



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matěj Žádný

**Model APARCH pro finanční časové
řady**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Chtěl bych vyjádřit své upřímné poděkování své vedoucí práce, RNDr. Jitce Zichové, Dr., za její nesmírnou trpělivost, odborné vedení a cenné rady, které mi poskytovala během celé doby psaní této bakalářské práce. Další poděkování patří mé rodině za jejich trpělivost a podporu, zejména v posledních měsících, kdy se nám narodilo naše milované miminko. Jejich pochopení a pomoc mi umožnily věnovat se práci i v náročném období.

Název práce: Model APARCH pro finanční časové řady

Autor: Matěj Žádný

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá modelem APARCH, který dokáže zachytit různé speciální rysy chování finančních časových řad, jako je pákový efekt, neboli asymetrická reakce na pozitivní a negativní šoky. V teoretické části práce nejprve definujeme potřebné pojmy k pochopení modelu APARCH a následně se věnujeme přehledu pravděpodobnostních rozdělení, které lze v modelu použít. V praktické části je model APARCH(1,1) ilustrovaný na simulovaných datech a následně aplikovaný na DJIA index.

Klíčová slova: APARCH, zešikmené Studentovo rozdělení, zešikmené normální rozdělení

Title: The APARCH model for financial time series

Author: Matěj Žádný

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jitka Zichová, Dr., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis deals with the APARCH model, which is capable of capturing various specific features of the behavior of financial time series, such as the leverage effect, i.e., the asymmetric response to positive and negative shocks. In the theoretical part of the thesis, we first define the necessary concepts to understand the APARCH model and then provide an overview of the probabilistic distributions that can be used in the model. In the practical part, the APARCH(1,1) model is illustrated using simulated data and subsequently applied to the DJIA index.

Keywords: APARCH, skew Student's distribution, skew normal distribution

Obsah

Úvod	2
1 Základní pojmy	3
1.1 Stacionarita	3
1.2 Modely typu ARMA	4
2 Modely typu ARCH	7
2.1 Model ARCH(q)	7
2.2 Model GARCH(p, q)	8
2.3 Model APARCH(p, q)	9
2.4 Odhadování parametrů	11
3 Pravděpodobnostní rozdělení	12
3.1 Konstrukce zešikmených rozdělení	12
3.2 Momentová struktura	13
3.3 Normální rozdělení	14
3.4 Studentovo rozdělení	17
4 Simulační studie	21
4.1 Simulace procesu	21
4.2 Rozdělení $N(0,1)$	22
4.3 Zešikmené rozdělení $N(0,1)$	24
4.4 Standardizované Studentovo rozdělení $St(\nu)$	26
4.5 Zešikmené rozdělení $St(\nu)$	28
5 Aplikace na Dow Jonesův index	32
Závěr	39
Seznam použité literatury	40
Seznam obrázků	41
Seznam tabulek	42

Úvod

Modelování časových řad je klíčovou metodou pro analýzu a předpovídání dynamiky finančních dat. Mezi nejpoužívanější přístupy v této oblasti patří autoregresní modely s podmíněnou heteroskedasticitou (ARCH), jejichž základy položil Robert F. Engle v článku (Engle, 1982). Základní myšlenka spočívá v modelování volatility na základě autoregresní funkce jejich minulých hodnot. Zobecněním modelu ARCH vznikl model GARCH (Generalized ARCH) (Bollerslev, 1986), který umožňuje efektivnější modelování volatility. Navzdory úspěchu modelu GARCH při analýze finančních časových řad se ukázalo, že v praxi často nedokážou plně zachytit asymetrické reakce na pozitivní a negativní šoky, jež jsou charakteristické pro finanční data. Tento jev, známý jako pákový efekt, vede k tomu, že negativní šoky mají větší vliv na zvýšení volatility než pozitivní šoky. Abychom mohli takové asymetrie lépe studovat, byl navržen APARCH (Asymmetric Power ARCH), který do modelování volatility zavádí asymetrické reakce na šoky. Tento model, navržený (Ding a kol., 1993), umožňuje nejen zachytit pákový efekt, ale také poskytuje větší flexibilitu díky možnosti volby různých parametrů a rozdělení chybového procesu. Přispívá tak k lepšímu pochopení dynamiky volatility a poskytuje užitečné nástroje pro finanční analytiku a investory.

Cílem této bakalářské práce je podrobně představit model APARCH, jeho vlastnosti a aplikace v oblasti finanční analýzy. V jednotlivých kapitolách jsou postupně popsány základní pojmy a teoretické základy potřebné k porozumění modelu APARCH, následně definice modelu, podmínky stacionarity a způsob odhadu parametrů. Speciální pozornost je věnována přehledu pravděpodobnostních rozdělení, kde je podrobně odvozena momentová struktura, zejména střední hodnoty potřebné pro ověření stacionarity modelu APARCH. Tato odvození nejsou detailně provedena ve studované literatuře. Vlastnosti modelu APARCH jsou dále ilustrovány v simulační studii. Poslední kapitola je zaměřena na analýzu Dow Jonesova indexu, který je jedním z nejvýznamnějších ukazatelů výkonnosti amerického akciového trhu. V závěru jsou shrnuty hlavní poznatky a navrženy možné směry dalšího výzkumu v této oblasti.

