ rovná 1. Ale vzhledem k tomu, že hodnota α_H je závislá na konstantě H, tak její volbou lze ovlivňovat výsledek $\frac{1}{H+\alpha_H}$. Můžeme se snažit o optimalizaci výsledku, tedy hledat takovou konstantu H, aby byla pravá strana co nejvyšší.

Poznámka. Nechť $H = C$ a dále předpokládejme, že platí

$$P(A_kA_j) \le CP(A_k)P(A_j).$$

Pak

$$\alpha_C = \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\le i<k\le n}(P(A_iA_k) - CP(A_i)P(A_k))}{\left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^2}$$

$$\le \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\le i<k\le n}(P(A_iA_k) - P(A_iA_k))}{\left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^2} = 0.$$

Tedy platí

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) \ge \frac{1}{C + 2\alpha_C} = \frac{1}{C}.$$

Vidíme, že z Tvrzení 6 plyne Tvrzení 7.

3. Příklady

Následující dva příklady uvádějí Simon Kochen a Charles Stone přímo ve svém článku. Napřed si však zadefinujeme jednoduchou náhodnou procházku, kterou v obou příkladech využívají.

Definice 3. *Jednoduchá náhodná procházka: Nechť* $X_1, X_2, \ldots$ *je iid náhodná posloupnost a uvažujme částečné součty* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, n \in \mathbb{N}$. *Pak posloupnost* $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ *nazýváme náhodnou procházkou. Jestliže náhodné veličiny* X_i *nabývají pouze hodnot* $\{-1{,}1\}$, *dostáváme jednoduchou náhodnou procházku.*

Náhodnou procházku tvoří rekurentní jevy, neboť jakmile se dostaneme zpět do 0, tak se celý proces rozbíhá znovu a nezáleží na tom, jakým způsobem se náhodná procházka do 0 dostala.

Příklad 7. Nechť A_k je takový jev, že jednoduchá náhodná procházka v jednodimenzionálním prostoru se nachází v počátečním stavu v čase $2k$ a $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} = P(X_1 = -1)$. Jevy A_k tvoří systém rekurentních jevů a $P(A_k) \sim (\pi k)^{-1/2}$. Zajímá nás, kolikrát se náhodná procházka vrátí do počátku $2p$, kde p je prvočíslo.

Řešení. Je-li m_n n-té prvočíslo, pak

$$\sum_{n \geq 1} P(A_{m_n}) \sim \sum_{n \geq 1} (\pi m_n)^{-1/2} = \infty.$$

Máme tedy splněnou první podmínku Důsledku 2 . Druhou můžeme získat následovně

$$\limsup_{n \to \infty} \left(\frac{(\sum_{1 \leq k \leq n} \ P(A_{m_k}))^2}{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \ P(A_{m_i}) P(A_{m_j - m_i})} \right)$$
$$= \limsup_{n \to \infty} \left(\frac{(\sum_{1 \leq k \leq n} \ (\pi m_k)^{-1/2})^2}{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \ (\pi m_i)^{-1/2} (\pi m_j - \pi m_i)^{-1/2}} \right) > 0.$$

Tedy jednoduchá náhodná procházka je v počátečním stavu v čase $2p$ pro nekonečně mnoho prvočísel p skoro jistě.

Poznámka. Ten samý výsledek dostaneme ve dvoudimenzionálním prostoru, kde $P(A_k) \sim (\pi k)^{-1}$.

Příklad 8. Nechť A_k je takový jev, že jednoduchá náhodná procházka v trojdimenzionálním prostoru, kdy chodíme po osách, prochází bodem $(k{,}0{,}0)$. Pak $P(A_k) \sim ck^{-1}$ pro nějakou kladnou konstantu c. Jevy A_k sice nejsou rekuretní, ale splňují nerovnost

$$P(A_i \cap A_j) \leq (P(A_i) + P(A_j)) P(A_{j-i}), 1 \leq i < j.$$

Buď m_n n-té prvočíslo. Pak je podmínka (2.1) z Důsledku 2 platná. Dále je splněn Důsledek 1, takže platí (2.2). Obecně tedy náhodná procházka navštíví bod $(p, 0, 0)$ pro nekonečně mnoho prvočísel p skoro jistě.

Znovu uvedeme Příklad 2 z první kapitoly a podíváme se, jestli by se dal spočítat pomocí Kochenovy-Stoneovy nerovnosti.

Příklad 9. Nechť X_1, X_2... je posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin s normálním rozdělením s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$. Určete, s jakou pravděpodobností pro nekonečně mnoho n nastane jev $A_n = [X_1 \geq 0]$.

Řešení. Využijeme toho, že známe $P(A_n) = \frac{1}{2}$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$. Máme splněnou první podmínku. Pro výpočet využijeme Tvrzení 5

$$\begin{aligned} P(A_n, i.o.) &\geq \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_i A_k)} \right) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2})^2}{\sum_{i,k=1}^{n} \frac{1}{2}} \right) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{4}}{\frac{n^2}{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dostáváme, že jev A_n nastane pro nekonečně mnoho n alespoň s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Vidíme, že výpočet je značně jednodušší než při použití definice, jedná se však odhad.

Příklad 10. Pro zajímavost si ukážeme, jak nám vztah

$$P(A_m \cap A_k) = P(A_m)P(A_{k-m}) \text{ pro } 1 \leq m < k$$

platící pro rekurentní jevy dokáže značně zjednodušit výpočty. Vypsání možností, které můžou nastat pro první tři jevy rekurentní posloupnosti, je vcelku jednoduché, od čtvrtého jevu však počet možností prudce narůstá. Zkusme se podívat, čemu by se rovnala $P(A_3 \cup A_5)$.

