UNIVERZITA KARLOVA

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Analýza řešení úloh z vybrané matematické soutěže v ČR

Analysis of problems solutions of one chosen Czech mathematical competition

Eliška Pospíchalová

Vedoucí práce:	PhDr. Michaela Kaslová
Studijní program:	Učitelství pro základní školy (M7503)
Studijní obor:	I.ST (7503T047)

Rok odevzdání: 2024

Odevzdáním této diplomové práce na téma Analýza řešení úloh z vybrané matematické soutěže v ČR potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze 9. 7. 2024

ABSTRAKT

Tato diplomová práce se zabývá analýzou úloh z matematické soutěže Pangea. V teoretické části jsou popsány různé přístupy k teorii úloh, procesy řešení úloh a různé strategie řešení úloh. Je v ní také popsán princip analýzy a priori podle Lucie Grugnetti a Françoise Jaqueta, analýzy a posteriori a jsou zde informace o soutěžích obecně, a i konkrétně o matematické soutěži Pangea. Cílem práce je provést analýzu a priori úloh ze školního kola pro 5. ročník ze školního roku 2020/2021 a na jejím základě a míře řešitelské úspěšnosti úloh následně provést analýzu a posteriori. Analýza je založena na koncepci Grugnetti a Jaqueta, kterou jsem upravila a doplnila podle potřeb této práce. V závěru práce se nachází zobecnění výsledků analýzy a priori a na jejich základě jsem zhodnotila, že soutěž Pangea při tvorbě úloh dodržuje své deklarované cíle a to, aby úlohy byly pro žáky motivační a pestré. To se daří nejen díky širokému spektru potřebných znalostí a schopností pro řešení úloh, ale i třeba zajímavým kontextům úloh.

KLÍČOVÁ SLOVA

Analýza a priori, analýza a posteriori, matematická soutěž, matematická úloha, řešení úloh

ABSTRACT

This diploma thesis is about an analysis of a problems in the mathematical competition Pangea. In a theoretical part are mentioned different theories about mathematical problems, processes of problems solving and various problem-solving strategies. There is also described principle of an analysis a priori based on Lucie Grugnetti and Françoise Jaquet, an analysis a posteriori and information about a competition in general and specifically about the mathematical completion Pangea. The goal of this thesis is to analyse a priori the problems in school round for fifth grade in school year 2020/2021 and based on it and a success rate of solving problems analyse the problems a posteriori. The analysis is based on conception of Grugnetti and Jaquet, which I reworked for needs of this thesis. In the end is a generalization of results of the analysis a priori and based on it I evaluate that the mathematical competition Pangea adhere to its declared goal in problems preparing, so the problems are motivating a diverse. That is thanks to a various spectrum of needed knowledge and abilities for the problem solving and also e.g. thanks to interesting contexts of the problems.

KEYWORDS

Analysis a priori, analysis a posteriori, mathematical competition, mathematical problem, problem solving

Obsah

Úvod

Tato diplomová práce se bude týkat analýzy matematických úloh a jejich řešení. Toto téma jsem si vybrala, jelikož matematika mi byla vždy blízká a oblast úloh je pro mě velmi zásadní.

Úlohy jsou jádrem výuky, na nich žáci poznávají novou látku, učí se myslet, procvičují si to, co už se naučili a také je učitelé používají k ověření, zda žáci všemu rozumí. V širším pojetí je všechno, co učitel zadá a co nutí žáky k činnosti, možno považovat za úlohu. Proto je důležité se oblastí úloh zabývat, zkoumat je, analyzovat a neustále vylepšovat a tím zlepšovat úroveň výuky na školách.

A proč matematická soutěž? Úlohy v soutěži jsou specifické a často náročnější než v učebnicích. Na menším vzorku úloh se dá najít velké množství oblastí schopností a dovedností, které žáci musí využít. Oproti tomu v učebnicích jsou úlohy často jednotvárné, zasazené do kontextů, které jsou někdy mimo realitu, což mohu demonstrovat třeba na následující úloze: *Maminka koupila osm sýrů po 56 Kč, sedm bábovek po 29 Kč a osm polévek po 24 Kč. Kolik korun stál nákup*? (Hejný, 2009, s. 65). Úloha sice vychází z žáky známého kontextu nákupu, ale položky, které nákup maminky obsahuje, jsou v nesmyslných počtech a pochybuji, že někdo takovýto nákup někdy reálně udělal. Tento odklon od reality mohou žáci vycítit a může způsobit demotivaci k řešení úloh.

Kvůli akcentu na reálnost úloh jsem vybrala ze soutěží Pangeu. Její tvůrci si zakládají na tom, aby kromě matematické správnosti byly úlohy zasazené do reality a žáci se třeba při řešení mohli dozvědět něco nového i z jiné oblasti, než je matematika.

V analýze jsem zkoumala úlohy pro 5. ročník ze školního kola, které se konalo ve školním roce 2020/2021. Poslední ročník prvního stupně jsem vybrala zejména proto, že žáci v 5. ročníku mají hlubší znalosti matematiky, úlohy tedy mohou být z pohledu matematiky bohatší než v předchozích ročnících. Úspěšnost řešení úloh v 5. ročníku je podmíněna využitím více schopností a dovedností a také využitím více metod řešení než u mladších žáků.

Práce je rozdělena do dvou částí – teoretické a praktické. Teoretická část má za cíl zmapovat teoretické poznatky o úlohách, analýze úloh a priori a o analýze a posteriori a také o matematických soutěžích. Na základě obou analýz následně zpracuji praktickou část. Její hlavní část má za cíl stanovit kritéria pro analýzu a priori a tu následně provést u již zmíněných úloh ze školního kola 5. ročníku. Po analýze zobecním výsledky pro celou tuto sérii. A následně bude mým cílem provést analýzu a posteriori na základě procentuální úspěšnosti úloh a výsledků analýzy a priori.

Hlavní výzkumnou metodou v praktické části bude analýza a priori podle Grugnetti a Jaqueta, která bude blíže popsána v teoretické části práce v kapitole 4.

Teoretická část

1. Úloha

Abych se mohla zaobírat analýzou úloh, musím nejprve osvětlit, co pod pojmem úloha v této práci chápu. Úlohou v pedagogice mám na mysli učební úlohu.

Podle Kalhouse (2002, s. 329) ji můžeme definovat jako *širokou škálu všech učebních zadání, a to od nejjednodušších úkolů, vyžadujících pouhou pamětní reprodukci poznatků, až po složité úkoly vyžadující tvořivé myšlení.*

Kuřina (2011, s. 185) úlohou rozumí *obvykle jakoukoli výzvu k činnosti*.

Průcha (2003, s. 258) vymezuje úlohu jako *každou pedagogickou situaci, která se vytváří proto, aby zajistila u žáků dosažení určitého učebního cíle. Je zaměřena na pět aspektů učení: obsahový, stimulační (motivační), operační, formativní a regulativní*.

Fridman (1977)[1] při vymezení pojmu úloha vychází z problémové situace. *Problémová situace vzniká, když se subjekt ve své činnosti (zaměřené na určitý objekt) setkává s určitou obtíží, překážkou. Tuto obtíž si uvědomí a hledá způsob, jak ji odstranit. Jakmile situaci navodíme záměrně, „uměle", rodí se úloha. Úloha je model problémové situace fixovaný v jistém jazyce*. Podle Fridmana *každá úloha obsahuje čtyři základní složky: předmětovou oblast, tj. objekty, o nichž se v úloze mluví; vztahy, které objekty navzájem spojují; požadavek, tj. instrukci o cíli, kterého je třeba dosáhnout a operátor, tj. soubor operací, jež se mají vykonat s podmínkami úlohy, aby byl splněn její požadavek*. *Úloha je požadavek (přednesený v přirozeném či umělém jazyce) na provedení určitého explicitně či implicitně uvedeného operátoru (tj. posloupnosti operací) vzhledem k zadané podmínce.*

Z problémových situací vychází i Okoň (1966, s. 77). *Didaktický problém je praktická nebo teoretická obtíž, kterou žák samostatně řeší svým vlastním aktivním zkoumáním. Základem této obtíže je zpravidla cílevědomě a záměrně organizovaná situace, ve které žák usiluje v souladu s určitými potřebami o překonání obtíže, a tím získá nové poznatky a zkušenosti.* Každý problém musí splňovat určité podmínky, a to že aspoň jeden prvek musí být neznámý, aby bylo co zkoumat. Zároveň musí být nějaké prvky dány, abychom měli z čeho vycházet a věděli jsme, čeho máme dosáhnout. A nakonec musí být dané podmínky určující vztahy mezi známým a neznámým. Okoň pak dělí problémové

[1] Zpracováno na základě Mareše (1980), který ve své práci shrnul Fridmanovy hlavní myšlenky.

úlohy na prosté, vyžadující překonání jedné obtíže, a složité, ve kterých se vyskytuje postupně několik obtíží.

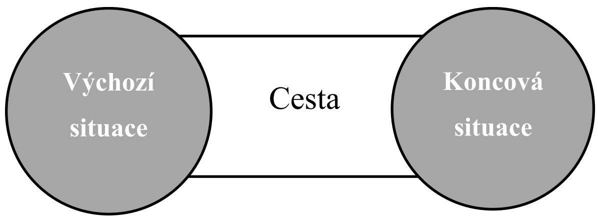
Jelikož se tato práce zaobírá úlohami z matematické soutěže, budu se dále zabývat ještě konkrétnějším pojmem – matematická učební úloha.

1.1. Matematická učební úloha

Nejprve pouze lehce rozšířím Kuřinovu předchozí definici a to, že *matematická úloha vyzývá řešitele k matematické činnosti* (Kuřina, 2011, s. 185).

Mezi dalšími zmíním Vyšínovu definici: *Je dána neprázdná množina* Ω. *Matematickou určovací úlohou nazýváme vytvoření její podmnožiny* $\mathbb{R}1$ *z konečného počtu daných relací danými množinovými operacemi* (Vyšín, 1962, s.19). Vyšín sice mluví pouze o matematické určovací úloze, ale zmiňuje i to, že každou úlohu lze převést na úlohu určovací – v každé úloze jde o určení čísla, množiny, důkazu, konstrukce, rozhodnutí apod. Tedy tato definice postačí pro všechny matematické úlohy.

Obrázek 1: Úloha dle Kopky



Zdroj: Kopka, 2013, s. 16

Podle Kopky (2013, s. 16) matematický *problém nazýváme skutečným problémem či úlohou (česky či slovensky psaná literatura) nebo nerutinním problémem (anglicky psaná literatura), jestliže výchozí situace je přesně popsána (je uzavřená), cíl je přesně zadán (je uzavřený) a cesta není známa*. Výchozí situace nám zadává souvislosti a poskytuje důležité informace. Cestou můžeme rozumět průběh řešení úlohy, který je v tomto případě pro řešitele neznámý. Cílem rozumíme to, čeho chceme řešením úlohy dosáhnout, a kde koncová situace zahrnuje řešení úlohy. Řešením úlohy může být jak jedno řešení, tak i více nebo nekonečně mnoho, ale také to, že úloha nemá žádné řešení.

Různí autoři používají v definicích různou terminologii. Tyto nejednoznačnosti se snaží shrnout Nováková (2016, s. 10-11)*: Při terminologické nejednotnosti jednotlivých autorů v používání termínů úloha, příklad, problém, otázka, cvičení lze vyčlenit některé společné vlastnosti:*

- *objektivní stránku úlohy na logické úrovni charakterizuje otázka nebo požadavek řešení (na rozdíl od např. textové informace, za kterou bývá úloha někdy řešitelem, žákem, zaměňována),*

- *východiskem řešení úlohy je problém subjektu (problémová situace),*
- *úloha je vždy svázána s jazykem, v němž je vyjádřena.*

Dále podle Novákové (2016, s. 11) *chceme-li se vyhnout terminologickému nedorozumění, je třeba pojem matematické úlohy, resp. matematické učební úlohy, chápat jako nadřazený všem ostatním v matematickém vyučování často používaným pojmům (příklad, problém, otázka, cvičení):*

- *příkladem se ve vyučování matematice obvykle rozumí jednak požadavek na obvykle numerický výpočet požadovaného údaje, jednak vzorový nebo ilustrující příklad – text úlohy, případně doplněný jedním nebo více řešeními,*
- *cvičením se označuje soubor úloh, určených k procvičení probraného učiva, probraných algoritmů, početních i grafických postupů. U cvičení vystačíme při řešení se znalostí postupu, jenž je v podstatě určen textem úlohy a který by si měl žák po přečtení úlohy uvědomit. Tyto úlohy mají charakter „matematického řemesla“, jsou nejčastěji prostými aplikacemi jednoho nebo několika algoritmů,*
- *problémem se myslí úloha problémového charakteru, předpokládající větší podíl řešitelovy aktivity a vynalézavosti. Řešení problému (problémové, „nestandardní“ úlohy) vyžaduje při řešení tvořivý přístup řešitele. Přitom se obvykle rozlišují tři fáze řešení problému: orientačně-analytická (aktivní zpracování, modelování problémové situace), strategicko-operační (utváření hypotézy, metody, strategie řešení) a synteticko-verifikační (prověřování hypotézy). I úlohy tohoto typu bývají, byť sporadicky, zařazovány do výuky, neměly by však být použity jako úlohy kontrolní,*
- *otázkou budeme rozumět úlohu zformulovanou jako větu tázací nebo pouhou jednu část (komponentu) matematické úlohy*.

Matematickou učební úlohu budu v této práci chápat jako zastřešující pojem pro obecně využívané termíny (příklad, problém, otázka, cvičení apod.). Úloha musí mít jasně zadanou výchozí situaci a vyjádřený cíl, který povede k matematickým činnostem. Postup naopak bude čistě v režii řešitelů. Úloha může mít jedno, více nebo nekonečně mnoho řešení. Za úlohu považuji i ty úlohy, které řešení nemají. V tomto případě budu hovořit o tom, že výstupem procesu řešení úlohy je to, že daná úloha nemá žádné řešení.

Mezi úlohy zde nebudu zařazovat tzv. kapitánské úlohy. *Kapitánské úlohy jsou takové případy slovních úloh, ve kterých se ptáme na údaj, který je v zadání slovní úlohy* *přímo obsažen, nebo se v zadání vůbec nevyskytuje a nelze na základě podaných informací zjistit* (Andresová, 2016, s. 16). Rozlišujeme dva typy kapitánských úloh:

- přeurčené kapitánské úlohy – ptají se na informaci, která je přímo obsažená v textu nebo je snadno zjistitelná (např. *Na palubě lodi bylo 10 koz a 15 ovcí. Při bouři se utopily 4 ovce. Kolik zbylo na lodi koz?*)
- nedourčené kapitánské úlohy – kdy údaje v zadání napovídají, že se bude jednat o početní řešení, ale to nelze ze zadaných údajů vypočítat (např. typová úloha, která dala kapitánským úlohám jejich jméno, *Loď je 10 m dlouhá a 4 m široká. Jak starý je kapitán?*) nebo úlohy, kde údaje ze zadání nenapovídají žádný početní výkon (např. *V přístavu přistály 4 parníky. Je známo, že první parník se vrací do téhož přístavu vždy za 5 týdnů, druhý za 7 týdnů a třetí za 10 týdnů. Za kolik týdnů připlouvá čtvrtý parník?*)

Tyto úlohu vyžadují po žácích hlavně čtení s porozuměním, ne matematické řešení, proto je pro účely práce za matematické učební úlohy nepovažuji.

1.2. Typologie

1.2.1. Dle Kuřiny

V odborné literatuře se můžeme setkat s různými druhy dělení typů úloh. Např. Kuřina shrnuje nejběžnější typy úloh, se kterými se můžeme setkat ve školní praxi, v následující tabulce.

Tabulka 1: Typologie úloh podle Kuřiny

Úloha	**Výzva**	**Otázka**
Kalkulativní	Vypočítejte . . .	Kolik?
Rozhodovací	Rozhodnete . . .	Zda?
Určovací	Určete . . .	Který?
Konstrukční	Sestrojte . . .	Jak?
Důkazová	Dokažte . . .	Proč?

Zdroj: Kuřina (2011, s. 186)

Kuřina dále rozlišuje úlohy podle rolí, které mají úlohy hrát ve vzdělávacím procesu:

- úlohy motivační,

- úlohy ilustrační (příklady),
- úlohy procvičovací,
- úlohy diagnostické,
- úlohy kontrolní.

První tři skupiny úloh slouží ke kultivaci žákova duševního světa, poslední dvě skupiny slouží k diagnóze úrovně žákových vědomostí (Kuřina, 2011, s. 186).

1.2.2. Z didaktického hlediska

Jirotková (2010, s. 210) nabízí typologii úloh z didaktického hlediska a v níž můžeme najít podobnost s Kuřinovým rozdělením. Podle didaktických cílů lze úlohy dělit na:

- úlohy výukové,
- úlohy diagnostické,
- úlohy reedukační,
- úlohy metadidaktické.

1.2.3. Dle charakteru objektů

Podle toho, jaký je charakter objektů, o něž se v úloze jedná, můžeme rozlišit úlohy, v nichž vystupují pouze matematické výrazy vyjádřené adekvátní matematickou symbolikou – nazveme je úlohy „čistě matematické“ – a úlohy, jejichž předmětnou komponentu tvoří reálné objekty z nematematické oblasti, popisující skutečnou situaci přirozeným jazykem, se označují jako slovní úlohy (kontextové, praktické, textové, námětové,). Slovy jsou v nich vyjádřeny vztahy mezi podmínkami úlohy a otázkou, mezi údaji danými a hledanými (Nováková, 2016, s. 13).

1.2.3.1. Čistě matematické úlohy

Za čistě matematické slovní úlohy považujeme úlohy typu např.: *vypočítej 5 + 3; seřaď čísla vzestupně; ze zadaných číslic sestav čtyřciferná čísla; urči střed úsečky AB, narýsuj kružnici, vypočítej obsah čtverce* apod.

1.2.3.2. Slovní úlohy

Zvláštní skupinou jsou úlohy typu: *Myslím si číslo, když od něj odečtu tři a poté dvakrát zvětším vyjde mi osm*. Někteří autoři jako např. Vyšín (1962, s. 104) tuto úlohu považují za slovní úlohu, protože je zadána slovně. Vychází to z jeho definice slovní úlohy: *Slovními úlohami bývají zpravidla úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy,* *nikoli matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozřešení aritmetické nebo algebraické úlohy. Geometrické úlohy se obvykle nepokládají za slovní úlohy*.

Další autoři např. Kuřina ale požadují od slovní úlohy nějaký mimomatematický kontext. V úloze podle něj musí být popsána určitá reálná situace a k té se poté vážou otázky. Vondrová (2019, s.15) za *slovní úlohu považuje takovou úlohu, která obsahuje nějaký kontext (který může být reálný, pseudo-reálný či imaginární) a v níž jsou některé numerické údaje dány a jiné se hledají. Úloha obsahuje jeden nebo více úkolů (ve formě otázek nebo imperativních vět), které lze splnit za pomoci těchto matematických údajů, vztahů mezi nimi, které řešitel vyvodí ze zadání, a řešitelových znalostí a zkušeností, včetně mimoškolních*.

V této práci budu za slovní úlohu stejně jako Kuřina a Vondrová považovat takovou úlohu, která je zadána slovně a obsahuje nějaký mimomatematický kontext.

1.2.4. Nestandardní úlohy

Uvedu zde také nestandardní aplikační úlohy a problémy, ty zmiňuje například Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (dále RVP ZV): *Jejich řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní*.

Podle Novákové (2016, s. 20) *žáci musejí řešit (matematický) problém, hledat a objevovat způsob, metodu řešení, protože jejich dosavadní zkušenost řešení úlohy neumožňuje. Postup řešení úlohy obvykle není znám, řešitel hledá cestu k výsledku často originálním způsobem. Řešení nestandardních, resp. problémových úloh vyžaduje hluboké soustředění, invenci a čas*. Podobně jako Nováková hovoří i Lišková s Rezkem (2015, s.103): *Nestandardními úlohami a problémy na prvním stupni základní školy nerozumíme úlohy složité, ale takové, které jsou pro žáky neobvyklé (jak zadáním, tak způsobem řešení) a jsou vhodné i pro badatelské aktivity. Při řešení takových úloh se snažíme respektovat a ocenit osobitá řešení žáků, pokud jsou správná a vhodně (například doplňujícími otázkami) korigovat u žáků postupy, které nejsou přesné nebo správné*.

Mezi typy nestandardních úloh můžeme dle RVP ZV zařadit komplexní slovní úlohy z reálného života, logické řady a analogie (číselné i obrázkové), magické čtverce, netradiční geometrické úlohy, úlohy na prostorovou představivost a tzv. logické úlohy. Lišková a Rezek (2015, s. 102) zmiňují dále *problémy diofantovského typu, úlohy, kde žáci „sesazují“ a doplňují známé informace tak, aby výsledná sdělení byla pravdivá, úlohy kombinatorické, kde žáci hledají různé varianty pořadí, hledají různé dvojice apod., úlohy s využitím „šedesátkového“ převodu, kde žáci zpracovávají časové údaje, popř. pracují s mírou úhlovou, úlohy grafické*.

V matematických soutěžích se můžeme často setkat právě s tímto typem úloh.

1.2.5. Otevřené a uzavřené úlohy

Dalšími typy úloh, se kterými se můžeme setkat, jsou úlohy otevřené a uzavřené.

Uzavřené úlohy jsou ty, kde je k dispozici nabídka možných odpovědí. Žák tedy správné řešení vybírá z předem připravené nabídky. Zde můžeme nalézt úlohy, kde je právě jedna odpověď správná, více odpovědí správných nebo dokonce žádná z nabízených odpovědí není správná a řešením je nevybrání žádné z variant.

Otevřené úlohy jsou úlohy bez nabídky odpovědí.

2. Proces řešení úloh

Procesu řešení úloh se věnuje mnoho autorů. Zmíním např. Vyšína (1962, s. 21-24), který tvrdí, že *řešení matematické úlohy je přetvořování této úlohy v úlohy další, kterých je ovšem konečný počet. Otázka je, kdy máme řešení pokládat za skončené, tj. u které úlohy máme postup zastavit neboli které určení soustavy řešení (množiny $\mathcal{R}_1$) máme pokládat za výsledné. Vždycky pokládáme řešení za ukončené, jakmile zjistíme, že soustava řešení $\mathcal{R}_1$ je prázdná (úloha je neřešitelná), neb splyne s oborem řešení. Také když je množina $\mathcal{R}_1$ konečná a dovedeme výčtem udat její prvky, pokládáme úlohu za rozřešenou. V ostatních případech je věcí úmluvy, které určení relace $\mathcal{R}_1$ máme pokládat za konečné; tato úmluva závisí na druhu řešení úlohy. Taková úmluva zní pravidelně tak, že množina $\mathcal{R}_1$ náleží do určité kategorie podmnožin oboru* Ω*. První fáze řešení skončí, když dospějeme po určitém počtu kroků k jisté relaci $\mathfrak{C}_1$ (podmnožině množiny* Ω*), jejíž určení pokládáme za vyhovující a o níž víme, že obsahuje relaci $\mathcal{R}_1$, která je soustavou řešení. Tento případ nastane, když třeba množina $\mathfrak{C}_1$ je konečná a když známe její prvky. Množina $\mathfrak{C}_1$ je v podstatě jakýsi zúžený obor řešení, neboť platí inkluse $\mathcal{R}_1 \subset \mathfrak{C}_1 \subset$* Ω*. Popsaná část řešení se obvykle nazývá analýza neboli rozbor úlohy. Když jsme našli zúžený obor $\mathfrak{C}_1$, je třeba zjistit, zda je $\mathcal{R}_1 \not\equiv \mathfrak{C}_1$ nebo je-li $\mathcal{R}_1 \equiv \mathfrak{C}1$, $\mathcal{R}1 \subset \mathfrak{C}_1$, vybrat z $\mathfrak{C}_1$ ty prvky, které náleží do* $\mathcal{R}$1*. Tuto část řešení úlohy budeme nazývat kontrolou neboli zkouškou.*

Nejčastěji však bývá v souvislosti s problematikou řešení problémů spojován maďarský matematik Polya. Jeho kniha Jak to řešit? je jednou z nejcitovanějších matematických knih. Polya rozděluje proces řešení problému na 4 fáze: porozumění úloze, navržení plánu řešení, realizace plánu a pohled zpět.

Porozumění úloze je zcela zásadní fáze procesu řešení, pokud žák nerozumí zadání, pak s určitostí nemůže zvládnout danou úlohu vyřešit. V rámci porozumění se můžeme zaměřit i na odhodlání úlohu vyřešit, toho odhodlání se snižuje s mírou nepochopení zadání, ale i s obtížností úlohy – příliš lehká, příliš těžká – nebo zajímavosti tématu, kterého se dotýká. Polya (2016, s. 8-9) tvrdí, že *slovní vyjádření úlohy musí být především srozumitelné.*

Druhou fází je návrh plánu. *Plán máme, jestliže víme aspoň v hrubých rysech, jaké výpočty (symbolické nebo rutinní) nebo jaké konstrukce musíme provést, abychom určili neznámou. Cesta od pochopení úlohy ke koncipování plánu může být dlouhá a klikatá.* Ve skutečnosti *hlavním úkolem při řešení úlohy je formulovat ústřední myšlenku plánu*

(Polya, 2016, s. 10). Tato fáze je založena na předchozích znalostech a zkušenostech. Pokud nevím nic nebo málo o daném tématu, je velmi nepravděpodobné, že přijdu se spásnou myšlenkou na řešení daného problému. Nemluvím, zde pouze o znalostech typu umím sčítat do 20, ale i o zkušenostech s různými typy podobných úloh jako je ta současná. Každá z těchto předchozích úloh může nabídnout řešení nebo část řešení té současné. Kromě toho je ještě potřeba velké soustředění na daný cíl a trochu štěstí.

Realizace plánu je snazší fáze procesu řešení. Nejdůležitější je důslednost a trpělivost, se kterou se musí pracovat. Nesmí se ztratit ze zřetele cíl a plán, který byl vybudován. To je jednodušší, jestliže s plánem přišel sám žák, který úlohu řeší. Pokud například žákovi ale plán pouze předloží učitel, je možné, že se v něm žák ztratí případně zapomene, jaký měl být postup. Při realizaci musíme také dbát na to, abychom měli jistotu, že každý krok řešení je správný, o čemž se můžeme přesvědčit intuitivně (vhledem) nebo formálně (důkazem).

Poslední částí, na kterou se však často zapomíná, je ohlédnutí se zpět. Po vyřešení úlohy máme pocit, že už bylo vše uděláno a že výsledek je koncem naší cesty. Byla by však chyba domnívat se, že tomu tak skutečně je. Podle Polyi (2016, s. 16) *pokud se žáci ohlédnou zpět na dokončené řešení, znovu zváží a přezkoušejí výsledek a cestu, která k němu vedla, mohou si upevnit své znalosti a rozvinout svoji schopnost řešit úlohy*. Kromě samotné úlohy se dají zkoumat také souvislosti s dalšími úlohami a jinými matematickými oblastmi, jelikož můžeme objevit zajímavá spojení a rozšířit dále naše znalosti. Neměli bychom tedy na tuto poslední fázi zapomínat, protože pro žáky je jednoznačným přínosem a může je i často bavit, když zkoumáme a rozvíjíme jejich vlastní řešení.

