MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Filip Vencl

Stupeň zobrazení a jeho vlastnosti

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych poděkoval svému vedoucímu práce profesoru Stanislavu Henclovi za věnovaný čas, cenné rady a trpělivost.

Dále bych chtěl poděkovat své rodině za plnou podporu ve studiu a svým přátelům za morální podporu za všech okolností, zejména příteli Ondřeji Žežule.

Název práce: Stupeň zobrazení a jeho vlastnosti

Autor: Filip Vencl

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: V této práci se zabýváme topologickým stupněm zobrazení. V první kapitole axiomatickým způsobem konstruujeme stupeň. Dále dokazujeme jeho vlastnosti a důkladněji prozkoumáváme případ, kdy zobrazení f je spojitě diferencovatelné. Ve druhé kapitole pomocí stupně dokazujeme různá teoretická tvrzení např. Brouwerovu větu o pevném bodě. Dále vyřešíme některá cvičení z nelineární funkcionální analýzy. Na závěr zmíníme úzký vztah stupně a indexu bodu ke křivce z komplexní analýzy.

Klíčová slova: topologický stupeň zobrazení, homotopie, spojité zobrazení, diferencovatelné zobrazení

Title: Topological degree and its properties

Author: Filip Vencl

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: prof. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In this work, we deal with the topological degree. In the first chapter, we construct the degree in an axiomatic way, prove its properties, and investigate the case where the mapping f is continuously differentiable. In the second chapter, we use the degree to prove various theoretical statements, such as Brouwer's fixed point theorem. After that, we solve several exercises from nonlinear functional analysis. In conclusion, we mention the close relationship between the degree and the winding number of a curve in complex analysis.

Keywords: topological degree, homotopy, continuous map, differentiable map

Obsah

Úvod

Mnoho problémů v matematice, fyzice, či v jiných vědních disciplínách lze převést na hledání řešení rovnice $f(x) = y$, kde f je zobrazení z množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ a y je zadaný bod v $\mathbb{R}^n$. Základní otázka je jak vypadají všechna řešení? V případě lineární soustavy jsou známy obecné algoritmy (např. Gaussova eliminační metoda), které nám takovou otázku pomáhají zodpovědět. Na druhou stranu pro nelineární soustavy je situace značně komplikovanější a žádný obecný algoritmus na hledání řešení neexistuje. To je právě chvíle pro studování dalších nástrojů a metod, které nám mohou při vyšetřování pomoci. Jeden z těchto nástrojů je právě topologický stupeň zobrazení. Topologický stupeň v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ zavedl L. E. J. Brouwer v článku [2] v roce 1912. Stupeň zobrazení f vzhledem k množině Ω v bodě y je neformálně řečeno počet řešení rovnice $f(x) = y$, kde se bere v úvahu orientace f.

V první kapitole axiomatickým způsobem zkonstruujeme stupeň. Dále dokážeme jeho vlastnosti a důkladněji prozkoumáme případ, kdy zobrazení f je spojitě diferencovatelné. Ve druhé kapitole pomocí stupně dokážeme různá teoretická tvrzení např. Brouwerovu větu o pevném bodě. Následně vyřešíme některá cvičení z nelineární funkcionální analýzy. Na závěr zmíníme úzký vztah stupně a indexu bodu ke křivce z komplexní analýzy.

0.1 Úmluvy a značení

V celé práci se pohybujeme v normovaném lineárním prostoru $\mathbb{R}^n$ s eukleidovskou normou. Přesněji pro libovolné $x \in \mathbb{R}^n$ se souřadnicemi $x = (x_1, \ldots, x_n)$ značíme normu x jako $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Dále pro $a \in \mathbb{R}$ absolutní hodnotu a značíme $|a|$. Veškeré metrické a topologické vlastnosti uvažujeme vzhledem k eukleidovské normě. Pro množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ symboly ∂M, $\overline{M}$ značí postupně hranici a uzávěr množiny M. Pro $x \in \mathbb{R}^n$ a $A \subset \mathbb{R}^n$ vzdálenost bodu x od množiny A značíme

$$\operatorname{dist}(x,A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Prázdnou množinu značíme $\emptyset$ a 0 značíme skalární i vektorovou nulu, vždy je patrné z kontextu, o který případ se jedná.

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a $r > 0$, otevřenou resp. uzavřenou kouli se středem v x_0 a poloměrem r značíme

$$B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\} = x_0 + B(0,r) \text{ resp. } \overline{B(x_0,r)}.$$

Pro zobrazení $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ značíme obraz $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ a pro $y \in \mathbb{R}^n$ vzor $f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) = y\}$. Identické zobrazení značíme Id, tedy $\operatorname{Id}(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.

Pro lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, kterému přísluší matice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definujeme normu lineárního zobrazení resp. normu matice jako

$$\|M\| = \sup_{x \in B(0,1)} \|Lx\| = \sup_{x \in B(0,1)} \|Mx\|.$$

Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní tj.uzavřená a omezená množina, potom $C(K)$ značí prostor všech spojitých zobrazení z K do $\mathbb{R}^n$, kde uvažujeme supremovou normu. Tedy pro $f \in C(K)$ značíme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \|f(x)\|.$$

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ takové, že je definované alespoň na okolí bodu x_0. Potom lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nazveme derivací zobrazení f v bodě x_0, jestliže platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Toto lineární zobrazení tj. derivaci zobrazení f v bodě x_0 značíme $f'(x_0)$. Dále Jakobián zobrazení f v bodě x_0 značíme

$$J_f(x_0) = \det(f'(x_0)).$$

Bod x_0 nazveme kritickým bodem zobrazení f, jestliže $J_f(x_0) = 0$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, definujeme množinu

$$S_f(\Omega) = \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}.$$

Bod $y \in \mathbb{R}^n$ nazveme regulárním bodem zobrazení f, jestliže $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) = \emptyset$, jinak singulárním bodem.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, symbolem $C^1(\Omega)$ značíme prostor všech zobrazení $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, která jsou spojitě diferencovatelná.

Komplexní čísla $\mathbb{C}$ standardně ztotožňujeme s $\mathbb{R}^2$ následujícím způsobem. Pro $z \in \mathbb{C}$ píšeme $z = x + iy$, kde $x,y \in \mathbb{R}$, a tedy uvažujeme uspořádanou dvojici $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Měřitelnost a objem v celém textu rozumíme vzhledem k Lebesgueově míře λ^n.

0.2 Přípravná tvrzení

Následující věta se standardně probírá v základním kurzu matematické analýzy.

Věta 0.1 (O lokálním difeomorfismu)**.** [5, str. 680, Věta 11.6.2.] *Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je třídy C^1 na jistém otevřeném okolí V bodu $a \in \mathbb{R}^n$ a $f'(a)$ je regulární. Potom existuje otevřené okolí $U \subset V$ obsahující bod a takové, že zobrazení $f \restriction_U$ je difeomorfismus na U.*

Dále budeme využívat rozšiřovací větu, pomocí které spojité zobrazení na kompaktní množině rozšíříme na spojité zobrazení definované na celém prostoru $\mathbb{R}^n$.

Věta 0.2 (Rozšiřovací věta)**.** [3, str. 6, Proposition 1.1] *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní a $f : K \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení. Potom f lze spojitě rozšířit na celé $\mathbb{R}^n$. Tj. existuje spojité zobrazení $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takové, že $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pro každé $x \in K$.*

1. Axiomatická konstrukce stupně zobrazení

Přímá konstrukce stupně zobrazení není jednoduchá a přesahuje rámec této práce. Volíme tedy axiomatický přístup. Vyslovíme větu, přesněji vlastnosti, které stupeň přímo charakterizují a určují jednoznačně.

1.1 Přípustné trojice a existenční věta

Jako první nejprve definujeme systém, na kterém budeme stupeň uvažovat.

Definice. *Definujeme systém uspořádaných trojic:*
$\mathcal{M} = \{(f,\Omega,y) : \Omega \subset \mathbb{R}^n$ *otevřená a omezená,* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *spojitá,* $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)\}$
Prvky množiny $\mathcal{M}$ *nazveme* ***přípustné trojice*** *pro stupeň zobrazení.*

Množinou $\mathcal{M}$ budeme v celém textu rozumět již výše definovanou. Ještě poznamenejme, že stupeň zobrazení lze uvažovat na neomezených množinách (viz [1] a [3, str. 27-28, Paragraph 6.1]).

Poznámka. Uveďme jednoduché příklady přípustných trojic.

Pro libovolné zobrazení $f : M \to \mathbb{R}^n$, kde M je podmnožina $\mathbb{R}^n$ a bod $y \in \mathbb{R}^n$ platí, že trojice $(f,\emptyset,y)$ je přípustná. Jsou triviálně splněné podmínky $\emptyset$ je otevřená a omezená, $f : \overline{\emptyset} \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\emptyset) = \mathbb{R}^n \setminus f(\emptyset) = \mathbb{R}^n$.

Ať $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, omezená a bod $y \in \Omega$, potom (Id,Ω,y) je přípustná trojice. Skutečně, identické zobrazení Id je spojité na $\mathbb{R}^n$, speciálně na $\overline{\Omega}$. Ať $y \in \Omega$ otevřená, pak $y \notin \partial\Omega$. Tedy $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega) = \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$.

Nyní axiomaticky zavedeme topologický stupeň zobrazení pomocí následující věty, kterou tedy z již ze zmíněných důvodů uvádíme bez důkazu. Skutečnou konstrukci lze najít například v knize od Klause Deimlinga (viz [3]) z roku 1985. Nejprve v první kapitole ukazuje jednoznačnost a následně ve druhé konstruuje stupeň přímo. Postup je takový, že pro lineární zobrazení se definuje stejně jako v Lemmatu 1.2. Poté přes diferencovatelná zobrazení se dojde až k obecně spojitým zobrazením.

Věta 1.1 (Základní existenční)**.** [3, str. 5, Theorem 1.1 + str. 16, Theorem 3.1]
Existuje právě jedna funkce $\deg : \mathcal{M} \to \mathbb{Z}$ *splňující následující vlastnosti:*

(Normalizace) $\deg(\mathrm{Id},\Omega,y) = 1$ *pro* $y \in \Omega$*, kde* Id *značí identické zobrazení na* Ω*,*

(Aditivita) pokud Ω_1,Ω_2 *jsou otevřené disjunktní podmnožiny* Ω *takové, že pokud* $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$*, potom platí*

$$\deg(f,\Omega,y) = \deg(f,\Omega_1,y) + \deg(f,\Omega_2,y),$$

(Homotopická invariance) $\deg(H(t,\cdot),\Omega,y(t))$ *je konstantní funkce pro* $t \in [0,1]$*, kdykoliv* $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá,* $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá a* $y(t) \notin H(t,\partial\Omega)$ *pro každé* $t \in [0,1]$.

Uvedené vlastnosti budeme zkracovat následujícím způsobem: (Normalizace) na **(N)**, (Aditivita) na **(A)** a (Homotopická invariance) na **(HI)**. Z předchozí věty, či z konstrukce stupně, lze ukázat platnost následujícího lemmatu, které nám říká jak lze spočíst stupeň lineárního zobrazení. Opět tedy uvádíme bez důkazu.