Řešení. Pro názornost příkladu se podíváme, jaké možnosti mohou nastat pro A_5

$$\begin{aligned} A_5 = {} & [Y_1 = 5] \cup [Y_1 = 4, Y_2 = 1] \cup [Y_1 = 3, Y_2 = 2] \cup [Y_1 = 3, Y_2 = 1, Y_3 = 1] \\ & \cup [Y_1 = 2, Y_2 = 3] \cup [Y_1 = 2, Y_2 = 2, Y_3 = 1] \cup [Y_1 = 2, Y_2 = 1, Y_3 = 2] \\ & \cup [Y_1 = 2, Y_2 = 1, Y_3 = 1, Y_4 = 1] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 4] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 3, Y_3 = 1] \\ & \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 3] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 2, Y_3 = 1, Y_4 = 1] \\ & \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 2, Y_4 = 1] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1, Y_4 = 2] \\ & \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 2, Y_3 = 2] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1, Y_4 = 1, Y_5 = 1]. \end{aligned}$$

Označíme-li $p_i = P[Y_l = i]$, pak

$$\begin{aligned} &P(A_5) = p_5 + 2p_4p_1 + 2p_3p_2 + 3p_3p_1^2 + 3p_2^2p_1 + 4p_2p_1^3 + p_1^5 \\ &P(A_3) = p_3 + 2p_2p_1 + p_1^3 \\ &P(A_2) = p_2 + p_1^2. \end{aligned}$$

Tedy

$$P(A_3 \cup A_5) = p_3p_2 + p_3p_1^2 + 2p_2^2p_1 + 3p_2p_1^3 + p_1^5.$$

Vidíme, že celé řešení je časově náročnější. Pokud však použijeme vzorec $P(A_m \cap A_k) = P(A_m)P(A_{k-m})$ pro $1 \leq m < k$, výpočet, jak můžeme vidět, je o dost jednodušší

$$\begin{aligned} P(A_3 \cap A_5) &= P(A_3)P(A_2) = (p_3 + 2p_2p_1 + p_1^3)(p_2 + p_1^2) \\ &= p_3p_2 + p_3p_1^2 + 2p_2^2p_1 + 3p_2p_1^3 + p_1^5. \end{aligned}$$

Závěr

Tato práce v první kapitole shrnula Borel-Cantelliho lemma spolu s několika příklady, které pokryly několik různých situací. Ve druhé kapitole se podrobněji věnovala Kochenově-Stoneově nerovnosti, jež zde byla zformulována v několika variantách spolu s důkazy. Poslední kapitola patří příkladům, na které je aplikována Kochenova-Stoneova nerovnost. Část práce se také věnuje rekurentním jevům.

Kochenova-Stoneova nerovnost oslabuje podmínky Borel-Cantelliho lemmatu a dává tím prostor pro větší využití. Tvrzení je založené na středních hodnotách a plynou z něho další dva důsledky. Na druhou stranu alternativa Kochenovy-Stoneovy nerovnosti, jež je zmíněna v článku od Jia-An Yana, využívá v důkazu Chung-Erdösovu nerovnost a dvě rovnosti, ve kterých figurují sumy pravděpodobností. Oba důkazy i formulovaná tvrzení jsou zcela odlišná, přesto nám dávají stejný výsledek.

S dokonce dvěmi novými variantami i s důkazy přišel také ruský matematik Petrov, dá se však dokázat, že jsou důsledkem Kochenovy-Stoneovy nerovnosti, ač on ji ve svém důkazu nevyužívá.

Jak Borel-Cantelliho lemma, tak i Kochenova-Stoneova nerovnost jsou aplikovány na několik příkladů, aby byl vidět rozdíl mezi nimi. Lze si všimnout, že oslabená podmínka dokáže zjednodušit celý výpočet a přesto může dát velmi přesný odhad.

Seznam použité literatury

Erdös, P. a Rényi, A. (1959). On Cantor's series with convergent $\sum 1/q_n$. *Mathematical Institute, Eötvös Loránd University, Budapest.*

Ortega, J. a Wschebor, M. (1983). On the sequence of partial maxima of some ranqom sequences. *Elsevier Science Publishers B.V., North Holland.*

Petrov, V. V. (2002). A note the Borel-Cantelli Lemma. *Statistics & Probability Letters 58, page 283-286.*

Petrov, V. V. (2004). A generalization of the Borel-Cantelli Lemma. *Statistics & Probability Letters 67, page 233-239.*

Pick, L., Hencl, S., Spurný, J. a Zelený, M. (2020). Matematická analýza 1.

Prokešová, M. (2023). Poznámky k přednášce NMSA202 Pravděpodobnost a matematická statistika. Katedra pravděpodobnosti a matematické statistikyMatematicko-fyzikální fakulta University Karlovy.

Stone, C. a Kochen, S. (1964). A note on the Borel-Cantelli Lemma. *Cornell University, Ithaca, New York.*

Yan, J.-A. (2006). A simple proof of two generalized Borel-Cantelli Lemmas. *Émery, M., Yor, M. (eds) In Memoriam Paul-André Meyer. Lecture Notes in Mathematics, vol 1874. Springer, Berlin, Heidelberg.*