Z Českých autorů můžeme ještě zmínit např. Vondrovou (2015, s. 28-29), která krátce shrnuje proces řešení do následujících čtyř fází: *Žák úlohu nejprve vnitřně přijme (tedy je ochoten jí řešit). A snaží se jí porozumět (např. si uvědomuje, co je dáno a co hledáme), přičemž je učitelem veden k tomu, aby si udělal zápis zadání. Domníváme se, že v této fázi vzniká mentální reprezentace úlohy, ve které jsou údaje a vztahy v dané úloze nejprve simultánně uchopeny ve formě schématu řešení a následně se opět „rozvinují“, nyní však již v matematickém jazyce. Další fází je tedy matematizace, kdy žák formuluje úlohu v jazyce matematiky. Ten může být aritmetický (pomocí výpočtů), algebraický (např. rovnicemi) či pomocí různých obrázků nebo diagramů. Následně žák provede řešení matematicky formulované úlohy a získaný výsledek ověří pomocí sémantické zkoušky v kontextu úlohy a reality (tedy interpretuje výsledek matematické úlohy v původní situaci).*

3. Strategie řešení úloh

Již ve starověku vznikla vědní disciplína zvaná heuristika (z řec. heuristiké = umění hledat). *Heuristika se zabývá nalézáním, objevováním nových poznatků, přístupů apod. bez přesně stanovených logických pravidel, s pomocí kreativity*.[2] S jejím rozvojem jsou spojena jména jako Pappus, Descartes, Leibitz nebo Bolzano. Mezi učitele se rozšířila díky Polyovi a jeho již zmíněnému dílu Jak to řešit? z roku 1944, kde popisoval heuristiku srozumitelně a zajímavě i pro učitele škol různého typu a zaměření. Tito učitelé se jí pak snažili aplikovat při výuce matematiky.

Kopka (2013, s. 26) tvrdí, že h*euristické úvahy jsou úvahy, pomocí nichž objevujeme řešení předložených problémů. Jsou to však úvahy, které nezaručují, že získané řešení je opravdu správné. Proto po objevu tohoto řešení musíme obvykle ukázat, že výsledek skutečně správný je. Přesné matematické úvahy zdůvodňující správnost nalézaných řešení jsou čistě deduktivní povahy*.

Nyní si představíme nejdůležitější heuristické strategie, které uvádí Kopka v knize Umění řešit matematické problémy.

3.1. Výchozí (základní) strategie

Mezi výzkumné strategie můžeme zařadit systematické experimentování, pokus – omyl a odhad – ověření – oprava. Ve školské matematice se dále často vyskytují další dvě strategie, a to algebraická cesta neboli sestavení rovnice či soustavy rovnic nebo geometrická cesta neboli načrtnutí obrázku.

3.1.1. Strategie systematického experimentování

Výsledky experimentování v průběhu zanášíme do tabulky, a poté v nich hledáme zákonitosti. Musíme provést dostatek experimentů, a nakonec zákonitost vyjádřit pomocí vzorce a vyslovit hypotézu.

3.1.2. Strategie pokus – omyl

Tuto strategii můžeme považovat za nesystematické experimentování. Je to nejjednodušší metoda, která ale může vést k cíli až po mnoha pokusech nebo také k cíli

[2] Sociologická encyklopedie. *Heuristika* [online]. [cit. 27. prosince 2022]. Dostupné z: <https://encyklopedie.soc.cas.cz/w/Heuristika>.

vůbec vést nemusí. Často se nepovažuje za vhodnou metodu při výuce matematiky.

3.1.3. Strategie odhad, ověření a oprava

O této metodě můžeme uvažovat jako o vylepšení předchozí strategie. Uděláme odhad, provedeme pokus, ověříme výsledek a na jeho základě znovu tvoříme odhad. Vhodné je opět vše zaznamenávat do tabulky, ze které můžeme vyvodit zákonitosti.

3.1.4. Algebraická cesta

Je to metoda, kdy při řešení používáme sestavení rovnice nebo soustavy rovnic. Je abstraktnější než ostatní strategie, proto je velmi účinná a používaná při řešení různých typů problémů.

3.1.5. Geometrická cesta

Tato metoda je na bázi grafického znázornění. Je často používaná, jelikož nám umožňuje vytvořit si o problému geometrickou představu. Kopka klade důraz na názornost stejně jako Komenský, a právě geometrická konstrukce dává velmi názornou představu o daném problému.

3.2. Další obecné strategie

3.2.1. Konkretizace a zobecnění

O konkretizaci hovoříme, pokud máme zadaný vzorec, buď zjevně zapsaný pomocí písmen nebo nezjevně slovně, pod nímž si nejprve neumíme nic představit. Nejprve tedy musíme dostat konkrétní příklad, případně více příkladů, na kterých pochopíme smysl vzorce.

Získané poznatky můžeme postupně zobecňovat. Jedním ze způsobů je např. rozšířením číselných oborů (z přirozených k reálným atd.), dalším je zobecňování funkcí pomocí rozšiřování jejich definičních oborů.

3.2.2. Analogie

Předpokládáme, že ve světě v obdobných situacích platí i obdobné zákonitosti a vztahy mezi věcmi, lidmi, jevy, objekty dané disciplíny atd. Podobnost situací ale většinou opíráme spíše o odhad a intuici než o důkladný rozbor daných situací.

Při řešení pomocí analogie se snažíme problém převést na jednodušší (analogický), který umíme vyřešit a poté s pomocí tohoto řešení vyřešit i původní problém.

3.2.3. Strategie přeformulování problému

Základem této strategie je přeformulování problému na nový, někdy i úplně jiný problém. Ten je pro nás snadnější a jeho řešení nám buď pomůže s vyřešením původního problému nebo je samotným řešením tohoto problému. Za strategii přeformulování považujeme např. vyjádření problému v jiném jazyce – tedy aritmetický problém si převedeme do grafického znázornění apod.

3.2.4. Cesta zpět

Při cestě zpět postupujeme od konečného cíle, o kterém víme nebo předpokládáme, že platí, zpět k počátku. Během této cesty postupně odhalujeme způsob řešení. Mezi tuto strategii řadíme např. rozbor konstrukční úlohy.

3.2.5. Zavedení pomocného prvku

Někdy se při řešení vyplatí využít zavedení pomocného prvku, o kterém věříme, že nám pomůže ulehčit řešení. Zavedením můžeme např. převést úlohu na jinou, kterou už jsme dříve řešili. S tímto typem se můžeme setkat např. v geometrii při řešení konstrukčních úloh, kdy si do řešení přidáváme další body a přímky, v algebře můžeme třeba přidat novou neznámou.

3.2.6. Vypuštění podmínek

V případě, že žák není schopen problém vyřešit okamžitě za použití všech zadaných podmínek, může jednu z nich vypustit a pokusit se vyřešit jednodušší úlohu. Pokud se mu ani tak nepodaří úlohu vyřešit, může postupně vypouštět další podmínky, než najde úlohu, kterou zdárně vyřeší. Poté zpátky postupně přidává podmínky, které odebral, a řešení podle nich upravuje.

3.2.7. Opakování určitého postupu

Tato strategie se v oblasti matematiky uplatňuje zejména v aritmetice, kde se počítá s víceciferným čísly. Pomocí opakování určitého postupu čísla postupně upravujeme a zmenšujeme na potřebnou „malost“, se kterou už jsme schopni jednodušeji pracovat.

3.3. Specifické matematické strategie

Předchozí strategie je možné v různých obměnách využít v různých vědních oborech, ale existují strategie, které se uplatňují především hlavně v matematice – mezi ně řadíme např. využití invariantu vzhledem k zobrazení, rozklad na jednodušší případy, užití extrémního prvku, metoda nekonečné regrese, parita, Dirichletův princip, hledání výjimek a speciálních případů.

S jejich použitím se ve škole můžeme setkat v drtivé většině případů až na vyšších stupních, zde se tedy jimi dopodrobna zabývat nebudu.

3.4. Strategie řešení úloh s uzavřenými otázkami

Soutěž Pangea je specifická tím, že žákům nabízí pět možných odpovědí na danou otázku. Tím nabízí žákům podle Kaslové (2021) tři různé strategie řešení dané úlohy:

Typ A *Žák řeší úlohu od začátku a své řešení porovnává s nabídkou možných výstupů řešení.*

Typ B *Žák zběžně přečte zadání a soustředí se na nabídku; vychází postupně od jednotlivých nabídek výsledných řešení a ta porovnává se zadáním, zda odpovídají podmínkám daných formulací zadání úloh.*

Typ C *Žák úlohu neřeší, ale hádá bez přemýšlení, nebo použije taktiku, kdy sleduje sociální pohled na tvorbu takových úloh, vciťuje se do autora a volí (a, b, c…) podle toho, jak často se vyskytovala u předchozích úloh jednotlivá písmena u správných řešení (dle něho).*

V soutěži Pangea bylo Kaslovou vysledováno, že Typ A převažuje v první části úloh a převažuje mezi žáky pod 12 let. Typ B můžeme často najít u nadprůměrně inteligentních žáků, a také když začne řešitel cítit mírný časový tlak. Typ C se vyskytuje více u žáků nad 12 let, což může být způsobeno několika důvody: vstupem do puberty, to se projevuje více u chlapců než u dívek, větší ochotou riskovat a také větší zkušeností s úlohami daného typu. Typ C můžeme také sledovat ke konci časového limitu, kdy tíseň donutí řešitele rychle označit odpovědi, aby vše stihl včas.

V úlohách se nemusíme potkat pouze s jedním čistým typem řešení, můžeme nalézt i různé kombinace, které žáci používají. Např. žák začne řešit úlohu typem A, ale nepodaří se mu dotáhnou řešení až do zdárného konce, toto částečné řešení ale může vyřadit některé možnosti, a tak k výběru finální odpovědi ze zbylých následně zvolí radši typ B nebo C nebo opět jejich kombinaci.

4. Analýza matematických úloh

Slovo analýza pochází původem z řečtiny a tímto pojmem označujeme *zkoumání určitého jevu, předmětu nebo činnosti spočívající v myšlenkovém nebo faktickém rozčleňování celku na jednotlivé prvky, v zjišťování jejich vlastností, funkcí, souvislostí a vztahů mezi nimi*.[3]

Analýzu používáme v různých situací, ve kterých může mít i různé cíle:

- Získat informace o aktuálním stavu – pokud uděláme analýzu současného stavu, můžeme zjistit, jaký daný stav je, jak to momentálně funguje, zda je vše v pořádku nebo je potřeba udělat nějaké změny směrem k optimalizaci; s tím souvisí i následující bod.
- Odhalit slabá místa a nedostatky – analýzu může použít jako diagnostický nástroj, který nám odhalí problémy a jejich příčiny, tím nám může ukázat i cestu k jejich odstranění a zlepšení situace.
- Zjistit změny v čase – porovnáním dvou nebo více analýz v čase můžeme zjistit změny a případný efekt opatření, která jsme přijali pro zlepšení situace.

4.1. Analýza a priori

Při analýze úloh v tomto textu budu stavět na analýze a priori. Tento pojem nemá v matematice jasnou definici a vychází z práce Brousseaua a teorie didaktických situací v matematice.

Základem analýzy a priori jsou tyto otázky:

- Které předchozí znalosti potřebují žáci ke zdárnému vyřešení dané úlohy?
- Které strategie mohou žáci při řešení úlohy použít?
- Jaká mohou být úskalí této úlohy?

Analýza a priori nám přináší komplexní pohled na úlohu a umožňuje učiteli připravit se na reakce žáků řešících danou úlohu. V matematické soutěži nám může pomoci odhalit obtížnost jednotlivých úloh a předpokládané chybné strategie vedoucí ke špatnému

[3] Akademický slovník současné češtiny [online] (2017–2023). Praha: Ústav pro jazyk český AV ČR, v. v. i. [cit. 24. února 2023]. Dostupné z: <https://slovnikcestiny.cz/heslo/anal%C3%BDza/0/5796>.

výsledku můžeme zakomponovat do nabídky výsledků.

Mimo soutěže můžeme využít tuto analýzu např. při přípravě hodiny, kdy nám odhalí návaznosti na předchozí učivo. Také nás připraví na případné problémy a donutí nás přemýšlet o tom, jak tyto problémy s žáky vyřešit, jakým způsobem žáky navést ke správnému řešení. Umožní nám také uvědomit si různé možné strategie řešení, které mohou žáci použít, a tím se připravit na to, s čím by mohli žáci při hodině přijít či jak dlouho by jim mohlo řešení trvat. To umožňuje učiteli předpřipravit si možné scénáře vyučovací hodiny, aby ho při vyučování nemohlo nic překvapit a mohl žákům ihned nabídnout vhodné prostředky.

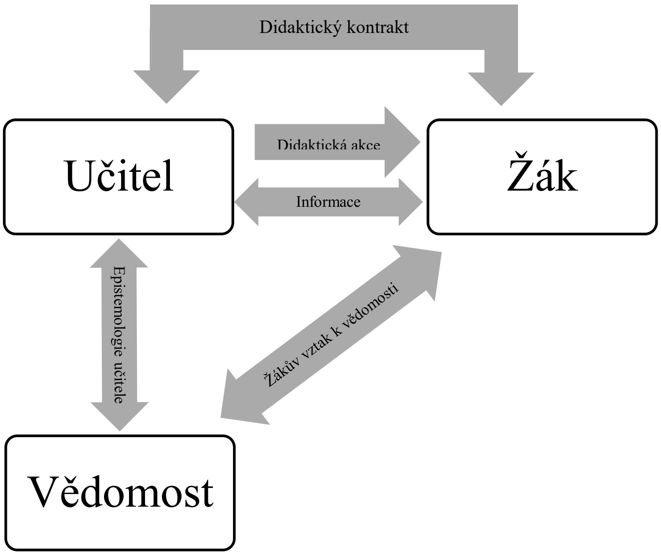
4.1.1. Koncepce Grugnetti a Jaqueta

Grugnetti a Jaquet působí v Associazione Rally Matematico Transalpino, která organizuje srovnávací matematické testy Rally Matematico Transalpino (dále RMT) mezi třídami v Belgii, Francii, Itálii, Lucembursku, Švýcarsku a Izraeli (Česká republika se účastnila do roku 2003). Při přípravě úloh vycházejí z teorie didaktických situací od Brousseaua a jedním z jejich nástrojů je právě i analýza a priori.

To, že úlohy RMT můžeme zařadit mezi ty navozující didaktické situace, můžeme ověřit na následujících schématech. Na obrázkuObrázek 2 můžeme vidět představu Brousseaua, do centra dění staví učitele a žáka, kteří si hrají s vědomosti, kterou si má žák v procesu řešení osvojit. Učitelova úloha je ukázat žákům, jak vyřešit problém s pomocí předchozích vědomostí, jak porozumnět věcem a jak vybudovat vědomosti nové, jak využít předchozí vědomosti a zkušenosti atd. Brousseau (2002, s. 21) říká, že *jediný způsob, jak „dělat“ matematiku je zkoumat a řešit jisté specifické problémy a při této příležitosti klást nové otázky. Učitel proto nesmí komunikovat vědomosti přímo, ale přednést zajímavý problém. Pokud k tomu dojde žák vstoupí do hry a pokud uspěje, proběhne proces učení*.[4] Tím žák přebírá spoluzodpovědnost za své vzdělání a tvoří se mezi ním učitelem vztah, většinou implicitní, ale občas i explicitní, který určuje závazky žáka i učitele směrem k osvojení daných vědomostí. Tento vztah navýváme didaktickým kontraktem.

[4] We know that the only way to “do” mathematics is to investigate and solve certain specific problems and, on this occasion, to raise new questions. The teacher must therefore arrange not the communication of knowledge, but the devolution of a good problem. If this devolution takes place, the students enter into the game and if they win learning occurs. – přeloženo autorkou

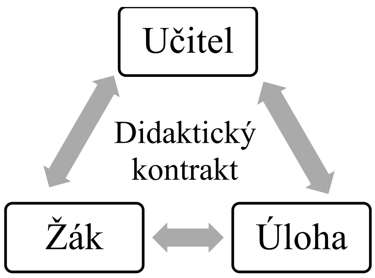
Obrázek 2: Schéma didaktického systému dle Brousseaua



Zdroj: Nery (2022)

Na Obrázek 3 je schéma, které nastává při RMT. Učitel se v této situaci vyskytuje pouze v roli pozorovatele, který do procesu řešení žáků nezasahuje. Ti však mají předložený důkladně promyšlený problém, který je stimuluje k aktivitě. Sadu osmi úloh řeší po dobu 50 minut za pomoci skupinové práce. Svá řešení konzultují mezi sebou bez zásahů učitele. Vědomosti zde tedy vznikají díky diskuzím nejen u jednotlivého žáka, ale u celé skupiny žáků. I přes tyto jednotlivé odlišnosti, zde můžeme na pozadí sledovat propojení pomocí didaktického kontraktu, a tudíž situace v RMT můžeme považovat za didaktické situace dle Brousseauovi teorie.

Obrázek 3: Schéma RMT



Zdroj: Jaquet, Grugnetti (2001, s. 15)

To, jak provádí RMT analýzu a priori, budu demonstrovat na následujícím příkladu.

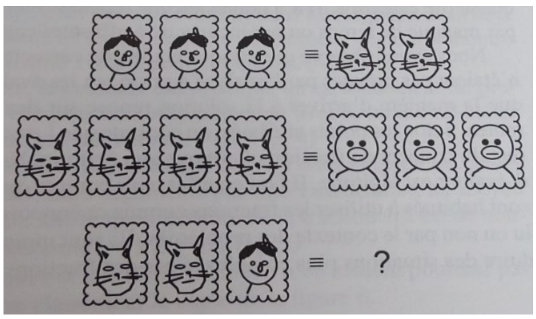
4.1.1.1. Analýza a priori dle Grugnetti a Jaqueta

V Transalpii existují pouze tři druhy známek s obrázky panenky, kočky a medvěda.

- *3 panenky stojí to, co 2 kočky*
- *4 kočky stojí, to co 3 medvědi*

Kolik medvědů je potřeba k nahrazení dvou koček a panenky? Zdůvodni.

Obrázek 4: Úloha Známky



Zdroj: Jaquet, Grugnetti (2001, s. 99)

<u>Analýza a priori</u>

Oblast znalostí

- *Logika*
- *Aritmetika*

Analýza úlohy

- *Pochopit, že z daných vztahů ekvivalence můžeme pomocí „elementární proporcionality" najít další příklady – např. pokud 3 panenky mají hodnotu jako 2 kočky, tak 6 panenek má hodnotu 4 koček.*
- *Pracovat podle „tranzitivity" – např. pokud 6 panenek má hodnotu 4 kočky a 4 kočky mají hodnotu 3 medvědů, pak 6 panenek má hodnotu 3 medvědů nebo 2 panenky mají hodnotu 1 medvěda.*
- *Práce se substitucí – např. nahraďte 2 kočky 3 panenkami.*
- *Spojte předchozí tři typy transformací – 2 kočky a panenka vytvoří 4 panenky (3+1) a 4 panenky odpovídají 2 medvědům.*

Přidělení bodů

4 Správná odpověď (2 medvědi) s uspokojivým vysvětlením (nákresy, posloupnost ekvivalencí...)

3 Správná odpověď s nejasným vysvětlením

2 Správná odpověď bez vysvětlení

1 Chybná odpověď, ale s některými správnými kroky

0 Nepochopení problému[5]

Z příkladu můžeme vidět, že první částí analýzy a priori je určení oblasti znalostí – tedy určení jedné nebo více matematických oblastí, kterých se úloha dotýká, a tak zde můžeme zařadit i nutné předešlé znalosti, které jsou k úloze potřeba.

Druhou částí je analýza úlohy z pohledu procesu řešení. Zde je naznačen proces řešení a kroky nutné k vyřešení úlohy. Při úlohách s více možnými cestami řešení jsou zde popsány i všechny předpokládané možné způsoby řešení.

---

[5] Přeloženo autorkou z Jaquet, Grugneti (2001, s. 99) – viz Příloha 3

Poslední částí a priori analýzy podle Grugnetti a Jaqueta je bodové ohodnocení úlohy. Než zadáme úlohu žákům musíme si připravit kritéria hodnocení, podle kterých budeme následně udělovat body, aby bylo závěrečné hodnocení spravedlivé.

4.2. Analýza a posteriori

Analýza a posteriori, jak už název napovídá, se provádí až následně po řešení úlohy. Zkoumáme v ní proces žákova řešení, hledáme, co u něj způsobilo případné chyby ve výsledku, porovnáváme informace z analýzy a priori a řešíme, zda se naplnily předpoklady, které jsme v ní uvedli a v případě nesrovnalostí analyzujeme, čím byl způsoben rozdíl mezi očekáváním a reálnou situací. Dává nám tedy zpětnou vazbu k analýze a priori.

Jaquet a Grugnetti při analýze a posteriori vychází z audio či videozáznamu nebo písemného projevu žáka, součástí musí být i to, jak žák při řešení postupoval. V návaznosti na to je možno zařadit i rozhovor s žákem o jeho řešení nebo dotazník s kombinací uzavřených a otevřených otázek.

5. Soutěž

Podle Slovníku spisovné češtiny pro školu a veřejnost[6] je soutěž *úsilí o předstižení druhých, o dosažení úspěchu*. Pokud se zaměřím na cizí slova s tímto významem, nalézám např. slovo kompetice[7], v Akademickém slovníku cizích slov[8] je definována jako *soupeření, rivalita, soutěživost nebo také snaha dvou nebo více jedinců nebo skupin o dosažení téhož cíle (zisku, výhry ap.)*. Tohoto cíle však může dosáhnout pouze jeden jedinec nebo jedna skupina.

5.1. Původ a význam soutěží

Soutěže můžeme dle Kaslové v civilizaci pozorovat už od jejího prvopočátku. Dříve většinou plnily dvě role, a to za prvé jako trénink v dovednostech zaručující přežití (lov, sběr potravy, ochrana území) a za druhé jako rituály, kde se úspěšným absolvováním změnilo postavení jedince ve společnosti (přijat mezi dospělé, bojovníky apod.). V soutěžích obou typů šlo o překonání nějaké překážky a prokázání potřebných dovedností, které mohly být jak fyzické, tak i intelektové. Kromě soutěžení mezi sebou, šlo i o překonání sebe sama, zlepšení svých schopností a dosažení osobního maxima.

Na překonání určité obtíže odkazuje i naše české slovo „soutěž“, které významově souvisí se slovem těžký.

Soutěž je tedy aktivita, která nemůže být jednoduchá. Požaduje od účastníků vyvinutí určitého úsilí, díky kterému jsou pak schopni překonávat předpřipravené překážky. Ty jsou připraveny tak, aby je všichni účastnici nebyli schopni splnit na sto procent, ale aby se každý podle svých schopností snažil dosáhnout svého maxima. Porovnáním osobních výsledků každého z účastníků, pak můžeme utvořit žebříček a určit výsledné pořadí soutěže.

5.2. Přínos soutěže pro žáky

Podle Prýmasové je ústředním momentem každé soutěže vítězství. Průběh soutěže je oddělen od okolního světa a soutěžící se stávají protivníky pouze v rámci této soutěže,

[6] Dostupný z Internetové jazykové příručky Ústavu pro jazyk český Akademie věd ČR [online]. [cit. 1. března 2024]. Dostupné z: <https://prirucka.ujc.cas.cz/?slovo=soutez>.
[7] Soutěž, soupeření (z latiny). Slovník cizích slov ABZ [online]. [cit. 1. března 2024]. Dostupné z: <https://slovnik-cizich-slov.abz.cz/web.php/slovo/kompetice>.
[8] Dostupný z Internetové jazykové příručky Ústavu pro jazyk český Akademie věd ČR [online]. [cit. 1. března 2024]. Dostupné z: <https://prirucka.ujc.cas.cz/?slovo=kompetice>.

poté jejich rivalita zaniká. Každá soutěž však nabádá každého účastníka, aby předvedl co nejlepší výkon a předčil ostatní. Z toho vyplývá, že *nejzřetelnějším přínosem je možnost vyniknout, ukázat, že tuto disciplínu ovládám natolik, abych porazil přítomné. Tím je soutěž schopna uspokojit potřebu úspěšného výkonu. Umožňuje to ovšem pouze vítězi (jedinci nebo skupině), ostatní jsou poraženi (předpokládáme však, že … musí žáci mít možnost uspokojit tuto potřebu i jiným způsobem).* (Prýmasová, 2008)

Vědomí toho, že musí žák porazit ostatní může přinášet větší soustředění, které přímo souvisí s kvalitou předvedeného výkonu. Pokud se podaří zajistit podmínky, kdy mají všichni pocit, že v soutěži mohou uspět, přináší to dětem vzrušení a napětí, které může ještě prohloubit jejich soustřední a všechny své síly napnou k dosažení vítězství. *To předpokládá nutnost překonávat sebe, trénovat, zmobilizovat své síly. Předpokládá touhu po sebezdokonalování a každé sebezdokonalování potřebuje odvahu překonávat obtíže. Pokud jsou tyto překážky zdolány, přichází pocit uspokojení.* (Prýmasová, 2008)

Vítězství však nemusí být motivem pro všechny žáky. Pro některé žáky je motivační to, že úlohy se liší od klasických školních úloh a mají možnost se nad úlohami více zamyslet a naučit se něco nového. Nebo také mohou mít úlohy zajímavé kontexty, ve kterých se žák dozví něco nového, tato nová znalost se v případě Pangey ani nemusí týkat přímo matematiky.

U Pangey se pak soutěživost bude objevovat hlavně ve finále, kde už se jedná o výběr nejlepších žáků ze školního kola a ti pak ve finálovém kole chtějí dopadnout co nejlépe a dosáhnout prestiže, ať už u rodičů či učitelů nebo mezi spolužáky.

5.3. Matematická soutěž

V Evropě nebyly první matematické soutěže většinou určeny všem, ale jednalo se o podporu a vyhledávání matematických talentů. Pouze ve vzácných případech se zadávaly plošně, kde měly za účel odhalit případné skryté nadané žáky. Účast v nich mohla být jak dobrovolná, tak i povinná, systém v jednotlivých zemích nebyl v tomto jednotný.

Později se podle Kaslové začaly objevovat i soutěže s jinými cíli – žáky pro matematiku získat (např. Matematický klokan), nebo naučit žáky v matematice spolupracovat (např. Rally Mathématique Transalpin). Soutěže mohou být širokospektré, ale i zaměřené na určitou podoblast matematiky. Existují i soutěže komplexní, kde se matematika může vyskytovat při řešení některých úkolů, nikoli však cíleně (např. Pevnost Boyard, Alfa-Omega).

5.3.1. Metody řešení úloh v matematických soutěžích

Dle Kaslové není ještě provedena dostatečná analýza metod řešení úloh z matematických soutěží, a tedy není možné seriózně zobecňovat. Následující rozdělení je tedy pouze orientační a rozdíly jsou dány tím, jaký je věk žáka, jaký je cíl soutěže a kolik má žák na řešení času.

Čím nižší je věk řešitele, tím se nabízí užší škála možných metod řešení. U soutěží s výrazným časovým omezením (45 nebo 60 minut) je značně omezena metoda systematického experimentování, pokud se vůbec předpokládá, pak zpravidla nejvýše u jedné úlohy. Z pohledu proporce mezi jednotlivými metodami řešení jsou některé soutěže relativně stabilní, jiné variují. Metody založené na zřetězení úsudku jsou také omezeny, pro vysokou náročnost na soustředění a klid v okolí. Z toho logicky plyne, že u nižších věkových kategorií je dominantní metodou kalkulus v kombinaci s uvažováním nebo jednoduchým úsudkem, případně práce s čísly, kde je významné zvládnutí jejich vlastností (např. dělitelnost, cifernost), práce s převody jednotek, detekování vztahu mezi čísly, respektive daty a neposledně práce s obrázky, modely (Kaslová, 2018, s. 120-121).

Předem nelze nikdy říci, že žáci budou úlohu řešit předpokládanou metodou. Většina úloh má navíc i více způsobů, jak ji vyřešit. U soutěží s nabídkou odpovědí nejsme pouze z odpovědi schopni odhalit, jakou metodou se žák k výsledku dostal. Musíme tedy vycházet z analýzy a priori a předpokládaných metod řešení, které mají význam při stanovování obtížnosti úlohy a následně při bodovém hodnocení.

