Posudek oponenta bakalářské práce

Název: Kochenova-Stoneova nerovnost
Autor: Barbora Dohnalová

Shrnutí obsahu práce

Práca sa zaoberá klasickou Borelovou-Cantelliho (B-C) vetou a niekoľkými jej zovšeobecneniami. V kapitole 1 je základná B-C veta dokázaná, a je uvedených niekoľko jednoduchých príkladov jej použitia. Kapitola 2 sa zaoberá rozšíreniami B-C vety: Kochenovou-Stoneovou nerovnosťou v sekcii 2.1, alternatívnou verziou Kochenovej-Stoneovej nerovnosti v sekcii 2.2, a dvomi Petrovovymi zovšeobecneniami B-C vety v sekcii 2.3. Kapitola 3 predstavuje niekoľko príkladov použitia týchto viet.

Celkové hodnocení práce

Téma práce. Tému práce považujem za pomerne náročnú. V práci je predvedených niekoľko dôkazov spracovaných z veľmi rozdielnych (ako dobou vzniku, tak aj značením a prístupom) zdrojov z literatúry.

Vlastní příspěvek. Autorka replikuje niekoľko dôkazov a príkladov z literatúry. K tomu dopĺňa radu často nie úplne triviálnych medzikrokov.

Matematická úroveň. Matematická úroveň práce je kolísavá. Miestami nájdeme vcelku matematicky rigorózne formulovaný text. Na iných miestach však nachádzame aj niektoré neúplné alebo nepresné argumenty.

Práce se zdroji. Zdroje sú citované vhodne.

Formální úprava. Formálna úprava práce je slabá. Text obsahuje veľké množstvo preklepov a ďalších formálnych chýb, meniace sa značenie text značne zneprehľadňuje.

Připomínky a otázky

1. Hlavná Kochenova-Stoneova veta je uvedená ako dôsledok 2. Tento dôsledok je však v sekcii 2.1 uvedený bez dôkazu, alebo diskusie o dôkaze. Nie je mi preto jasné z akého dôvodu je v práci uvádzané tvrdenie 3, ktoré sa v pôvodnom zdroji zdá byť technickou vetou používanou pre odvodenie dôsledku 2.
2. V tvrdení 3 predpokladáme nezápornú strednú hodnotu náhodných veličín X_i, tj. $\mathbf{E}X_i \geq 0$. Ak ale pripúšťame $\mathbf{E}X_i = 0$, ako je definovaná náhodná veličina $Y_n = X_n/\mathbf{E}X_n$?
3. Výraz na riadku 4 dôkazu tvrdenia 3 sa nezdá byť správne. Nech napríklad $\mathbf{E}Y_n^2 = 1$ pre každé n. Potom je splnená podmienka $\limsup_{n\to\infty} 1/\mathbf{E}Y_n^2 > 0$, ale neplatí, že by sme pre $\varepsilon = 2$ mali pre všetky n dosť veľké, že $1/\mathbf{E}Y_n^2 > \varepsilon$. Ako tento problém ovplyvňuje zvyšok dôkazu?
4. Na strane 8 v dôkaze tvrdenia 3 definujeme $\widetilde{M}$ pomocou $\mathbf{E}Y_n^2$. Tým ale $\widetilde{M}$ nie je konštanta, pretože závisí na n. Aby sme $\widetilde{M}$ mohli používať ako konečnú konštantu potrebujeme, aby $\sup_n \mathbf{E}Y_n^2 < \infty$ (vo výraze pre $\widetilde{M}$ sa navyše $\mathbf{E}Y_n^2$ vyskytuje so znamienkom $-$, má tam ale byť $+$). Rovnaký predpoklad na obmedzenosť druhých momentov náhodných veličín Y_n nájdeme na konci str. 8. Obmedzenosť druhých momentov Y_n (resp. X_n) ale v tvrdení nepredpokladáme. Platí teda tvrdenie 3 aj bez tohto predpokladu?

5. V sérii nerovností po vzorci (2.3) sa v menovateli prvej nerovnosti mení počet sčítancov. Zatiaľ čo vľavo sčítame cez indexy $1 \leq i < j \leq n$, vpravo sčítame cez $1 \leq i < j - \alpha \leq n$ pre $\alpha \geq 1$. Tým sa v sume na pravej strane nerovnosti napríklad nevyskytuje sčítanec s indexom $i = j-1$. Ako teda vieme, že platí táto prvá nerovnosť? Ďalej, v poslednej rovnosti tejto série máme

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_{m_i})P(A_{m_k})}{\sum_{1\leq i<j-\alpha\leq n} P(A_{m_i})P(A_{m_{\frac{j-i}{\alpha}}})} = 1.$$

   Odkiaľ vieme, že to platí? Všimnime si, že v čitateli a menovateli sčítame cez rôzne indexy. Tiež, nevidím prečo by index $\frac{j-i}{\alpha}$ používaný v menovateli musel byť celočíselný.

6. Na str. 17 nájdeme, že pomocou Cauchy-Schwarzovej nerovnosti získame

$$\left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^2 \leq \sum_{i,k=1}^{n} P(A_i\, A_k).$$

   Ako presne získavame túto nerovnosť?

7. Na str. 18 je dokázané, že

$$2 \sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2.$$

   Z toho ale ešte neplynie, že by postupnosť vpravo mala byť oproti tej vľavo asymptoticky zanedbateľná, ako sa tvrdí po tejto nerovnosti. Napríklad, ak by nastala rovnosť, získame v odvodení nižšie iba konštantu $(1-H)/3$, namiesto $(1-H)/2$. Je toto tvrdenie teda v poriadku?

8. Kapitola 3 s príkladmi pôsobí veľmi neúplne. Tvrdenie o rekurentných javoch nasledujúce po definícii 3 by sa malo formálne dokázať. Nie je mi jasné ako v príklade 7 získavame, že $P(A_k) \sim (\pi k)^{-1/2}$ (alebo čo vôbec znamená symbol $\sim$). Odkiaľ sa v riešení príkladu 7 zrazu berú prvočísla? Prečo platí nerovnosť vo výraze s $\limsup$?

9. Text obsahuje veľké množstvo preklepov a ďalších formálnych chýb. Napríklad, nedostatočný je už zoznam literatúry, kde pre niekoľko zdrojov nie je uvedený ani názov odborného časopisu.

Záver

Predloženú prácu považujem za pomerne slabú, a problematickú najmä z formálneho hľadiska. V prípade presvedčivej odpovede na (niektoré) z otázok vyššie ale verím, že prácu bude možné uznať ako bakalársku prácu na MFF UK.

Stanislav Nagy
KPMS MFF UK
24. července 2024