1. Základní pojmy

Tato kapitola slouží k zavedení základních pojmů, které potřebujeme pro zavedení modelu APARCH.

Definice 1.1 (Náhodný proces, Prášková (2016)). *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor, $T \subset \mathbb{R}$. Rodina náhodných veličin $\{y_t, t \in T\}$ definovaných na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ se nazývá náhodný proces.*

Za předpokladu $T \subset \mathbb{Z}$ mluvíme o náhodném procesu s diskrétním časem. Pokud $T = [a, b]$, kde $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ říkáme, že $\{y_t, t \in T\}$ je náhodný proces se spojitým časem.

Náhodný proces s diskrétním časem se také nazývá časová řada. Nadále budeme uvažovat pouze časové řady.

1.1 Stacionarita

V analýze časových řad se zaměřujeme na koncept stacionarity, který umožňuje vyjádřit určitou stochastickou ustálenost dané časové řady.

Definice 1.2 (Striktní stacionarita, Cipra (2008)). *Časová řada $\{y_t\}$ je striktně stacionární, jestliže její pravděpodobnostní rozdělení se v čase nemění, tj. pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a pro $h \in \mathbb{Z}$ platí, že vektor $(y_{t_1}, \dots, y_{t_k})$ má stejné rozdělení jako vektor $(y_{t_1+h}, \dots, y_{t_k+h})$.*

Za platnosti definice 1.2 jsou momenty všech řádů invariantní vůči posunutí v čase. Zavedeme ještě definici stacionarity, která vyžaduje pouze invarianci v momentech do druhého řádu.

Definice 1.3 (Slabá stacionarita, Cipra (2008)). *Časová řada $\{y_t\}$ s konečnými druhými momenty se nazývá slabě stacionární, pokud má konstantní střední hodnotu $E(y_t) = \mu$ a je-li $E[(y_s - \mu)(y_t - \mu)]$ funkcí pouze $s - t$.*

Je-li splněna pouze podmínka na kovarianci, mluvíme o kovarianční stacionaritě.

Striktní stacionarita implikuje slabou stacionaritu, pokud $E(|y_t|^2) < \infty$. Navíc pokud je proces gaussovský, pak je mezi silnou a slabou stacionaritou ekvivalence.

Nadále budeme pracovat pouze se slabou stacionaritou.

V analýze časových řad je autokorelační funkce důležitým ukazatelem, neboť poskytuje důležité informace pro identifikování modelu.

K zavedení autokorelační funkce nejdříve zavedeme autokovarianční funkci, která se již objevila v definici 1.3.

Definice 1.4 (Autokovarianční funkce, Cipra (2008)). *Nechť $\{y_t\}$ je slabě stacionární časová řada, kde $E(y_t) = \mu$ a $E(|y_t|^2) < \infty$. Pak autokovarianční funkce pro zpoždění k je*

$$\gamma_k = \text{cov}(y_t, y_{t-k}) = E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] \text{ pro } k \in \mathbb{Z}.$$

Definice 1.5 (Autokorelační funkce, Cipra (2008)). *Autokorelační funkce slabě stacionární časové řady $\{y_t\}$ s konečnými rozptyly pro zpoždění k je*

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\gamma_k}{\sqrt{\text{var}(y_t)\text{var}(y_{t-k})}} = \text{corr}(y_t, y_{t-k}) \text{ pro } k \in \mathbb{Z},$$

kde γ_k je autokovarianční funkce.

Poznámka. Odhad autokorelační funkce je definován ve tvaru

$$r_k = \frac{c_k}{c_0}, \text{ kde } c_k = \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y}) \text{ pro } k = 0, 1, \dots, T-1,$$

kde $\bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$.

Autokovarianční i autokorelační funkce jsou sudé, lze se omezit na $k \geq 0$.

Definice 1.6 (Operátor zpětného posunutí, Cipra (2008)). *Operátor zpětného posunutí L je definovaný předpisem*

$$L^j y_t = L^{j-1}(Ly_t) = L^{j-1}y_{t-1} = y_{t-j}.$$

1.2 Modely typu ARMA

Stochastický model ARMA (AutoRegressive Moving Average) je kombinace dvou složek. První část modelu, autoregresní složka (AR), zohledňuje lineární závislost mezi současnou hodnotou řady $\{y_t\}$ a jejími předchozími hodnotami. Tato složka je užitečná při modelování trendů, sezónních vlivů a dalších dlouhodobých tendencí v datech. Druhá část modelu, klouzavý součet (MA), se zaměřuje na modelování krátkodobých fluktuací a náhodných šumů v datech. Tímto způsobem ARMA kombinuje výhody obou přístupů a umožňuje efektivní modelování různých aspektů časových řad. Nejprve zavedeme bílý šum a lineární proces.

Definice 1.7 (Bílý šum, Cipra (2008)). *Bílý šum $\{\varepsilon_t\}$ je posloupnost nekorelovaných náhodných veličin se střední hodnotou 0 a konstantním konečným rozptylem σ_ε^2 .*

Pokud jsou náhodné veličiny ε_t nezávislé, hovoříme o striktním bílém šumu.