Z rozhovorů z nejúspěšnějšími řešiteli soutěže Pangea vyplývá, že tito žáci nevyužívají při řešení soutěže hádání, radši úlohu nechají bez označeného výsledku, než aby měli označenou chybnou odpověď. V minimu případů se pak uchylují k využití kvalifikovaného odhadu, ten používají pouze ve chvíli, kdy jim dochází čas a úlohu by jinak nestihli vyřešit.

5.4. Soutěž Pangea

Pangea je mezinárodní soutěž, která však končí národním kolem, takže se soutěžící z různých zemí nepotkají. V Čechách se Pangea řídí českým matematických značením a

Obrázek 5: Logo soutěže Pangea

Zdroj: Pangea[9]

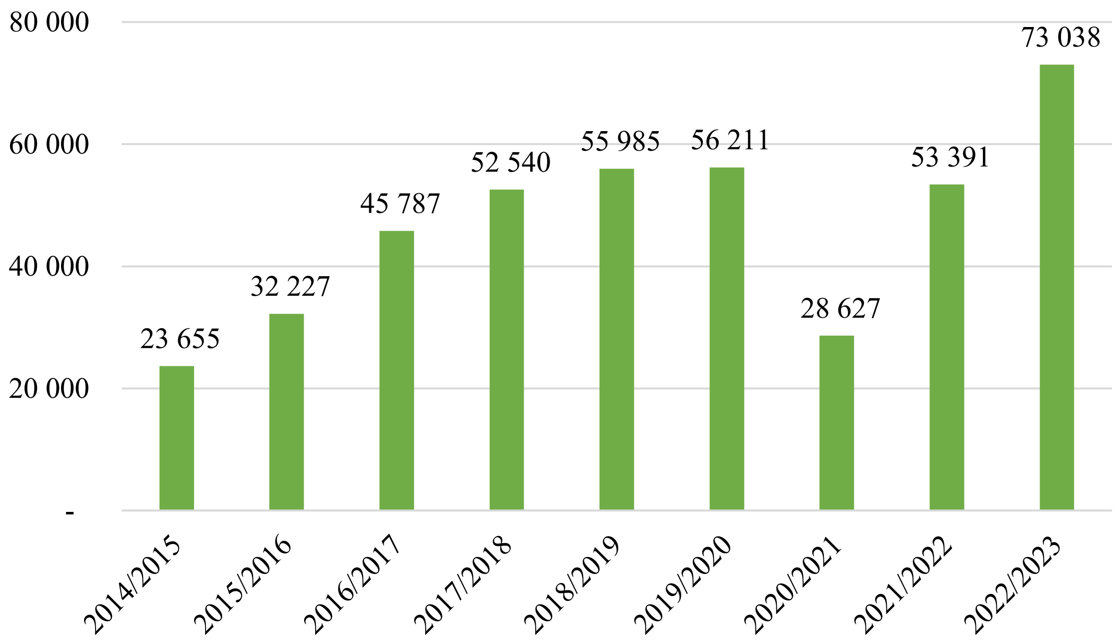
[9] Pangea – matematická soutěž [online]. [cit. 26. února 2024]. Dostupné z: <https://www.pangeasoutez.cz/>.

dalšími zvyklostmi. Je to soutěž dvoukolová, která se skládá ze školního kola, které je možné vyplnit v papírové nebo elektronické podobě. Z tohoto kola jsou vybráni nejlepší řešitelé podle krajů a ti se poté proti sobě utkají v národním finále, kde mohou získat ceny od sponzorů.

Pangea byla založena v roce 2007 v Německu, Česká republika se do Pangey zapojila ve školním roce 2013/2014, kdy proběhl první pilotní ročník v Praze. Od té doby se soutěže každý rok účastní čím dál více žáků a škol v České republice, od roku 2016 dokonce i česká třída v evropské škole v Bruselu a žáci z některých nemocničních škol. Pokles můžeme sledovat ve školním roce 2020/2021 (viz graf 1), ten byl způsoben opatřeními proti nemoci Covid-19 a obavami z ní. Rok poté se však zdravotní situace uklidnila a počet přihlášených účastníků se vrátil na úroveň z předchozích let.

Zúčastnit Pangey se může kterákoli třída 4. až 9. ročníku základní školy nebo víceletého gymnázia.

Graf 1: Počet účastníků Pangey v České republice v letech 2014–2023



Zdroj: autorka na základě dat z Pangey[10]

[10] Do roku 2020 byla data o počtu účastníků zveřejňována v rámci zadání školního kola (dostupné z: <https://www.pangeasoutez.cz/ulohy>). Od roku 2020 jsou pak dispozici samostatné podrobné statistiky pro každý rok (dostupné z: <https://www.pangeasoutez.cz/statistiky>).

5.4.1. Smysl soutěže Pangea

Jméno Pangea náleží prehistorickému uspořádání kontinentů, které v této době byly spojeny v jeden celek. Na základě tohoto si soutěž Pangea stanovila cíl – znovusjednocení žáků jednotlivých zemí z hlediska matematiky (Mezinárodní soutěž Pangea, 2014).

Ve školním kole se pak Pangea snaží o motivaci žáků pro matematiku a matematická témata. Ve finálovém kole pak jde především o vyhledávání matematických talentů a jejich možnou podporu.

Smysl motivace se bohužel často vytrácí, jelikož soutěže učitelé v některých případech používají jako trénování nebo testování, a to i hodnocené známkou. Soutěž se tedy může naopak stát nositelem stresové situace, kdy má žák pocit, že nemůže uspět.

5.4.2. Úlohy v Pangee

5.4.2.1. Tvorba úloh

Každý rok musí vzniknout pro Pangeu velké množství úloh. Pro každý ze šesti soutěžních ročníků je potřeba připravit patnáct úloh pro školní kolo a dvacet pro kolo finálové. Na jejich tvorbě se podílí tým profesionálů z řad matematických pedagogů.

Úlohy jsou připravovány autorským týmem. Každý autor připravuje úlohy pro svůj ročník. Vždy je připravováno 23 matematických úloh, (...). Úlohy procházejí mnoha kontrolami. Nejprve proběhne několik setkání autorského týmu, kde se jednotlivé úlohy konzultují, připomínkují. Následně je každý autor upraví, zašle koordinátorovi, který je rozešle k didaktickým kontrolám. Po opravě zašle zpět autorovi. Ten je opraví a zase pošle organizátorovi. Každá série úloh je tímto způsobem kontrolována cca pětkrát (vždy se jedná o jiného didaktika). Až po těchto mnoha didaktických kontrolách se zasílají úlohy supervizorům. Poté se po poradě autorského týmu vybere 15 úloh, které organizátor nechá graficky upravit a připraví k tisku (Marek, 2017, s. 50).

Méně často mohou úlohy projít rok předem pilotáží, ale vzhledem k náročnosti se provádí jen u minima úloh.

5.4.2.2. Provázanost úloh a jejich gradování

Pangea se opírá o gradaci obtížnosti úloh v rámci kola, nemusí se však jednat o gradaci konkrétního typu úlohy v jednom kole. Může však nastat situace, kdy se ve finálovém kole objeví gradovaná varianta úlohy z kola školního.

Pangea se snaží nabídnou široké spektrum úloh, kde je při řešení potřeba použít různé dovednosti a znalosti. *Např. aspoň jedna úloha na práci s textem; úloha s použitím „ne, tak aby ne, ne-(…)“ v zadání či nabídkové odpovědi; úloha zpracovávající data uvedená v grafu nebo diagramu, případně obrázku či jiného matematického modelu; úloha uplatňující kombinační schopnosti; úloha vyžadující prostorovou představivost; úloha vyžadující funkční myšlení; úloha zpracovávající informace časové nebo o velkých rozměrech; úloha opírající se o algebru či pre-algebru; úloha stojící na již zobecnění zkušenosti, na vlastnostech čísel či vztazích mezi nimi. Tato struktura se objevuje v každém ročníku, avšak na různých úrovních náročnosti a v různých proporcích ve vztahu k RVP. I když se soutěže účastní i nižší gymnázia, soutěž je stavěna na RVP pro ZŠ* (Kaslová, 2018, s.104).

Z výše uvedených variant úloh jsou dlouhodobě problémové úlohy s „ne-“ u slovesa nebo přídavného jména, ať už v zadání nebo otázce. Tyto úlohy se v učebnicích vyskytují sporadicky a žáci vzhledem k nezkušenosti s podobným typem úloh bojují s pochopením textu, což následně ovlivňuje i logické myšlení. Dalšími problémy mohou být úlohy s obrázkem, kde je z něj nutné vyčíst informace nebo přímo provést analýzu obrázku, a také úlohy, ve kterých se vyskytuje více než jedna podmínka, informace týkající se velkého prostoru (makro-prostoru nebo mega-prostoru) nebo zpracování časoprostorových představ. Výskyt těchto úloh není v učebnicích jednotný.

5.4.2.3. Kontext úloh

Pangea je soutěž, která se snaží úlohy zasazovat do reálného kontextu. Pro každý ročník jsou vybrána dvě stěžejní témata, která se prolínají všemi úlohami. Ke každému tématu se v Pangee musí nacházet pět slovních úloh, k tomu jedna úloha aritmeticko-algebraická a jedna geometrická, ve školním kole zbylé tři úlohy mohou být jakékoli a záleží na uvážení autorů.

Každé z témat má každoročně jiného patrona ve formě známé osobnosti, která se danou tématikou zaobírá. Pro ročník 2019/2020 to byla témata Záchranné sbory a Média (viz Obrázek 6). V dalších ročnících se žáci mohli setkat např. s tématy sport, dějiny, zvířata, cestovatelské objevy, mořeplavectví, hudba nebo lékařství.

Obrázek 6: Patroni soutěže Pangea za školní rok 2019/2020

Zdroj: Pangea[11]

V úlohách můžeme nalézt dva různé typy kontextů, a to klasické kontexty (podobné těm, které se běžně nacházejí v učebnicích matematiky), a nové kontexty (do jisté míry přinášejí žákům nové oblasti a mohou být tvořivější). Oba typy kontextů však mají svá negativa, ale i pozitiva.

Klasický kontext žák zná, takže se snižuje čas nutný pro vyřešení úlohy a snižuje míru chybovosti v takovýchto úlohách. To je dobré zejména pro dyslektiky a žáky s horší pozorností. Naopak ale stále stejné opakující se úlohy brzy začnou nudit nadprůměrné žáky. Je tu také riziko podcenění úlohy, kdy se úloha tváří jako standartní úloha a žák chybně zvolí naučenou odpověď bez hlubšího zamyšlení. Toto se dá demonstrovat například na úloze pro 5. ročník z roku 2016/2017 (viz Obrázek 7), kde drtivá většina žáků chybně označila za správnou naučenou odpověď ohledně osové souměrnosti čtverce bez důkladného prozkoumání fotografie, která je k úloze připojena, a kde žádnou souměrnost nenajdeme. Můžeme zde vidět velkou míru využití asociačního myšlení, kdy žáci okamžitě vidí čtverec a nepřemýšlí o jeho dalších aspektech. Správnou odpověď v tomto případě uvedla pouze 3 % žáků. Vliv na tuto úlohu může mít však i minimální využívání fotografií při výuce matematiky.

[11] Pangea – matematická soutěž [online]. *Patroni* [cit. 26. února 2024]. Dostupné z: <https://www.pangeasoutez.cz/patroni>.

Obrázek 7: Příklad úlohy, kterou žáci podcenili

5. GOTICKÁ DLAŽDICE **3 body**

Na fotografii vidíte ozdobnou dlaždici. Řez jako osa souměrnosti:
Kolika různými řezy je možné rozdělit dlaždici pokaždé na dva stejné kusy?

a) 0 **b) 1** **c) 2** **d) 4** **e) 8**

Zdroj: Pangea[12]

Neobvyklé kontexty, které obsahují nové informace, přinášení touhu o tématu zjistit ještě něco dalšího. K tomu se často mohou žáci dopracovat správným vyřešením zadané úlohy. To může krátkodobě motivovat k výkonům, a to zejména u nadprůměrných žáků. Na druhou stranu nový kontext může být obtížnější na pochopení a tím ztěžovat a prodlužovat dobu řešení úlohy.

5.4.2.4. Hodnocení úloh

V Pangee se bodově hodnotí správná volba odpovědi z nabídky pěti možných odpovědí. Z těchto pěti odpovědí je vždy jedna správná a úlohy jsou různě bodově ohodnoceny (3 až 6 bodů) dle předpokládané obtížnosti dané úlohy. Za chybnou odpověď nejsou odečítány žádné body, což umožňuje řešitelům riskovat a odpovědi tipovat. Pangea tak chce řešitele vést k možnosti využít k odpovědi kvalifikovaného odhadu a volit možnost s vysokou pravděpodobností správnosti, obzvlášť jsou-li v nabídce zejména „nesmyslné“ odpovědi.

---

[12] Pangea – matematická soutěž [online]. *Soubor otázek 5. ročník, 2017* [cit. 26. února 2024]. Dostupné z: <https://www.pangeasoutez.cz/files/test-files/2017_5_school_round_test.pdf>.

Praktická část

6. Analýza úloh a priori

6.1. Kritéria

Jako základ pro analýzu a priori použiji koncepci od Grugnetti a Jaqueta, kterou rozšířím o další kritéria, která mě budou zajímat.

- Oblast znalostí a schopností – jakých oblastí se úloha dotýká – např. aritmetika, geometrie, kombinatorika, logika; předchozí znalosti nebo schopnosti, které jsou ke zdárnému řešení úlohy potřeba.
- Druh úlohy – slovní úloha, aritmeticko-algebraická, geometrická. U slovních úloh budu dále označovat slovní úlohy, pokud budou mít nějaký specifický znak např. úloha s delším textem, s nadbytečnými informacemi, s antisignálem, s grafem.
- Text[13] úlohy – rozdělení na kontext a zadání, nadbytečné informace, počet otázek v úloze, graf, obrázek a jeho funkce (ilustrační, vysvětlující, model).
- Postup řešení (analýza úlohy dle terminologie Grugnetti a Jaqueta) – postup řešení, případně postupy, pokud lze úlohu řešit více možnými cestami.
- Možné problémy a chybné strategie řešení z nich vycházející.
- Nabízené odpovědi – jak byly utvořeny, jaké špatné strategie mohou vést k označení, které odpovědi.

V analýze vynechám poslední bod a priori analýzy dle Grugnetti a Jaqueta, a to přidělení bodů. V Pangee je správná odpověď ohodnocena body a špatná nebo nevyplněná odpověď za nula bodů. Tedy není třeba vytvářet bodové ohodnocení.

6.2. Úlohy

Pro analýzu jsem zvolila sérii úloh ze soutěže Pangea ze školního kola pro 5. ročník ze školního roku 2019/2020 (viz Příloha 1).

---

[13] *Podle České terminologické databáze knihovnictví a informační vědy je text: "Data ve formě znaků, symbolů, slov, slovních spojení, paragrafů, vět, tabulek nebo jiných znakových uspořádání určená k vyjádření významu, jejichž interpretace se nezbytně zakládá na čtenářových znalostech nějakého přirozeného jazyka nebo umělého jazyka.* (Wikisofia [online]. [cit. 2. března 2024]. Dostupné z: <https://wikisofia.cz/wiki/Text>.) Pro účely této práce budu do textu zařazovat jako jiné znakové uspořádání i grafy a obrázky.

6.2.1. Úloha č. 1 – Bouračka

Obrázek 8: Zadání úlohy Bouračka

1. BOURAČKA **3 body**

K těžké dopravní nehodě v obci Křižovatka jedou tři vozidla:
sanitka (S), policie (P) a hasiči (H).
Vozidla jedou jedno za druhým těsně za sebou.
Z následujících informací urči, v jakém pořadí tentokrát jedou.
Víš, že policie nejede ani první, ani poslední; sanitka nejede poslední.

a) **H, S, P**

b) **P, H, S**

c) **S, H, P**

d) **H, P, S**

e) **S, P, H**

Zdroj: Pangea, zadání školního kola 2019/2020

6.2.1.1. Oblast znalostí, schopnosti

Práce s podmínkami, třídění, počet do 3, představivost, vazby v jazyce (ani…, ani)

6.2.1.2. Druh úlohy

Slovní úloha

6.2.1.3. Text úlohy

Text je krátký a výstižný. Neobsahuje žádné přebytečné informace, které by mohly žáky mást. Kontext je pro žáky snadno srozumitelný.

6.2.1.4. Postup řešení

První možností je rozepsat si buď pořadí a podle informací doplnit správná auta nebo rozepsat si auta a dle informací doplnit pořadí. P nejede první a ni poslední, tedy P je 2., S nejede poslední a nemůže jet ani druhá, tedy S 1. a na H zbývá 3. Výsledné pořadí je S, P, H.

Další možnost je využít manipulace. Z papíru si žáci mohou vystříhat nebo natrhat „autíčka“ a těmi posouvat, aby dosáhli požadované situace.

6.2.1.5. Možné problémy a chybné strategie řešení z nich vycházející

Problém může být s pochopením záporu v poskytnutých informací, či přímo jeho záměna – nejede za jede.

Tato úloha je dynamická, žáci si tedy musí tvořit pohybovou představu, kterou pro řešení úlohy musí zastavit. To může některým žákům činit obtíže.

6.2.1.6. Nabízené odpovědi

Počet všech možných pořadí aut je 6 (spočítám je jako permutace, tedy P (3) = 3! = 6). Mezi možnostmi se tedy vyskytuje 5 z celkových 6 možných. Chybí zde varianta P, S, H, pokud bych uvažovala nad tím, proč zrovna tato, napadá mě pouze možné spojení s rapovou skupinou PSH, které by mohlo žáky rozptylovat.

U odpovědi a) by mohla chyba vzniknout tím, tím, že místo slova ani přečte ale.

V b) a c) by se jednalo o kombinaci více chyb v čtení a pochopení textu.

U d) žák místo „nejede“ přečte „jede“.

Odpověď e) je správná.

6.2.2. Úloha č. 2 – Model

Obrázek 9: Zadání úlohy Model

2. MODEL **3 body**

K vozidlům se vyrábějí zmenšené modely. Hasičské vozidlo Mercedes L1113 je ve skutečnosti dlouhé 835 cm. Jeho kovový model je 43krát kratší.

Zdroj: www.automodels.cz/

Zjisti skutečnou délku staženého hasičského žebříku na tomto vozidle, když žebřík na modelu měří 195 mm.

a) 8385 cm

b) 838 cm

c) 8385 mm

d) 4,5 m

e) 4534 mm

Zdroj: Pangea, zadání školního kola 2019/2020

6.2.2.1. Oblast znalostí, schopnosti

Aritmetika (násobení v řádu tisíců), veličiny (převody jednotek, délka)

6.2.2.2. Druh úlohy

Slovní úloha s nadbytečnými informacemi a antisignálem

6.2.2.3. Text úlohy

V zadání se nachází nadbytečná informace o skutečné délce auta. Můžeme však diskutovat o tom, zda tato informace není jen zdánlivě nadbytečná. K výpočtu úlohy ji nepotřebujeme, ale může napovědět v jakých řádech se bude výsledek pohybovat. Této informace a obrázku, který u úlohy plní funkci ilustrační, mohou někteří žáci vyčíst, že velmi pravděpodobně odpovědi a), d) a e) nebudou správné.

Kontext úlohy je dětem známý. Celková délka textu je krátká.

V zadání si také můžeme všimnout chyby, kdy řád tisíců není oddělen mezerou od řádu stovek.

6.2.2.4. Postup řešení

Model je 43x menší, tedy 195 mm . 43 = 8 385 mm

6.2.2.5. Možné problémy a chybné strategie řešení z nich vycházející

Výraz „kratší“ je zde antisignálem a může vést k chybné operaci tedy k dělení.

Různé jednotky používané v zadání a v odpovědích.

6.2.2.6. Nabízené odpovědi

Odpověď a) má chybné jednotky.

b) vznikne při chybném zaokrouhlení na centimetry.

c) je správně.

d) může vzniknout při chybně zvoleném dělení a přehlednutím chybné jednotky.

e) značí použití dělení a zmatky v převodech jednotek.

6.2.3. Úloha č. 3 – Úraz na horách

Obrázek 10: Zadání úlohy Úraz na horách

3. ÚRAZ NA HORÁCH **4 body**

Horská služba jezdí/chodí na horách i k úrazům, které pak převáží do nemocnic. Na horách to ale není jako ve městě!

Pokud si např. v Krkonoších zlomíš nohu v prvním případě **na Zlatém návrší kousek od mohyly umrzlých lyžařů** Hanče a Vrbaty a ihned ohlásíš úraz na 112, dostane se k tobě horská služba do 20 minut, dále 10 minut trvá ošetření a za dalších 30 minut jsi v nemocnici.

Kdyby sis v druhém případě zlomil nohu při **sestupu od Labské boudy do Labského dolu**, pak se k tobě dostane horská služba obtížněji – a to za 45 minut a po 10 minutách ošetření to potrvá do nemocnice ještě hodinu a půl.

U obou případů porovnej dobu, která uplyne od nahlášení úrazu do příjezdu pacienta do nemocnice. **O kolik déle to bude trvat v druhém případě, než se dostaneš do nemocnice?**

a) **o 1 h**

b) **o 65 min**

c) **o 1 h 25 min**

d) **o 95 min**

e) **o 105 min**

Zdroj: Pangea, zadání školního kola 2019/2020

6.2.3.1. Oblast znalostí, schopnosti

Aritmetika (sčítání a odčítání do 1 000), veličiny (čas, převody jednotek), porovnání rozdílem

6.2.3.2. Druh úlohy

Slovní úloha s velmi dlouhým textem a nadbytečnými informacemi

6.2.3.3. Text úlohy

Je to poměrně dlouhý text, který může být pro žáky náročný. Obsahuje hodně informací ke kontextu úlohy a nadbytečné číslo 112. Pro některé žáky však může být tento kontext zajímavý a zároveň působí jako varování, aby si dávali pozor při pohybu na horách, jelikož záchrana v takových podmínkách není jednoduchá. A číslo 112 si tak mohou zapamatovat pro pozdější využití v krizové situaci.

6.2.3.4. Postup řešení

Vypočítat délku obou variant a pak spočítat rozdíl:

1. případ 20 + 10 + 30 = 60
2. případ 45 + 10 + 90 = 145

145 – 60 = 85 => 1 h a 25 min

Nebo vypočítat rozdíly mezi variantami a pak je sečíst:

1.	2.	Rozdíl
20	45	25
10	10	0
30	90	<u>60</u>
		85 => 1 h a 25 min

6.2.3.5. Možné problémy a chybné strategie řešení z nich vycházející

Chyba v převodu z hodin na minuty a opačně.

Vynechání důležitých informací kvůli délce textu.

Záměna délka cesty do nemocnice a celkové doba, než se dostaneš do nemocnice.

6.2.3.6. Nabízené odpovědi

Odpověď a) je rozdíl v délce cesty do nemocnice.

b), d) a e) předpokládá početní chyby, vynechání některých důležitých informací nebo chyba v převodu jednotek.

c) je správně.

6.2.4. Úloha č. 4 – Tisk

Obrázek 11: Zadání úlohy Tisk

4. TISK **4 body**

V různých novinách jsme se mohli dočíst o jedné události.

Posuď, jestli všichni novináři podali čtenářům stejné informace.

(Neptáme se, kdo má pravdu. Neporovnáváme sloh.)

- JSME VŠUDE:

Ze zoo včera náhodou utekl lev. Pronásledovaly ho dvě desítky specialistů po dobu dlouhou 180 minut.

- VÍME TO:

12 odborníků chytalo včera lva, který utekl ze zoo. Již za necelé dvě hodiny se ho podařilo odchytit.

- JENOM MY:

Dvacet vyškolených pracovníků honilo lva, který včera utekl ze zoo. Úspěšný zásah trval celé tři hodiny stíhání.

a) **Ve všech novinách byly tytéž informace.**

b) **Každé noviny podaly jiné informace.**

c) **Informace novin *Víme to* se od ostatních lišily.**

d) **Informace novin *Jenom my* se od ostatních lišily.**

e) **Informace novin *Jsme všude* se od ostatních lišily.**

Zdroj: Pangea, zadání školního kola 2019/2020

6.2.4.1. Oblast znalostí, schopnosti

Logika, veličiny (čas, převody jednotek)

6.2.4.2. Druh úlohy

Slovní úloha

6.2.4.3. Text úlohy

Text je zaměřen na využití kvantifikátorů (každý, všichni apod.) a jazykovou logiku. V „titulcích novin“ se nacházejí výrazy, které mohou být pro žáky obtížnější k pochopení, jelikož se s nimi často nesetkávají (specialista, vyškolený pracovník, stíhání apod.)

6.2.4.4. Postup řešení

Do tabulky je možno vypsat všechny dostupné informace nebo si vypsat jen jedny noviny a poté porovnat, zda druhé a třetí mají stejné informace už bez vypisování konkrétních údajů.

Tabulka 2: Řešení úlohy Tisk

	Jsme všude	Víme to	Jenom my
Odkud?	Zoo	Zoo	Zoo
Kdy?	Včera	Včera	Včera
Jaké zvíře?	Lev	Lev	Lev
Kolik lidí?	2 desítky (20)	12	20
Jak dlouho?	180 min = 3 h	2 h	3 h

Zdroj: autorka

Z tabulky vyplývá, že jiné informace mají noviny Víme to.

6.2.4.5. Možné problémy a chybné strategie řešení z nich vycházející

Chybné převody jednotek.

U druhé strategie, kdy se vypisují jen jedny noviny, může nastat situace, že za vzor si vyberu ty jediné noviny, které mají jiné informace. Pak vyjde, že oboje další noviny mají různé informace a zapomenu je porovnat mezi sebou, zda se liší nebo ne.

6.2.4.6. Nabízené odpovědi

V nabídce odpovědí je vyčerpávající výčet všech možností. Správná odpověď je c).

6.2.5. Úloha č. 5 – Schody

Obrázek 12: Zadání úlohy Schody

5. SCHODY **4 body**

Z přízemí do prvního patra vede 10 schodů.

„*To je nuda*!“ volala Lenka na Petru. „*Co kdybychom šly vždycky tři schody po jednom nahoru a pak jeden schod dolů, dokud nedošlápneme poprvé na první patro*!“ „*Tak jóóó!*“ souhlasila Petra.

Na kolik schodů přitom každá šlápne?

a) 20 **b) 18** **c) 16**

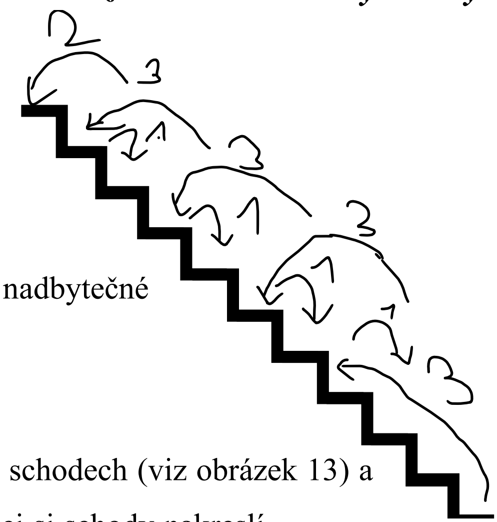
d) 14 **e) 12**

Zdroj: Pangea, zadání školního kola 2019/2020

6.2.5.1. Oblast znalostí, schopnosti

Aritmetika (sčítání do 20), čtení v modelu

Obrázek 13: Řešení úlohy Schody



Zdroj: autorka

6.2.5.2. Druh úlohy

Slovní úloha dialogická

6.2.5.3. Text úlohy

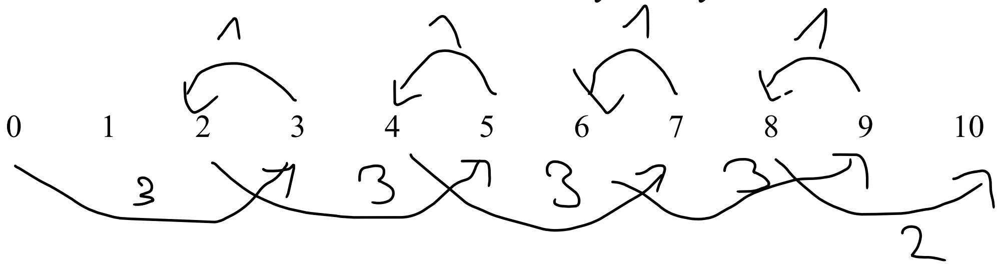
Text je krátký a výstižný, neobsahuje žádné nadbytečné údaje. Je ve formě dialogu mezi dvěma postavami.