Lemma 1.2 (Stupeň lineárního zobrazení)**.** [3, str. 5, Theorem 1.1] *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená, omezená a* $0 \in \Omega$*. Nechť* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *je lineární bijektivní zobrazení, kterému přísluší matice* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *taková, že* $\det A \neq 0$*. Potom platí*

$$\deg(A,\Omega,0) = \operatorname{sgn}(\det A).$$

Poznámka. Pro $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou, omezenou a $0 \in \Omega$ ihned z Lemmatu 1.2 a z definice determinantu plyne

$$\deg(-\mathrm{Id},\Omega,0) = (-1)^n.$$

1.2 Vlastnosti stupně zobrazení

Nyní ze základní věty tj. Věty 1.1 postupně odvodíme další užitečné vlastnosti, které nám pomohou vyšetřovat stupeň zobrazení.

Věta 1.3 (Vlastnosti)**.** [3, str. 16, Theorem 3.1] *Funkce* deg *má následující vlastnosti:*

(d0) Platí $\deg(f,\emptyset,y) = 0$*.*

(d1) Pokud Ω_1 *je otevřená a omezená podmnožina* Ω *taková, že* $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$*, potom* $\deg(f,\Omega,y) = \deg(f,\Omega_1,y)$*.*

(d2) Pokud $\deg(f,\Omega,y) \neq 0$*, pak platí* $f^{-1}(y) \neq \emptyset$*.*

(d3) Nechť $(f,\Omega,y),(g,\Omega,y) \in \mathcal{M}$ *a platí* $f\restriction_{\partial\Omega} = g\restriction_{\partial\Omega}$*, potom*

$$\deg(g,\Omega,y) = \deg(f,\Omega,y).$$

(d4) Nechť $(f,\Omega,y) \in \mathcal{M}$ *a položme* $r = \operatorname{dist}(y,f(\partial\Omega))$*.*
Potom funkce $\deg(\cdot,\Omega,y)$ *je konstantní na množině* $\{g \in C(\overline{\Omega}) : \|g - f\|_\infty < r\}$*.*

(d5) Nechť $(f,\Omega,y) \in \mathcal{M}$ *a položme* $r = \operatorname{dist}(y,f(\partial\Omega))$*.*
Potom funkce $\deg(f,\Omega,\cdot)$ *je konstantní na množině* $B(y,r) \subset \mathbb{R}^n$*. Navíc je také konstantní na všech souvislých komponentách* $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$*.*

(d6) Nechť $(f,\Omega,y) \in \mathcal{M}$*, potom* $(f - y,\Omega,0) \in \mathcal{M}$ *a platí*

$$\deg(f,\Omega,y) = \deg(f - y,\Omega,0).$$

Důkaz. (d0) Tato vlastnost plyne přímo z **(A)**. Položme $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = \emptyset$. Pak Ω_1 a Ω_2 jsou disjunktní a otevřené. Podmínka $y \notin f(\overline{\emptyset}\setminus(\emptyset\cup\emptyset)) = f(\emptyset)$ je triviálně splněna. Tedy dle **(A)** platí: $\deg(f,\emptyset,y) = \deg(f,\emptyset,y)+\deg(f,\emptyset,y)$. Dostáváme tak platnost $\deg(f,\emptyset,y) = 0$.

(d1) Položme $\Omega_2 = \emptyset$. Opět Ω_1 a Ω_2 jsou disjunktní a otevřené. Dle předpokladu máme splněnou podmínku $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)) = f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$. Tedy dle **(A)** a *(d0)* platí

$$\deg(f,\Omega,y) = \deg(f,\Omega_1,y) + \deg(f,\Omega_2,y) = \deg(f,\Omega_1,y) + \deg(f,\emptyset,y) = \deg(f,\Omega_1,y).$$

(d2) Nechť $\deg(f,\Omega,y) \neq 0$. Chceme ukázat, že $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Pro to stačí dokázat $y \in f(\overline{\Omega})$. Postupujme sporem, ať $y \notin f(\overline{\Omega})$. Položme $\Omega_1 = \emptyset$. Dále $f(\overline{\Omega}) = f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$. Tedy dle předpokladu, *(d1)* a *(d0)* máme spor

$$0 \neq \deg(f,\Omega,y) = \deg(f,\Omega_1,y) = \deg(f,\emptyset,y) = 0.$$

(d3) Ukážeme pomocí **(HI)** pro vhodnou volbu homotopie $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$. Ať (g,Ω,y) a (f,Ω,y) jsou přípustné trojice takové, že $f \restriction_{\partial\Omega} = g \restriction_{\partial\Omega}$. Položme $y(t) \equiv y$ pro každé $t \in [0,1]$ a homotopii

$$H(t,x) = tf(x) + (1-t)g(x) \text{ pro každé } (t,x) \in [0,1] \times \overline{\Omega}.$$

Potom zobrazení $y(t)$ je konstantní, tedy spojité. Zobrazení H je také spojité, jedná se o součet a součin spojitých zobrazení. Zbývá poslední podmínka, tj. pro každé $t \in [0,1]$ platí $y(t) \notin H(t,\partial\Omega)$. Ať $t \in [0,1]$ je libovolné, $y(t) = y$ a dle $(g,\Omega,y) \in \mathcal{M}$ platí $y \notin g(\partial\Omega)$. Z předpokladu $f \restriction_{\partial\Omega} = g \restriction_{\partial\Omega}$ máme pro $x \in \partial\Omega$

$$H(t,x) = tf(x) + (1-t)g(x) = t(f(x) - g(x)) + g(x) = g(x).$$

Dostáváme $H(t,\partial\Omega) = g(\partial\Omega)$ a dohromady $y(t) \notin H(t,\partial\Omega)$. Tedy dle **(HI)**

$$\deg(g,\Omega,y) = \deg(H(0,\cdot),\Omega,y(0)) = \deg(H(1,\cdot),\Omega,y(1)) = \deg(f,\Omega,y).$$

(d4) Nechť $(f,\Omega,y) \in \mathcal{M}$ a položme $r = \operatorname{dist}(y,f(\partial\Omega))$. Dále označme

$$K = \{g \in C(\overline{\Omega}) : \|g - f\|_\infty < r\}.$$

Ať $g \in K$ je zafixované. Nejprve potřebujeme ověřit zda platí $g \in \mathcal{M}$. Pro to stačí ukázat $y \notin g(\partial\Omega)$. Postupujme sporem, ať $y \in g(\partial\Omega)$. Potom existuje $x \in \partial\Omega$ takové, že $g(x) = y$. Dostáváme tak spor

$$\|g(x) - f(x)\| \leq \|g - f\|_\infty < r = \operatorname{dist}(y,f(\partial\Omega)) = \inf_{z\in\partial\Omega} \|y - f(z)\| \leq \|g(x) - f(x)\|.$$

Tedy $\deg(g,\Omega,y)$ je dobře definovaný. Dále pomocí **(HI)** ukážeme rovnost stupňů pro f a g. Položme

$$H(t,x) = tg(x) + (1-t)f(x) \text{ pro každé } (t,x) \in [0,1] \times \overline{\Omega}$$

a $y(t) = y$ pro každé $t \in [0,1]$. Stejně jako v *(d3)* jsou zobrazení H a y spojitá. Zbývá ukázat $y(t) \notin H(t,\partial\Omega)$ resp. $y \notin H(t,\partial\Omega)$ pro každé $t \in [0,1]$. Opět sporem, ať existuje $t \in [0,1]$ takové, že $y \in H(t,\partial\Omega)$. Tedy $tg(x) + (1-t)f(x) = y$ pro nějaké $x \in \partial\Omega$ a lze přepsat na

$$t\,(g(x) - f(x)) = y - f(x).$$

Víme, že platí $y \notin f(\partial\Omega)$. Tedy $t \neq 0$, jinak dostáváme spor. Pokud $t \in (0,1]$ dostáváme spor s $\frac{1}{t} < 1$, neboť nyní lze dělit t a máme odhad

$$\frac{1}{t}\|y - f(x)\| = \|g(x) - f(x)\| \leq \|g - f\|_\infty < r = \operatorname{dist}(y,f(\partial\Omega)) \leq \|y - f(x)\|.$$

Platí tedy podmínka $y(t) \notin H(t,\partial\Omega)$ a dle **(HI)** dostáváme závěr

$$\deg(f,\Omega,y) = \deg(H(0,\cdot),\Omega,y(0)) = \deg(H(1,\cdot),\Omega,y(1)) = \deg(g,\Omega,y).$$

(d5) Nechť $(f,\Omega,y) \in \mathcal{M}$ a položme $r = \operatorname{dist}(y,f(\partial\Omega))$. Ať $z \in B(y,r)$ je libovolné dáno. Z definice r a $B(y,r)$ máme $z \notin f(\partial\Omega)$ a $\deg(f,\Omega,z)$ je dobře definován. Opět pomocí **(HI)** ukážeme rovnost stupňů v bodech y a z. Definujme homotopii $H(t,x) = f(x)$ pro každé $(t,x) \in [0,1] \times \overline{\Omega}$ a zobrazení

$$s(t) = tz + (1-t)y \text{ pro každé } t \in [0,1].$$

Spojitost zobrazení H a s je opět triviálně splněna. Potřebujeme $s(t) \notin H(t,\partial\Omega)$ resp. $s(t) \notin f(\partial\Omega)$ pro každé $t \in [0,1]$. Postupujme obdobně sporem, ať existuje $s(t) \in f(\partial\Omega)$. Tedy $t(z-y) + y = f(x)$ pro nějaké $x \in \partial\Omega$. Dále $t \neq 0$, protože $y \notin f(\partial\Omega)$. Nyní lze dělit t a máme tak spor s $\frac{1}{t} < 1$ z odhadu

$$\frac{1}{t}\|f(x) - y\| = \|z - y\| < r = \operatorname{dist}(y,f(\partial\Omega)) = \inf_{w\in\partial\Omega}\|y - f(w)\| \leq \|y - f(x)\|.$$

Dostáváme $y(t) \notin H(t,\partial\Omega)$ a dle **(HI)** závěr

$$\deg(f,\Omega,y) = \deg(H(0,\cdot),\Omega,s(0)) = \deg(H(1,\cdot),\Omega,s(1)) = \deg(f,\Omega,z).$$

Nyní dokážeme zbylou část tvrzení. Komponentou souvislosti množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme maximálně souvislou podmnožinu A vzhledem k inkluzi. Pokud A je otevřená, potom i její komponenty souvislosti jsou také otevřené. Dále připomeňme vztah křivkové a obyčejné souvislosti pro otevřené množiny. Pro $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou platí, že G je křivkově souvislá právě tehdy, když G je souvislá [5, str. 611, Věta 10.9.18.].