Definice 1.8 (Lineární proces, Cipra (2008)). *Lineární proces je definován jako*

$$y_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots) \varepsilon_t = \psi(L) \varepsilon_t,$$

kde ε_t je bílý šum, $\psi_i, i = 1, 2, \dots$ jsou parametry a L je operátor zpětného posunutí. Navíc se předpokládá, že mocninná řada

$$\psi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m z^m \text{ konverguje pro } |z| \leq 1,$$

kde $\psi_0 = 1$.

Definice 1.9 (Invertibilita, Cipra (2008)). *Pokud můžeme lineární proces přepsat do tvaru*

$$y_t = \pi_1 y_{t-1} + \pi_2 y_{t-2} + \dots + \varepsilon_t,$$

pak se nazývá invertibilní.

Definice 1.10 (MA(q), Cipra (2008)). *Proces klouzavých součtů řádu q MA(q) má tvar*

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} = \theta(L) \varepsilon_t,$$

kde ε_t je bílý šum a $\theta(L) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j L^j$.

Aby se jednalo o MA proces řádu q , je třeba, aby člen θ_q byl nenulový. Proces MA(q) je vždy stacionární. Střední hodnota je nulová a rozptyl je

$$\sigma_y^2 = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_\varepsilon^2.$$

Zároveň proces je invertibilní pokud všechny kořeny polynomu $\theta(z)$ leží vně jednotkového kruhu. MA(q) má autokorelační funkci tvaru

$$\rho_k = \frac{\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} \text{ pro } k = 1, \dots, q,$$

$$\rho_k = 0 \text{ pro } k > q.$$

Definice 1.11 (AR(p), Cipra (2008)). *Autoregresní proces řádu p AR(p) má tvar*

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

nebo ekvivaletně

$$\varphi(L) y_t = \varepsilon_t,$$

kde $\varphi(L) = 1 - \sum_{j=1}^p \varphi_j L^j$, ε_t je bílý šum.

Aby se jednalo o AR proces řádu p , je třeba, aby člen φ_p byl nenulový. Proces AR(p) je vždy invertibilní a je stacionární, jsou-li všechny kořeny polynomu $\varphi(z)$ vně jednotkového kruhu. Střední hodnota je nulová a rozptyl je

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \varphi_1 \rho_1 - \dots - \varphi_p \rho_p}.$$

Autokorelační funkci získáme, pokud vynásobíme rovnici

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

podílem $\frac{y_{t-k}}{\gamma_0}$ a aplikujeme střední hodnotu. Z definice 1.11 plyne, že $E(y_{t-k} \varepsilon_t) = 0$ pro $k > 0$, a tedy dostáváme

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p} \text{ pro } k > 0.$$

Definice 1.12 (ARMA(p, q), Cipra (2008)). *Smíšený proces ARMA(p, q) má tvar*

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

nebo ekvivalentně

$$\varphi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t,$$

kde ε_t je bílý šum.

Proces ARMA(p, q) je stacionární a invertibilní, pokud jsou splněny podmínky stacionarity pro proces AR(p) a invertibility pro proces MA(q). Tedy kořeny polynomů $\varphi(z)$ a $\theta(z)$ leží vně jednotkového kruhu a zároveň pokud polynomy $\varphi(z)$ a $\theta(z)$ nemají společné kořeny. Proces ARMA(p, q) má nulovou střední hodnotu a autokorelační funkci danou předpisem

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p} \quad \text{pro } k > p.$$

2. Modely typu ARCH

V první kapitole jsme zmínili modely AR, MA a ARMA, které předpokládají konstantní rozptyl chybového procesu $\{\varepsilon_t\}$. Tyto modely nejsou schopny zohlednit některé typické vlastnosti finančních časových řad, například pákový efekt, či shlukování volatility. Proto byly zavedeny modely typu ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity), které dnes představují patrně nejúspěšnější nástroj pro modelování finančních časových řad. Poprvé byl tento přístup aplikován Robertem F. Englem při modelování inflace ve Velké Británii (Engle, 1982).

2.1 Model ARCH(q)

Modelování rozptylu časové řady pomocí autoregresní funkce jejích vlastních minulých hodnot je základní myšlenkou procesů ARCH. Necht $\{\varepsilon_t\}$ označuje časovou řadu s reálnými hodnotami. Označme Φ_{t-1} veškerou informaci známou do času $t-1$. Je to σ -algebra generovaná veličinami $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$. Uvažujme náhodný proces

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

kde

$$\begin{aligned} \mu_t &= E(y_t | \Phi_{t-1}), \\ \varepsilon_t &= \sqrt{h_t} z_t, \\ h_t &= \text{var}(y_t | \Phi_{t-1}), \end{aligned}$$

z_t jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny,
 $E(z_t) = 0$ a $\text{var}(z_t) = 1$.