6.2.5.4. Postup řešení

Úloha jde řešit graficky: vyznačit si postup na schodech (viz obrázek 13) a sečíst počet schodů: 4 . 3 + 4 . 1 + 2 = 18. Někteří žáci si schody nakreslí, ale pak nebudou dělat šipky a zbytek úlohy vyřeší pouze v představách s manipulací prstem po schodech a počítáním si kroků.

Stejným způsobem poslouží i číselná osa (viz Obrázek 14): 4 . 3 + 4 . 1 + 2 = 18

Obrázek 14: Řešení úlohy Schody



Zdroj: autorka

Žáci mohou při řešení použít krokování. Ale vzhledem k tomu, že žáci budou muset při řešení úloh sedět v lavici, v rámci soutěže nepředpokládám, že by to bylo často užívané řešení.

Řešit můžeme i pouze myšlenkovým pochodem: udělám tři kroky nahoru a jeden dolů, tedy celkem čtyři kroky a jsem na schodu č. 2, podruhé čtyři kroky a jsem na schodu 4, pak na 6 a 8, zbývají poslední dva kroky na desátý schod. Tedy 4 . 4 + 2 = 18.

Nebo výpočtem, podobně jako při myšlenkovém pochodu:

3 – 1 = 2   2 + 3 – 1 = 4   4 + 3 – 1 = 6   6 + 3 – 1 = 8

Pak budou zbývat poslední 2 kroky na 10. schod. V každém cyklu šlápnu na celkem 4 schody, tedy 4 . 4 + 2 = 18.

6.2.5.5. Možné problémy a chybné strategie řešení z nich vycházející

U řešení se schody bez očíslovaní může nastat problém se špatně odpočítanými stupni.

U obou názorných řešení je potřeba pečlivě značit, aby se při finálním sčítání počtu schodů nic nevynechalo.

Další předpokládanou chybou je to, že při důsledném dodržování cyklu tři schody nahoru a jeden dolů skončíme přesně na desátém schodu po pátém opakování, jenže žákům nedojde, že na desátý schod už museli „šlápnout“ dříve. Tato chyba se bude častěji vyskytovat u řešení, kde se žák neopírá o grafické znázornění, tedy u myšlenkového pochodu nebo u výpočtu.

6.2.5.6. Nabízené odpovědi

Odpověď a) může vzniknout v případě, že bychom zapomněli, že desátý schod je poslední a žádný další není. Pokud je dokončen cyklus tři schody nahoru a jeden dolu, skončíme na desátém schodu a s přesně 20 kroky.

b) je správně.

c), d), e) může značit nějaký vynechaný krok nebo zapomenutý připočet či neúplné pochopení zadání.

6.2.6. Úloha č. 6 – Policie

Obrázek 15: Zadání úlohy Policie

6. POLICIE **4 body**

Policie vyšetřovala nehodu. Řidič se dostal s autem do smyku a naboural. Policie zjišťuje, zda za to může také přetížení auta. Auto mělo naloženo 250 komínových cihel a dva pytle vápna po 40 kg. Jedna cihla váží 5 kg. Toto auto (má užitnou hmotnost) může být zatíženo nákladem do 6 q.

O kolik kg se lišila hmotnost nákladu od povolené zátěže?

(škoda Octavia Combi 6MPI)

a) **Řidič přetížil auto o 730 kg.**
b) **Řidič přetížil auto o 690 kg.**
c) **Řidič přetížil auto o 650 kg.**
d) **Řidič auto nepřetížil, měl ještě rezervu 467 kg.**
e) **Řidič auto nepřetížil, měl ještě rezervu 4 670 kg.**

Zdroj: Pangea, zadání školního kola 2019/2020

6.2.6.1. Oblast znalostí, schopnosti

Aritmetika (sčítání/odčítání a násobení do 1 000), veličiny (převody jednotek, hmotnost), porovnání rozdílem

6.2.6.2. Druh úlohy

Slovní úloha

6.2.6.3. Text úlohy

V textu nejsou žádné nadbytečné informace. V rámci kontextu, zde můžeme vidět přesný název auta, o které se v úloze jedná, pokud mají žáci zájem mohou si následně všechno dohledat a ověřit.

Je zde možný problém s neznalostí slova přetížení, ale text úlohy dobře navádí na porozumění této problematice.

6.2.6.4. Postup řešení

Náklad 250 . 5 + 2 . 40 = 1 250 + 80 = 1 330

Užitná hmotnost 6 q = 600 kg

Přetížení 1 330 – 600 = 730

Auto bylo přetíženo o 730 kg.

6.2.6.5. Možné problémy a chybné strategie řešení z nich vycházející

Neznalost jednotky metrického centu (q) a z toho vyplývající chybný převod jednotek.

Žáci jsou zvyklí na otázku o kolik méně nebo o kolik více, zde si to musí z výsledku odvodit, což může některým žákům činit obtíže.

6.2.6.6. Nabízené odpovědi

Odpověď a) je správně.

b) značí přehlednutí informace o dvou pytlích vápna po 40 kg a započítání pouze jednoho.

c) vyjde při úplném vynechání pytlů vápna.

e) může vzniknout při zaměnění jednotky metrického centu za tuny, tedy pokud bude žák uvažovat užitnou hmotnost 6 000 kg (6 000 – 1 330 = 4 670).

d) můžeme předpokládat v případě postupu jako u odpovědi e) v kombinaci s tím, že se žák zalekne příliš velkého čísla.

6.2.7. Úloha č. 7 – Krkonoše

Obrázek 16: Zadání úlohy Krkonoše

7. KRKONOŠE **5 bodů**

Dali jsme si v chalupě A čaj, najednou padla mlha. Vyšli jsme z chalupy A a sotva jsme viděli na první orientační tyč, která je 12 m od dveří chalupy. Čeká nás k cíli trasa 3 km. Teď již vím, že půjdeme od jedné tyče ke druhé, dokud nás nedovedou na místo, odkud uvidíme dveře naší chalupy B. Ještěže si pamatujeme radu Horské služby, že jsou tyče od sebe vždy 12 m a u domu se nezapichují.

Zdroj: https://krkonossky.denik.cz/zpravy_region/u-lucni-boudy-muzete-zabloudit-chybi-tyce-20171213.html

Kolik tyčí mineme, než se dostaneme k chalupě B, kde nocujeme?

a) 249 **b) 250** **c) 251**

d) 252 **e) 255**

Zdroj: Pangea, zadání školního kola 2019/2020

6.2.7.1. Oblast znalostí, schopnosti

Aritmetika (dělení a odčítání v řádu tisíců), veličiny (převody jednotek, délka)

6.2.7.2. Druh úlohy

Slovní úloha

6.2.7.3. Text úlohy

Text je poměrně krátký a výstižný a z většiny se věnuje vysvětlení fungování orientačních tyčí na horách.

Úlohu doplňuje obrázek, který pomůže žákům udělat si představu, jak takové tyče vypadají, a může jim pomoci představit si celou situaci, jelikož z textu může být pro ty, co na hory nejezdí a tyče nikdy neviděli, hůře představitelné, o co v úloze jde. Obrázek zde tedy plní vysvětlující roli.

6.2.7.4. Postup řešení

Převedu na stejné jednotky 3 km = 3 000 m

Vydělím celkovou vzdálenost vzdáleností tyčí 3 000 : 12 = 250

U chaty ale tyč zapíchnutá není, musíme tedy jednu, tu poslední, „odečíst“

250 – 1 = 249

6.2.7.5. Možné problémy a chybné strategie řešení z nich vycházející

Základním problémem může být nepochopení celé situace v úloze a z toho pramenící úplná neschopnost úlohu vyřešit.

Problém může nastat i při převodu jednotek z kilometrů na metry.

6.2.7.6. Nabízené odpovědi

Nabízené odpovědi nemají široké spektrum, liší se pouze v řádu jednotek. Proto i v případě chybného převodu jednotek, je žák okamžitě schopen odhalit chybu. Odpovědi by tedy žáka měly v tomto případě navést směrem ke správnému řešení.

Odpověď a) je správná.

b) vznikne, pokud žákovi nedojde, že je potřeba „odečíst“ poslední tyč, která by musela být přímo u chaty a o které jsme se dozvěděli, že se u domu nezapichuje.

c), d) a e) značí nejspíše nějakou početní chybu při dělení.

6.2.8. Úloha č. 8 – Závorky

Obrázek 17: Zadání úlohy Závorky

8. ZÁVORKY **5 bodů**

Porovnej čísla ve výsledcích.

Kolik různých čísel vyšlo?

(12 + 18) : 2 – 1	12 + (18 : 2 – 1)
12 + (18 : 2) – 1	(12 + 18 : 2) – 1
(12 + 18) : (2 – 1)	12 + 18 : (2 – 1)

a) 6 **b) 5** **c) 4**

d) 3 **e) 2**

Zdroj: Pangea, zadání školního kola 2019/2020

6.2.8.1. Oblast znalostí, schopnosti

Aritmetika (sčítání, odčítání, dělení v řádu desítek, závorky, priorita aritmetických operací)

6.2.8.2. Druh úlohy

Aritmeticko-algebraická úloha se zaměřením na gramatiku aritmetického grafického kódu

6.2.8.3. Text úlohy

Nejedná se o slovní úlohu, jelikož neobsahuje žádný mimomatematický kontext. Slovní zadání obsahuje pouze úkol a otázku a poté následuje sled příkladů, který se týká.

6.2.8.4. Postup řešení

Vypočítám jednotlivé příklady:

(12 + 18) : 2 – 1 = 30 : 2 – 1 = 15 – 1 = 14	14
12 + (18 : 2) – 1 = 12 + 9 – 1 = 20	20
(12 + 18) : (2 – 1) = 30 : 1 = 30	30
12 + (18 : 2 – 1) = 12 + (9 – 1) = 12 + 8 = 20	20
(12 + 18 : 2) – 1 = (12 + 9) – 1 = 21 – 1 = 20	20
12 + 18 : (2 – 1) = 12 + 18 : 1 = 12 + 18 = 30	30

Označím si počet různých čísel, která vyšla. Výsledek je 3.

6.2.8.5. Možné problémy a chybné strategie řešení z nich vycházející

„Porovnej čísla ve výsledcích“ a příklady ve dvou sloupcích mohou vést k chybné interpretaci toho, co se má porovnávat. Někteří žáci se mohou zakotvit v tom, že mají porovnávat výsledky dvou příkladů v daném řádku. A poté tedy mít problém s pochopením, která čísla mají vzít v potaz při otázce, kolik různých čísel vyšlo.

Další problém se může týkat těch žáků, kteří trpí dyslexií, dysgrafií nebo dysortografií. Přepis a vypočítání těchto šesti velmi podobných příkladů jim může způsobit značné obtíže.

6.2.8.6. Nabízené odpovědi

Nabídka odpovědí nabízí téměř všechny varianty, které by mohly nastat. Jediné, co chybí je odpověď s číslem 1, která je vynechána naprosto záměrně. Protože i slabý žák je schopen snadno odhalit, že pravděpodobnost, aby všech šest různých příkladů vyšlo stejně, se blíží nule, a tedy odpověď 1 bez počítání ihned vyloučit.

Správná odpověď je d).

6.2.9. Úloha č. 9 – Silvestr

Obrázek 18: Zadání úlohy Silvestr

9. SILVESTR **5 bodů**

V tisku se objevila zpráva, že náměstí v naší obci bylo v den oslav nového roku zcela zaplněno občany. Noviny chtěly zpřesnit počet účastníků.

Kolik bylo přibližně občanů na náměstí, když na 1 metr čtverečný počítáme 3 osoby?

Naše náměstí má tvar obdélníku, jeho šířka je 50 m, délka je 100 m.

a) 1 500 osob
b) 3 000 osob
c) 5 000 osob
d) 15 000 osob
e) 150 000 osob

Zdroj: Pangea, zadání školního kola 2019/2020

6.2.9.1. Oblast znalostí, schopnosti

Aritmetika (násobení a dělení v řádu desetitisíců), rovinná geometrie (obsah obdélníku), veličiny (délka, obsah), práce s hrubým odhadem

6.2.9.2. Druh úlohy

Slovní úloha

6.2.9.3. Text úlohy

Text je krátký výstižný a neobsahuje žádné nadbytečné informace, které by mohly žáky plést. Jednotka m^2 rovnou navádí na výpočet obsahu obdélníku.

6.2.9.4. Postup řešení

Vypočítám obsah obdélníka (náměstí)	S = 50 . 100
	S = 5 000 m^2
Vynásobím počtem osob na m^2	5 000 . 3 = 15 000

6.2.9.5. Možné problémy a chybné strategie řešení z nich vycházející

Samotné zadání svými jednotkami žáky navádí na výpočet obsahu obdélníka, zde by mohl nastat pouze problém se špatně zapsaným počtem nul u výsledku.

Druhá část výpočtu poměrně jasně ukazuje na násobení, i v případě, že by se někdo uchýlil k dělení, desetinné číslo po dělení a nabídka odpovědí rychle obrátí žáka směrem k násobení. Tedy jediným problémem, zde opět může být chybně zapsaný počet nul ve výpočtu nebo výsledku.

6.2.9.6. Nabízené odpovědi

Odpověď d) je správná.

Odpovědi a) a e) odkazují na chybný počet nul zmiňovaný výše.

c) může vzniknout při vynechání druhého kroku výpočtu a žák považuje za konečný výsledek výpočet obsahu náměstí.

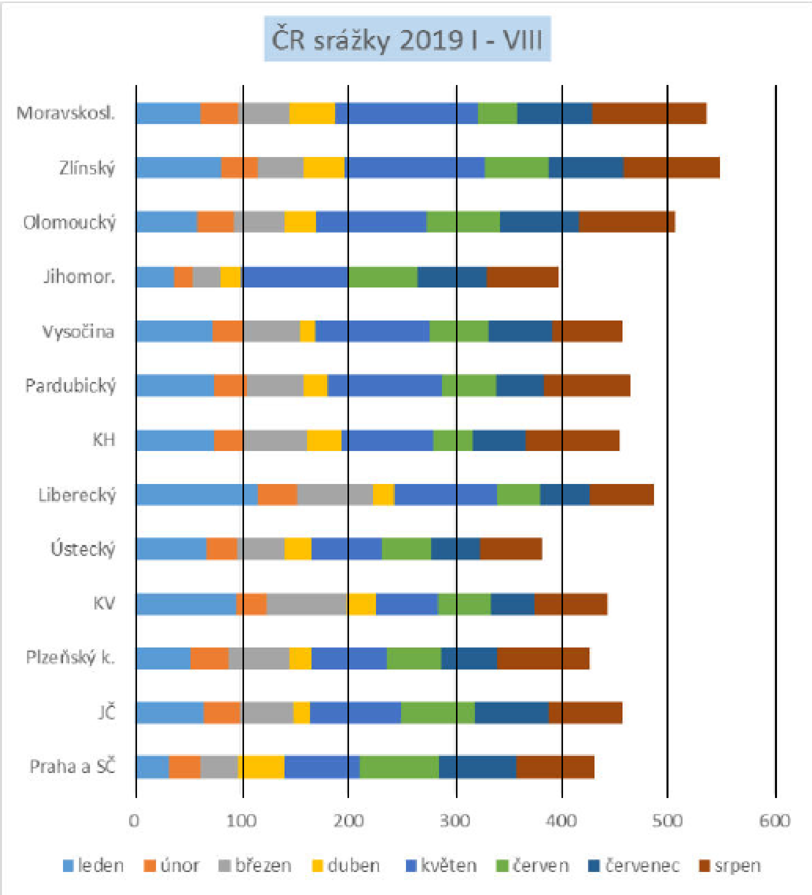
b) je odpověď, u které nevidím přímou souvislost s nějakou konkrétní chybou, která by mohla při řešení nastat. Může zde být z důvodu, že někteří žáci nemají dobrý odhad, obzvlášť pokud se jedná o velký prostor a velká čísla, tedy může mást ty, kteří by chtěli odpověď pouze tipovat.

6.2.10. Úloha č. 10 – Počasí

Obrázek 19: Zadání úlohy Počasí, 1. část

10. POČASÍ **5 bodů**

Pro novináře je důležité číst data. Připravují nyní článek o suchu a srážkách. Údaje o srážkách jsou v mm.



Zdroj: chmi.cz

Zdroj: Pangea, zadání školního kola 2019/2020

Obrázek 20: Zadání úlohy Počasí, 2. část

1) V kterém kraji ČR bylo nejvíc srážek za období leden–srpen 2019?
2) V kolika krajích spadlo aspoň v jednom měsíci více než 100 mm srážek?
3) V kterém kraji bylo nejméně srážek v lednu?
4) V kterém měsíci spadlo nejvíce srážek v ČR?

a) Moravskoslezský; 8; Jihomoravský; srpen

b) Liberecký; 10; Praha a SČ; leden

c) Moravskoslezský; 6; Ústecký; březen

d) Zlínský; 6; Praha a SČ; květen

e) Zlínský; 9; Ústecký; květen

Zdroj: Pangea, zadání školního kola 2019/2020

6.2.10.1. Oblast znalostí, schopnosti

Čtení informací z grafu, logika, veličiny (délka), porovnávání

6.2.10.2. Druh úlohy

Slovní úloha s grafem

6.2.10.3. Text úlohy

Text je krátký a stručný. Většinu zadání zabírá graf, který se váže se k úloze a ze kterého se mají vyčíst informace.

6.2.10.4. Postup řešení

V zadání jsou čtyři otázky, na které se hledá odpověď.

1) V kterém kraji ČR bylo nejvíc srážek za období leden–srpen 2009?

   Hledám nejdelší pruh. Vycházím z toho, že čím více srážek, tím delší jsou vyznačené úseky – Zlínský kraj.

2) V kolika krajích spadlo aspoň v jednom měsíci více než 100 mm srážek?

   Hledám kraje, kde je aspoň jeden úsek větší než 100 mm, tedy přesahuje rozmezí mezi dvěma čarami mřížky:

   1. Moravskoslezský kraj – květen, srpen
   2. Zlínský kraj – květen
   3. Olomoucký kraj – květen

4. Jihomoravský kraj – květen
5. Kraj Vysočina – květen
6. Pardubický kraj – květen
7. Liberecký kraj – leden

Podle oficiálního řešení je však správná odpověď 6. K měření jsem používala pravítko, i když je v soutěži oficiálně zakázáno. Tady si žáci mohou pomoci např. proužky papíru, které mohou přikládat k jednotlivým pruhům, a použít je jako improvizované měřidlo. To je však možné pouze při tištěné verzi soutěže.

Problém, zde mohl vzniknout při kopírování grafu ze stránek Českého hydrometeorologického ústavu nebo při tisku, kdy se mohly ostré hrany rozmazat, a tím pak způsobit potíže při přesném měření.

3) V kterém kraji bylo nejméně srážek v lednu?

   Hledám nejkratší světle modrý úsek – Praha a Středočeský kraj.

4) V kterém měsíci spadlo nejvíce srážek v ČR?

   Hledám, který měsíc by měl v součtu nejdelší pruh. Na první pohled vyčnívají tři měsíce leden, květen a srpen, ale pokud porovnám úseky u každého měsíce zvlášť, tak ve většině případů byl květen o podstatný kus deštivější – květen.

Toto vyčerpávající řešení je však možné zkrátit kombinací řešení úlohy a postupným vylučováním možností z nabídky odpovědí.

První otázka na nejdeštivější kraj se dá lehce zodpovědět a odpověď Zlínský kraj rovnou vyloučí tři možnosti – a), b) a c). Zbývají tedy dvě možnosti d) Zlínský; 6; Praha a SČ; květen nebo e) Zlínský; 9; Ústecký; květen.

Květen je vyskytuje u obou možností, čtvrtou otázku tedy mohu vyloučit a zabývat se tedy jen zbylými dvěma – kraje s více než 100 mm srážek v měsíci a nejméně deštivý kraj v lednu.

Hledání více než 100 mm v měsíci je poměrně obtížné, jelikož ne vždy vychází úsek měsíčních srážek přesně mezi mřížku v grafu označující 100 mm a je tedy nutné důkladně zkoumat jednotlivé úseky a odhadovat, zda je jich velikost větší nebo menší než 100 mm.

Proto zodpovím otázku s nejméně deštivým krajem v lednu, z nabídky odpovědí víme, že musíme porovnat srážky za Prahu a Středočeský kraj s krajem Ústeckým. Zde je na první pohled vidět, že Praha a Středočeský kraj byly v lednu méně deštivé.

Odpověď je tedy Zlínský; 6; Praha a SČ; květen.

6.2.10.5. Možné problémy a chybné strategie řešení z nich vycházející

Jako problematickou vidím mřížku grafu s odstupy po 100, což může žákům znesnadnit odhad toho, který měsíc překročil 100 mm hranici.

Poslední otázka na nejdeštivější měsíc může činit žákům obtíže vzhledem k tomu, že je nutné porovnávat poměrně velký objem dat, která nejsou příliš zarovnaná a nenacházejí se přímo u sebe. Na první pohled se mohou některé měsíce zdát podobné a obtížně porovnatelné, což může žáky svádět k nekvalifikovaným odhadům.

Obecně bude tato úloha pro některé děti problematická, jelikož i přes to, že RVP ZV už pracuje s oblastí Závislosti, vztahy a práce s daty, některé učebnice stále toto téma zařazují pouze sporadicky a nevyužívají veškeré možné typy grafů. Je tedy možné, že část žáků se v dosavadním studiu setkala pouze se sloupcovým grafem a tento pruhový jim může činit obtíže při porozumění úloze.

6.2.10.6. Nabízené odpovědi

Odpověď d) je správná.

V ostatních variantách jde o kombinované chyby způsobené nepřečtením celé informace v zadání otázky nebo jejím nesprávném pochopení.

Druhou otázkou se nebudu v řešení zabývat vzhledem k její obtížnosti a nejednoznačnosti nastíněné výše.

a) Moravskoslezský kraj u první otázky může vzniknout při vypuštění informace o celém období leden až srpen a soustředěním se pouze na slovo srpen. Označení Jihomoravského kraje, který je druhý nejméně deštivý v měsíci lednu, by mohlo vzniknout přehlédnutím Prahy a Středočeského kraje, jelikož se nachází až na samém spodu grafu. Odpověď srpen může být důsledkem nesprávného odhadu bez promyšlené strategie porovnaní měsíců.

b) Liberecký kraj by mohl žák uvést, pokud by přehlédl informaci, že se jedná o leden-srpen a soustředil se pouze na slovo leden. Nejméně deštivý kraj v měsíci lednu je zde uveden správně. Poslední odpověď leden může být opět důsledkem nesprávného odhadu jako v předchozím případě.

c) Moravskoslezský kraj byl vysvětlen již výše. Zbytek odpovědi je však naprosto chybný a vybrání této možnosti by značilo naprosté a hluboké neporozumění úloze či přímo hádání.

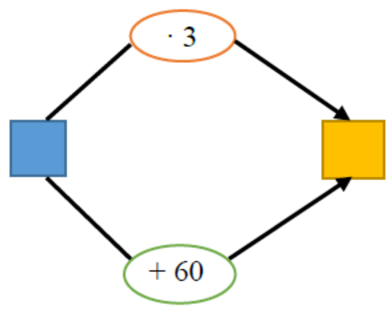
e) Tato odpověď má první a poslední informací shodnou se správnou odpovědí, tedy záměna se může stát spíše z nepozornosti, než že by žák chybně označil Ústecký kraj za nejméně deštivý v měsíci lednu.

6.2.11. Úloha č. 11 – Dvě čísla

Obrázek 21: Zadání úlohy Dvě čísla

11. DVĚ ČÍSLA **5 bodů**

Najdi jedno číslo, které je na začátku v modrém rámečku, a druhé číslo, které je na konci ve žlutém rámečku.



a) nejde určit

b) 0 a 60

c) 10 a 60

d) 20 a 60

e) 30 a 90

Zdroj: Pangea, zadání školního kola 2019/2020

6.2.11.1. Oblast znalostí, schopnosti

Aritmetika (sčítání a násobení do 100), čtení informací ze schématu, práce s podmínkami

6.2.11.2. Druh úlohy

Aritmeticko-algebraická úloha se schématem a podmínkami

6.2.11.3. Text úlohy

Text neobsahuje žádný mimomatematický kontext, proto se nejedná o slovní úlohu.

Součástí je schéma, které je modelem situace a které žáci musí správně přečíst, díky němu pak úlohu vyřešit.

6.2.11.4. Postup řešení

Úlohu můžeme řešit převodem na soustavu rovnic (tuto možnost řešení u žáků prvního stupně nepředpokládám):

$$x \cdot 3 = y$$

$$\underline{x + 60 = y}$$

$$3x = x + 60$$

$$2x = 60$$

$$x = 30$$

$$y = 3 \cdot 30 = 90$$

Další možností je řešení logickou úvahou: Násobení je opakované sčítání, pokud tedy násobím třemi, je to stejné jako bych přičetla dvakrát stejné číslo. V tomto případě 60 je dvojnásobek původního čísla, tedy 60 : 2 = 30. Pak už jen stačí dopočítat druhé číslo, např. 30 . 3 = 90.

Poslední možností je metoda pokus-omyl. Výhodou je, že zde mám nabídku možných odpovědí, stačí mi tedy otestovat pouze čtyři možnosti, které mají zadaná čísla. Když otestuji obě varianty $x \cdot 3 = y$ i $x + 60 = y$, pak po vyloučení chybných řešení, mi zbyde jediná možnost, a to že $x = 30$ a $y = 90$.

6.2.11.5. Možné problémy a chybné strategie řešení z nich vycházející

Žáci se zkušeností s Hejného matematikou a prostředími hadi a pavučiny, pravděpodobně s úlohou nebudou mít příliš problémů. Situace bude horší u žáků, kteří tuto zkušenost nemají. Zde může nastat absolutní nepochopení schématu a tedy, úplná neschopnost vyřešit zadanou úlohu.

Dalším problémem může být nezařazení obou podmínek při řešení, pak mohou při metodě pokus-omyl žáci označit chybné řešení za správné, protože bylo správné vzhledem k jedné podmínce, kterou vybrali.

6.2.11.6. Nabízené odpovědi

Odpověď a) mohou žáci označit, pokud nepochopí zadání úlohy a přijde jim, že úloha nejde vyřešit.

b) by mohli označit ti žáci, kteří si vybrali ke zkoumání pouze podmínku x + 60 = y.

c) neodpovídá žádné podmínce, tuto možnost by zvolili jen ti žáci, kteří výsledek pouze hádají.

U d) nalézáme podobnost s b) pouze s tím rozdílem, že žáci zvolí druhou podmínku x . 3 = y.

Odpověď e) je správná.