Protože $\partial\Omega$ je uzavřená a zobrazení f je spojité, máme, že $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ je otevřená. Tedy dle předchozího odstavce komponenty souvislosti množiny $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ jsou také křivkově souvislé. Ať C je komponenta souvislosti množiny $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ libovolná dána. Ať $y,z \in C$ jsou různé body. Potom $y,z \notin f(\partial\Omega)$ a tedy $(f,\Omega,y),(f,\Omega,z) \in \mathcal{M}$. Ukážeme, že platí $\deg(f,\Omega,y) = \deg(f,\Omega,z)$. Z křivkové souvislosti existuje spojité zobrazení $s : [0,1] \to C$ takové, že $s(0) = y$ a $s(1) = z$. Definujme homotopii $H(t,x) = f(x)$ pro každé $(t,x) \in [0,1] \times \overline{\Omega}$. Protože křivka s je obsažena v komponentě C a platí $f(\partial\Omega) = H(t,\partial\Omega)$ máme $s(t) \notin H(t,\partial\Omega)$ pro každé $t \in [0,1]$. Zobrazení H a s jsou spojitá. Tedy dle **(HI)** máme

$$\deg(f,\Omega,y) = \deg(H(0,\cdot),\Omega,s(0)) = \deg(H(1,\cdot),\Omega,s(1)) = \deg(f,\Omega,z).$$

(d6) Mějme libovolnou přípustnou trojici (f,Ω,y). Potom $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a omezená. Zobrazení $f(x) - y$ je spojité pro $x \in \overline{\Omega}$. Dále pro každé $x \in \partial\Omega$ platí $y \neq f(x)$, ekvivalentně $0 \neq f(x) - y$. Dostáváme tedy $(f - y,\Omega,0) \in \mathcal{M}$. Pomocí **(HI)** ukážeme rovnost stupňů. Definujme homotopii

$$H(t,x) = f(x) - ty \text{ pro každé } (t,x) \in [0,1] \times \overline{\Omega}.$$

Dále položme zobrazení $s(t) = (1-t)y$ pro každé $t \in [0,1]$. Zobrazení H a s jsou zřejmě spojitá. Nyní ukážeme platnost podmínky $s(t) \notin H(t,\partial\Omega)$ pro každé $t \in [0,1]$. Pro spor předpokládejme, že existují $t \in [0,1]$ a $x \in \partial\Omega$ taková, že $s(t) = H(t,x)$. Tedy $(1-t)y = f(x) - ty$ a upravením získáme $y = f(x)$. To je spor s $(f,\Omega,y) \in \mathcal{M}$. Předpoklady **(HI)** jsou splněny a dostáváme

$$\deg(f,\Omega,y) = \deg(H(0,\cdot),\Omega,s(0)) = \deg(H(1,\cdot),\Omega,s(1)) = \deg(f-y,\Omega,0).$$

Tím je věta dokázána. □

Poznámka. Mějme $(f,\Omega,y) \in \mathcal{M}$. Všimněme si, že Věta 1.3*(d2)* nám dává klíčovou postačující podmínku existence alespoň jednoho řešení rovnice $f(x) = y$ na množině Ω. Vlastnost Věta 1.3*(d4)* hovoří o spojité závislosti stupně $\deg(f,\Omega,y)$ na argumentu zobrazení f, zatímco Věta 1.3*(d5)* hovoří o spojité závislosti na argumentu y. Dále Věta 1.3*(d6)* převádí řešení rovnice $f(x) = y$ na hledání nulových bodů zobrazení $f(x) - y$.

Poznámka. Nabízí se otázka, proč se v definici přípustných trojic neuvažuje také $y \in f(\partial\Omega)$? Odpověď najdeme už v dimenzi $n = 1$. Uvažujme identickou funkci $f(x) = x$ na otevřeném a omezeném intervalu $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Dále uvažujme libovolné $y \in \mathbb{R}$. Pokud je $y \in (0,1)$, potom dle **(N)** máme $\deg(f,\Omega,y) = 1$. Na druhou stranu, pokud je $y \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$, potom dle Věty 1.3*(d2)* musí $\deg(f,\Omega,y) = 0$, neboť víme, že rovnice $f(x) = y$ nemá na intervalu $(0,1)$ řešení. Dostáváme tedy, že na libovolném okolí bod $y = 0$ resp. $y = 1$ stupeň $\deg(f,\Omega,y)$ nabývá obou hodnot 1 a 0. Vyžadujeme-li, aby stupeň $\deg(f,\Omega,y)$ závisel spojitě na argumentu y, není možné jej definovat pro $y \in f(\partial\Omega) = \{0,1\}$.

1.3 Stupeň zobrazení pro C^1 zobrazení

V této kapitole ukážeme, jak se přejde od stupně lineárních zobrazení k C^1 zobrazením. Našim hlavním cílem je Tvrzení 1.6. Nejprve však formulujeme dvě pomocná lemmata.

Lemma 1.4. *Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je spojité na otevřeném okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dále ať f je diferencovatelné v bodě x_0 a platí $J_f(x_0) \neq 0$. Potom existuje poloměr $r_0 > 0$ a koule $B(x_0,r_0) \subset \mathbb{R}^n$ taková, že platí*

$$\deg(f,B(x_0,r_0),f(x_0)) = \operatorname{sgn} J_f(x_0).$$

Důkaz. Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřené okolí bodu x_0, na kterém je zobrazení f spojité. Protože zobrazení f je diferencovatelné v bodě x_0, víme, že platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Dále předpokládáme, že $J_f(x_0) \neq 0$, tedy $\|f'(x_0)\| > 0$. Derivace $f'(x_0)$ je lineární bijekce na $\mathbb{R}^n$. Z funkcionální analýzy [4, str. 17, Tvrzení 60.] víme, že existuje $C > 0$ takové, že pro každé $y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$C\|y\| \leq \|f'(x_0)(y)\|.$$

Z definice limity výše pro $\varepsilon = \frac{C}{2}$ tedy existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in B(x_0,\delta) \subset U$ platí

$$\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| \leq \frac{C}{2}\|x - x_0\|.$$

Definujme $r_0 = \frac{\delta}{2}$. Nyní ověříme rovnost ze znění. Máme tedy $r_0 > 0$ a platí $B(x_0,r_0) \subset B(x_0,\delta) \subset U$. Uveďme, že platí $(f,B(x_0,r_0),f(x_0)) \in \mathcal{M}$. Podmínku $f(x_0) \notin f(\partial B(x_0,r_0))$ ověříme následně. Pomocí homotopie zobrazení f narovnáme na lineární aproximaci určenou derivací $f'(x_0)$. Jako první ukážeme, že platí

$$\deg(f,B(x_0,r_0),f(x_0)) = \deg(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),B(x_0,r_0),f(x_0)). \tag{1}$$

Definujme $s(t) \equiv f(x_0)$ pro každé $t \in [0,1]$ a homotopii H

$$H(t,x) = tf(x)+(1-t)(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)) \text{ pro každé } (t,x) \in [0,1]\times\overline{\partial B(x_0,r_0)}.$$

Zobrazení s a H jsou spojitá. Dále ověříme, že pro každé $t \in [0,1]$ platí $s(t) \notin H(t,\partial B(x_0,r_0))$. Ať $t \in [0,1]$ a $x \in \partial B(x_0,r_0)$ jsou libovolné, tedy $\|x - x_0\| = r_0$. Aplikací trojúhelníkové nerovnosti a odhadů výše dostáváme

$$\begin{aligned}
\|H(t,x) - f(x_0)\| &= \|tf(x) + (1 - t)(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) - f(x_0)\| \\
&= \|f'(x_0)(x - x_0) + t(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0))\| \\
&\geq \|f'(x_0)(x - x_0)\| - \|t(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0))\| \\
&= \|f'(x_0)(x - x_0)\| - t\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| \\
&\geq C\|x - x_0\| - t\frac{C}{2}\|x - x_0\| \\
&= (1 - \frac{t}{2}) \cdot C \cdot r_0.
\end{aligned}$$

Konstanty C a r_0 jsou kladné a $t \in [0,1]$, dostáváme tedy $\|H(t,x) - f(x_0)\| > 0$. Volba $t = 1$ potvrzuje $f(x_0) \notin f(\partial B(x_0,r_0))$. Pomocí **(HI)** máme platnost (1). Dále aplikací Věty 1.3*(d6)* dostáváme

$$\deg(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),B(x_0,r_0),f(x_0)) = \deg(f'(x_0)(x - x_0),B(x_0,r_0),0).$$

Substitucí $z = x - x_0$ posuneme stupeň v argumentu zobrazení a získáme

$$\deg(f'(x_0)(x - x_0),B(x_0,r_0),0) = \deg(f'(x_0)(z),B(0,r_0),0).$$

Na závěr aplikujeme Lemma 1.2 a máme

$$\deg(f'(x_0)(z),B(0,r_0),0) = \operatorname{sgn} J_f(x_0).$$

Tím je důkaz hotov. □

Lemma 1.5. *Nechť $(f,\Omega,y) \in \mathcal{M}$ je přípustná trojice. Dále ať $f \in C^1(\Omega)$ a y je regulární bod tj. $y \notin f(S_f(\Omega))$. Potom množina $f^{-1}(y) \subset \Omega$ je konečná a jedná se o izolované body.*

Důkaz. Ať $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ je regulární bod. Potom řešení rovnice $f(x) = y$ nemohou být na hranici $\partial\Omega$. Dále pro každé $x \in \Omega$ takové, že $f(x) = y$ platí $J_f(x) \neq 0$. Tedy dle Věty o lokálním difeomorfismu (Věta 0.1) máme, že pro každé $x \in \Omega$ takové, že řeší rovnici $f(x) = y$, existuje otevřené okolí U_x bodu x splňující $f^{-1}(y) \cap U_x = \{x\}$. Každé řešení této rovnice je tedy izolovaný bod.

Důsledkem toho množina $f^{-1}(y) \subset \Omega$ musí být konečná. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není a že množina $f^{-1}(y)$ je nekonečná. Víme, že $\overline{\Omega}$ je kompaktní, neboť je uzavřená a omezená. Máme tedy, že $f^{-1}(y)$ je nekonečná podmnožina kompaktního prostoru $\overline{\Omega}$. Odtud $f^{-1}(y)$ má hromadný bod, označme jej $a \in \overline{\Omega}$. Tedy pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$(B(a,\varepsilon) \setminus \{a\}) \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset.$$

Snadno ze spojitosti zobrazení f dostaneme, že i a řeší rovnici, tedy $f(a) = y$. Z $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ však víme, že řešení nemohou být na hranici $\partial\Omega$ a navíc jsou izolovaná. Dostáváme tak spor s definicí hromadného bodu a množina $f^{-1}(y)$ musí být konečná. □

Tvrzení 1.6. *Nechť $(f,\Omega,y) \in \mathcal{M}$ je přípustná trojice. Dále ať $f \in C^1(\Omega)$ a y je regulární bod tj. $y \notin f(S_f(\Omega))$. Potom* ***stupeň zobrazení*** *lze spočíst*

$$\deg(f,\Omega,y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_f(x).$$

Používáme konvenci $\sum_\emptyset = 0$.