Definice 2.1 (Proces ARCH, Engle (1982)). *Proces $\{\varepsilon_t\}$ se řídí modelem typu ARCH pokud splňuje*

$$E(\varepsilon_t | \Phi_{t-1}) = 0 \text{ a } \text{var}(\varepsilon_t | \Phi_{t-1}) = h_t = h(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \alpha_0, \alpha_1, \dots),$$

kde $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ jsou parametry modelu.

Definice 2.2 (Model ARCH(q), Engle (1982)). *Model ARCH řádu q ARCH(q) je definován podmínkami*

$$\begin{aligned} \varepsilon_t | \Phi_{t-1} &\sim N(0, h_t), \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \end{aligned}$$

kde $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ pro $i = 1, \dots, q$.

2.2 Model GARCH(p, q)

Proces GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity) byl poprvé uveden T. Bollerslevem (Bollerslev, 1986), který vycházel z již zmíněného článku (Engle, 1982). GARCH je zobecnění modelu ARCH, protože zahrnuje nejen minulé kvadratické chyby, ale také minulé hodnoty podmíněných rozptylů, což poskytuje větší flexibilitu při modelování dynamiky volatility ve finančních časových řadách.

Definice 2.3 (Model GARCH, Bollerslev (1986)). *Model GARCH (p, q) je definován podmínkami*

$$\varepsilon_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, h_t), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \\ &= \alpha_0 + A(L) \varepsilon_t^2 + B(L) h_t \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde $p > 0, q > 0, \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q$ a $\beta_i \geq 0, i = 1, \dots, p$.

Pro $p = 0$ dostaneme ARCH(q). Pokud všechny kořeny polynomu $1 - B(z)$ leží vně jednotkového kruhu, lze (2.3) přepsat jako

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 (1 - B(1))^{-1} + A(L) (1 - B(L))^{-1} \varepsilon_t^2 \\ &= \alpha_0 \left(1 - \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{aligned}$$

což dohromady s (2.2) představuje model ARCH(∞). Koeficienty δ_i jsme dostali rozvojem mocninné řady $D(L) = A(L)(1 - B(L))^{-1}$, podle (Bollerslev, 1986)

$$\begin{aligned} \delta_i &= \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j \delta_{i-j} \quad \text{for } i = 1, \dots, q, \\ \delta_i &= \sum_{j=1}^n \beta_j \delta_{i-j} \quad \text{for } i = q + 1, \dots, \end{aligned}$$

$n = \min\{p, i - 1\}$. Pokud platí, že $B(1) < 1$, potom koeficienty δ_i budou klesat pro i větší než $m = \max\{p, q\}$. Pokud $D(1) < 1$, proces GARCH(p, q) lze s libovolnou přesností aproximovat stacionárním ARCH(Q) pro dostatečně velkou hodnotu Q .

Věta 2.1. *Proces GARCH(p, q) definovaný rovnicemi (2.2) a (2.3) je slabě stacionární s hodnotami*

$$E(\varepsilon_t) = 0, \text{ var}(\varepsilon_t) = \alpha_0(1 - A(1) - B(1))^{-1}, \text{ cov}(\varepsilon_s, \varepsilon_t) = 0 \text{ pro } t \neq s,$$

právě tehdy, když $A(1) + B(1) < 1$.

Důkaz. Je proveden v (Bollerslev, 1986).

□

Proces GARCH(p, q) může být také interpretován jako ARMA(m, p). K tomu využijeme ekvivalentní přepis rovnic (2.2) a (2.3)

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \varepsilon_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^p \beta_j \nu_{t-j} + \nu_t, \quad (2.4)$$

$$\nu_t = \varepsilon_t^2 - h_t = (z_t^2 - 1)h_t,$$

kde z_t jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením $N(0,1)$. Lze ukázat, že $\{\nu_t\}$ je posloupnost nekorelovaných náhodných veličin, tedy bílý šum.

Posloupnost $\{\varepsilon_t^2\}$ v GARCH(p, q) je modelována pomocí procesu ARMA(m, p), kde $m = \max(p, q)$.

2.3 Model APARCH(p, q)

Označme logaritmický výnos

$$r_t = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1}) = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right),$$

kde p_t je cena finančního aktiva v čase t . Na základě analýzy logaritmických výnosů finančních aktiv bylo podle Ding a kol. (1993) zjištěno, že tyto výnosy často vykazují korelaci v mocninách absolutní hodnoty. Tedy souvislost mezi

$$|r_t| \text{ a } |r_{t-k}| \text{ nebo } |r_t|^d \text{ a } |r_{t-k}|^d,$$

přičemž nejsilnější korelace je, když $d = 1$. Často se také vyšetřují a vykazují významné autokorelace kvadrátů, tedy korelace mezi

$$r_t^2 \text{ a } r_{t-k}^2.$$

Korelace absolutních hodnot indikuje, že výnosy mají nelineární vztah, což může být důsledek asymetrické reakce na pozitivní a negativní šoky. To je fenomén dobře známý ve finanční literatuře jako pákový efekt výnosů z akciového trhu. Tento efekt naznačuje, že výnosy z akcií vykazují negativní korelaci se změnami výnosové volatility. Jinými slovy, volatilita má tendenci stoupat v reakci na špatné zprávy (tedy výnosy nižší než očekávané) a klesat v reakci na dobré zprávy.