6.2.12. Úloha č. 12 – Střední číslo

Obrázek 22: Zadání úlohy střední číslo

12. STŘEDNÍ ČÍSLO **6 bodů**

V mřížce je zatím osm čísel. **Najdi deváté číslo do středního pole.**

V mřížce platí zajímavá pravidla. Pro každou trojici čísel zapsaných v jednom směru platí určitá společná vlastnost (je vždy uvedena u šipky, která určuje směr, tedy danou trojici čísel). Číslo uprostřed nesmí porušit společnou vlastnost v žádné trojici, do které patří.

5	4	3
9		36
15	22	30

Násobky pěti

Násobky tří

Násobky devíti

Jednociferná čísla

Dvojciferná čísla

Lichá čísla (nejde je dělit dvěma beze zbytku)

Sudá čísla (jsou dělitelná dvěma)

V zápise čísla je aspoň jedna trojka

a) 60 **b) 63** **c) 66**

d) 90 **e) 99**

Zdroj: Pangea, zadání školního kola 2019/2020

6.2.12.1. Oblast znalostí, schopnosti

Dělitelnost, řády, čtení informací z tabulky, práce s podmínkami

6.2.12.2. Druh úlohy

Aritmeticko-algebraická úloha s tabulkou a podmínkami

6.2.12.3. Text úlohy

Nejedná se o slovní úlohu, nenalezneme zde žádný mimomatematický kontext. Je zde pouze krátké vysvětlení toho, jak funguje tabulka, která je součástí zadání a modeluje zadanou situaci. Dále se zde nachází výčet podmínek, které v tabulce platí. Spatřuji tu možný problém u dětí s porušeným barvocitem a nemožností si spojit barvy podmínek se správnou šipkou.

6.2.12.4. Postup řešení

Nejprve je potřeba nalézt, které šipky patří k prostřednímu číslu, a přiradit k němu všechny podmínky, které se ho týkají:

- Násobky pěti
- Násobky devíti
- Sudá čísla (jsou dělitelná dvěma)
- Násobky tří

Poté je možnost řešit dvěma způsoby. První z nich je výpočtem.

Násobky tří mohu vynechat, jelikož násobek devíti je třemi vždy dělitelný, ale není to nezbytně třeba, sami se vyloučí v dalším kroku. Hledám tedy číslo, které je dělitelné zároveň dvěma, (třemi,) pěti a devíti. Zde si pomůžu výpočtem nejmenšího společného násobku:

$2 = 2$

$(3 = \cancel{3})$

$5 = 5$

$9 = 3 \cdot 3$

$n(2, 3, 5, 9) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$

Výsledkem by mohl být jakýkoli násobek čísla 90, jelikož všechny splňují dané podmínky, avšak porovnáním s nabídkou odpovědí zjistím, že jediná možná odpověď je číslo 90.

Druhá varianta je odpovědi testovat vůči podmínkám a postupně vyloučit nevyhovující odpovědi. Nejdříve vyloučím to, co není dělitelné pěti, čímž vypadnou tři odpovědi a ze zbylých dvou je pouze jedna dělitelná devíti, a to číslo 90. Podmínky lze samozřejmě vybírat v libovolném pořadí, výsledek bude stejný. Vybraná varianta mi však přišla nejefektivnější.

6.2.12.5. Možné problémy a chybné strategie řešení z nich vycházející

U této úlohy předpokládám dvě nejčastější chyby. První z nich bude z nepozornosti (případně špatného rozpoznání barev) a označení si chybné podmínky pro střední číslo. Druhá z nich je vypuštění jedné nebo více podmínek při řešení, jelikož žáci nejsou běžně zvyklí s tolika podmínkami pracovat.

6.2.12.6. Nabízené odpovědi

Odpovědi u této úlohy jsou zvoleny tak, aby odpovídaly různým kombinacím podmínek. Tedy záleží, jaké podmínky žák chybně vybere či vypustí.

Odpověď a) odpovídá čtyřem podmínkám – násobky pěti, násobky tří, dvojciferná čísla, sudá čísla.

U b) je pět odpovídajících podmínek – násobky tří, násobky devíti, dvojciferná čísla, lichá čísla a v zápise je aspoň jedna trojka.

c) splňuje tři podmínky – násobky tří, dvojciferná čísla a sudá čísla.

Odpověď d) je správně.

e) odpovídá čtyřem podmínkám – násobky tří, násobky devíti, dvojciferná čísla a lichá čísla.

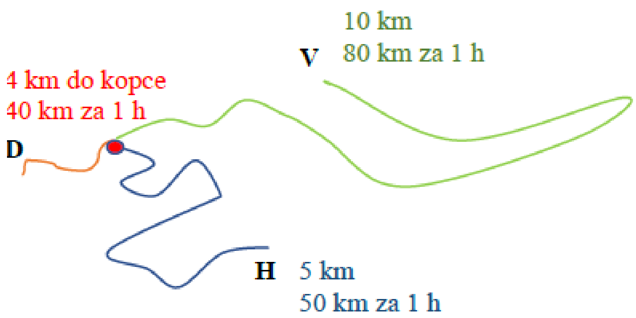
6.2.13. Úloha č. 13 – Požár

Obrázek 23: Zadání úlohy Požár

13. POŽÁR **6 bodů**

K velkému lesnímu požáru se sjíždějí naráz tři hasičské sbory. Každý vyjíždí z jiné obce: Horní Lhota (**H**), Dolní Lhota (**D**) a Vřesová Lhota (**V**).

Vyčti z plánku a usuzuj: Který z nich bude u ohně nejdřív? U každé cesty je uvedena vzdálenost k požáru a průměrná rychlost, kterou mohou hasiči po dané cestě jet. Pozn. 40 km za 1 h znamená, že vozidlo ujede za 1 h touto rychlostí 40 km.



a) **Nejdřív přijedou oba D a H, po nich V.**

b) **Nejdřív přijede V, po něm naráz D a H.**

c) **Nejdřív přijede H, pak současně V a D.**

d) **Přijedou postupně v pořadí: V, H, D.**

e) **Přijedou postupně v pořadí: D, H, V.**

Zdroj: Pangea, zadání školního kola 2019/2020

6.2.13.1. Oblast znalostí, schopnosti

Aritmetika (dělení do 100), veličiny (délka, rychlost, čas, vztahy mezi veličinami, převody jednotek)

6.2.13.2. Druh úlohy

Slovní úloha s modelovým obrázkem

6.2.13.3. Text úlohy

Text úlohy obsahuje dovysvětlení jednotek rychlosti, které nejsou používány ve standardní podobě km/h. Zadání obsahuje obrázek, který je modelem dané situace.

6.2.13.4. Postup řešení

Výpočet: Nejprve vydělím rychlost počtem ujetých kilometrů, vyjde kolikrát by stihli danou vzdálenost touto rychlostí ujet za hodinu. Poté vydělím 1 hodinu, tedy 60 minut, tím kolikrát se dá daná vzdálenost ujet a vyjde, kolik minut danou vzdálenost pojedou.

4 km, 40 km/h	40 : 4 = 10	60 : 10 = 6	6 min
5 km, 50 km/h	50 : 5 = 10	60 : 10 = 6	6 min
10 km, 80 km/h	80 : 10 = 8	60 : 8 = 7,5	7,5 min

Postup vychází z trojčlenky, u které však znalost u dětí na prvním stupni nepředpokládám.

40 km … 60 min

4 km … x min

4 : 40 = x : 60

x = 4 . 60 : 40 = 240 : 40 = 6

Úvaha: 4 ze 40 jsou 1/10 stejně jako 5 z 50, tyto sbory tedy musí přijet nastejno. Poslední sbor by musel jet 10 ze 100 nebo 8 z 80, aby přijel stejně. Přijede tedy v jiný čas než první dva. Logicky pokud jede 80 km/h, je pomalejší než 100 km/h a danou vzdálenost ujede za delší čas a přijede později. Analogicky aby přijel ve stejný čas, musel by jet jen 8 km a ne 10 km, takže z toho opět vychází, že přijede později.

Nejčastěji se zde bude pravděpodobně vyskytovat řešení výpočtem v kombinací s úsudkem a využitím funkčního myšlení.

6.2.13.5. Možné problémy a chybné strategie řešení z nich vycházející

Prvním problémem může být, že se žák zaměří pouze na vzdálenost a opomene to, že každý sbor jede jinou rychlostí, pak podle uvedené vzdálenosti nebo délky nakreslené čáry, zvolí chybnou variantu řešení.

Dalším může být neznalost nebo pouze částečná znalost jednotky km/h a práce s ní. Přece jen je to jednotka, u které je potřeba mít představivost a také na základě vztahů mezi vzdáleností a časem je z ní pak potřeba vyvozovat potřebné informace. Pokud si žák neuvědomuje přímou úměru mezi časem a vzdáleností, bude mít problém úlohu vyřešit. Ke zdárnému řešení tak potřebuje znát nebo objevit tuto přímou úměru, tedy že např. za půlku času zvládnu ujet polovinu vzdálenosti, a naopak půl vzdálenosti ujedu na polovinu času.

6.2.13.6. Nabízené odpovědi

Odpovědi, kde D a H nepřijedou současně, tedy c), d) a e), značí neporozumění úloze a jednotce km/h.

a) je správně.

U b) žák správně odvodí, že D a H přijedou nastejno, ale pak udělá chybu v úvaze nebo ve výpočtu příjezdu posledního sboru.

6.2.14. Úloha č. 14 – Dělení

Obrázek 24: Zadání úlohy Dělení

14. DĚLENÍ **6 bodů**

Máme pět čísel: 1, 2, 3, 4, 5. **Vyber z nich taková čtyři čísla, ze kterých jde sestavit správně vyřešenou úlohu na dělení se zbytkem.**
(Každé vybrané číslo použij jen jednou.)

□ : □ = □ zb. □

a) 1, 2, 3, 4
b) 2, 3, 4, 5
c) 1, 3, 4, 5
d) 1, 2, 4, 5
e) 1, 2, 3, 5

Zdroj: Pangea, zadání školního kola 2019/2020

6.2.14.1. Oblast znalostí, schopnosti

Aritmetika (dělení do 10), logika

6.2.14.2. Druh úlohy

Aritmeticko-algebraická úloha se schématem

6.2.14.3. Text úlohy

Nejedná se o slovní úlohu, jelikož zde nenalezneme žádný mimomatematický kontext.

Můžeme zde však nalézt dovysvětlení, že každé číslo lze použít pouze jednou, i přestože je uvedeno, že se mají vybrat právě čtyři čísla z pěti. Sice to prodlužuje délku textu, ale některým žákům může pomoci s pochopením úlohy.

Součástí zadání úlohy je také schéma příkladu na dělení se zbytkem, žáci by ho sice měli znát, ale tato vizualizace jim úlohu zjednoduší a hned po přečtení textu by měli tušit, co s úlohou mají dělat. Pokud by toto schéma chybělo, někteří z žáků by měli problém představit si, jak má daný příklad na dělení vlastně vypadat.

6.2.14.4. Postup řešení

Vytvořím si tabulku (viz Obrázek 25), kde si postupně budu vyškrtávat možnosti, které nemohu do dané pozice doplnit.

Ze zákonitostí dělení a zadání úlohy vyplývá, že číslo 1 tu nemůžu dosadit do pozice dělitele, jelikož číslo vydělené 1 je původní číslo a zde nemohu použít jedno číslo dvakrát. Stejně tak tam nemohu dosadit číslo 5, protože jakékoli menší číslo jím nemohu vydělit jinak, než aby mi vyšla nula, která není k dispozici.

Obrázek 25: Řešení úlohy Dělení – krok 1

1 2 3 4 5	:	1 2 3 4 5	=	1 2 3 4 5	zb.	1 2 3 4 5

Zdroj: autorka

Další, co vím, že největší číslo musí být na pozici dělence, protože pokud bych dělila větším číslem, vyjde mi nula, stejně tak se nemůže jakékoli číslo do původního vejít vícekrát, než je dané číslo, a ani zbytek nemůže být větší než původní číslo. Tedy víme, že dělencem může být jen číslo 5 nebo 4 (pokud nepoužiji 5).

Obrázek 26: Řešení úlohy Dělení – krok 2

1 2 3 4 5	:	1 2 3 4 5	=	1 2 3 4 5	zb.	1 2 3 4 5

Zdroj: autorka

Dále mohu říci, že na pozici podílu mohou být pouze čísla 1 nebo 2, jelikož když dělím 4 nebo 5 čísly 2, 3 nebo 4, nic jiného vyjít nemůže. A zároveň zbytek nemůže být nikdy číslo 4 ani 5, protože bychom museli dělit větším číslem, aby byl takový zbytek reálný.

Obrázek 27: Řešení úlohy Dělení – krok 3

1 2 3 4 5	:	1 2 3 4 5	=	1 2 3 4 5	zb.	1 2 3 4 5

Zdroj: autorka

Teď jsem si dostatečně omezila prostor pro testování různých variant, tak můžu zkoušet konkrétní příklady. Pokud vezmu jako dělence číslo 4, pak se zbytkem můžu dělit pouze číslem

3, z čehož vychází 4 : 3 = 1 zb. 1. Zde bych číslo 1 musela použít dvakrát, což úloha neumožňuje. Tedy víme, že dělencem může být jedině číslo 5.

Obrázek 28: Řešení úlohy Dělení – krok 4

1 2 3 4 5	:	1 2 3 4 5	=	1 2 3 4 5	zb.	1 2 3 4 5

Zdroj: autorka

Zbývá otestovat tři varianty:

5 : 2 = 2 zb. 1

5 : 3 = 1 zb. 2

5 : 4 = 1 zb. 1

Z těchto příkladů je pouze jeden, kde se žádné číslo neopakuje, a to 5 : 3 = 1 zb. 2. Hledaná čísla jsou tedy 1, 2, 3 a 5.

Samozřejmě se nabízí i možnost testovat jednotlivé odpovědi. Pokud by ale měl žák otestovat všechny možnosti, pak je možností příliš mnoho (permutace 4 prvků: $P_4 = 4! = 24$, to navíc pro pět možností z nabídky odpovědí). Proto je potřeba i v rámci pokus-omyl přijít na nějaká pravidla, která žákům zúží to, které čísla se dají dosadit na které místo. Stejně jako jsem demonstrovala v předchozí ukázce postupu.

Předpokládám, že většina dětí bude v nějaké míře kombinovat tyto dva přístupy. Ti žáci, kteří si dokáží úvahou vyloučit co nejvíce čísel, budou při řešení úlohy rychlejší, protože budou muset testovat méně možností.

6.2.14.5. Možné problémy a chybné strategie řešení z nich vycházející

Někteří žáci se mohou domnívat, že čísla v odpovědích se mají do úlohy doplňovat v zadaném pořadí, a tudíž by jim všechny odpovědi vyšly jako chybné.

Chyba může nastat také při vyvozování vztahů mezi jednotlivými čísly a vyřazování čísel z jednotlivých pozic. Žák může buď udělat chybu v logické úvaze o tom, které číslo nelze někam použít, nebo si může z nepozornosti označit chybné číslo či pozici, i když úvaha byla správná.

Pokud by žák postupovat pouze metodou pokus-omyl, pak se může stát, že vynechá správnou variantu a neotestuje jí. Což může být zapříčiněno nesystematickým testováním nebo špatně nastavenou testovací strategií či chybným označováním otestovaných variant.

6.2.14.6. Nabízené odpovědi

U odpovědí a) až d) se může jednat o různé kombinace nepochopení úlohy, nepozornosti nebo početních chyb.

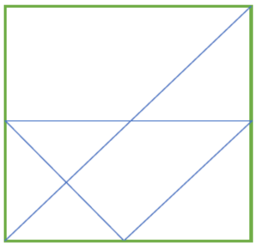
Odpověď e) je správně.

6.2.15. Úloha č. 15 - Trojúhelníky

Obrázek 29: Zadání úlohy Trojúhelníky

15. TROJÚHELNÍKY **6 bodů**

Kolik trojúhelníků je skryto v obrázku?



a) 5 **b) 6** **c) 8**

d) 10 **e) 11**

Zdroj: Pangea, zadání školního kola 2019/2020

6.2.15.1. Oblast znalostí, schopnosti

Geometrie (rovinná geometrie – trojúhelník), aritmetika (počet do 20), představivost

6.2.15.2. Druh úlohy

Geometrická úloha s modelovým obrázkem

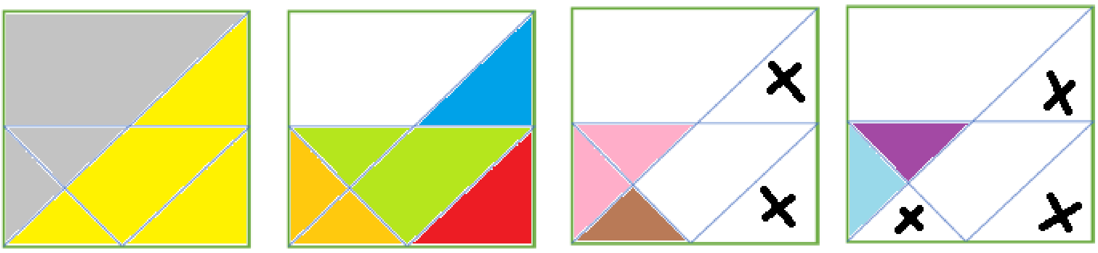
6.2.15.3. Text úlohy

Neobsahuje žádný mimomatematický kontext, nejedná se tedy o slovní úlohu. Součástí je krátké zadání a geometrický model situace, se kterou má žák při řešení úlohy pracovat.

6.2.15.4. Postup řešení

Jelikož se některé trojúhelníky překrývají, obrázek si několikrát překreslím a postupně si v nich označím barevně všechny viditelné trojúhelníky. Nejprve začnu se dvěma velkými, které vytvořila úhlopříčka čtverce a postupně se propracuji k menším a menším. Pokud jsem už nějaký označila a na dalším obrázku mi zbyl viditelný, pro jistotu jsem ho označila křížkem, abych věděla, že už jsem ho vybarvila v nějakém z předchozích obrázků (viz Obrázek 30).

Obrázek 30: Řešení úlohy Trojúhelníky



Zdroj: autorka

Nyní všechny různě barevné trojúhelníky spočítám a vyjde mi 10.

Předpokládám, že žáci budou používat různé způsoby evidence od vše si pouze pamatuji, přes vše zakresluji do jednoho obrázku, po označení ve více obrázcích jako v mém postupu.

6.2.15.5. Možné problémy a chybné strategie řešení z nich vycházející

Zásadním problémem zde může být evidence již započítaných trojúhelníků, pokud si žák nebude nic evidovat a všechno si bude jen pamatovat, pak předpokládám velké množství chyb v počtu trojúhelníků, a to že buď zapomene nějaký trojúhelník započítat nebo některý započítá vícekrát.

Čím lepší způsob evidence žák vymyslí, tím jednodušeji se mu budou trojúhelníky odhalovat a počítat a tím spíše úlohu vyřeší.

6.2.15.6. Nabízené odpovědi

Odpověď d) je správná. Ostatní odpovědi cílí na to, že žák něco opomene započítat nebo se naopak přepočítá.

7. Zobecnění výsledků analýzy a priori

Nyní, když mám úlohy zanalyzované, mohu zjistit, zda jsou úlohy v této sérii dostatečně pestré, jak deklarují sami tvůrci Pangey. Zda se zaměřují na široké spektrum znalostí a dovedností nebo jsou všechny podobné, jaké druhy úloh jsou primárně zastoupeny, jaké jsou typy otázek a výzev v úlohách a zda se opakují nebo jsou různé a také v jakém mluvnickém čase jsou úlohy zadávané.

7.1. Oblast znalostí a schopností

V následující tabulce jsou vypsány všechny úlohy a k nim oblasti znalostí a dovedností, které k jejich vyřešení žák potřebuje tak, jak to vyplynulo z analýzy a priori (viz kapitola 6.2 Úlohy).

Tabulka 3: Všechny úlohy a k nim potřebné znalosti a schopnosti dle analýzy a priori

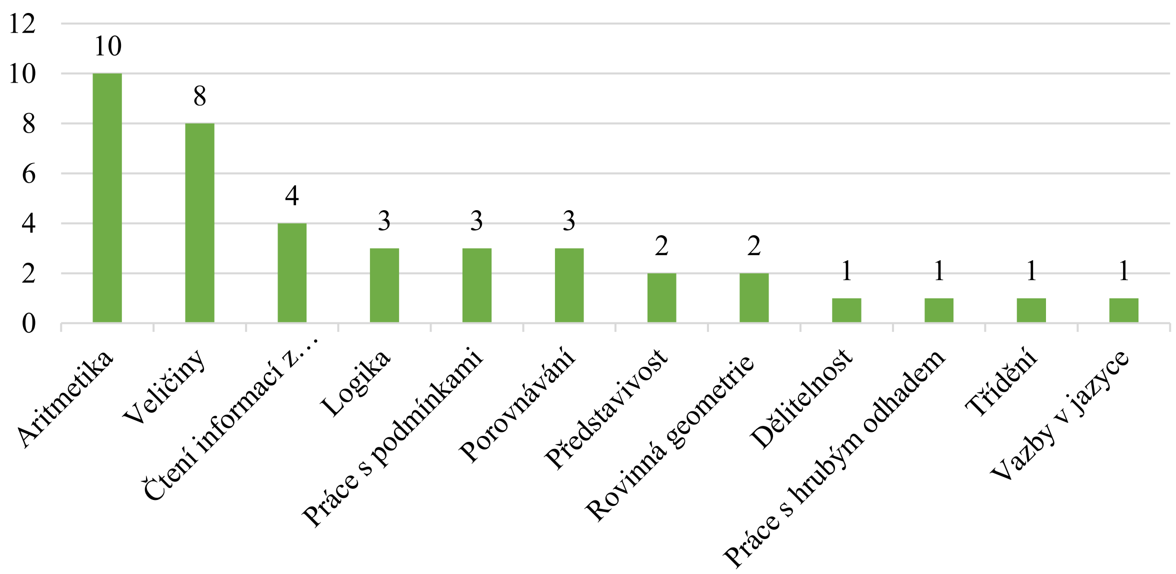
Úloha č. 1	Práce s podmínkami, třídění, počet do 3, představivost, vazby v jazyce (ani…, ani)
Úloha č. 2	Aritmetika (násobení v řádu tisíců), veličiny (převody jednotek, délka)
Úloha č. 3	Aritmetika (sčítání a odčítání do 1 000), veličiny (čas, převody jednotek), porovnání rozdílem
Úloha č. 4	Logika, veličiny (čas, převody jednotek)
Úloha č. 5	Aritmetika (sčítání do 20), čtení v modelu
Úloha č. 6	Aritmetika (sčítání/odčítání a násobení do 1 000), veličiny (převody jednotek, hmotnost), porovnání rozdílem
Úloha č. 7	Aritmetika (dělení a odčítání v řádu tisíců), veličiny (převody jednotek, délka)
Úloha č. 8	Aritmetika (sčítání, odčítání, dělení v řádu desítek, závorky, priorita aritmetických operací)
Úloha č. 9	Aritmetika (násobení a dělení v řádu desetitisíců), rovinná geometrie (obsah obdélníku), veličiny (délka, obsah), práce s hrubým odhadem
Úloha č. 10	Čtení informací z grafu, logika, veličiny (délka), porovnávání
Úloha č. 11	Aritmetika (sčítání a násobení do 100), čtení informací ze schématu, práce s podmínkami

Úloha č. 12	Dělitelnost, řády, čtení informací z tabulky, práce s podmínkami
Úloha č. 13	Aritmetika (dělení do 100), veličiny (délka, rychlost, čas, vztahy mezi veličinami, převody jednotek)
Úloha č. 14	Aritmetika (dělení do 10), logika
Úloha č. 15	Geometrie (rovinná geometrie – trojúhelník), aritmetika (počet do 20), představivost

Zdroj: autorka

Z těchto dat jsem prozatím vypustila upřesnění, která se vždy nachází v závorce, a vytvořila Graf 2, kde najdeme četnost jednotlivých znalostí a dovedností. Tedy kolikrát musel žák danou znalost nebo schopnost využít pří řešení zadaných patnácti úloh.

Graf 2: Četnost potřebných znalostí a schopností pro všechny úlohy

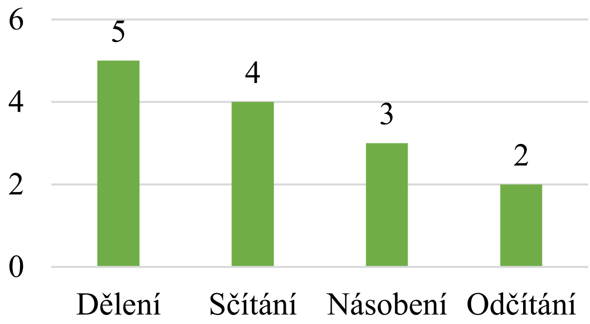


Zdroj: autorka

U některých oblastí lze diskutovat o konkrétních počtech, jelikož např. vazby v jazyce se dají považovat také za součást jazykové logiky. Práci s podmínkami jsem zařadila jen v případech, kdy byly podmínky v úloze naprosto zřejmé. U některých dalších úloh bychom však jednu či více podmínek mohli také nalézt, jsou však zakomponované v zadání tak, že pro žáka užití podmínek nemusí být patrné.

V grafu 2 můžeme vidět, že žáci nejčastěji využili v úlohách znalost aritmetiky, celkem v 10 případů z 15. Pokud se zaměříme na aritmetické operace, které se zde vyskytovaly, pak žák potřeboval pětkrát využít dělení, čtyřikrát sčítání, třikrát násobení a dvakrát odčítání (viz graf 3). Žáci se tak měli možnost setkat se všemi operacemi, které se na prvním stupni v rámci učiva probírají. V jednom případě se pak také jednalo o určení priority jednotlivých početních operací a zdárného vyřešení úlohy se závorkami.

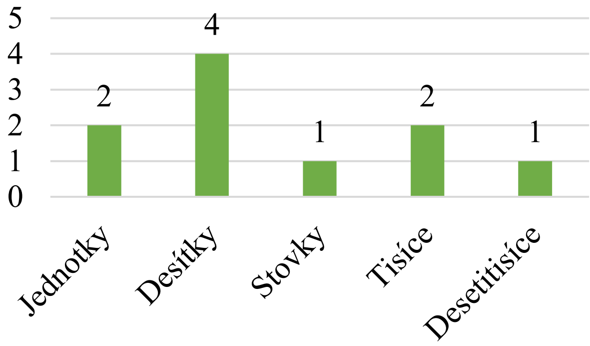
Graf 3: Aritmetické operace použité v úlohách



Zdroj: autorka

Z dalších upřesnění vyplývá, že se žáci nejčastěji při výpočtech pohybovali v řádech desítek, a to celkem čtyřikrát (viz graf 4). Následoval řád jednotek a tisíců, oboje s dvěma výskyty. Nejméně často se žáci setkali s řádem stovek a desetitisíců. V úloze č. 9 pak byla jedna možnost odpovědi dokonce řádu statisíců, ale pokud žák úlohu správně vypočítal, nemusel se touto odpovědí zabývat. S vyššími řády se zde žáci neměli možnost setkat. Je dobré, že se zde vyskytoval aspoň jednou řád statisíců, pro žáky bývá často problematické orientovat se při počtech s velkými čísly, a to i přestože podle RVP ZV by měli ve druhém období na prvním stupni žáci zvládat početní operace na celém oboru přirozených čísel. To může být způsobeno hlavně nedostatkem úloh s velkými čísly v běžně používaných učebnicích matematiky.