Důkaz. Dle Lemmatu 1.5 víme, že $f^{-1}(y) = \{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Body x_i jsou izolované. Pro jisté dostatečně malé $r > 0$ a pro každé $i = 1,\dots,k$ existuje koule $B(x_i,r) \subset \Omega$ taková, že $f^{-1}(y) \cap B(x_i,r) = \{x_i\}$. Bez újmy na obecnosti lze r zvolit tak malé, aby koule $B(x_i,r)$ byly po dvou disjunktní. Protože $f^{-1}(y)$ jsou jediná řešení rovnice $f(x) = y$ pro $x \in \overline{\Omega}$, máme tak

$$y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (B(x_1,r) \cup \dots \cup B(x_k,r)).$$

Dle **(A)** pro koule $B(x_i,r)$ máme

$$\deg(f,\Omega,y) = \sum_{i=1}^{k} \deg(f,B(x_i,r),y).$$

Formálně bychom to dokázali indukcí přes i, neboť víme o aditivitě stupňů pouze mezi dvěma členy. Využitím Lemmatu 1.4 obdržíme

$$\deg(f,\Omega,y) = \sum_{i=1}^{k} \deg(f,B(x_i,r),y) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} J_f(x_i).$$

Tím je tvrzení dokázáno.

□

2. Aplikace stupně zobrazení

V této kapitole pomocí stupně zobrazení dokážeme tvrzení teoretického charakteru. V první části se věnujeme Brouwerově větě a větě s názvem „The hedgehog theorem". V další části řešíme cvičení z nelineární funkcionální analýzy. Následně formulujeme Borsukovu větu. Pomocí ni vyřešíme „The ham sandwich theorem". Na závěr popíšeme vztah mezi stupněm zobrazení a indexem bodu ke křivce z komplexní analýzy.

2.1 Brouwerova věta a jiné aplikace

Následuje známý výsledek jménem Brouwerova věta o pevném bodě.

Věta 2.1 (Brouwer)**.** [3, str. 17, Theorem 3.2] *Nechť* $r > 0$ *a* $f : \overline{B(0,r)} \to \overline{B(0,r)}$ *je spojité zobrazení. Potom zobrazení* f *má pevný bod. Tj. existuje* $x \in \overline{B(0,r)}$ *takové, že* $f(x) = x$*.*

Důkaz. Mějme $r > 0$ a spojité zobrazení $f : \overline{B(0,r)} \to \overline{B(0,r)}$. Předpokládejme, že $f(x) \neq x$ pro každé $x \in \partial \overline{B(0,r)}$, jinak jsme hotovi. Definujme homotopii

$$H(t,x) = x - tf(x) \text{ pro každé } (t,x) \in [0,1] \times \overline{B(0,r)}$$

a zobrazení $y(t) = 0$ pro každé $t \in [0,1]$. Ukážeme, že $y(t) \notin H(t,\partial B(0,r))$ pro každé $t \in [0,1]$.

Pro $t = 1$ a pro každé $x \in \partial B(0,r)$ máme $H(1,x) = x - f(x) \neq 0$, neboť $f(x) \neq x$.

Pro $t \in [0,1)$ a pro každé $x \in \partial B(0,r)$ tj. $\|x\| = r$ máme odhad

$$\|H(t,x)\| = \|x - tf(x)\| \geq \|x\| - t\|f(x)\| = r - t\|f(x)\| \geq r - tr = (1-t)r > 0.$$

Využili jsme trojúhelníkové nerovnosti a odhadu $r \geq \|f(x)\|$ z předpokladu o zobrazení f. Tedy $H(t,x) \neq 0$ a platí $y(t) \notin H(t,\partial B(0,r))$. Dále zobrazení H a y jsou spojitá. Aplikací **(N)** a **(HI)** na $H(0,x) = x$ a $H(1,x) = x - f(x)$ obdržíme

$$1 = \deg(\mathrm{Id},B(0,r),0) = \deg(\mathrm{Id} - f,B(0,r),0).$$

Tedy dle Věty 1.3*(d2)* platí $(\mathrm{Id} - f)^{-1}(0) \neq \emptyset$. Tudíž existuje $x \in B(0,r)$ takové, že $x = f(x)$. Tedy zobrazení f má pevný bod. □

Poznámka. Větu lze rozšířit tak, že místo $\overline{B(0,r)}$ uvažujeme libovolnou neprázdnou kompaktní a konvexní podmnožinu $\mathbb{R}^n$. Dokonce stačí předpokládat, že nahrazená množina je pouze homeomorfní s neprázdnou kompaktní a konvexní množinou [3, str. 17, Theorem 3.2].

Tvrzení 2.2. [1, str. 13, Theorem 3.20] *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená a omezená. Potom* $\partial\Omega$ *není retrakt* Ω*. Tedy neexistuje spojité zobrazení* $r : \overline{\Omega} \to \partial\Omega$ *takové, že* $r = \mathrm{Id}$ *na* $\partial\Omega$*.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že Ω je neprázdná množina. Pro spor předpokládejme, že existuje spojité zobrazení $r : \overline{\Omega} \to \partial\Omega$ takové, že pro každé $x \in \partial\Omega$ platí $r(x) = x$. Zvolme $y \in \Omega$. Víme, že $(\mathrm{Id},\Omega,y) \in \mathcal{M}$. Protože pro každé $x \in \partial\Omega$ platí $r(x) = x$ dostáváme $r(\partial\Omega) = \partial\Omega$. Dále y je z otevřené množiny Ω, a tedy $y \notin \partial\Omega = r(\partial\Omega)$. Spojitost zobrazení r dává $(r,\Omega,y) \in \mathcal{M}$. Dále zobrazení r a Id se rovnají na $\partial\Omega$. Pomocí Věty 1.3*(d3)* a **(N)** dostáváme

$$\deg(r,\Omega,y) = \deg(\mathrm{Id},\Omega,y) = 1.$$

Tedy existuje $x \in \Omega$ takové, že $r(x) = y$. Máme tak spor, neboť r je zobrazení $\overline{\Omega}$ do $\partial\Omega$. □

Lemma 2.3. *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, omezená a bod $0 \in \Omega$. Ať platí $\langle f(x)\ ,\ x\rangle > 0$ pro každé $x \in \partial\Omega$. Potom platí*

$$\deg(f,\Omega,0) = 1.$$

Speciálně existuje $x \in \Omega$ takové, že $f(x) = 0$.

Důkaz. Ať platí předpoklady ze znění lemmatu. Definujme homotopii

$$H(t,x) = tx + (1-t)f(x) \text{ pro každé } (t,x) \in [0,1] \times \overline{\Omega}.$$

Pro každé $x \in \partial\Omega$ máme pomocí Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti odhad

$$0 < \langle f(x)\ ,\ x\rangle \leq |\langle f(x)\ ,\ x\rangle| \leq \|f(x)\| \cdot \|x\|.$$

Tedy pro každé $x \in \partial\Omega$ platí $x \neq 0$ a $f(x) \neq 0$. Položme $y(t) = 0$ pro každé $t \in [0,1]$. Potom y a H jsou spojitá zobrazení. Pro platnost **(HI)** zbývá ověřit platnost podmínky $y(t) \notin H(t,\partial\Omega)$ pro každé $t \in [0,1]$. Pro $x \in \partial\Omega$ máme

$$\begin{aligned}\|H(t,x)\|^2 = \langle H(t,x)\ ,\ H(t,x)\rangle = \langle tx + (1-t)f(x)\ ,\ tx + (1-t)f(x)\rangle = \\ = t^2\|x\|^2 + (1-t)^2\|f(x)\|^2 + 2t(1-t)\langle f(x)\ ,\ x\rangle > 0.\end{aligned}$$

Dostáváme tak $H(t,x) \neq 0$ pro $x \in \partial\Omega$, $t \in [0,1]$. Dle **(HI)** a **(N)** máme závěr

$$\deg(f,\Omega,0) = \deg(\mathrm{Id},\Omega,0) = 1.$$

Zbylá část tvrzení plyne přímo z Věty 1.3*(d2)*. □

Tvrzení 2.4. [3, str. 19, Theorem 3.3] *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení a platí*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\langle f(x)\ ,\ x\rangle}{\|x\|} = \infty.$$

Potom platí $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Tj. zobrazení f je surjekce.

Důkaz. Ať $y \in \mathbb{R}^n$ je libovolný pevně zvolený bod. Z definice limity víme, že pro každé $K \geq 0$ existuje $R > 0$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ splňující $\|x\| > R$ platí $\frac{\langle f(x)\ ,\ x\rangle}{\|x\|} > K$. Položme $K = \|y\|$, potom existuje $\widetilde{R} > 0$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ splňující $\|x\| > \widetilde{R}$ platí $\frac{\langle f(x)\ ,\ x\rangle}{\|x\|} > \|y\|$. Použitím Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti máme

$$\langle f(x)\ ,\ x\rangle > \|y\| \cdot \|x\| \geq |\langle y\ ,\ x\rangle| \geq \langle y\ ,\ x\rangle.$$

Tedy $\langle f(x) - y\ ,\ x\rangle > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\|x\| > \widetilde{R}$. Volme $R = \widetilde{R} + 1$, potom pro každé $x \in \partial B(0,R)$ platí $\langle f(x) - y\ ,\ x\rangle > 0$. Aplikací Lemmatu 2.3 na množinu $B(0,R)$ dostáváme, že existuje $x \in B(0,R)$ takové, že $f(x) - y = 0$. Tedy $f(x) = y$ a zobrazení f je surjektivní. □

Další příklad aplikace stupně zobrazení je „The hedgehog theorem", jinak „The hairy ball theorem".

Tvrzení 2.5 (The hedgehog theorem)**.** [3, str. 20, Theorem 3.4] *Nechť $n \in \mathbb{N}$ je liché, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, omezená a bod $0 \in \Omega$. Nechť $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ je spojité zobrazení. Potom existují $x \in \partial\Omega$ a $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ taková, že $f(x) = \lambda x$.*

Důkaz. Dle Věty 0.2 lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že platí $f \in C(\overline{\Omega})$. Protože $n \in \mathbb{N}$ je liché, pomocí Poznámky, která je za Lemmatem 1.2, platí $\deg(-\mathrm{Id},\Omega,0) = -1$. Z předpokladu na zobrazení f máme $0 \notin f(\partial\Omega)$. Tedy trojice $(f,\Omega,0)$ je přípustná a $\deg(f,\Omega,0)$ je dobře definovaný. Dále definujeme spojité zobrazení $y(t) = 0$ pro každé $t \in [0,1]$.

Pokud $\deg(f,\Omega,0) \neq -1$, definujeme homotopii

$$H(t,x) = (1-t)f(x) - tx \text{ pro každé } (t,x) \in [0,1] \times \overline{\Omega}.$$

Potom máme $H(0,x) = f(x)$ a $H(1,x) = -x$ pro každé $x \in \overline{\Omega}$. Víme, že

$$\deg(f,\Omega,0) \neq \deg(-\mathrm{Id},\Omega,0),$$

a tedy z obměny **(HI)** máme, že není splněna podmínka $y(t) \notin H(t,\partial\Omega)$ pro každé $t \in [0,1]$. Tedy existuje $t_0 \in [0,1]$ takové, že $0 \in H(t_0,\partial\Omega)$. Pokud $t_0 = 0$, potom existuje $x_0 \in \partial\Omega$ takové, že $0 = H(0,x_0) = f(x_0)$. Máme spor s předpokladem $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pokud $t_0 = 1$, potom existuje $x_0 \in \partial\Omega$ takové, že $0 = H(1,x_0) = -x_0$. Máme tak $0 \in \partial\Omega$. Protože Ω je otevřená a obsahuje 0, dostáváme opět spor. Z výše uvedeného tedy platí, že $t_0 \in (0,1)$. Dále existuje $x_0 \in \partial\Omega$ takové, že

$$0 = H(t_0,x_0) = (1-t_0)f(x_0) - t_0x_0.$$

Dostáváme $f(x_0) = \frac{t_0}{1-t_0}x_0$. Hledané $\lambda \in \mathbb{R}$ definujeme jako $\lambda = \frac{t_0}{1-t_0}$. Tedy $\lambda > 0$.