Na základě zmíněných poznatků byl navržen model APARCH (Asymmetric Power ARCH) jako vhodný nástroj pro modelování podmíněné volatility finančních časových řad. Umožňuje zachytit asymetrickou reakci na náhodné šoky, což je důležité v situacích, kdy se očekává, že výnosy budou reagovat různě na pozitivní a negativní události na trhu. Zavedení modelu APARCH do analýzy finančních časových řad přispívá k lepšímu pochopení dynamiky trhu a poskytuje věrohodnější prognózy budoucích cenových pohybů. Díky schopnosti modelu APARCH zachytit nelinearity a asymetrie ve výnosových datech může být tento model užitečným nástrojem pro finanční analytiku a investory při rozhodování o obchodních strategiích a řízení rizik.

Model APARCH zahrnuje různé modifikace a rozšíření původního modelu ARCH, což naznačuje jeho flexibilitu a schopnost přizpůsobit se různorodým aspektům finančních dat. Uvedeme sedm speciálních případů, které dostaneme z obecného modelu APARCH různou volbou parametrů.

Definice 2.4 (Model APARCH, Ding a kol. (1993)). *Proces $\{\varepsilon_t\}$ se řídí modelem APARCH(p, q) pokud splňuje podmínky*

$$\varepsilon_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, h_t),$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} z_t,$$

$$h_t^{\delta/2} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^{\delta/2},$$

kde $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\delta \geq 0$ a $-1 < \gamma_i < 1$ pro $i = 1, \dots, p$ a $j = 1, \dots, q$ a z_t jsou nezávislé náhodně rozdělené veličiny náhodné veličiny s rozdělením $N(0, 1)$.

Při různé volbě parametrů dostaneme speciálně 7 modelů. Jejich odvození je uvedeno v článku (Ding a kol., 1993). Modely jsou následující

- (i) ARCH(p) model při volbě $\delta = 2$ a $\gamma_i = 0$ pro $i = 1, \dots, p$, $\beta_j = 0$ $j = 1, \dots, q$,
- (ii) GARCH(p, q) model při volbě $\delta = 2$ a $\gamma_i = 0$ pro $i = 1, \dots, p$,
- (iii) Taylor-Schwert GARCH(p, q) model při volbě $\delta = 1$ a $\gamma_i = 0$ pro $i = 1, \dots, p$,
- (iv) GJR-GARCH(p, q) model [(Glosten a kol., 1993)] při volbě $\delta = 2$,
- (v) TARARCH(p) model [(Zakoian, 1994)] při volbě $\delta = 1$ a $\beta_j = 0$ pro $j = 1, \dots, q$,
- (vi) NARCH(p) model [(Higgins a Bera, 1992)] při volbě $\gamma_i = 0$ pro $i = 1, \dots, p$, $\beta_j = 0$ pro $j = 1, \dots, q$,
- (vii) log-ARCH(p) model [(Geweke, 1986)] při volbě $\delta \rightarrow 0$.

V článku (Palmitesta a Provasi, 2006) na rozdíl od definice 2.4 neuvažují konkrétní rozdělení náhodných veličin z_t . Uvádějí, že pokud je

$$V = \sum_{i=1}^p \alpha_i E(|z| - \gamma_i z)^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1 \quad (2.5)$$

a $\alpha_0 > 0$, pak je proces $\{\varepsilon_t\}$ kovariančně stacionární a

$$E(h_t^{\delta/2}) = \frac{\alpha_0}{1 - V}.$$

Z definice 2.4 máme

$$E(h_t^{\delta/2}) = E \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^{\delta/2} \right).$$

Lze ukázat, že $E(h_t^{\delta/2}) = \mu$ je konstanta nezávislá na čase. Po dosazení $\varepsilon_t = \sqrt{h_t} z_t$ dostáváme s využitím nezávislosti h_t a z_t a stejného rozdělení veličin z_t

$$\mu = \alpha_0 + \mu \sum_{i=1}^p \alpha_i E(|z| - \gamma_i z)^\delta + \mu \sum_{j=1}^q \beta_j.$$

Odtud plyne

$$E(h_t^{\delta/2}) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i E(|z| - \gamma_i z)^\delta - \sum_{j=1}^q \beta_j}.$$

Upozorňujeme, že v tomto vzorci je v článku (Palmitesta a Provasi, 2006) chyba. Hodnota V zřejmě závisí na rozdělení náhodné veličiny z . Lze volit například $N(0,1)$ jako v definici 2.4 nebo Studentovo t rozdělení, které mají hustotu symetrickou kolem 0. Empirické studie, jak ukázali (Palmitesta a Provasi, 2006), naznačují vhodnost použití zešíkmených variant normálního rozdělení $N(0,1)$ a zejména Studentova t -rozdělení.