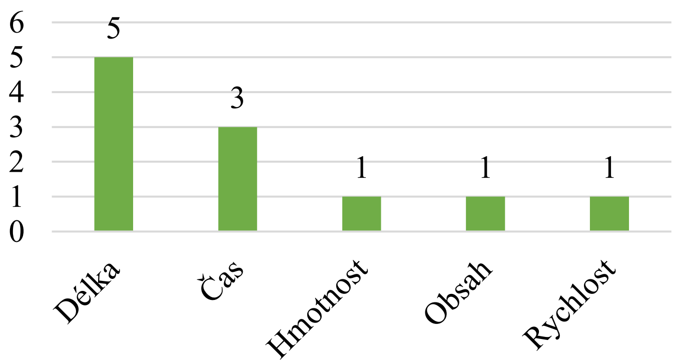
Graf 4: Číselné řády v úlohách



Zdroj: autorka

Druhou velkou oblastí jsou veličiny, které se v různých podobách nacházely v osmi úlohách (viz graf 5). Nejčastěji se zde žáci setkávali s délkou a poté časem. Navíc v šesti z těchto úloh museli žáci umět i převody zadaných jednotek. Celkem se zde objevilo pět různých veličin, což je na počtu patnácti úloh velmi dobré číslo.

Graf 5: Veličiny použité v úlohách



Zdroj: autorka

Dle mého názoru Pangea splňuje, co si předsevzala, a to, že se snaží o využití širokého spektra různých znalostí a schopností. V patnácti úlohách se v tomto ročníku měli žáci možnost setkat s dvanácti různými oblastmi znalostí nebo schopností. Samozřejmě by bylo možné zařadit i další oblasti jako třeba kombinatoriku nebo 3D geometrii, ale i tak Pangea nabízí rozdílné úlohy s různými možnostmi řešení a s využitím rozmanitých znalostí a schopností.

7.2. Druh úlohy

Dále se zaměřím na druhy úloh, které se v zadání školního kola nacházely. V následující tabulce jsou vypsány všechny druhy, které jsem uvedla v rámci analýzy a priori.

Tabulka 4: Druhy jednotlivých úloh

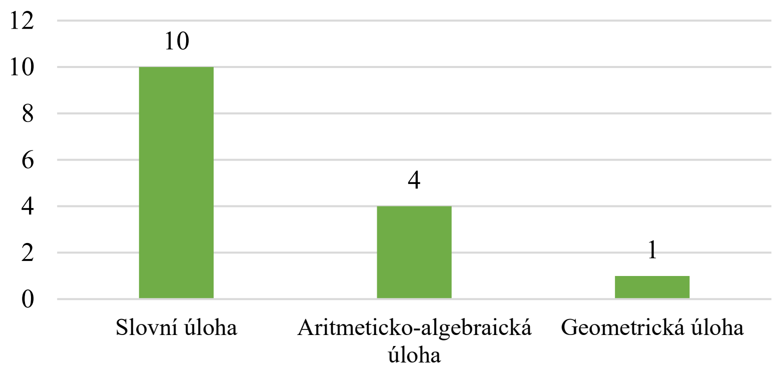
Úloha č. 1	Slovní úloha
Úloha č. 2	Slovní úloha s nadbytečnými informacemi a antisignálem
Úloha č. 3	Slovní úloha s velmi dlouhým textem a nadbytečnými informacemi
Úloha č. 4	Slovní úloha
Úloha č. 5	Slovní úloha dialogická
Úloha č. 6	Slovní úloha
Úloha č. 7	Slovní úloha
Úloha č. 8	Aritmeticko-algebraická úloha se zaměřením na gramatiku aritmetického grafického kódu
Úloha č. 9	Slovní úloha
Úloha č. 10	Slovní úloha s grafem
Úloha č. 11	Aritmeticko-algebraická úloha se schématem a podmínkami
Úloha č. 12	Aritmeticko-algebraická úloha s tabulkou a podmínkami
Úloha č. 13	Slovní úloha s modelovým obrázkem
Úloha č. 14	Aritmeticko-algebraická úloha se schématem
Úloha č. 15	Geometrická úloha s modelovým obrázkem

Zdroj: autorka

Nejčastěji se zde vyskytovaly slovní úlohy, a to v deseti případech (viz graf 6). Pětkrát pak byla úloha bez mimomatematického kontextu, čtyřikrát se jednalo o aritmeticko-algebraickou úlohu a pouze v jednom případě o úlohu geometrickou zaměřenou na rovinnou geometrii. Toto složení úloh odpovídá regulím soutěže Pangea, kdy se v sérii musí nacházet deset slovních úloh, jedna aritmeticko-algebraická úloha a jedna geometrická. V tomto ročníku pak byly zvoleny další tři aritmeticko-algebraické úlohy, aby doplnily sérii do patnácti úloh.

Velké množství slovních úloh tedy není žádným překvapením a Pangea se snaží každý rok o to, aby byly úlohy zasazené do dvou kontextových oblastí. Tento ročník se vztahoval k záchranným sborům a médiím. Záchranné sbory měly větší zastoupení, celkem šest úloh, médiím byly věnovány tři úlohy a jedna úloha (č. 5 Schody) se nevztahovala k ani jednomu ze zadaných kontextů. Dle regulí by však mělo být pět úloh k jednomu kontextu a pět k druhému.

Graf 6: Druhy úloh



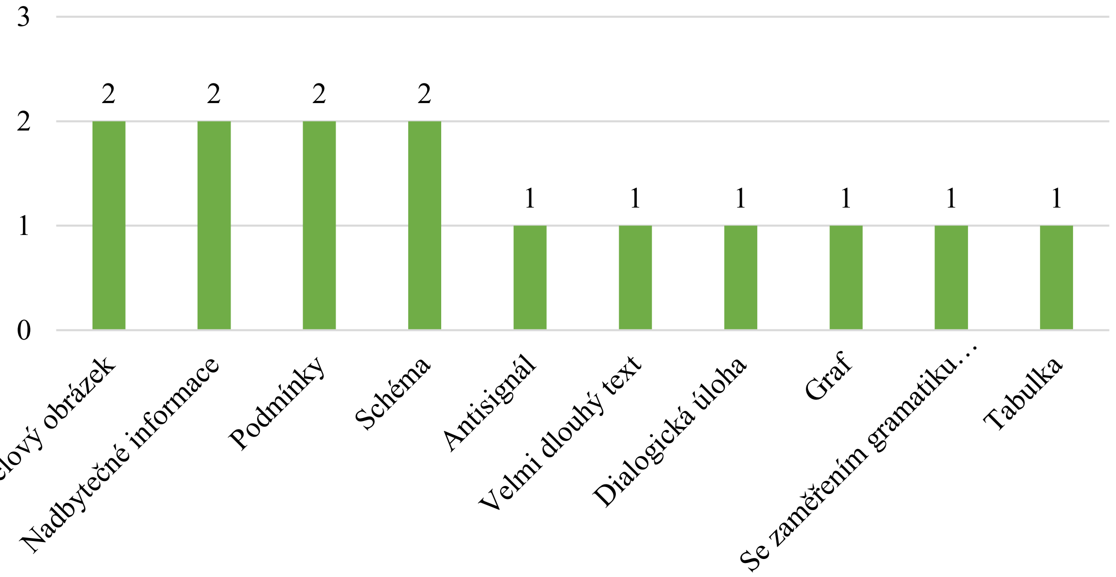
Zdroj: autorka

Téma záchranné sbory bylo jistě zajímavé jak pro chlapce, tak i některé dívky, v tomto věku roste zájem o katastrofické situace a častá je fascinace právě hasiči či policií. Zároveň zde měli žáci možnost zjistit nové a zajímavé informace, např. o tyčích na horách nebo o užitné hmotnosti auta. Předpokládám, že pro valnou většinu žáků byly toto zcela nové informace. Téma médií mi příliš zajímavé nepřišlo, navíc u úloh č. 9 Silvestr a č. 10 Počasí mi přišla informace o médiích v zadání roubována na sílu, hlavně aby tam zaznělo slovo novinář, tisk apod. Přitom zadání by fungovalo dobře i bez toho, jedním z témat však média byla, tak autoři kontexty použít museli.

Dobré je, že oproti některým učebnicovým úlohám úlohy v Pangee vycházejí z reálného života a jsou vymýšleny na základě konzultací s odborníky na dané téma. Díky tomu jsou úlohy smysluplné a odpovídají skutečnosti.

U většinu úloh jsem k druhu úlohy přidala ještě další dodatečné informace, které úlohu více specifikují a které ve většině případů ovlivňují obtížnost úlohy. A to tak že úlohy jsou pro žáky obtížnější, např. nadbytečné informace mohou způsobit, že si žák nebude jistý, která čísla využít při výpočtu; antisignál může žáka navádět, aby použil chybnou početní operaci apod. V následujícím grafu jsou uvedeny všechny dodatečné informace k úlohám podle jejich četnosti. Nejčastěji se žáci mohli setkat s úlohou s modelovým obrázkem nebo schématem, u kterých museli žáci zjistit, jak z nich přečíst důležité informace a jak díky nim vyřešit danou úlohu, a poté s úlohami s nadbytečnými informacemi a podmínkami.

Graf 7: Dodatečné informace k druhu úlohy



Zdroj: autorka

7.3. Text úlohy

V rámci textu se budu zabývat funkcí obrázků u jednotlivých úloh, případně toho, zda úloha obsahuje graf, schéma apod. Jako další zmíním dvě oblasti, které jsem v rámci analýzy a priori přímo neřešila, ale které mohou mít souvislost s obtížností řešení úloh, a to jaký je v úloze vyskytuje mluvnický čas a také jaké typy otázek nebo výzev se vyskytují v jednotlivých úlohách.

Obecně se předpokládá, že se na míře obtížnosti úloh významně podílí délka textu. Dlouhý text, jak v konzultacích ohledně úloh doporučoval autorům např. psycholog Chvál, by měl být hodnocen bodově výše. Pojem dlouhý text je relativní, pro tuto analýzu ho chápu jako text na formátu A5 delší než 5 řádků.

7.3.1. Obrázky, grafy, schémata a tabulky

U osmi úloh se kromě psaného textu v zadání vyskytovala další grafika, která úlohu doplňovala. Vyskytovala se zde v různých formách a různých funkcích.

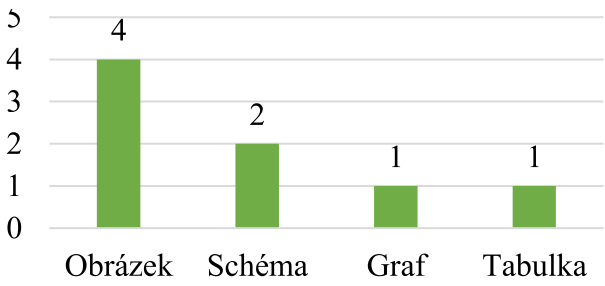
Tabulka 5: Obrázky, grafy, schémata a tabulky v úlohách

Úloha č. 2	Obrázek – ilustrační funkce
Úloha č. 7	Obrázek – vysvětlující funkce
Úloha č. 10	Graf

Úloha č. 11	Schéma
Úloha č. 12	Tabulka
Úloha č. 13	Obrázek – funkce modelu
Úloha č. 14	Schéma
Úloha č. 15	Obrázek – funkce modelu

Zdroj: autorka

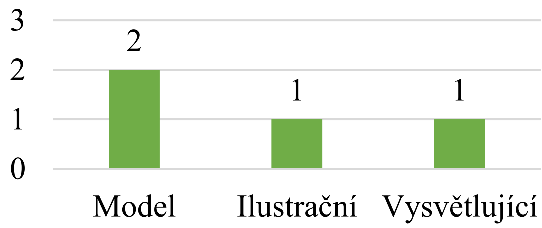
Graf 8: Obrázky, grafy, schémata a tabulky v úlohách



Zdroj: autorka

Nejméně často se žáci setkali s grafem a tabulkou, ty se v úlohách vyskytovaly pouze jednou (viz graf 8). Dvakrát byla úloha doplněna schématem. Je dobré, že zde byla pětina úloh, které obsahovala nějakou formu grafu, schématu nebo obrázku, jelikož schopnost orientovat se v nich je v současnosti velmi důležitá a patří ke klíčovým kompetencím, které by měli žáci ovládnout. Grafy navíc nejsou součástí RVP pro první stupeň, žáci se tak mohou naučit novým schopnostem, které ještě nejsou v jejich ročníku vyžadovány.

Graf 9: Funkce obrázku v úlohách



Zdroj: autorka

Čtyři úlohy pak byly doplněny obrázkem. Obrázek se zde vyskytoval v různých funkcích, nejčastěji se jednalo o model (viz graf 9), kdy museli žáci z obrázku vyčíst důležité informace nutné k vyřešení úlohy. Jedenkrát to byla funkce vysvětlující, aby si žáci byli schopni lépe představit kontext úlohy a tím pochopit, co mají v úloze spočítat. A jednou se jednalo pouze o funkci ilustrační.

7.3.2. Mluvnický čas

Čas, který se vyskytuje v úlohách, ovlivňuje obtížnost porozumění úloze a představy, které si žáci tvoří. Nejčastěji se v učebnicových úlohách setkáváme s přítomným a minulým časem, ty jsou z hlediska představ pro žáky snadnější. Méně často se pak v úlohách potkáváme s časem budoucím. To, že je menší výskyt těchto úloh a budoucnost je pro žáky hůře představitelná, způsobuje, že tyto úlohy mohou být pro žáky značně obtížnější než u času přítomného či minulého. V následující tabulce jsou uvedeny mluvnické časy, které se v úlohách vyskytovaly.

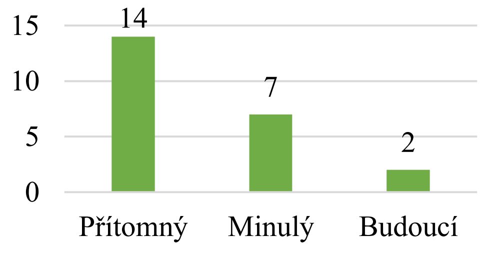
Tabulka 6: Čas v úlohách

Úloha č. 1	Přítomný
Úloha č. 2	Přítomný
Úloha č. 3	Přítomný, budoucí
Úloha č. 4	Minulý
Úloha č. 5	Přítomný, minulý
Úloha č. 6	Přítomný, minulý
Úloha č. 7	Minulý, přítomný
Úloha č. 8	Přítomný
Úloha č. 9	Minulý, přítomný
Úloha č. 10	Přítomný, minulý
Úloha č. 11	Přítomný
Úloha č. 12	Přítomný
Úloha č. 13	Přítomný, budoucí
Úloha č. 14	Přítomný
Úloha č. 15	Přítomný

Zdroj: autorka

Nejčastěji se v této sérii Pangey vyskytoval čas přítomný, a to ve čtrnácti úlohách (viz graf 10). Sedmkrát se žáci setkali s časem minulým a pouze ve dvou případech se v úlohách vyskytoval čas budoucí.

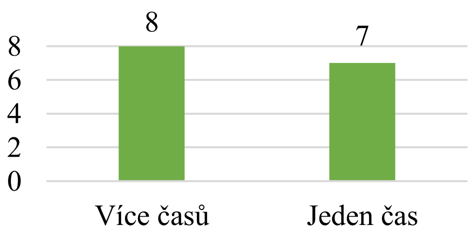
Graf 10: Časy v úlohách obecně



Zdroj: autorka

V některých úlohách se vyskytoval pouze jeden čas, ve kterém se úloha odehrávala, a to celkem v sedmi případech (viz graf 11). Ve zbylých osmi se čas v úloze střídal, např. v přítomnosti se něco děje a ptáme se, jaký bude stav v budoucnosti. Více časů v úloze klade vyšší nároky na představivost.

Graf 11: Počet různých časů

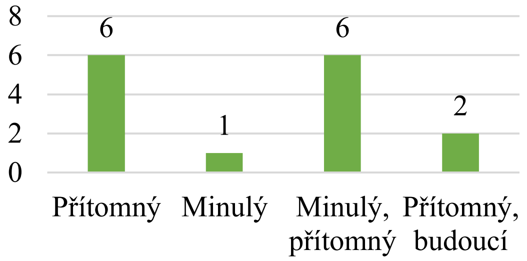


Zdroj: autorka

Pokud se na časy podívám konkrétně, pak

se nejčastěji v úlohách vyskytoval samotný čas přítomný společně s kombinací minulosti a přítomnosti (viz graf 12). Ve dvou případech se žáci potkali s kombinací přítomného a budoucího času a pouze v jednom s čistě minulým časem. Vyskytovalo zde tedy poměrně pestré zastoupení časů, které žáky nutilo k neustálému tvoření různých časových představ a snižovalo jednotvárnost úloh.

Graf 12: Kombinace časů v úlohách



Zdroj: autorka

7.3.3. Typy otázek nebo výzev

Nedílnou součástí každé úlohy je otázka nebo výzva, která žáky nabádá k řešení. Běžně se v úlohách na prvním stupni nejčastěji setkáváme s otázkou kolik[14] – kolik bylo dětí, kuliček, modrých autíček apod. Není to překvapivé, že se často ptáme na počet něčeho, jelikož se zde nejčastěji probírá aritmetika a základní početní operace. Jednotvárnost otázek však může vést k nudě žáků a nevyčerpání potenciálu, které úlohy nabízejí. Proto je vždy snaha o to používat různé druhy otázek či výzev a nutit žáky k uvažování nad jejich významem. Jednotvárné otázky se dají využít při testování, zda žáci dané problematice rozumí a jsou schopni na takový typ otázky odpověď v různých kontextech zadaných úloh. V soutěži však vždy chceme co největší diverzitu.

V následující tabulce jsou uvedeny všechny otázky a výzvy, které se v úlohách objevily.

Tabulka 7: Typy otázek nebo výzev v úlohách

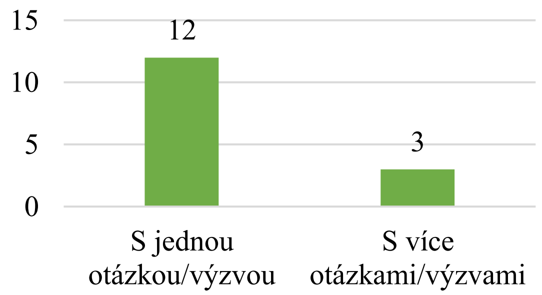
Úloha č. 1	Z následujících informací urči, v jakém pořadí tentokrát jedou.
Úloha č. 2	Zjisti skutečnou délku staženého hasičského žebříku na tomto vozidle, když žebřík na modelu měří 195 mm.
Úloha č. 3	O kolik déle to bude trvat v druhém případě, než se dostaneš do nemocnice?
Úloha č. 4	Posuď, jestli všichni novináři podali čtenářům stejné informace.
Úloha č. 5	Na kolik schodů přitom každá šlápne?
Úloha č. 6	O kolik kg se lišila hmotnost nákladu od povolené zátěže?
Úloha č. 7	Kolik tyčí mineme, než se dostaneme k chalupě B, kde nocujeme?

[14] Toto jsem měla možnost ověřit i v rámci analýzy jedné učebnice, kterou jsem dělala (viz Příloha 4).

Úloha č. 8	Porovnej čísla ve výsledcích. Kolik různých čísle vyšlo?
Úloha č. 9	Kolik bylo přibližně občanů na náměstí, když na 1 metr čtverečný počítáme 3 osoby?
Úloha č. 10	V kterém kraji ČR bylo nejvíc srážek za období leden-srpen 2019? V kolika krajích spadlo aspoň v jednom měsíci více než 100 mm srážek? V kterém kraji bylo nejméně srážek v lednu? V kterém měsíci spadlo nejvíce srážek v ČR?
Úloha č. 11	Najdi jedno číslo, které je na začátku v modrém rámečku, a druhé číslo, které je na konci ve žlutém rámečku.
Úloha č. 12	Najdi deváté číslo do středního pole.
Úloha č. 13	Vyčti z plánku a usuzuj. Který z nich bude u ohně nejdřív?
Úloha č. 14	Vyber z nich taková čtyři čísla, ze kterých jde sestavit správně vyřešenou úlohu na dělení se zbytkem.
Úloha č. 15	Kolik trojúhelníků je skryto v obrázku?

Zdroj: autorka

Graf 13: Počet otázek nebo výzev v úloze

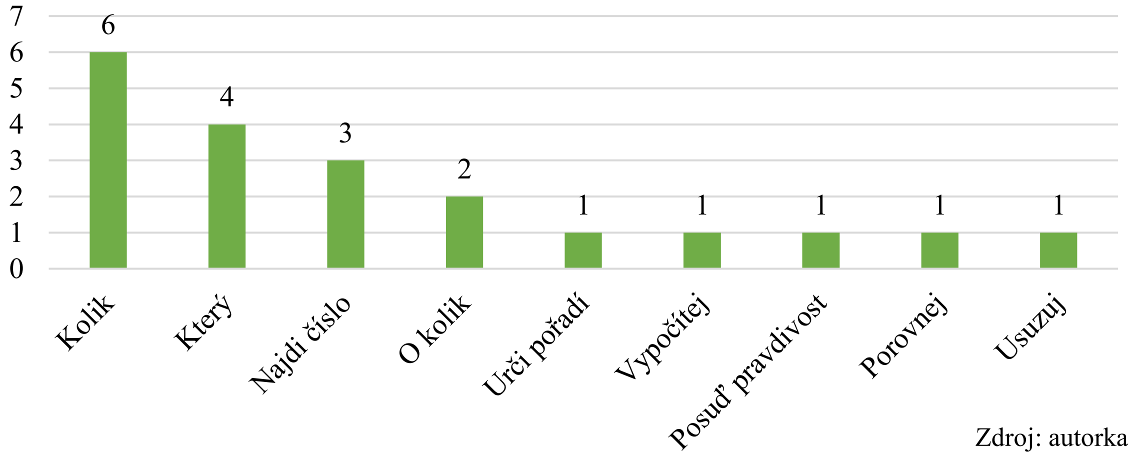


Zdroj: autorka

První, co je z tabulky vidět, je to, že tři úlohy obsahovaly více otázek nebo výzev. Zbylých dvanáct úloh mělo vždy jen jednu otázku nebo výzvu. V úloze č. 8 a 13 výzvy žáky nejprve navádějí, jak úlohu začít řešit, a následná otázka potom určuje cíl, ke kterému mají žáci při řešení dojít. V úloze č. 10 poté jsou čtyři různé otázky, běžně by každá otázka zvyšovala obtížnost úlohy, zde však díky nabídce odpovědí nemusí žáci odpovídat na všechny, a tedy čas a obtížnost řešení se nebude zvyšovat úměrně s počtem otázek.

Pokud se podívám na konkrétní otázky a zkusím je zobecnit, pak se zde nejčastěji vyskytuje otázka „Kolik?“ se šesti výskyty, která odkazuje na zjištění či vypočítání nějakého počtu. Druhou nejčastější otázkou bylo „Který?“ se čtyřmi výskyty, tedy vybrání nějakého prvky na základě předepsané podmínky. Třetí se třemi výskyty byla výzva „Najdi číslo.“, kde musel žák dopočítat či domyslet číslo na základě zadaných podmínek. O třech výskytech se dá uvažovat i pokud bychom „O kolik?“ zahrnuli pod „Porovnej.“ a zanedbalo by se, že se jednou jedná o výzvu a jednou o otázku, záleží, zda by bylo třeba akcentovat rozdílnost otázka/výzva nebo by bylo důležitější, že otázka „O kolik?“ přímo žákovi říká, že má čísla porovnat rozdílem.

Graf 14: Typy otázek a výzev v úlohách



Zdroj: autorka

Z předchozího grafu vyplývá, že v sérii úloh byla snaha o to, aby bylo spektrum otázek co nejširší, avšak stále zde dominuje, tak jako v učebnicích otázka „Kolik?“. Je to však v podstatně menším procentu úloh než v učebnici, kterou jsem měla možnost analyzovat. Navíc některé otázky se typově odlišovaly, přestože používaly stejná klíčová slova. Např. otázka „Kolik bylo přibližně…?“ je velmi nestandartním typem otázky, se kterým se v učebnicích běžně nesetkáme. Otázka „O kolik kg se lišila...?“ je také odlišná od standartních otázek na porovnávání, jelikož typicky je v nich uvedeno, zda hledáme „O kolik více/méně?“. Zde musel žák přijít na to, o kterou situaci se jedná.

8. Úspěšnost řešení úloh

Úlohy v Pangee jsou hodnoceny třemi až šesti body v závislosti na předpokládané obtížnosti úlohy. V ideálním případě by tedy měla úspěšnost řešení úloh postupně klesat. Vzhledem k tomu, že stanovení obtížnosti je vždy pouze odhad, byť kvalifikovaný a opřený o známa fakta, ve skutečnosti tomu tak nebude. Čím více se úloha blíží standardu, tím jednodušeji se odhaduje její obtížnost. Vzhledem k tomu, že v soutěži se setkáváme spíše s nestandardními typy úloh, odhad obtížnosti je náročnější a ne vždy přesný.

U obtížnějších úloh nacházejících se na konci série je těžké říci, zda je nízká úspěšnost způsobena tím, že žáci úlohu špatně řešili, a proto uvedli chybnou odpověď, či už ke konci časového limitu pouze hádali odpovědi u úloh, na které jim nezbyl čas k řešení. Vzhledem k pěti nabízeným odpovědím je možné hádat s úspěšností 20 %, což při vysokém počtu hádajících může částečně zkreslit výsledky. Ve školním kole bude pravděpodobně míra hádání vyšší než poté v kole finálovém, kam postupují spíše nadprůměrní žáci, kteří k hádání nemají takové sklony. U posledních úloh tedy předpokládám naměřenou procentuální úspěšnost vyšší než reálný počet úspěšných řešitelů úlohy. Jelikož však žáci odevzdávají pouze odpovědní archy, a ne celá řešení, není možné určit, kolik procent žáků úlohu vyřešilo a kolik pouze hádalo.

Konkrétní hodnoty úspěšnosti uvádím v následující tabulce.

Tabulka 8: Celková procentuální úspěšnost řešení úloh

Otázka	Průměrné body	Procentuální úspěšnost	Body za otázku
Q1	2,27	75,67	3
Q2	1,02	34	3
Q3	2,33	58,25	4
Q4	1,93	48,25	4
Q5	1,11	27,75	4
Q6	1,44	36	4
Q7	0,98	19,6	5
Q8	2,49	49,8	5
Q9	1,79	35,8	5
Q10	2,11	42,2	5
Q11	2,09	41,8	5
Q12	2,2	36,67	6

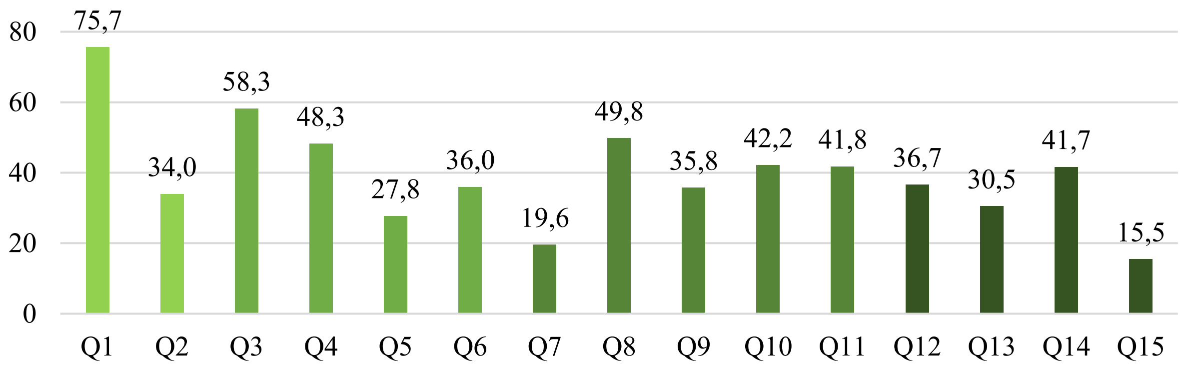
Q13	1,83	30,5	6
Q14	2,5	41,67	6
Q15	0,93	15,5	6
	27,02		***71***

Zdroj: Pangea[15]

K řešení této série úloh bylo celkem přihlášeno 10 645 žáků, nakonec jich však úlohy řešilo pouze 9 059. Což je ale stále dost velký vzorek, na kterém se dají úspěšnosti úloh zkoumat.