Pokud $\deg(f,\Omega,0) = -1$, definujeme homotopii

$$H(t,x) = (1-t)f(x) + tx \text{ pro každé } (t,x) \in [0,1] \times \overline{\Omega}.$$

Potom máme $H(0,x) = f(x)$ a $H(1,x) = x$ pro každé $x \in \overline{\Omega}$. Z obměny **(HI)** existuje $t_0 \in [0,1]$ takové, že $0 \in H(t_0,\partial\Omega)$. Analogickým způsobem jako v předchozím odstavci vyloučíme možnosti $t_0 = 0$ a $t_0 = 1$. Tedy $t_0 \in (0,1)$ a existuje $x_0 \in \partial\Omega$ takové, že

$$0 = H(t_0,x_0) = (1-t_0)f(x_0) + t_0x_0.$$

Máme $f(x_0) = \frac{-t_0}{1-t_0}x_0$ a volme $\lambda = \frac{-t_0}{1-t_0}$. Tedy $\lambda < 0$ a platí závěr tvrzení. □

Poznámka. Platí Tvrzení 2.5 i pro sudá n? Odpověď je negativní. Už pro prostor $\mathbb{R}^2$, který lze kanonicky ztotožnit s $\mathbb{C}$, tvrzení selže. Jako protipříklad lze za zobrazení f volit rotaci o $\frac{\pi}{2}$ proti směru hodinových ručiček.

Přesněji, za množinu Ω volíme nejjednodušší možnou tedy $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Potom platí, že Ω je otevřená, omezená a bod $0 \in \Omega$. Dále pro každé $x = (x_1,x_2) \in B(0,1)$ definujme zobrazení rotace $f(x) = (-x_2,x_1)$, které je lineární speciálně tedy spojité. Maticově lze psát $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Z lineární algebry víme, že toto zobrazení nemá reálná vlastní čísla. Tedy závěr tvrzení nemůže být splněn.

Pro obecné sudé číslo $n \in \mathbb{N}$ lze za hledaný protipříklad volit zobrazení definované pro každé $x \in B(0,1) \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = (x_2, -x_1, ..., x_n, -x_{n-1}).$$

Lze ověřit analogickým způsobem.

Tvrzení 2.6. *Ať $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ je liché a $f : \partial\Omega \to \partial\Omega$ je spojité zobrazení. Potom existuje $x \in \partial\Omega$ takové, že platí buď $x = f(x)$, nebo $x = -f(x)$.*

Důkaz. Množina $\Omega = B(0,1)$ je otevřená, omezená a obsahuje bod 0. Dále n je liché a $0 \notin \partial\Omega$, a tedy $f : \partial\Omega \to \partial\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ je spojité zobrazení. Z Tvrzení 2.5 dostáváme, že existují $x_0 \in \partial\Omega$ a $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ takové, že $f(x_0) = \lambda x_0$. Dle předpokladu na zobrazení f máme $f(x_0) \in \partial\Omega$.

Víme, že $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, a tedy $\|x_0\| = 1$ a $\|f(x_0)\| = 1$. Rovností

$$1 = \|f(x_0)\| = \|\lambda x_0\| = |\lambda| \cdot \|x_0\| = |\lambda|$$

dostáváme, že $\lambda = \pm 1$. Zdůrazněme, že $x \neq 0$ a $f(x) \neq 0$. Na závěr dostáváme, že platí buď $x = f(x)$, nebo $x = -f(x)$. □

2.2 Cvičení z nelineární funkcionální analýzy

Na následujícím příkladě je vidět uplatnění stupně zobrazení při řešení nelineárních rovnic.

Příklad. *Ukažte, že pro $r > \frac{1}{\sqrt{5}}$ existuje řešení na množině $B(0,r) \subset \mathbb{R}^2$ soustavy*

$$\begin{aligned} 2x + y + \sin(x+y) &= 0 \\ x - 2y + \cos(x+y) &= 0. \end{aligned}$$

Důkaz. Uvažujme $r > \frac{1}{\sqrt{5}}$, $B(0,r) \subset \mathbb{R}^2$ a systém ze zadání. Při vynechání členů $\sin(x+y)$ a $\cos(x+y)$ dostáváme pouze lineární soustavu. To nás vede k definici následující homotopie

$$H(t,(x,y)) = (2x + y + t\sin(x+y), x - 2y + t\cos(x+y))$$

pro každé $(t,x) \in [0,1] \times \overline{B(0,r)}$ a zobrazení $s(t) = (0,0)$ pro každé $t \in [0,1]$. Zobrazení s a H jsou spojitá. Pro použití **(HI)** potřebujeme ověřit, jestli pro každé $t \in [0,1]$ platí $s(t) \notin H(t,\partial B(0,r))$.

Pro $t = 0$ máme novou soustavu

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ x - 2y &= 0. \end{aligned}$$

Maticově lze psát $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Posloupnost sloupcových vektorů matice A je lineárně nezávislá. Z lineární algebry víme, že jediné řešení je $(0,0)$. Ovšem $(0,0) \notin \partial B(0,r)$.

Pro $t \in (0,1]$ a pro spor předpokládejme, že existuje $(x,y) \in \partial B(0,r)$ takové, že $(0,0) = H(t,(x,y))$. Máme tak soustavu

$$\begin{aligned} 2x + y &= -t\sin(x+y) \\ x - 2y &= -t\cos(x+y). \end{aligned}$$

Umocněním na druhou získáme

$$t^2 \sin^2(x+y) = (2x+y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$$
$$t^2 \cos^2(x+y) = (x-2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2.$$

Sečtením dostáváme

$$t^2 = t^2(\sin^2(x+y) + \cos^2(x+y)) = 5(x^2+y^2).$$

Máme tedy $\|(x,y)\|^2 = x^2+y^2 = \frac{t^2}{5}$ a pro $t \in (0,1]$ dostáváme, že $\|(x,y)\|^2 \in (0,\frac{1}{5}]$. Máme tak spor s $(x,y) \in \partial B(0,r)$ pro $r > \frac{1}{\sqrt{5}}$. Tedy dle **(HI)** a Lemmatu 1.2 máme

$$0 \neq \operatorname{sgn}(\det A) = \deg(A,B(0,r),0) = \\ = \deg(H(0,\cdot),B(0,r),s(0)) = \deg(H(1,\cdot),B(0,r),s(1)).$$

Pomocí Věty 1.3*(d2)* tedy existuje řešení v $B(0,r)$ naší soustavy.

Z již dokázaného platí, jestliže soustava má řešení, pak nutně musí být obsažené v kouli $B(0,r)$, kde $r > \frac{1}{\sqrt{5}}$.

□

Tvrzení 2.7. *Nechť $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ a $f : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení, pro které platí $f(x) = x$ pro každé $x \in \partial B(0,1)$. Potom $B(0,1) \subset f(B(0,1))$.*

Důkaz. Ať $y \in B(0,1)$ je pevně zvolený bod. Víme, že $(\mathrm{Id},B(0,1),y) \in \mathcal{M}$. Protože pro každé $x \in \partial B(0,1)$ platí $f(x) = x$, dostáváme, že $f(\partial B(0,1)) = \partial B(0,1)$. Tedy $y \notin \partial B(0,1)$. Dále zobrazení f je spojité, a tedy $(f,B(0,1),y) \in \mathcal{M}$. Z vlastností Věta 1.3*(d3)* a **(N)** máme

$$\deg(f,B(0,1),y) = \deg(\mathrm{Id},B(0,1),y) = 1.$$

Tedy existuje $x \in B(0,1)$ takové, že $f(x) = y$. Dostáváme, že $y \in f(B(0,1))$. □

Formulujeme postačující podmínku pro záměnu limity a stupně.

Tvrzení 2.8. *Nechť $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$, zobrazení $f : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}^n$ je spojité a $y \notin f(\partial B(0,1))$. Nechť $f_k : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení konvergující stejnoměrně k f. Potom platí*

$$\lim_{k\to\infty} \deg(f_k,B(0,1),y) = \deg(f,B(0,1),y).$$

Důkaz. Dle předpokladů ze znění máme $(f,B(0,1),y) \in \mathcal{M}$, tedy $\deg(f,B(0,1),y)$ je dobře definované celé číslo. Z definice stejnoměrné konvergence zobrazení f_k k f na $\overline{B(0,1)}$ máme

$$\lim_{k\to\infty} \sup\{\|f_k(x) - f(x)\|,\ x \in \overline{B(0,1)}\} = \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\infty = 0.$$

Dále položme $r = \operatorname{dist}(y,f(\partial B(0,1)))$. Protože $y \notin f(\partial B(0,1))$, máme $r > 0$. Dle definice limity existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$, platí $\|f_k - f\|_\infty < r$. Vlastnost Věta 1.3*(d4)* ihned dává, že pro každé $k \geq k_0$ je $\deg(f_k,B(0,1),y)$ dobře definovaný a platí

$$\deg(f_k,B(0,1),y) = \deg(f,B(0,1),y).$$

Na závěr tedy platí

$$\lim_{k\to\infty} \deg(f_k,B(0,1),y) = \deg(\lim_{k\to\infty} f_k,B(0,1),y) = \deg(f,B(0,1),y).$$

Tím je důkaz dokončen. □

Tvrzení 2.9. *Nechť $B(0{,}1) \subset \mathbb{R}^n$ a $f : B(0{,}1) \to \mathbb{R}^n$ je homeomorfismus, který je diferencovatelný skoro všude. Potom buď $J_f \geq 0$ skoro všude, nebo $J_f \leq 0$ skoro všude.*