2.4 Odhadování parametrů

V této kapitole se zaměříme na odhadování parametrů v obecném modelu APARCH bez specifikace pravděpodobnostního rozdělení. Postupujeme podle metodiky uvedené v článku (Palmitesta a Provasi, 2006). Nechť máme pozorování řady y_1, \dots, y_T . Připomeňme, že

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}}, \quad y_t = \mu_t + \varepsilon_t.$$

Označme hustotu náhodných veličin z_t jako $g(z_t)$. Hustota náhodných veličin y_t je pak

$$f(y_t) = g\left(\frac{y_t - \mu_t}{\sqrt{h_t}}\right) \frac{1}{\sqrt{h_t}}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Označme θ vektor všech parametrů modelu. Věrohodnotstní funkce je

$$L(\theta) = \prod_{t=1}^T f(y_t).$$

Logaritmická věrohodnotstní funkce je

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \log L(\theta) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t) \\ &= \sum_{t=1}^T \log \left[g\left(\frac{y_t - \mu_t}{\sqrt{h_t}}\right) \frac{1}{\sqrt{h_t}} \right] \\ &= \sum_{t=1}^T \left[\log g\left(\frac{y_t - \mu_t}{\sqrt{h_t}}\right) - \frac{1}{2} \log h_t \right] \end{aligned}$$

Podmíněná střední hodnota μ_t může být modelována jako ARMA proces, což umožňuje flexibilnější a přesnější modelování střední hodnoty, zejména pokud má časová řada složité typy závislosti. Avšak nejjednodušší přístup je předpokládat, že μ_t je konstanta, a přidáme do modelu jeden další parametr μ . Tedy například pro APARCH(1,1) dostáváme $\theta = (\mu, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta)$. Pro odhad parametrů modelu APARCH metodou maximální věrohodnoti lze použít softwarové prostředí R (balíček "rugarch"). Tento balíček v R nabízí široké možnosti pro aplikaci GARCH modelů včetně jejich rozšíření na APARCH, což budeme využívat ve čtvrté a páté kapitole.

3. Praviděpodobnostní rozdělení

V článku Fernández a Steel (1998) představili metodu, jak zavést zešikmení do symetrických rozdělení. Tento přístup umožňuje pravděpodobnostním modelům flexibilněji zachytit asymetrii v datech. Pokud máme symetrickou hustotu $g(x)$, která je definována na reálných číslech a je symetrická okolo nuly, lze tuto hustotu zešikmit přidáním škálovacích faktorů, které zvýrazní pravděpodobnosti hodnot příslušné náhodné veličiny ve specifických oblastech.

3.1 Konstrukce zešikmených rozdělení

Nechť $g(x)$ je hustota symetrická kolem nuly a kladná na \mathbb{R} . Zavedeme parametr $\kappa > 0$ a položíme

$$f(x) = \frac{2}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} g(\kappa^{-\text{sgn}(x)} x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

$f(x)$ nazveme zešikmená hustota. Pro $\kappa = 1$ je zřejmě $f(x) = g(x)$. Odvození distribuční funkce $F(x)$ z hustoty $f(x)$ provedeme zvlášť pro $x \leq 0$ a pro $x > 0$, abychom odstranili znaménkovou funkci $\text{sgn}(x)$. Pro $x \leq 0$ máme

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{2}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} g(\kappa t) dt,$$

zavedeme substituci $u = \kappa t$ a dostaneme

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\kappa x} \frac{2}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} g(u) \frac{du}{\kappa} = \frac{2}{1 + \kappa^2} G(\kappa x).$$

Pro $x > 0$ máme

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{2}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} g\left(\frac{t}{\kappa}\right) dt.$$

Když využijeme, že $\int_{-\infty}^x f(t) dt = 1 - \int_x^{\infty} f(t) dt$ a uděláme substituci $u = \frac{t}{\kappa}$, tak s využitím symetrie hustoty g kolem nuly dostaneme

$$F(x) = 1 - \int_{-\infty}^{-x/\kappa} \frac{2}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} g(u) \kappa du.$$

Po úpravě

$$F(x) = 1 - \frac{2}{1 + \kappa^{-2}} G\left(\frac{-x}{\kappa}\right).$$

Distribuční funkce zešikmeného rozdělení s hustotou $f(x)$ je tedy tvaru

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{1 + \kappa^2} G(\kappa x) & \text{pro } x \leq 0, \\ 1 - \frac{2}{1 + \kappa^{-2}} G\left(\frac{-x}{\kappa}\right) & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Odvození kvantilové funkce $F^{-1}(p)$ z distribuční funkce $F(x) = \frac{2}{1 + \kappa^2}G(\kappa x)$ pro $x \leq 0$ je následující. Necht $x = F^{-1}(p)$ Zřejmě

$$p = \frac{2}{1 + \kappa^2}G(\kappa x),$$

$$G(\kappa x) = \frac{1 + \kappa^2}{2}p,$$

$$x = \frac{1}{\kappa}G^{-1}\left(\frac{1 + \kappa^2}{2}p\right).$$

Tedy

$$F^{-1}(p) = \frac{1}{\kappa}G^{-1}\left(\frac{1 + \kappa^2}{2}p\right) \text{ pro } p \leq \frac{1}{1 + \kappa^2}.$$