Pro lepší vizuální orientaci přikládám ještě graf procentuální úspěšnosti s barevně odlišeným bodovým ohodnocením jednotlivých úloh. Od nejsvětlejších za tři body po nejtmavší za šest bodů.

Graf 15: Průměrná úspěšnost žáků v procentech



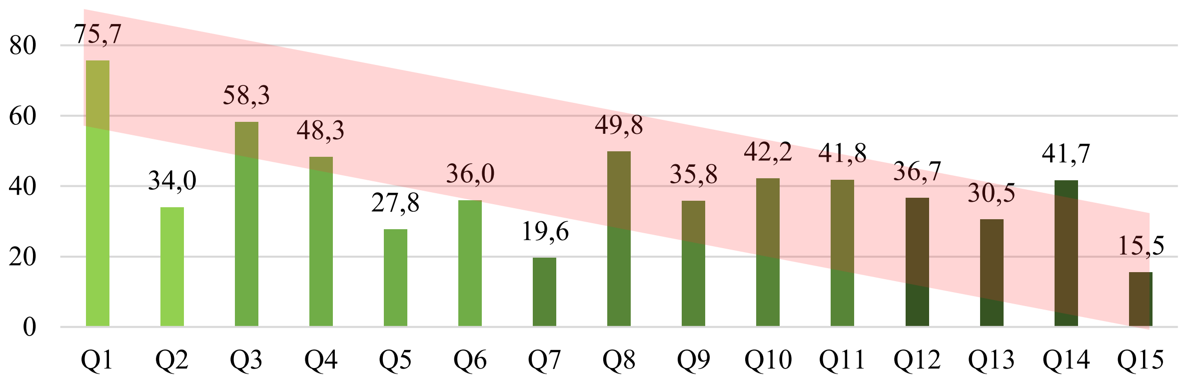
Zdroj: Pangea

Určitý klesající trend v grafu je, ale některé úlohy vybočují, ať už směrem nahoru nebo dolů. Úlohy, jejichž obtížnost byla vyšší než předpokládaná, jsou č. 2, 5, 7 a 9. Naopak úlohy, které byly jednodušší, než bylo předpokládány, jsou č. 8 a 14.

V grafu si také můžeme zmíněný klesající trend naznačit tím, že uděláme spojnici sloupce první a poslední otázky a poté určíme pásmo, ve kterém by se měla úspěšnost pohybovat. U gradované série úloh by se měly všechny úspěšnosti pohybovat v tomto pásmu. V grafu 16 je poté vidět, že v pásmu nejsou úlohy č. 2, 5, 7 a 14, úloha č. 6 je na hraně.

[15] Neveřejné statistiky ke školnímu kolu

Graf 16: Pásmo předpokládané úspěšnosti úloh



Zdroj: Pangea, modifikováno autorkou

Pro další zhodnocení využiji úlohy č. 2, 5, 6, 7, 8, 9 a 14.

8.1. Analýza a posteriori

Běžně se analýza a posteriori provádí na základě konkrétních žákovských řešení, video či audiozáznamů apod., u Pangey žáci odevzdávají pouze formulář s odpověďmi, mám tedy k dispozici pouze analýzu a priori. Z ní se pokusím vyčíst, co by mohlo tvořit u úloh problémy a zda mají problematické úlohy nějaké společné znaky, které žákům úlohu ztěžují či zlehčují.

Obecně můžeme u soutěží sledovat relativní změnu obtížnosti úloh, protože soutěžní atmosféra může některé žáky svazovat a tím snížit jejich výkon nebo naopak některé žáky více motivovat a výkonnostně posunout vpřed. Výsledky budou také záležet na tom, jakou atmosféru ve třídě nastaví učitel. Pokud bude učitel motivovat žáky k tomu, aby řešili úlohy, které se jim líbí a baví je, nebudou žáci tolik pod tlakem. V případě, že učitel nastaví kompetitivní atmosféru, budou žáci tlačeni k maximálnímu výkonu a ve finále to může vést k tomu, že budou žáci odpovědi více hádat, než aby úlohy řešili.

8.1.1. Vyšší obtížnost úloh

Nejprve se podívám na úlohy, které měly nižší očekávanou úspěšnost.

Při pohledu na pět úloh, které dopadly hůře, než se čekalo, nenalézám pro všechny společné znaky. Každá úloha bude mít tedy své specifické faktory, které způsobily, že ji žáci nebyli schopni správně vyřešit.

8.1.1.1. Úloha č. 2 – Model

Hlavním faktorem ovlivňující obtížnost této úlohy je využití antisignálu v zadání. Při vyučování jsou často žáci vedeni stylem, kdy učitel určí klíčová slova jako např. přijít, dostat, což má značit sčítání a např. odletět, ztratit, které mají značit odčítání apod. Žáci pak místo snahy pochopit zadání úlohy, hledají klíčová slova, aby jim napověděla operaci, kterou mají využít. Měla jsem možnost vyslechnout obhajobu toho stylu výuky, kdy učitel cílil na slabší žáky, aby byli schopni v první třídě vypočítat většinu úloh. Ze začátku je to vcelku snadný způsob, jak většina žáků zvládne vyřešit téměř každou úlohu. Bohužel později se stává, že se žáci nikdy nenaučí hledat v úlohách smysl a představit si danou situaci a nadále se orientují pouze podle klíčových slov, a toto jim znemožňuje vyřešit složitější úlohy jako např. ty s antisignálem.

8.1.1.2. Úloha č. 5 – Schody

Tato úloha nepotřebuje žádné speciální znalosti a nevyskytují se v ní žádné záludnosti. Předpokládám tedy, že největším problémem u této úlohy byla neschopnost žáků správně si zaznamenávat počty schodů v průběh úlohy. Žáci, kteří se neučí podle Hejného matematiky, nejsou příliš často vedeni k dovednosti tvořit si vlastní záznamové systémy a hledat optimální způsob zápisu. Výhodu, zde měli také ti žáci, se kterými si učitelé úlohy demonstrují různými způsoby – víčka, scénka apod., jelikož je pak může napadnout více způsobů, jak si úlohu představit a znázornit. Bohužel učitelů, kteří by s žáky takto pracovali, je stále menšina.

8.1.1.3. Úloha č. 6 – Policie

V této úloze se bude pravděpodobně jednat o kombinaci neznalosti zadaného kontextu a řešení sestávající ho se z několika kroků. Nejprve musí žák vypočítat hmotnost nákladu z několika údajů, poté převést užitnou hmotnost na kilogramy a následně ještě obě čísla porovnat rozdílem a přijít na to, zda auto bylo přetížené nebo ne. Běžně je v úlohách řečeno, zda hledáme „O kolik více/méně“, což zde chybí a žák to musí vydedukovat sám.

8.1.1.4. Úloha č. 7 – Krkonoše

Špatný převod jednotek nebo početní chyba nebudou pravděpodobně hrát v neúspěšnosti této úlohu velkou roli, obojí vylučuje malý rozsah nabídky odpovědí.

Hlavní problém vidím v tom, že žák nezná daný kontext a má problém si úlohu představit, což vede k tomu, že zvolí špatný postup výpočtu nebo že úlohu vůbec nezačne řešit, a buď neoznačí žádnou odpověď nebo nakonec výsledek hádá. Vliv může mít i delší text, který je pro žáky náročnější. Neznámý kontext a delší text tedy v této úloze mohly působit pro žáky demotivačně. Bohužel nemám k dispozici data o tom, jaké žáci vybrali odpovědi, či kolik jich úlohu vůbec neřešilo, abych to mohla vyhodnotit hlouběji.

8.1.1.5. Úloha č. 9 - Silvestr

Tato úloha mi v rámci analýzy a priori nevyplynula jako jedna z těžších. Zadání je poměrně návodné a při použití špatné početní operace vyjde nesmyslné řešení, které žáky vrátí zpět. Pravděpodobně jsem při analýze podcenila vliv velkých čísel a přecenila schopnost žáků uvažovat o makroprostoru. Pro žáky je zřejmě obtížné představit si 50 metrů na 100 metrů, a ještě více to, že se by se na tento prostor mělo vejít 15 000 osob. Tato představa může být obtížná i pro dospělého člověka natož pro žáka 5. ročníku. Ve škole se moc často nebo i vůbec nepracuje s makroprostory a odhady ohledně nich, takže žáci mají problém takovéto úlohy řešit, protože jsou zcela mimo jejich oblast zkušeností. V tomto by jistě pomohlo, kdyby se výuka matematiky občas přesunula ze třídy do venkovních prostor a žáci by měli možnost pracovat s větším prostorem a reálnými objekty.

8.1.2. Nižší obtížnost úloh

Obě úlohy, které dopadly nad očekávání, mají společný rys, a to že se jedná o aritmeticko-algebraické úlohy. Žáci tedy nemuseli řešit žádný kontext úlohy a rovnou mohli řešit úlohu, která více připomíná učebnicové úlohy a také úlohy používané např. při testech nebo pětiminutovkách.

8.1.2.1. Úloha č. 8 – Závorky

Tato úloha se zaměřuje na znalost priority aritmetických operací. To je učivo, které je ve škole hojně probíráno a často testováno, žáci mají tedy s podobnými příklady velké zkušenosti a úloha je neměla čím zaskočit. Nejvíce chyb bylo jistě kvůli jednoduché početní chybě než nepochopení úlohy nebo neznalosti problematiky.

8.1.2.2. Úloha č. 14 – Dělení

U této úlohy jsem neočekávala tak vysokou úspěšnost zejména kvůli využití schématu. Je ale vidět, že žáci dělení znají a mají ho velmi dobře procvičené z vyučování ve škole.

Závěr

Cílem předložené diplomové práce bylo provést analýzu úloh a priori a následně a posteriori s oporou o koncepci Grugnetti a Jaqueta. Výsledky práce pak shrnují následují odstavce.

Úlohy jsou jedny z nejdůležitějších součástí výuky matematiky na prvním stupni základní školy. V rámci soutěží však plní jinou funkci než při vyučovací hodině. Typologie úloh se může lišit i soutěž od soutěže, dle jejího zaměření a věkové kategorie. Na příklad, pokud se vrátím ke Kuřinově typologii (viz kapitola 1.2.1.), v Pangee zcela jistě najdeme úlohy kalkulativní, rozhodovací a určovací. Konstrukční úlohy vylučuje zákaz využívání pravítka při soutěži a důkazové to, že je zde nabídka odpovědí, a tedy nelze předložit žádné osobité řešení, pouze arch se zatrhanými odpověďmi. Přesto však takovéto úlohy můžeme v soutěžích najít, např. v Matematické olympiádě mají tyto úlohy časté zastoupení.

Z hlediska role ve vzdělávacím procesu jsou úlohy v soutěžích motivačního charakteru, poutavé a náročné úlohy mají žáky přitáhnout k matematice. Zejména pro nadané žáky jsou soutěže zajímavé a důležité, jelikož klasické vyučování často neumí uspokojovat jejich potřeby a záleží na každém učiteli, jak umí s takovým žákem pracovat. Proto mohou být soutěže pro takové žáky skvělým zpestřením a možností vyzkoušet si své znalosti a dovednosti na úlohách, které nejsou triviální a nutí je hlouběji přemýšlet a hledat souvislosti. Na rozdíl od Kuřiny Kaslová motivační typ úloh nevyčleňuje, dle ní by měla úloha zpravidla žáky motivovat, ať už pro její řešení nebo matematiku vůbec. Dále se v soutěžích setkáváme s úlohami diagnostickými. Úlohy kontrolní jsou jim podobné, ale ty spíše najdeme ve školních testech, které ověřují znalosti žáků po dobrání jednotlivých témat.

Vzhledem k tomu, že úlohy v soutěžích by měly být motivační, a i sami tvůrci Pangey deklarují, že chtějí žáky motivovat pro matematiku a také hledat talenty, je třeba zhodnotit, zda mnou analyzovaný ročník tento svůj cíl splnil. Vycházet u toho budu z kapitoly 7, ve které jsem zobecnila výsledky analýzy a priori. Dle mého názoru se autoři úloh Pangey velmi snaží, aby jejich úlohy splňovali to, co si předsevzali. Tato série úloh byla promyšleně sestavena tak, aby byly úlohy co nejpestřejší. A to ať už se podívám na oblast znalostí a schopností, matematické operace, které žáci museli použít, obor čísel, čas, ve kterém se úloha odehrává nebo typ otázky či výzvy. Oceňuji také využití obrázku v různých funkcí a zařazení grafů či diagramů. V dnešní době se žák bude s takovými různými interpretacemi dat a procesů setkávat velmi často, je tedy potřeba, aby si ve škole osvojil dovednost práce s nimi a poté ji mohl využít v budoucnosti v rámci své profese. Mohu tedy říci, že Pangea zodpovědně plní své cíle a připravuje žákům soutěž, které je zajímavá, pestrá a motivační. Přičemž k motivaci žáků přispívá i zajímavými kontexty, kterými své úlohy každoročně doprovází.

V bodovém ohodnocení úloh jsem nalezla nějaké odchylky od předpokládané obtížnosti. Bohužel stanovování bodového hodnocení je vždy ošemetné. V rámci Pangey se ho účastní mnoho autorů úloh a je snaha jejich názory co nejvíce reflektovat. Existují však úlohy, kde se názory zkušených odborníků rozcházejí a je třeba z hlediska bodů udělat nějaký kompromis. Rozdíly v subjektivním vnímání obtížnosti úloh mohou být způsobeny např. rozdílným stylem práce s žáky nebo zkušenostmi s jinými typy žáků. Proto budou v hodnocení úspěšnosti vždy odchylky existovat, cílem však je, co nejvíce je minimalizovat. V této sérii jsem identifikovala největší problémy s řešením úloh, které mají nějaký specifický znak (antisignál, makroprostor atd.), se kterým se ve školách nepracuje příliš často či je přímo opomíjen. Naopak úlohy, kde se jednalo o základní znalost aritmetiky, na kterou je ve školách kladen velký důraz, dopadly výrazně nad očekávání. Je tedy otázkou, zda by se výuka v některých školách neměla změnit a učitelé neměli být více školeni v nových metodách práce s žáky v matematice. Druhá otázka je, zda je tento deficit časově stabilní, proto by bylo potřeba v následujících letech sledovat typy úloh, které se významně odchylují od předpokládané obtížnosti a danému typu úloh v budoucnu přizpůsobit bodové hodnocení. Dlouhodobé sledování analýz úloh a výsledků řešení je dobrou oporou pro autory úloh, nejen Pangey, ale i dalších matematických soutěžích.

Podobně by mohl pracovat se třídou i učitel. Analýza úloh se ve školní praxi neprovádí příliš často. Faktorem, který absenci analýz bude nejvíce ovlivňovat, je nedostatek času. Zejména na začátku, než si učitel zvnitřní proces analýzy, je úkol časově náročný. Naučit se analyzovat úlohy se však vyplatí, mohou se pak používat např. jako nástroj v pedagogické diagnostice. Čím lépe se učitel naučí úlohy analyzovat, tím hlubší diagnostiku může u žáků provádět. Pokud bych chtěla provést diagnostiku jednotlivých žáků na základě této série úloh Pangey, zjistila bych nejprve, které úlohy žák řešil chybně a které hádal a proč, buď z nedostatku času nebo kvůli neznalosti. Poté bych hledala společné znaky problematických úloh. Jelikož se jedná o soutěž, kde atmosféra může na žáky působit svazujícím dojmem, bylo by potřeba ověřit předpokládané mezery ve znalostech nebo dovednostech na úlohách v prostředí běžného vyučování. V případě, že by se mezery potvrdily, pak je třeba se žákem zapracovat na doplnění chybějících znalostí nebo na rozvoji schopností potřebných pro řešení daného typu úloh. Pokud by se problémy v běžných situacích nepotvrdily, pak na žáka při soutěžích působí příliš velký tlak, který mu neumožňuje podat kvalitní výkon. V tomto případě je pak se žákem možnost trénovat adaptaci na stresovější situace a více s ním cvičit nestandardní úlohy, aby se naučil o úlohách hlouběji přemýšlet a při soutěži nebyl zaskočen.

Kromě diagnostiky mohou analýzy sloužit i k hodnocení a porovnávání různých úloh nebo jako nástroj při tvorbě nových úloh.

Na závěr bych chtěla zmínit to, co zpracování této práce přineslo mně. Dříve jsem se nad úlohami tolik nezamýšlela, jednalo se hlavně o předchozí znalosti, aby člověk mohl úlohu zadat a žáci jí byli schopni vyřešit, a pak o jednu metodu řešení, kterou se dá dostat k výsledku. Díky této práci jsem měla možnost zjistit, jak komplexní a hluboká je práce s úlohou a že při jejím řešení záleží na mnoha faktorech, nejen na znalostech, ale i na kontextu, čase, obrázku atd. A každý z těchto faktorů může žákům činit potíže při řešení. Díky tomuto pochopení a zautomatizování procesu analýzy a priori na úlohách z Pangey pro mě bude v budoucnu snazší žákům pomáhat s řešením úloh. A také úlohy tvořit tak, aby byly pro žáky přínosné a motivační, a ne nudné a jednotvárné.

Seznam použitých informačních zdrojů

[1] Analyse à priori d'un exercice: Livret 4 (post-primaire) – Didactique des mathématiques – Séquence 2. In: *Initiative francophone pour la formation à distance des maîtres: Didactique des mathématiques* [online]. Burkina Faso: Initiative francophone pour la formation à distance des maîtres (IFADEM), 2017, s. 48-77. [cit. 18. březzna 2023]. Dostupné z: <https://apprendre.auf.org/wp-content/uploads/2021/08/livret4post_dida_maths_s2_analyse_exo.pdf>.

[2] ANDRESOVÁ, Hana. *Kapitánské úlohy v hodinách matematiky na 1. stupni ZŠ* [online]. České Budějovice, 2016. Závěrečná práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. [cit. 4. října 2023]. Dostupné z: <https://docplayer.cz/34512632-Kapitanske-ulohy-v-hodinach-matematiky-na-1-stupni-zs.html>.

[3] *APS EKO 03 Metody analýzy* [online]. VŠB – Technická univerzita Ostrava [cit. 2023-03-31]. VŠB – Technická univerzita Ostrava. Dostupné z: <https://homel.vsb.cz/~dan11/aps_eko/03%20APS%20EKO%20-%20metody%20analyzy.pdf>.

[4] BABÁKOVÁ, Veronika. *Sbírka nestandardních typů úloh pro matematiku na 1. stupni ZŠ* [online]. České Budějovice, 2007. Diplomová práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. [cit. 4. října 2023]. Dostupné z: <https://theses.cz/id/n0fa17/402096>.

[5] BROUSSEAU, Guy a Nicolas BALACHEFF. *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970-1990*. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002. ISBN 0-792-34526-6.

[6] Fridman, L. M. (1977). *Logiko-psichologičeskij analiz školʼnych učebnych zadač*. Moskva: Pedagogika.

[7] HEJNÝ, Milan. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-824-0.

[8] Internetová jazyková příručka Ústavu pro jazyk český Akademie věd ČR [online]. Dostupné z: <https://prirucka.ujc.cas.cz>.

[9] JAQUET, Francois, GRUGNETTI, Lucie, ed. *RMT: evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici; évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques*. Bologna, Italia: ARMT (Association Rallye Mathématique Transalpin), 2001. ISBN 88-371-1275-0.

[10] JIROTKOVÁ, Darina. *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2010. ISBN 978-80-7290-399-3.

[11] KALHOUS, Zdeněk. *Školní didaktika*. Praha: Portál, 2002. ISBN 80-7178-253-X.

[12] KASLOVÁ, Michaela. Pangea v kontextu matematických soutěží. In: FUCHS, Eduard a kol. *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let* [online]. Litomyšl, 2018, s. 101-127. ISBN 978-80-7015-031-3. Dostupné z: <https://8d8f55af62.clvaw-cdnwnd.com/0023db53731df613e31376e312bef977/200000179-c1622c1624/Jak_ucit_matematice%202017.pdf>.

[13] KASLOVÁ, Michaela. Vyhodnocování pravdivosti v matematické soutěži Pangea. In KRÁTKÁ, Magdalena. EISENMANN, Petr. CHYTRÝ, Vlastimil. *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let* [online]. 1. vydání. Ústí nad Labem, 2021. s. 169-178. ISBN 978-80-7561-359-2. Dostupné z: <https://jum.ujep.cz/wp-content/uploads/2022/06/JUM_2021_sbornik.pdf>.

[14] KLEKAROVÁ, Kateřina. *Tabulky, grafy a diagramy v matematice 1. stupně ZŠ* [online]. Brno, 2018. Diplomová práce. Masarykova univerzita. Dostupné z: <https://is.muni.cz/th/ocis8/diplomova_prace.pdf>.

[15] KOPKA, Jan. *Umění řešit matematické problémy*. Praha: HAV, 2013. ISBN 978-80-903625-5-0.

[16] KUŘINA, František. *Matematika a řešení úloh*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, 2011. ISBN 978-80-7394-307-3.

[17] LIŠKOVÁ, Hana., REZEK, Pavel. (2015). *Tematický okruh Nestandardní aplikační úlohy a problémy.* In *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání Matematika a její aplikace* (s. 101–128). Praha: NÚV.

[18] MAREK, Anna. *Matematická soutěž Pangea ve 4. ročníku 1. st. ZŠ – analýza řešení* [online]. Praha, 2017 [cit. 26. února 2024]. Dostupné z: <https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/98884/120277542.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze>.

[19] MAREŠ, Jiří. *Fridmanova teorie učebních úloh*. Pedagogika 1980.

[20] NERY, Érica Santana Silveira. Theory of Didactical Situations: Theoretical Rereading from the Perspective of Inclusive Playful Mathematics Education. *JIEEM* [online]. 2022, 24.10.2022, 15(2), 107-115 [cit. 2023-03-20]. Dostupné z: <https://jieem.pgsskroton.com.br/article/view/9830/6435>.

[21] NOVÁKOVÁ, Eva. *Analýza úloh ze soutěže Matematický klokan a jejich řešení žáky primární školy: shrnutí výsledků výzkumného šetření.* Brno: Masarykova univerzita, 2016. ISBN 978-80-210-8482-7.

[22] NOVÁKOVÁ, Hana. *Analýza a priori jako součást přípravy učitele na výuku* [online].

Praha, 2020. [cit. 18. března 2023]. Dostupné z: <https://ojs.cuni.cz/scied/article/view/70/55>. Dizertační práce. Univerzita Karlova v Praze.

[23] NOVOTNÁ, Jarmila. *Analýza řešení slovních úloh: [Kapitoly z didaktiky matematiky].* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2000. ISBN 80-7290-011-0.

[24] NOVOTNÁ, Jarmila. *Study of solving word problems in teaching of mathematics*. Saarbrücken, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2010. ISBN 978-3-8433-8631-9.

[25] OKOŃ, Wincenty. *K základům problémového učení.* Pedagogická teorie a praxe. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966.

[26] Pangea – matematická soutěž [online]. Dostupné z: <https://www.pangeasoutez.cz/files/test-files/2020_5_school_round_test.pdf>.

[27] Pangea – matematická soutěž [online]. *Mezinárodní matematická soutěž Pangea.* [cit. 26. 2. 2024]. Dostupné z: <https://www.pangeasoutez.cz/files/gallery/files/booklet-2014-czech.pdf>.

[28] POLYA, George. *Jak to řešit?: Překvapivé aspekty (nejen) matematických metod.* Přeložil Oldřich KOWALSKI. Praha: MatfyzPress, 2016. ISBN 978-80-7378-325-9.

[29] PRŮCHA, Jan, Jiří MAREŠ a Eliška WALTEROVÁ. *Pedagogický slovník*. 4. aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2003. ISBN 80-7178-772-8.

[30] PRÝMASOVÁ, Lenka. *Co je soutěž?.* Metodický portál: Články [online]. 22. 05. 2008, [cit. 28. února 2024]. ISSN 1802-4785. Dostupné z: <https://clanky.rvp.cz/clanek/2328/CO-JE-SOUTEZ.html>.

[31] PRÝMASOVÁ, Lenka. *Co přináší soutěž do života žáků?.* Metodický portál: Články [online]. 22. 05. 2008, [cit. 29. února 2024]. ISSN 1802-4785. Dostupné z: <https://clanky.rvp.cz/clanek/2330/CO-PRINASI-SOUTEZ-DO-ZIVOTA-ZAKU.html>.

[32] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV)*, verze platná od 1. 9. 2021. [online]. Praha: MŠMT, 2011 [cit. 13.listopadu 2022]. Dostupné z: <https://archiv-nuv.npi.cz/e403-4.html>.

[33] Sociologická encyklopedie [online]. Dostupné z: <https://encyklopedie.soc.cas.cz/w/Heuristika>.

[34] Slovník cizích slov ABZ [online]. Dostupné z: <https://slovnik-cizich-slov.abz.cz>.

[35] VONDROVÁ, Naďa. *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2019. ISBN 978-80-7603-109-8.

[36] VONDROVÁ, Naďa a Miroslav RENDL. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2015. ISBN 978-80-246-3234-6.

[37] VONDROVÁ, Naďa. *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií.* Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2019. ISBN 978-80-246-4516-2.

[38] VYŠÍN, Jan. *Metodika řešení matematických úloh.* Praha: SPN, 1962.

Seznam obrázků, tabulek a grafů

Seznam příloh

Příloha 1 – Zadání školního kola pro 5. ročník (rok 2020)[16]

[16] Pangea – matematická soutěž. *Úlohy* [online]. [cit. 28. června 2021]. Dostupné z: <https://www.pangeasoutez.cz/files/test-files/2020_5_school_round_test.pdf>.

Mezinárodní matematická soutěž Pangea v Evropě

	Název země	Počet registrovaných účastníků		Název země	Počet registrovaných účastníků
1	Německo	122 902	10	Anglie	8 300
2	Česká republika	55 985	11	Litva	5 000
3	Francie	34 000	12	Faerské ostrovy	2 110
4	Maďarsko	28 000	13		
5	Rakousko	15 655	14		
6	Norsko	13 997	15		
7	Španělsko	12 000	16		
8	Belgie	11 000	17		
9	Portugalsko	10 000	18		

Volně dostupná data z roku 2019.

/Pangea Česká republika

/pangeamathematic

/pangeasoutez.cz

Školní kolo – 5. ročník

1. BOURAČKA 3 body

K těžké dopravní nehodě v obci Křižovatka jedou tři vozidla:
sanitka (S), policie (P) a hasiči (H).
Vozidla jedou jedno za druhým těsně za sebou.

Z následujících informací urči, v jakém pořadí tentokrát jedou.

Víš, že policie nejede ani první, ani poslední; sanitka nejede poslední.

a) H, S, P

b) P, H, S

c) S, H, P

d) H, P, S

e) S, P, H

2. MODEL

3 body

K vozidlům se vyrábějí zmenšené modely. Hasičské vozidlo Mercedes L1113 je ve skutečnosti dlouhé 835 cm. Jeho kovový model je 43krát kratší.

Zdroj: www.automodels.cz/

Zjisti skutečnou délku staženého hasičského žebříku na tomto vozidle, když žebřík na modelu měří 195 mm.

a) **8385 cm**

b) **838 cm**

c) **8385 mm**

d) **4,5 m**

e) **4534 mm**

Školní kolo – 5. ročník

3. ÚRAZ NA HORÁCH 4 body

Horská služba jezdí/chodí na horách i k úrazům, které pak převáží do nemocnic. Na horách to ale není jako ve městě!