Důkaz. Nechť zobrazení f je diferencovatelné na množině $M = B(0{,}1) \setminus N$ pro nějakou $N \subset \mathbb{R}^n$ splňující $\lambda^n(N) = 0$. Předpokládejme, že existuje $z \in M$ takové, že $J_f(z) < 0$. Chceme ukázat, že pro každé $x \in M$ platí $J_f(x) \leq 0$. Pro spor předpokládejme, že existuje $y \in M$ takové, že $J_f(y) > 0$. Dle Lemmatu 1.4 existuje otevřená koule Ω_z resp. Ω_y obsahující bod z resp. y taková, že

$$\deg(f,\Omega_z,f(z)) = \operatorname{sgn} J_f(z) = -1,$$

$$\deg(f,\Omega_y,f(y)) = \operatorname{sgn} J_f(y) = +1.$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že koule Ω_z a Ω_y jsou disjunktní. Volme otevřenou kouli $\Omega \subset B(0{,}1)$ splňující $\Omega_z \subset \Omega$ a $\Omega_y \subset \Omega$, taková množina Ω jistě existuje, neboť pracujeme v normovaném lineárním prostoru $\mathbb{R}^n$. Pomocí vlastnosti Věta 1.3*(d1)* chceme zjistit stupeň na větší množině Ω. Protože f je homeomorfismus, speciálně bijekce, a platí, že $z \in \Omega_z$, dostáváme platnost podmínky $f(z) \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_z)$. Dle Věty 1.3*(d1)* a předchozího máme

$$\deg(f,\Omega,f(z)) = \deg(f,\Omega_z,f(z)) = -1.$$

Analogickým způsobem ověříme platnost podmínky $f(y) \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_y)$. Pomocí Věty 1.3*(d1)* a předchozího dostáváme

$$\deg(f,\Omega,f(y)) = \deg(f,\Omega_y,f(y)) = +1.$$

Ke sporu nám nyní stačí ukázat, že platí

$$\deg(f,\Omega,f(z)) = \deg(f,\Omega,f(y)).$$

Víme, že $z,y \in \Omega$, kde Ω je otevřená koule, která je triviálně souvislá. Dále homeomorfismus zachovává souvislé množiny. Tedy protože f je homeomorfismus, dostáváme, že $f(\Omega)$ je také souvislá. Navíc $f(\Omega)$ je jedna z komponent souvislosti množiny $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$, která obsahuje $f(z)$ a $f(y)$. Tedy dle Věty 1.3*(d5)* máme

$$\deg(f,\Omega,f(z)) = \deg(f,\Omega,f(y)).$$

Tím je důkaz tvrzení dokončen.

□

2.3 Borsukova věta a její důsledky

V této kapitole vyslovíme bez důkazu Borsukovu větu a dokážeme její dva důsledky. Ukážeme, že eukleidovské prostory jsou homeomorfní právě tehdy, když jsou si rovny. Závěrem jeden z důsledku využijeme k důkazu „The ham sandwich theorem".

Definice. *Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je* ***symetrická*** *vzhledem k počátku, pokud platí $M = -M$. Dále zobrazení $f : M \to \mathbb{R}^n$ nazveme* ***liché****, pokud pro každé $x \in M$ platí $f(-x) = -f(x)$.*

Následující větu uvádíme bez důkazu, neboť důkaz by překročil rozsah této práce. Je potřeba blíže zkoumat definici stupně, lze jej najít v [3, str. 21, Theorem 4.1].

Věta 2.10 (Borsuk)**.** [3, str. 21, Theorem 4.1] *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená, omezená, symetrická a bod* $0 \in \Omega$*. Nechť* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *je spojité a liché zobrazení takové, že* $0 \notin f(\partial\Omega)$*. Potom* $\deg(f,\Omega,0)$ *je liché celé číslo.*

Tvrzení 2.11. [3, str. 22, Corollary 4.1] *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená, omezená, symetrická a bod* $0 \in \Omega$*. Nechť* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *je spojité zobrazení takové, že* $0 \notin f(\partial\Omega)$*. Nechť pro každé* $\lambda \geq 1$ *a pro každé* $x \in \partial\Omega$ *platí* $f(-x) \neq \lambda f(x)$*. Potom* $\deg(f,\Omega,0)$ *je liché celé číslo.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme aplikací Borsukovy věty na lichou část funkce f. Dle předpokladů je zřejmě $(f,\Omega,0) \in \mathcal{M}$ a stupeň $\deg(f,\Omega,0)$ je dobře definovaný. Definujme lichou část zobrazení f jako $g(x) = f(x) - f(-x)$ pro každé $x \in \overline{\Omega}$. Protože množina Ω resp. $\overline{\Omega}$ je symetrická, zobrazení g je dobře definované a spojité na $\overline{\Omega}$. Dále zobrazení g je liché neboť, pro každé $x \in \overline{\Omega}$ platí

$$g(-x) = f(-x) - f(x) = -(f(x) - f(-x)) = -g(x).$$

Potřebujme ověřit podmínku $0 \notin g(\partial\Omega)$. Podmínka ze znění tvrzení pro $\lambda = 1$ dává, že pro každé $x \in \partial\Omega$ platí $f(-x) \neq f(x)$. Tedy pro každé $x \in \partial\Omega$ platí $g(x) = f(x) - f(-x) \neq 0$. Tedy $(g,\Omega,0) \in \mathcal{M}$ a předpoklady Borsukovy věty (Věta 2.10) jsou tak splněny pro zobrazení g. Dostáváme, že $\deg(g,\Omega,0)$ je liché celé číslo.

Pomocí **(HI)** přeneseme tuto vlastnost na zobrazení f. Definujme homotopii

$$H(t,x) = f(x) - tf(-x) \text{ pro každé } (t,x) \in [0,1] \times \overline{\Omega}$$

a zobrazení $y \equiv 0$ na $[0,1]$. Tato zobrazení jsou zřejmě spojitá. Zobrazení H je homotopie mezi f a g. Zbývá ověřit, že pro každé $t \in [0,1]$ platí $0 \notin H(t,\partial\Omega)$. Pro $t = 0$ a $t = 1$ víme, že podmínka platí z předchozího odstavce. Dále pro spor předpokládejme, že existují $t \in (0,1)$ a $x \in \partial\Omega$ taková, že $0 = H(t,x)$. Tedy $0 = f(x) - tf(-x)$. Protože $t \neq 0$, převedeme tuto podmínku na $f(-x) = \frac{1}{t}f(x)$. Dostáváme spor s předpokladem ze znění pro $\lambda = \frac{1}{t}$, neboť $t \in (0,1)$. Dle **(HI)** platí

$$\deg(f,\Omega,0) = \deg(g,\Omega,0),$$

a tedy $\deg(f,\Omega,0)$ je liché celé číslo. □

Fyzikální interpretace následující věty pro $n = 3$ a $m = 2$ zní, že na Zeměkouli existují dva protilehlé body, které mají stejný *tlak* a stejnou *teplotu*. Toto platí za předpokladu, že obě zmíněné veličiny závisí spojitě na prostoru. Tento předpoklad však není vždy splněn.

Tvrzení 2.12 (Borsuk-Ulam)**.** [3, str. 22, Corollary 4.2] *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená, omezená, symetrická a bod* $0 \in \Omega$*. Nechť* $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^m$ *je spojité zobrazení a platí* $m < n$*. Potom existuje* $x \in \partial\Omega$ *takové, že* $f(x) = f(-x)$*.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že pro každé $x \in \partial\Omega$ platí $f(x) \neq f(-x)$. Dle Věty 0.2 uvažujme spojité zobrazení $\widetilde{f}$ rozšiřující f na $\overline{\Omega}$. Zobrazení $\widetilde{f} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ splňuje, že pro každé $x \in \partial\Omega$ platí $\widetilde{f}(x) = f(x)$.

Nyní definujme lichou část zobrazení $\widetilde{f}$ jako zobrazení $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ předpisem

$$g(x) = \widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(-x) \text{ pro každé } x \in \overline{\Omega}.$$

Potom zobrazení g je dobře definované a spojité na $\overline{\Omega}$, neboť zobrazení $\widetilde{f}$ je spojité a množina Ω je symetrická. Dle předpokladu pro spor máme, že pro každé $x \in \partial\Omega$ platí

$$g(x) = \widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(-x) = f(x) - f(-x) \neq 0.$$

Tedy $0 \notin g(\partial\Omega)$. Dále zobrazení g je liché neboť, pro každé $x \in \overline{\Omega}$ platí

$$g(-x) = \widetilde{f}(-x) - \widetilde{f}(x) = -(\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(-x)) = -g(x).$$

Abychom mohli použít teorii stupně pro zobrazení g, je nutné, aby dimenze zdrojového a cílového prostoru byly stejné. Uvažujme proto zobrazení $h : \partial\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definované $h(x) = (g(x),0,\dots,0)$. Potom h je také spojité na $\overline{\Omega}$ a pro každé $x \in \partial\Omega$ platí $h(x) \neq 0$. Dále zobrazení h je liché, neboť na prvních m souřadnicích je g a na zbylých jsou nuly. Ověřili jsme předpoklady Borsukovy věty (Věta 2.10) pro zobrazení h a dostáváme, že $\deg(h,\Omega,0)$ je liché číslo, speciálně není nulové. Dále dle Věty 1.3*(d5)* existuje $r > 0$ takové, že pro každé $y \in B(0,r) \subset \mathbb{R}^n$ platí $\deg(h,\Omega,y) = \deg(h,\Omega,0)$. Tedy pro pevné $y \in B(0,r)$ platí $\deg(h,\Omega,y) \neq 0$. Dle Věty 1.3*(d2)* existuje $z \in \Omega$ takové, že $h(z) = y$. Dostáváme tak inkluzi $B(0,r) \subset h(\overline{\Omega})$. Tato inkluze dává spor s definicí zobrazení h, neboť například bod $(0,\dots,0,\frac{r}{2}) \in B(0,r)$, ale $(0,\dots,0,\frac{r}{2}) \notin h(\overline{\Omega})$. □

Tvrzení 2.13. *Prostor $\mathbb{R}^n$ je homeomorfní s prostorem $\mathbb{R}^m$ právě tehdy, když $m = n$.*

Důkaz. ($\Leftarrow$): Tato implikace je triviální. Pokud $m = n$, za hledaný homeomorfismus volme identické zobrazení.

($\Rightarrow$): Předpokládejme, že $\mathbb{R}^n$ je homeomorfní s $\mathbb{R}^m$ a pro spor předpokládejme, že $m < n$. Existuje tedy homeomorfismus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Jednotková koule $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ je triviálně otevřená, omezená, symetrická a bod $0 \in B(0,1)$. Restrikce f na $\partial B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ je spojitá, neboť f je homeomorfismus. Předpoklady Tvrzení 2.12 jsou splněny a tedy existuje $x \in \partial B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ takové, že $f(x) = f(-x)$. Tedy existuje $x \neq 0$ takové, že $f(x) = f(-x)$. To je ovšem spor s prostotou homeomorfismu f. □

Tvrzení 2.14 („The ham sandwich theorem"). *Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$ měřitelných omezených množin $A_1,\dots,A_n \subset \mathbb{R}^n$. Potom existuje nadrovina, která rozděluje každou z množin $A_1,\dots,A_n$ na dvě stejně objemné části.*

Nyní uvedeme základní myšlenku důkazu. Opět chceme využít Tvrzení 2.12. Pevnému směru $x \in \partial B_{n+1}(0,1)$ přiřadíme nadrovinu, která rozřízne prostor $\mathbb{R}^n$ na dva poloprostory M_x^+ a M_x^-. Následně definujeme zobrazení f po složkách tak, že zobrazení f_i měří objem množiny A_i příslušný poloprostoru M_x^+. Při dané konstrukci směr x, který splňuje $f(x) = f(-x)$, odpovídá právě tomu, že množina A je rozdělena nadrovinou M_x na dvě stejně objemné části. Aplikací Tvrzení 2.12 získáme hledaný směr x.