Pro distribuční funkci $F(x) = 1 - \frac{2}{1 + \kappa^{-2}}G\left(-\frac{x}{\kappa}\right)$, kde $x > 0$, dostáváme pro $x = F^{-1}(p)$

$$1 - p = \frac{2}{1 + \kappa^{-2}}G\left(-\frac{x}{\kappa}\right),$$

$$G\left(-\frac{x}{\kappa}\right) = \frac{1 + \kappa^{-2}}{2}(1 - p),$$

$$x = -\kappa G^{-1}\left(\frac{1 + \kappa^{-2}}{2}(1 - p)\right).$$

Tedy

$$F^{-1}(p) = -\kappa G^{-1}\left(\frac{1 + \kappa^{-2}}{2}(1 - p)\right) \text{ pro } p > \frac{1}{1 + \kappa^2}.$$

Pokud položíme $\kappa = 1$, kvantilová funkce má tvar

$$F^{-1}(p) = \begin{cases} G^{-1}(p), & p \leq \frac{1}{2}, \\ -G^{-1}(1 - p), & p > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Zřejmě $G^{-1}(p) = -G^{-1}(1 - p)$ pro $0 < p < 1$, což je v souladu s symetrií hustoty $g(x)$ kolem 0.

3.2 Momentová struktura

Pro momenty zešikmeného rozdělení náhodné veličiny x ukážeme, že platí

$$E(x^r) = 2E^+(x^r) \frac{\kappa^{r+1} + \frac{(-1)^r}{\kappa^{r+1}}}{\kappa + \frac{1}{\kappa}}, \quad (3.2)$$

kde

$$E^+(x^r) = \int_0^\infty x^r g(x) dx, \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

$$E(x^r) = \int_{-\infty}^\infty x^r f(x) dx = \frac{2}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} \int_{-\infty}^0 x^r g(\kappa x) dx + \frac{2}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} \int_0^\infty x^r g\left(\frac{x}{\kappa}\right) dx.$$

Pro první integrál použijeme substituci $\kappa x = u$ a pro druhý integrál použijeme substituci $x/\kappa = u$. Tím získáme

$$E(x^r) = \frac{2}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} \frac{1}{\kappa^{r+1}} \int_{-\infty}^0 u^r g(u) du + \frac{2}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} \kappa^{r+1} \int_0^{\infty} u^r g(u) du.$$

V prvním integrálu využijeme, že g je sudá funkce, abychom dostali integrál od nuly do nekonečna ve tvaru

$$\int_0^{\infty} (-u)^r g(u) du = (-1)^r \int_0^{\infty} u^r g(u) du.$$

Víme, že $E^+(x^r) = \int_0^{\infty} x^r g(x) dx$, a tedy dostáváme

$$E(x^r) = \frac{(-1)^r}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} 2E^+(x^r) + \frac{\kappa^{r+1}}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} 2E^+(x^r)$$

a po vytknutí $2E^+(x^r)$ dostaneme (3.2). Pro $\kappa = 1$ máme v (3.2)

$$E(x^r) = 2E^+(x^r) \frac{1 + (-1)^r}{2},$$

což je rovno nule pro liché r a $2E^+(x^r)$ pro r sudé.

3.3 Normální rozdělení

Nechť náhodná veličina z má rozdělení $N(0,1)$, pak

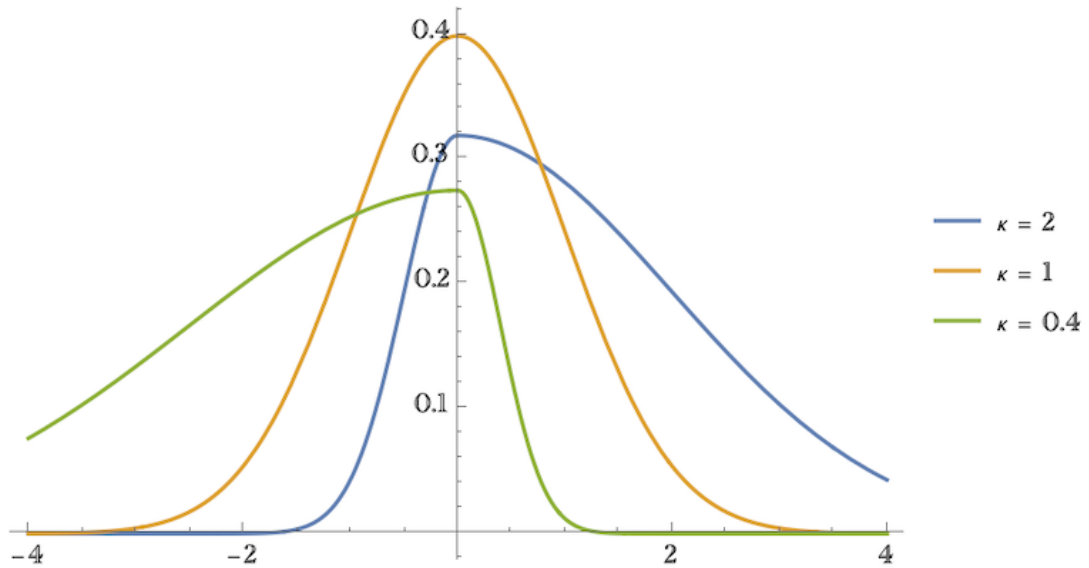
$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, z \in \mathbb{R}$$

a zešikmené normální rozdělení $N_{\kappa}(0,1)$ má podle (3.1) hustotu

$$f(z) = \frac{2}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\kappa z)^2} \text{ pro } z \leq 0.$$

$$f(z) = \frac{2}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\kappa}\right)^2} \text{ pro } z > 0,$$