Pokud si např. v Krkonoších zlomíš nohu v prvním případě **na Zlatém návrší** kousek od mohyly umrzlých lyžařů Hanče a Vrbaty a ihned ohlásíš úraz na 112, dostane se k tobě horská služba do 20 minut, dále 10 minut trvá ošetření a za dalších 30 minut jsi v nemocnici.

Kdyby sis v druhém případě zlomil nohu při **sestupu od Labské boudy do Labského dolu**, pak se k tobě dostane horská služba obtížněji – a to za 45 minut a po 10 minutách ošetření to potrvá do nemocnice ještě hodinu a půl.

U obou případů porovnej dobu, která uplyne od nahlášení úrazu do příjezdu pacienta do nemocnice. **O kolik déle to bude trvat v druhém případě, než se dostaneš do nemocnice?**

a) o 1 h

b) o 65 min

c) o 1 h 25 min

d) o 95 min

e) o 105 min

Pangea matematická soutěž

4. TISK **4 body**

V různých novinách jsme se mohli dočíst o jedné události.

Posuď, jestli všichni novináři podali čtenářům stejné informace.

(Neptáme se, kdo má pravdu. Neporovnáváme sloh.)

- JSME VŠUDE:

Ze zoo včera náhodou utekl lev. Pronásledovaly ho dvě desítky specialistů po dobu dlouhou 180 minut.

- VÍME TO:

12 odborníků chytalo včera lva, který utekl ze zoo. Již za necelé dvě hodiny se ho podařilo odchytit.

- JENOM MY:

Dvacet vyškolených pracovníků honilo lva, který včera utekl ze zoo. Úspěšný zásah trval celé tři hodiny stíhání.

a) Ve všech novinách byly tytéž informace.

b) Každé noviny podaly jiné informace.

c) Informace novin *Víme to* se od ostatních lišily.

d) Informace novin *Jenom my* se od ostatních lišily.

e) Informace novin *Jsme všude* se od ostatních lišily.

Školní kolo – 5. ročník

5. SCHODY **4 body**

Z přízemí do prvního patra vede 10 schodů.

„*To je nuda*!“ volala Lenka na Petru. „*Co kdybychom šly vždycky tři schody po jednom nahoru a pak jeden schod dolů, dokud nedošlápneme poprvé na první patro*!“ „*Tak jóóó!*“ souhlasila Petra.

Na kolik schodů přitom každá šlápne?

a) 20 **b) 18** **c) 16**

d) 14 **e) 12**

6. POLICIE **4 body**

Policie vyšetřovala nehodu. Řidič se dostal s autem do smyku a naboural. Policie zjišťuje, zda za to může také přetížení auta. Auto mělo naloženo 250 komínových cihel a dva pytle vápna po 40 kg. Jedna cihla váží 5 kg. Toto auto (má užitnou hmotnost) může být zatíženo nákladem do 6 q.

O kolik kg se lišila hmotnost nákladu od povolené zátěže?

(škoda Octavia Combi 6MPI)

a) Řidič přetížil auto o 730 kg.
b) Řidič přetížil auto o 690 kg.
c) Řidič přetížil auto o 650 kg.
d) Řidič auto nepřetížil, měl ještě rezervu 467 kg.
e) Řidič auto nepřetížil, měl ještě rezervu 4 670 kg.

7. KRKONOŠE **5 bodů**

Dali jsme si v chalupě A čaj, najednou padla mlha. Vyšli jsme z chalupy A a sotva jsme viděli na první orientační tyč, která je 12 m od dveří chalupy. Čeká nás k cíli trasa 3 km. Teď již vím, že půjdeme od jedné tyče ke druhé, dokud nás nedovedou na místo, odkud uvidíme dveře naší chalupy B. Ještěže si pamatujeme radu Horské služby, že jsou tyče od sebe vždy 12 m a u domu se nezapichují.

Zdroj: https://krkonossky.denik.cz/zpravy_region/u-lucni-boudy-muzete-zabloudit-chybi-tyce-20171213.html

Kolik tyčí mineme, než se dostaneme k chalupě B, kde nocujeme?

a) 249 **b) 250** **c) 251**

d) 252 **e) 255**

Školní kolo – 5. ročník

8. ZÁVORKY

5 bodů

Porovnej čísla ve výsledcích.

Kolik různých čísel vyšlo?

(12 + 18) : 2 – 1	12 + (18 : 2 – 1)
12 + (18 : 2) – 1	(12 + 18 : 2) – 1
(12 + 18) : (2 – 1)	12 + 18 : (2 – 1)

a) **6** **b)** **5** **c)** **4**

d) **3** **e)** **2**

9. SILVESTR

5 bodů

V tisku se objevila zpráva, že náměstí v naší obci bylo v den oslav nového roku zcela zaplněno občany. Noviny chtěly zpřesnit počet účastníků.

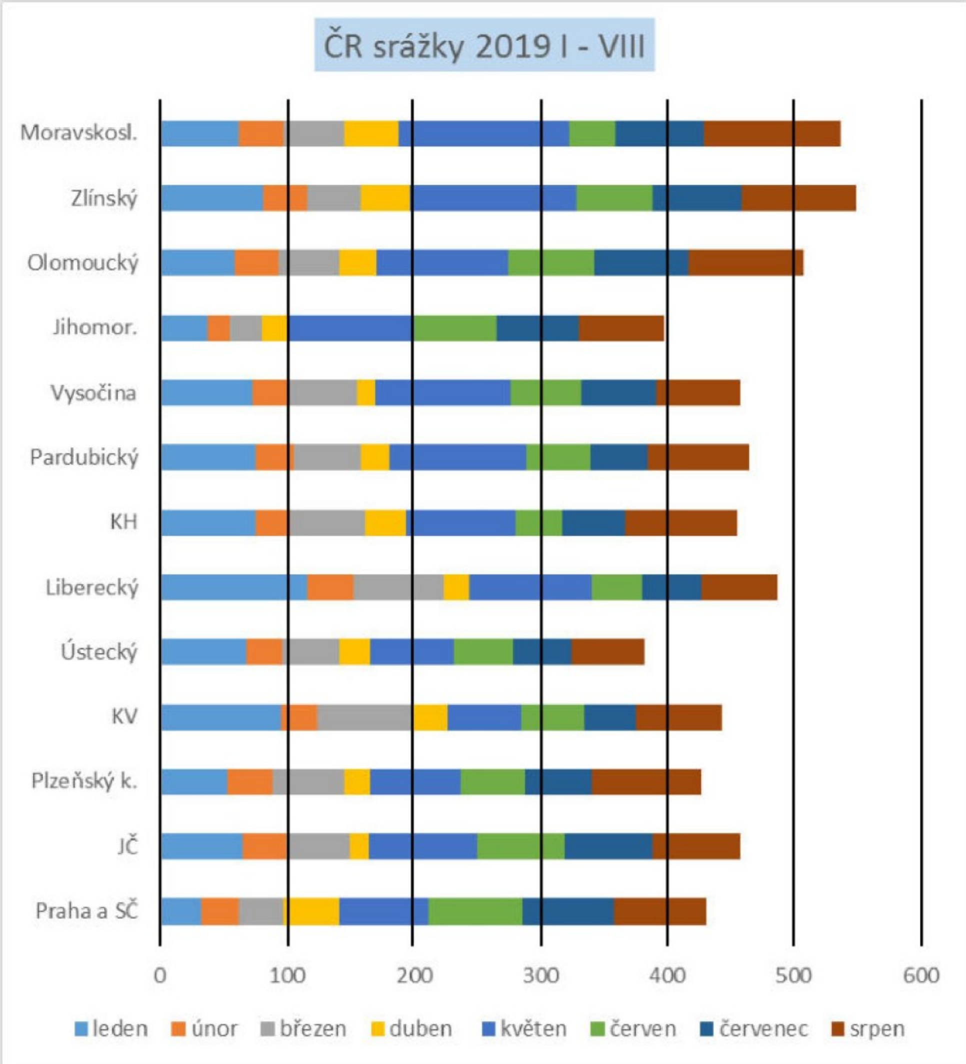
Kolik bylo přibližně občanů na náměstí, když na 1 metr čtverečný počítáme 3 osoby?

Naše náměstí má tvar obdélníku, jeho šířka je 50 m, délka je 100 m.

a) **1 500 osob**
b) **3 000 osob**
c) **5 000 osob**
d) **15 000 osob**
e) **150 000 osob**

10. POČASÍ **5 bodů**

Pro novináře je důležité číst data. Připravují nyní článek o suchu a srážkách. Údaje o srážkách jsou v mm.



Zdroj: chmi.cz

Školní kolo – 5. ročník

1) V kterém kraji ČR bylo nejvíc srážek za období leden–srpen 2019?
2) V kolika krajích spadlo aspoň v jednom měsíci více než 100 mm srážek?
3) V kterém kraji bylo nejméně srážek v lednu?
4) V kterém měsíci spadlo nejvíce srážek v ČR?

a) Moravskoslezský; 8; Jihomoravský; srpen

b) Liberecký; 10; Praha a SČ; leden

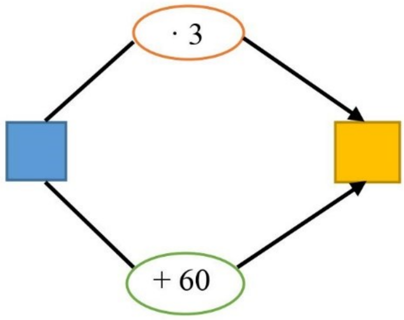
c) Moravskoslezský; 6; Ústecký; březen

d) Zlínský; 6; Praha a SČ; květen

e) Zlínský; 9; Ústecký; květen

11. DVĚ ČÍSLA **5 bodů**

Najdi jedno číslo, které je na začátku v modrém rámečku, a druhé číslo, které je na konci ve žlutém rámečku.



a) nejde určit

b) 0 a 60

c) 10 a 60

d) 20 a 60

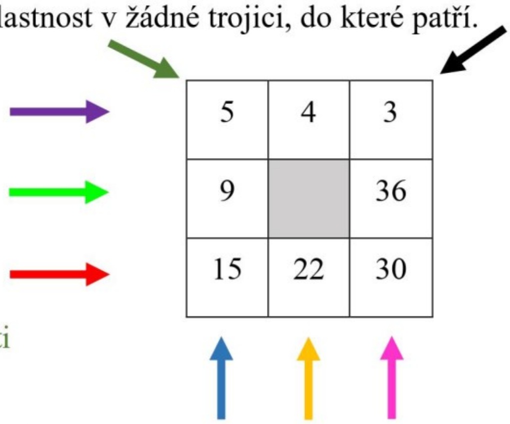
e) 30 a 90

Školní kolo – 5. ročník

12. STŘEDNÍ ČÍSLO — 6 bodů

V mřížce je zatím osm čísel. **Najdi deváté číslo do středního pole**.

V mřížce platí zajímavá pravidla. Pro každou trojici čísel zapsaných v jednom směru platí určitá společná vlastnost (je vždy uvedena u šipky, která určuje směr, tedy danou trojici čísel). Číslo uprostřed nesmí porušit společnou vlastnost v žádné trojici, do které patří.



Násobky pěti

Násobky tří

Násobky devíti

Jednociferná čísla

Dvojciferná čísla

Lichá čísla (nejde je dělit dvěma beze zbytku)

Sudá čísla (jsou dělitelná dvěma)

V zápise čísla je aspoň jedna trojka

a) 60 **b) 63** **c) 66**

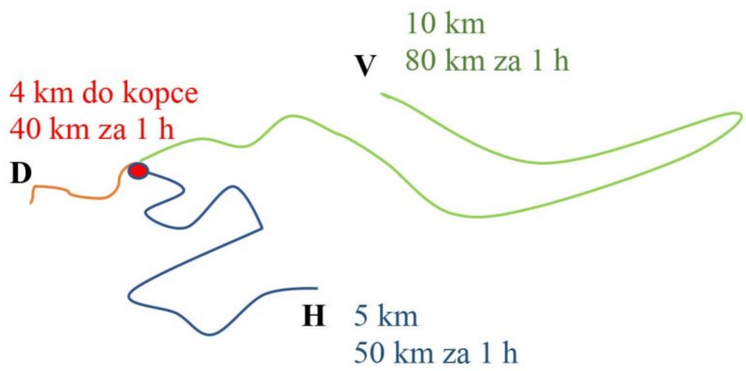
d) 90 **e) 99**

Pangea matematická soutěž

13. POŽÁR 6 bodů

K velkému lesnímu požáru se sjíždějí naráz tři hasičské sbory. Každý vyjíždí z jiné obce: Horní Lhota (**H**), Dolní Lhota (**D**) a Vřesová Lhota (**V**).

Vyčti z plánku a usuzuj: Který z nich bude u ohně nejdřív? U každé cesty je uvedena vzdálenost k požáru a průměrná rychlost, kterou mohou hasiči po dané cestě jet. Pozn. 40 km za 1 h znamená, že vozidlo ujede za 1 h touto rychlostí 40 km.



a) Nejdřív přijedou oba D a H, po nich V.

b) Nejdřív přijede V, po něm naráz D a H.

c) Nejdřív přijede H, pak současně V a D.

d) Přijedou postupně v pořadí: V, H, D.

e) Přijedou postupně v pořadí: D, H, V.

Školní kolo – 5. ročník

14. DĚLENÍ — 6 bodů

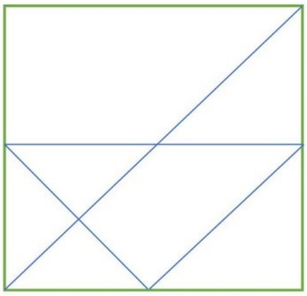
Máme pět čísel: 1, 2, 3, 4, 5. **Vyber z nich taková čtyři čísla, ze kterých jde sestavit správně vyřešenou úlohu na dělení se zbytkem**.
(Každé vybrané číslo použij jen jednou.)

□ : □ = □ zb. □

a) **1, 2, 3, 4**
b) **2, 3, 4, 5**
c) **1, 3, 4, 5**
d) **1, 2, 4, 5**
e) **1, 2, 3, 5**

15. TROJÚHELNÍKY **6 bodů**

Kolik trojúhelníků je skryto v obrázku?



a) 5 **b) 6** **c) 8**

d) 10 **e) 11**

DESATERO DOPRAVNÍ BEZPEČNOSTI

1) Přecházej jen na přechodu pro chodce a pouze na zelenou, pokud se žádný v tvé blízkosti nenachází, přecházej vozovku pouze na dobře přehledných místech.
2) Před vstupem do vozovky se řádně rozhlédni. Vždy nejprve doleva, pak doprava a opět doleva.
3) Před vstupem do vozovky udržuj oční kontakt s řidičem vozidla.
4) I když je na semaforu zelená, tak se rozhlédni a nepoléhej na to, že vozidla zastaví.
5) Při chůzi v silničním provozu nikdy nekoukej do mobilu a neměj na uších sluchátka.
6) Při jízdě na kole, koloběžce či jiném prostředku vždy používej ochrannou helmu.
7) Při jízdě ve vozidle vždy používej bezpečnostní pásy.
8) Za snížené viditelnosti používej světlé oblečení a reflexní prvky.
9) Nikdy nepřecházej před, nebo za tramvají – řidič tě nevidí!
10) Pamatuj, že tramvaj má vždy přednost. Má dlouhou brzdnou dráhu a nemůže se chodci vyhnout!

POLICIE ČESKÉ REPUBLIKY

Poděkování

Rádi bychom poděkovali všem, kteří pracovali na tvorbě a sestavování úloh pro žáky a kteří se podíleli na organizaci soutěže.

Děkujeme tvůrcům úloh:

Mgr. Martině Kořenové, učitelka matematiky, Říčany,
PhDr. Michaele Kaslové, VŠ pedagog KMDM, Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova v Praze,
Mgr. Haně Schmidové, učitelka matematiky, Praha,
Mgr. et Mgr. Pavlu Sovičovi, učitel matematiky a francouzského jazyka, Praha,
PhDr. Evě Semerádové, Ph.D., učitelka matematiky, Praha,
Mgr. Bc. Karlu Zavřelovi, učitel matematiky, fyziky a informatiky, Praha.

Děkujeme týmu didkatické kontroly:

Mgr. Marcele Ondrúšové, učitelka matematiky a chemie, Opava,
Mgr. Janě Duňkové, učitelka matematiky, Tanvald,
PhDr. Filipu Roubíčkovi, Ph.D., učitel matematiky, Praha.

Naše díky patří také Poradnímu výboru Pangea:

PhDr. Michaele Kaslové, KMDM, Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova v Praze,
prof. RNDr. Marii Demlové, CSc., KM, Fakulta elektrotechnická, ČVUT v Praze,
doc. Mgr. Petru Knoblochovi, Dr., KNM, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze,
doc. Ing. Ľubomíře Dvořákové, Ph.D., KM, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze,
Ing. et Ing. Marku Kovářovi, MBE, Fakulta strojní, ČVUT v Praze,
Mgr. Olze Páskové, učitelka českého jazyka, Praha.

Děkujeme generálnímu partnerovi soutěže:
Meridian International School, s.r.o.


Pangea
matematická soutěž
Generální partner
meridian
INTERNATIONAL SCHOOL PRAGUE
Partner
MŠMT
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
Partneři
NÁRODNÍ MUZEUM
ZOO PRAHA
AMOS vision
FOKUS OPTIK
Jakub Vágner
POLICIE ČESKÉ REPUBLIKY
CASIO
PAPÍROMAT
UČITEL MATEMATIKY
abc
ProStředoškoláky
Školní kolo : 10. - 28.2.2020
Finálové kolo : 22.5.2020

Příloha 2 – Správná řešení školního kola (rok 2020)[17]

Správné odpovědi 2020 – školní kolo

4. ročník

1C 2C 3B 4E 5B 6C 7B 8C 9B 10A 11E 12D 13C 14E 15E

5. ročník

1E 2C 3C 4C 5B 6A 7A 8D 9D 10D 11E 12D 13A 14E 15D

6. ročník

1C 2A 3C 4D 5C 6E 7D 8B 9C 10E 11E 12D 13C 14E 15A

7. ročník

1D 2D 3D 4C 5B 6E 7B 8E 9E 10A 11E 12D 13D 14E 15E

8. ročník

1A 2D 3C 4C 5E 6B 7D 8E 9E 10D 11C 12C 13B 14B 15C

9. ročník

1C 2E 3E 4B 5E 6D 7E 8E 9B 10D 11D 12A 13B 14A 15A

[17] Pangea – matematická soutěž. Úlohy [online]. [cit. 28. června 2021]. Dostupné z: <https://www.pangeasoutez.cz/files/test-files/2020_5_school_round_test.pdf>.

Příloha 3 – Úloha Známky[18]

2. Le problème

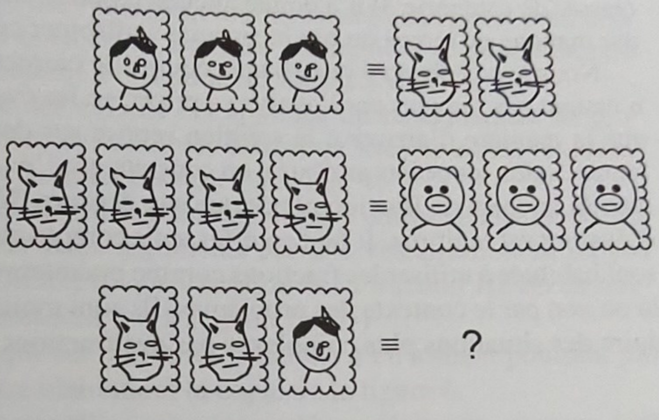
Les timbres (cat. 3, 4, 5)

En Transalpie, il n'y a que trois sortes de timbres représentant des poupées, des chats et des ours.

– 3 poupées valent 2 chats
– 4 chats valent 3 ours

Combien d'ours faut-il pour remplacer deux chats et une poupée?

Expliquez votre raisonnement.



3. Analyse a priori

Domaine de connaissances

- Logique
- Arithmétique

Analyse de la tâche

- Comprendre que, à partir des relations d'équivalence données, on peut en trouver d'autres, par «proportionnalité élémentaire» (par exemple: si 3 poupées valent 2 chats, alors 6 poupées valent 4 chats, ….)
- Travailler par «transitivité» (par exemple, si 6 poupées valent 4 chats et que 4 chats valent 3 ours, alors 6 poupées valent 3 ours ou 2 poupées valent un ours)
- Travailler par substitution (par exemple, remplacer 2 chats par 3 poupées, …)
- Combiner les trois types de transformations précédentes: 2 chats et une poupée font 4 poupées (3 + 1) et 4 poupées correspondent à 2 ours.

Attribution des points

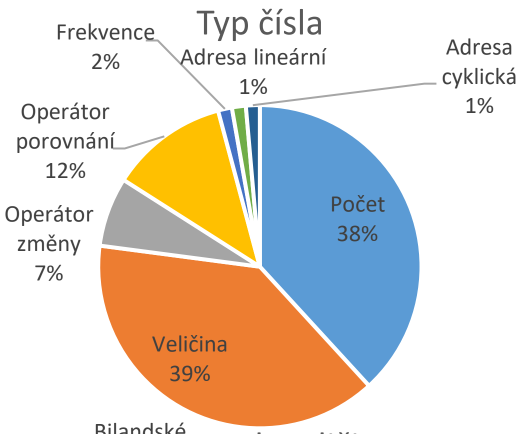
4 Réponse correcte (2 ours) avec explications satisfaisantes (dessins, suites d'équivalences, …)
3 Réponse correcte avec explications peu claires
2 Réponse correcte sans aucune explication
1 Réponse fausse mais avec quelques échanges corrects
0 Incompréhension du problème

…illeront qu'avec des nombres natu-

[18] JAQUET, Francois, GRUGNETTI, Lucie, ed. *RMT: evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici; évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques*. Bologna, Italia: ARMT (Association Rallye Mathématique Transalpin), 2001. ISBN 88-371-1275-0. s. 99.

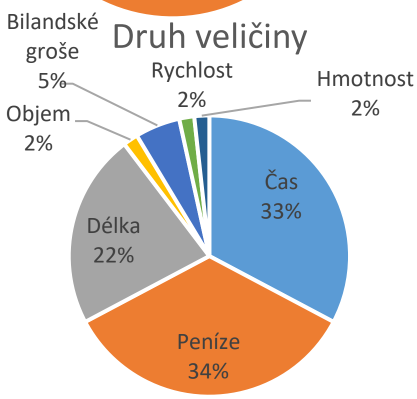
Příloha 4 – Analýza učebnice[19]

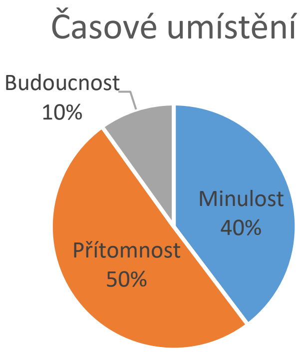
K analýze jsem si vybrala učebnici pro 3. ročník od nakladatelství Fraus (ISBN 978-80-7238-824-0).



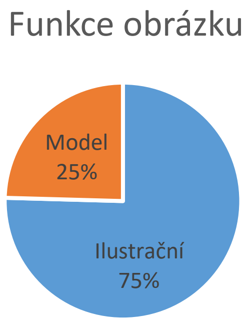
V učebnici jsem identifikovala celkem 98 slovních úloh.

Prvním kritériem, které jsem hodnotila byl typ čísla, který byl v úlohách používán. Nejčastěji se objevovala veličina nebo počet, a to v 39 %, případně v 38 %. Číslo jako frekvence nebo adresa se naopak téměř nevyskytovalo. Pokud se podíváme na druh veličin, který byl využíván v největší míře, pak se jednalo o úlohy s penězi a o úlohy, ve kterých hrál roli čas. Tedy úlohy, které se týkaly hodin, nebo úlohy o věku.





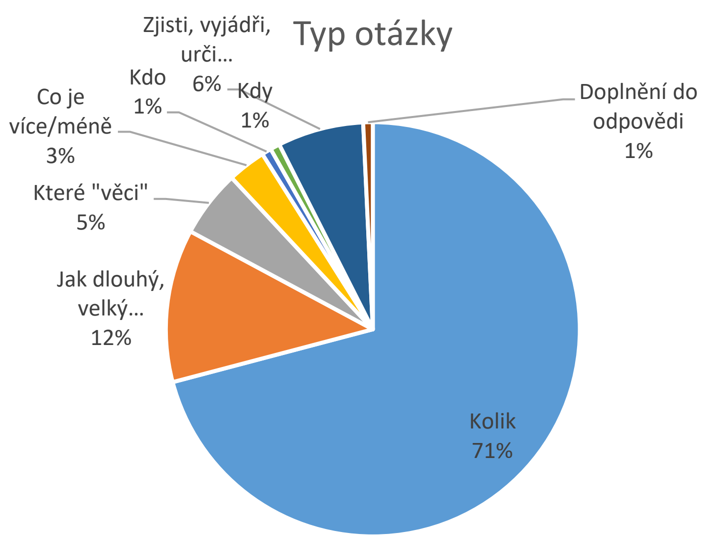
Jako druhé jsem zkoumala časové umístění úloh, tedy zda se jednalo o minulost, přítomnost nebo budoucnost. Zde se v polovině případů jednalo o úlohy odehrávající se v přítomném čase.



U 41 úloh z 98 se objevil obrázek. Ve třech čtvrtinách případů se jednalo o obrázek ilustrační. Jako příklad můžu uvést, že v úloze se mluvilo o hruškách, tak byly vedle nakreslené hrušky. Nebo když šla maminka na nákup, byly u toho namalované peníze. Ve zbylé čtvrtině případů se jednalo o obrázek, který přímo souvisel s řešením úlohy. Například u úlohy, kdy s krychlovými stavbami byl model stavby, o které se mluvilo. Nebo u úloh na zlomky s dělením tyče, byla naznačena tyč, o které se hovořilo.

Poslední oblastí zkoumání bylo to, jaké otázky se ve slovních úlohách vyskytují.

[19] Jedná se o analýzu učebnice, kterou jsem zpracovávala v rámci studia matematického modulu



Nejčastěji jsme se zde mohly setkat s otázkou „kolik“ (případně ve variaci „za kolik“, „v kolik“, „o kolik“ apod.). Na druhém místě, ale již s velkým odstupem, se umístila otázka „jak“ s obměnami „dlouhý“, „dlouho“, „velký“, „vysoký“ apod. Kromě přímých otázek typu „kolik“, „kdo“, „kdy“, se několikrát objevila i formulace příkazu „zjisti“ nebo také „urči“, ale většinou v kombinaci s dodatkem „kolik“. Jednou se objevila i možnost doplnit jedno slovo do již předepsané odpovědi.

Z jazykového hlediska bych zmínila několikeré uvedení spravedlivého dělení. Jako příklad mohu uvést toto: „Oldřich má desetikorunu a pětikorunu. Petr má dvě dvoukoruny, Radek jenom jednu korunu. Chlapci dostali jednu dvacetikorunu a jednu korunu. Porad' jim, jak se mají o peníze spravedlivě podělit.“ U úlohy jsem musela přemýšlet, jaké bylo zamýšlené řešení, jelikož bych si dokázala představit vícero způsobu řešení spravedlivého dělení, které bych si dokázala obhájit.

Zaujala mě i následující úloha: „Maminka koupila osm sýrů po 56 Kč, sedm bábovek po 29 Kč a osm polévek po 24 Kč. Kolik korun stál nákup?“ Sémanticky mi přijde naprosto divná, ať už jde o složení nákupu, množství zakoupených potravin i jejich ceny.