Důkaz. Pro vektor $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ v tomto důkazu značíme $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Pro každé $x \in \partial B(0,1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definujeme pomocné množiny

$$M_x = \{\widetilde{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \widetilde{y}\ ,\ \widetilde{x} \rangle_n = x_{n+1}\},$$

$$M_x^+ = \{\widetilde{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \widetilde{y}\ ,\ \widetilde{x} \rangle_n > x_{n+1}\},$$
$$M_x^- = \{\widetilde{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \widetilde{y}\ ,\ \widetilde{x} \rangle_n < x_{n+1}\}.$$

Poznamenejme, že množina M_x určuje afinní podprostor dimenze $n-1$ prostoru $\mathbb{R}^n$. Lebesgueova míra množiny M_x je proto nulová. Tento fakt využijeme později v důkazu.

Dále pišme

$$\begin{aligned} M_x^- &= \{\widetilde{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \widetilde{y}\ ,\ \widetilde{x} \rangle_n < x_{n+1}\} = \{\widetilde{y} \in \mathbb{R}^n : -\langle \widetilde{y}\ ,\ \widetilde{x} \rangle_n > -x_{n+1}\} \\ &= \{\widetilde{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \widetilde{y}\ ,\ -\widetilde{x} \rangle_n > -x_{n+1}\} = M_{-x}^+. \end{aligned}$$

Máme tedy, že pro libovolné $x \in \partial B_{n+1}(0,1)$ platí $M_x^- = M_{-x}^+$.

Nyní definujeme zobrazení $f : \partial B(0,1) \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ následovně

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \text{ pro každé } x \in \partial B_{n+1}(0,1),$$

kde pro každé $i = 1, \ldots, n$ definujeme složku

$$f_i(x) = \lambda^n(A_i \cap M_x^+).$$

Úlohu jsme tedy přeformulovali na hledání směru $x \in \partial B_{n+1}(0,1)$, který splňuje $f(x) = f(-x)$, neboť potom pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí

$$\lambda^n(A_i \cap M_x^+) = f_i(x) = f_i(-x) = \lambda^n(A_i \cap M_{-x}^+) = \lambda^n(A_i \cap M_x^-),$$

a tedy nadrovina M_x dělí každou množinu A_i na dvě stejně objemné části.

Nyní chceme ověřit předpoklady Tvrzení 2.12, které nám zařídí existenci hledaného směru x. Množina $B(0,1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je triviálně otevřená, omezená, symetrická a $0 \in B(0,1)$. Zbývá proto pouze ověřit spojitost zobrazení $f : \partial B(0,1) \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$.

Nechť tedy $i \in \{1, \ldots, n\}$ je pevné a pro $z,w \in \partial B_{n+1}(0,1)$ lze funkci f_i přepsat na integrál z charakteristické funkce, pišme proto

$$\begin{aligned} f_i(z) &= \lambda^n(A_i \cap M_z^+) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_i \cap M_z^+}(y)\, \mathrm{d}\lambda^n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_i}(y) \cdot \chi_{M_z^+}(y)\, \mathrm{d}\lambda^n(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus M_w} \chi_{A_i}(y) \cdot \chi_{M_z^+}(y)\, \mathrm{d}\lambda^n(y), \end{aligned}$$

kde jsme v poslední rovnosti využili, že $\lambda^n(M_w) = 0$. Ať $\{x^k\} \subset \partial B_{n+1}(0,1)$ je posloupnost konvergující k nějakému $x \in \partial B_{n+1}(0,1)$. Index k píšeme nahoře, neboť dolní indexy necháme pro složky vektoru. Potřebujeme tedy ověřit, že posloupnost $\{f_i(x^k)\} \subset \mathbb{R}$ konverguje k $f_i(x) \in \mathbb{R}$. Dle rozpisu výše pro $z = x^k$ a $w = x$ máme

$$f_i(x^k) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus M_x} \chi_{A_i}(y) \cdot \chi_{M_{x^k}^+}(y)\, \mathrm{d}\lambda^n(y).$$

Chceme použít Lebesgueovu větu, proto pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme funkci

$$g_k(y) = \chi_{A_i}(y) \cdot \chi_{M^+_{x^k}(y)} \text{ pro každé } y \in \mathbb{R}^n \setminus M_x.$$

Protože množina A_i je měřitelná a poloprostor $M^+_{x^k}$ je také měřitelný, máme měřitelnost funkcí $\chi_{A_i}(y)$ a $\chi_{M^+_{x^k}}(y)$. Tedy pro každé $k \in \mathbb{N}$ je funkce $g_k : \mathbb{R}^n \setminus M_x \to \{0,1\}$ měřitelná. Za integrovatelnou majorantu bereme charakteristickou funkci množiny A_i, neboť pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\chi_{A_i}(y) \cdot \chi_{M^+_{x^k}}(y) \leq \chi_{A_i}(y) \text{ pro každé } y \in \mathbb{R}^n \setminus M_x.$$

Funkce χ_{A_i} je integrovatelná, neboť množina A_i je omezená. Dále hledáme bodovou limitu posloupnosti funkcí g_k. Dle definice g_k nám stačí najít pouze bodovou limitu funkcí $\chi_{M^+_{x^k}}$. Tipem na hledanou bodovou limitou je funkce $\chi_{M^+_x}$. Chceme ověřit, že platí

$$\lim_{k\to\infty} \chi_{M^+_{x^k}}(y) = \chi_{M^+_x}(y) = 1.$$

Nechť $y \in \mathbb{R}^n \setminus M_x$. Dokážeme pouze případ, kdy $y \in M^+_x$. Druhá možnost tj. $y \in M^-_x$ se ukáže analogickým způsobem. Nechť tedy $y \in M^+_x$ a pro spor předpokládejme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $l \in \mathbb{N}$ existuje $k_l \in \mathbb{N}, k_l \geq l$, takové, že platí

$$|\chi_{M^+_{x^{k_l}}}(y) - 1| \geq \varepsilon.$$

Máme, že existuje vybraná podposloupnost $\{x^{k_l}\} \subset \{x^k\}$ splňující $\chi_{M^+_{x^{k_l}}}(y) = 0$. Tedy pro každé $l \in \mathbb{N}$ platí, že $y \notin M^+_{x^{k_l}}$. Z definice množin M ekvivalentně platí $\langle y\ ,\ \widetilde{x^{k_l}}\rangle \leq x^{k_l}_{n+1}$. Připomeňme, že y je pevné a skalární součin je spojitý lineární funkcionál a x^{k_l} konvergují k x. Limitním přechodem, kde l pošleme do nekonečna, dostáváme, že $\langle y\ ,\ \widetilde{x}\rangle \leq x_{n+1}$. Máme $y \notin M^+_x$ což je spor, neboť platí opak. Dostáváme tedy, že bodová limita funkcí g_k je funkce

$$g(y) = \chi_{A_i}(y) \cdot \chi_{M^+_x}(y) \text{ pro každé } y \in \mathbb{R}^n \setminus M_x.$$

Máme tedy splněny předpoklady Lebesgueovy věty a můžeme prohodit limitu a integrál. Na závěr ověříme konvergenci posloupnosti $\{f_i(x^k)\}$. Tedy

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} f_i(x^k) &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus M_x} \chi_{A_i}(y) \cdot \chi_{M^+_{x^k}}(y)\,\mathrm{d}\lambda^n(y) = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus M_x} \lim_{k\to\infty} \chi_{A_i}(y) \cdot \chi_{M^+_{x^k}}(y)\,\mathrm{d}\lambda^n(y) = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus M_x} \chi_{A_i}(y) \cdot \chi_{M^+_x}(y)\,\mathrm{d}\lambda^n(y) = \\
&= f_i(x),
\end{aligned}$$

v poslední rovnosti jsme opět využili rozpisu s volbou $z = w = x$. Tím je důkaz dokončen. □

2.4 Index bodu ke křivce

První myšlenky, které vedly k definici stupně zobrazení, vedly právě přes index bodu ke křivce z komplexní analýzy. V této kapitole prozkoumáme tento vztah. Nejprve však připomeneme definice ze základního kurzu komplexní analýzy.

Křivkou (orientovanou křivkou) v $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení uzavřeného intervalu do $\mathbb{C}$. Je-li $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ křivka, pak

- obrazem křivky rozumíme její obor hodnot, značíme $\langle \varphi \rangle$,
- počátečním bodem křivky rozumíme $\varphi(a)$, koncovým bodem bod $\varphi(b)$,
- křivku φ nazýváme uzavřenou, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$,
- křivku φ nazýváme Jordanovou křivkou, pokud je křivka uzavřená a restrikce $\varphi \restriction [a,b)$ je prosté zobrazení.

Poznámka. Jordanova křivka je ekvivalentně homeomorfní obrazu jednotkového kruhu.

Cesta je po částech hladká křivka. (Tedy má spojitou derivaci vyjma nejvýše konečně mnoha bodů, ve kterých má derivace vlastní jednostranné limity.)

Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je cesta a g je spojité zobrazení na $\langle \varphi \rangle$. Potom definujeme integrál g podél φ jako

$$\int_{\varphi} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b g(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Konečně můžeme připomenout definici indexu bodu k cestě. Nechť φ je uzavřená cesta a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Potom index bodu a vzhledem k cestě φ je definován jako

$$w(\varphi,a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z\,.$$

Poznámka. Index bodu k cestě se dá, pomocí přírůstku logaritmu, rozšířit na index bodu ke křivce. Nám však bude stačit první případ. Pro index bodu k cestě platí, že odpovídá počtu oběhů křivky φ kolem bodu a.

Poznámka. Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je uzavřená křivka. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že platí $a = 0$ a $b = 1$, neboť snadno se najde homeomorfismus intervalu $[0,1]$ na $[a,b]$. Dále na tuto křivku $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ lze nahlížet jako na spojitý obraz orientované jednotkové kružnice $\partial B(0,1) \subset \mathbb{C}$, protože zobrazení $h : s \to e^{2\pi i s}$ je homeomorfismus intervalu $(0,1)$ na $\partial B(0,1) \setminus \{1\}$. Tedy zobrazení f, definované jako $f(z) = \varphi(h^{-1}(z))$ pro $z \neq 1$ a $f(1) = \varphi(1)$, je spojité. Připomeňme, že kladná orientace procházení kružnice je proti směru hodinových ručiček.

V následujícím tvrzení budeme pod integračním znamení místo křivky $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ psát např. $f(\partial B(0,1))$. Čímž myslíme, že definiční obor odpovídající křivky je $\partial B(0,1)$, který procházíme základní orientací tj. proti směru hodinových ručiček. Stejně tak budeme značit index $w(f(\partial B(0,1)),a)$.

Tvrzení 2.15. [3, str. 30-31, Paragraph 6.6] *Nechť $B(0,1) \subset \mathbb{C}$ je jednotkový kruh, kde $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Nechť $(f,B(0,1),a) \in \mathcal{M}$ je přípustná trojice. Dále ať $f \in C^1(B(0,1))$ a a je regulární bod tj. $a \notin f(S_f(B(0,1)))$. Potom platí*

$$\deg(f,B(0,1),a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f(\partial B(0,1))} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = w(f(\partial B(0,1)),a).$$

Důkaz. Dle Lemmatu 1.5 a Tvrzení 1.6 víme, že množina $f^{-1}(a) = \{z_1,\ldots,z_k\}$ je konečná a platí

$$\deg(f,B(0,1),a) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} J_f(z_i).$$

Stačí tedy ukázat

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} J_f(z_i) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f(\partial B(0,1))} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z\,.$$

Vezměme $\varepsilon > 0$ dostatečně malé a uvažujme koule $V_i = B(z_i,\varepsilon)$ takové, že množiny $\overline{V_i} = \overline{B(z_i,\varepsilon)}$ jsou po dvou disjunktní a pro každé $i = 1,\ldots,k$ platí $\overline{V_i} \subset B(0,1)$, pro každé $z \in V_i$ platí $\operatorname{sgn} J_f(z) = \operatorname{sgn} J_f(z_i)$ a restrikce $f \restriction \overline{V_i}$ je homeomorfismus. Poslední dvě podmínky lze splnit pomocí Věty 0.1, neboť a je regulární bod zobrazení f tj. $a \notin f(S_f(B(0,1)))$, ekvivalentně $f^{-1}(a) \cap S_f(B(0,1)) = \emptyset$, a tedy pro každé $i = 1,\ldots,k$ platí, že $J_f(z_i) \neq 0$ tj. derivace $f'(z_i)$ je regulární.

Pro každé $i = 1,\ldots,k$ označme kružnici $S_i = \partial V_i$. Protože $f \restriction \overline{V_i}$ je homeomorfismus, máme, že $f(S_i)$ je homeomorfní obraz kružnice tj. Jordanova křivka taková, že bod a leží uvnitř. Orientace $f(S_i)$ je stejná jako orientace S_i, pokud $J_f(z_i) > 0$ resp. obrácená, pokud $J_f(z_i) < 0$. Dále definujme

$$U = \overline{B(0,1)} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} V_i.$$

Najdeme $\alpha > 0$ takové, že pro každé $z \in U$ platí

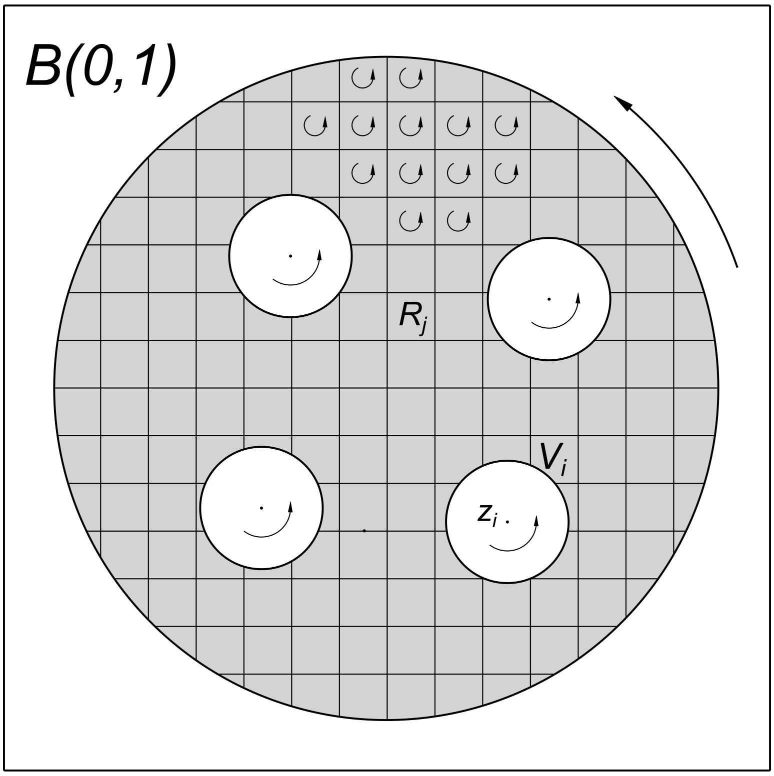
$$\|f(z) - a\| > \alpha. \tag{1}$$

Existenci α nahlédneme sporem. Pro spor předpokládejme, že pro každé $\alpha > 0$ existuje $z \in U$ takové, že platí $\|f(z) - a\| \leq \alpha$. Existuje posloupnost $\{v^l\} \subset U$ taková, že $\|f(v^l) - a\| \leq \frac{1}{l}$. Protože množina U je triviálně kompaktní, existuje vybraná konvergentní podposloupnost $\{v^{l_p}\} \subset \{v^l\}$ a bod $v \in U$ splňující

$$\lim_{p\to\infty} v^{l_p} = v.$$

Limitním přechodem odhadu $\|f(v^l) - a\| \leq \frac{1}{l}$ máme, že $\lim\limits_{l\to\infty} f(v^l) = a$, a tedy $\lim\limits_{p\to\infty} f(v^{l_p}) = a$. Na druhou stranu ze spojitosti zobrazení f máme, že $\lim\limits_{p\to\infty} f(v^{l_p}) = f(v)$. Z jednoznačnosti dostáváme, že platí $f(v) = a$. Víme, že $v \in U$. Máme tedy spor, neboť v množině U se vzor bodu a nenachází, proto takové α existuje.

Protože množina U je kompaktní a zobrazení f je spojité, máme, že zobrazení f je stejnoměrně spojité na U. Pro již nalezené $\alpha > 0$ tedy existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x,y \in U$ splňující $\|x - y\| < \delta$, platí $\|f(x) - f(y)\| < \alpha$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že platí $0 < \delta < \varepsilon$.



Obrázek 2.1: Ilustrační obrázek kruhu $B(0,1)$, množin R_j,V_i a jejich orientace.

Na množinu U naneseme přesnou čtvercovou síť o délce strany $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$. Předpoklad $\delta < \varepsilon$ přidáváme, abychom měli jistotu, že okolí V_i protnou čtvercovou síť. Nyní množinu U rozdělíme na konečný počet čtyřúhelníků resp. deformovaných čtyřúhelníků R_j tak, že

$$\sup_{v,w \in R_j} \|f(v) - f(w)\| < \alpha, \tag{2}$$

kde j probíhá konečnou indexovou množinu J (viz Obrázek 2.1). Čtyřúhelníkem resp. deformovaným čtyřúhelníkem rozumíme množinu

$$R_j = C_j \cap U,$$

kde C_j značí jeden odpovídající přesný čtverec ze čtvercové sítě. V našem kontextu deformovaný znamená, že ze čtverce C_j odečteme pomocí U netriviální část. Čtverec C_j uvažujeme s hranami, neboť dále v důkazu využijeme, že $\partial R_j \subset R_j \subset U$. Z konstrukce je patrné, že hranice ∂R_j je hladká vyjma konečně bodů, jedná se tedy o cestu.

Dále tvrdíme, že obraz $f(\partial R_j)$ neobíhá kolem a. Opět ukážeme sporem, ať obraz $f(\partial R_j)$ obíhá kolem a. Vezměme libovolnou přímku p, která prochází bodem a. Protože obraz $f(\partial R_j)$ obíhá kolem a, existují alespoň dva průsečíky, označme je $f(\xi)$ a $f(\zeta)$, přímky p a křivky $f(\partial R_j)$ takové, že bod a leží na přímce p mezi body $f(\xi)$ a $f(\zeta)$, kde body $\xi,\zeta \in \partial R_j$. Protože platí inkluze $\partial R_j \subset R_j \subset U$, máme dle (1) pro body ξ a ζ odhady

$$\|f(\xi) - a\| > \alpha,$$

$$\|f(\zeta) - a\| > \alpha.$$

Dále víme, že bod a leží na přímce mezi body $f(\xi)$ a $f(\zeta)$, máme tedy rovnost

$$\|f(\xi) - a\| + \|a - f(\zeta)\| = \|f(\xi) - f(\zeta)\|.$$

Využitím již dokázaného a odhadem (2) máme spor

$$2\alpha < \|f(\xi) - a\| + \|a - f(\zeta)\| = \|f(\xi) - f(\zeta)\| \leq \sup_{v,w \in R_j} \|f(v) - f(w)\| < \alpha.$$

Ukázali jsme tedy, že obraz $f(\partial R_j)$ neobíhá kolem a, a proto

$$w(f(\partial R_j),a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f(\partial R_j)} \frac{1}{z-a} \,\mathrm{d}z = 0. \tag{3}$$

Křivkový integrál je aditivní, a tedy součtem přes všechna R_j a přes všechna S_i máme

$$\int\limits_{f(\partial B(0,1))} \frac{1}{z-a} \,\mathrm{d}z = \sum_{j \in J} \int\limits_{f(\partial R_j)} \frac{1}{z-a} \,\mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{f(S_i)} \frac{1}{z-a} \,\mathrm{d}z,$$

neboť všechny vnitřní úsečky (popřípadě oblouky) se v součtu vyskytují právě dvakrát, vždy s navzájem opačnými orientacemi probíhání. Dále dle (3) víme, že

$$\int\limits_{f(\partial B(0,1))} \frac{1}{z-a} \,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{f(S_i)} \frac{1}{z-a} \,\mathrm{d}z.$$

Protože $f(S_i)$ je Jordanova křivka a orientace $f(S_i)$ je dána pomocí $J_f(z_i)$, dostáváme, že $f(S_i)$ obíhá bod a právě jednou a platí

$$w(f(S_i),a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f(S_i)} \frac{1}{z-a} \,\mathrm{d}z = \operatorname{sgn} J_f(z_i).$$

Dohromady máme

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f(\partial B(0,1))} \frac{1}{z-a} \,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f(S_i)} \frac{1}{z-a} \,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} J_f(z_i).$$

Tím je důkaz ukončen. $\square$

Závěr

V této práci jsme čtenáři přiblížili, co je to topologický stupeň zobrazení. Nejprve jsme stupeň axiomatickým způsobem zavedli a následně odvodili jeho vlastnosti. Dále jsme prozkoumali případ diferencovatelných zobrazení a odvodili formuli k jeho počítání. V hlavní části jsme ukázali zejména teoretická tvrzení, která se dají pomocí tohoto nástroje dokázat. Na závěr jsme se věnovali vztahu stupně zobrazení a indexu bodu ke křivce z komplexní analýzy. Hlavní přínos práce je v detailnějším rozpracování důkazů a řešení některých cvičení z nelineární funkcionální analýzy.

Seznam použité literatury

[1] P. Benevieri, M. Furi, M. P. Pera, and M. Spadini. An introduction to topological degree in Euclidean spaces. https://arxiv.org/abs/2304.06463v1, 2023.

[2] L.E.J. Brouwer. Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 71:97–115, 1912.

[3] K. Deimling. *Nonlinear Functional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[4] M. Johanis and J. Spurný. Funkcionální analýza. https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ufa/funkcionalka.pdf, 2022. Verze 15.12.2022.

[5] L. Pick, S. Hencl, J. Spurný, and M. Zelený. Matematická analýza (předběžná verze). https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf, 2023. Verze 21.6.2023.