Pokud $\kappa = 1$, $f(z)$ je hustota normovaného normálního rozdělení. Když $\kappa > 1$, hustota je rozšířena pro kladné hodnoty z a zúžena pro záporné hodnoty z , tedy zešikmená doprava. Naopak, když $\kappa < 1$, hustota je rozšířena pro záporné hodnoty z a zúžena pro kladné hodnoty z , tedy zešikmená doleva.



Obrázek 3.1: Hustoty několika zešikmených normálních rozdělení.

Dříve jsme dokázali, že $E(z^r) = 2E^+(z^r) \frac{(-1)^r}{\kappa^{r+1} + \frac{1}{\kappa}}$, toho využijeme při počítání momentů zešikmeného normálního rozdělení. Po dosazení do (3.3) máme

$$E^+(z^r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty z^r e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

použijeme substituci $\frac{z^2}{2} = u \Rightarrow z dz = du$, $z = \sqrt{2u}$. Po dosazení dostáváme

$$E^+(z^r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty 2^{r/2} u^{r/2} e^{-u} \frac{du}{\sqrt{2u}} = \frac{2^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u^{\frac{r-1}{2}} e^{-u} du.$$

Využijeme gama funkci a dostáváme

$$E^+(z^r) = \frac{2^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right).$$

Celkem podle (3.2)

$$E(z^r) = \frac{\kappa^{r+1} + \frac{(-1)^r}{\kappa^{r+1}}}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} \frac{2^{r/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right).$$

Pro $\kappa = 1$ dostaneme momenty rozdělení $N(0,1)$

$$E(z^r) = 0 \text{ pro } r \text{ liché, } E(z^r) = \frac{2^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) \text{ pro } r \text{ sudé.}$$

Speciálně pro $r = 2$ dostáváme

$$E(z^2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 1,$$

tedy $\text{var}(z)$ se rovná 1.

Pro ověření stacionarity v modelu APARCH potřebujeme pro kontrolu podmínky stacionarity (2.5) spočítat $E(|z| - \gamma z)^\delta$. Nechť $z \sim N_\kappa(0,1)$. Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (|z| - \gamma z)^\delta f(z) dz \\ &= \frac{2}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 (-z)^\delta (1 + \gamma)^\delta e^{-\frac{(\kappa z)^2}{2}} dz + \int_0^{\infty} z^\delta (1 - \gamma)^\delta e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\kappa}\right)^2} dz \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} (I_1 + I_2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

V integrálu I_1 uděláme nejprve substituci $z = -w$, abychom upravili integrační meze, a dostáváme

$$\int_{-\infty}^0 (-z)^\delta (1 + \gamma)^\delta e^{-\frac{(\kappa z)^2}{2}} dz = - \int_0^{\infty} w^\delta (1 + \gamma)^\delta e^{-\frac{(\kappa w)^2}{2}} dw = \int_0^{\infty} w^\delta (1 + \gamma)^\delta e^{-\frac{(\kappa w)^2}{2}} dw.$$

Dále použijeme substituci $\frac{(\kappa w)^2}{2} = u$ a dostáváme

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} (1 + \gamma)^\delta \left(\frac{\sqrt{2u}}{\kappa} \right)^\delta e^{-u} \frac{du}{\kappa \sqrt{2u}} \\ &= (1 + \gamma)^\delta \kappa^{-(\delta+1)} 2^{\frac{\delta-1}{2}} \int_0^{\infty} u^{\frac{\delta-1}{2}} e^{-u} du \\ &= (1 + \gamma)^\delta \kappa^{-(\delta+1)} 2^{\frac{\delta-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right). \end{aligned}$$

V integrálu I_2 použijeme substituci $\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\kappa}\right)^2 = u$ a máme

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} (\sqrt{2u})^\delta \kappa^\delta (1 - \gamma)^\delta e^{-u} \frac{du \kappa}{\sqrt{2u}} \\ &= (1 - \gamma)^\delta \kappa^{\delta+1} 2^{\frac{\delta-1}{2}} \int_0^{\infty} u^{\frac{\delta-1}{2}} e^{-u} du \\ &= (1 - \gamma)^\delta \kappa^{\delta+1} 2^{\frac{\delta-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right). \end{aligned}$$

Po sečtení obou integrálů a dosazení do (3.4) je

$$E(|z| - \gamma z)^\delta = \frac{2^{\frac{\delta}{2}}}{\left(\kappa + \frac{1}{\kappa}\right) \sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \left[(1 + \gamma)^\delta \kappa^{-(\delta+1)} + (1 - \gamma)^\delta \kappa^{\delta+1} \right]. \quad (3.5)$$

Pro $\kappa = 1$ dostáváme hodnotu pro z s rozdělením $N(0,1)$:

$$E(|z| - \gamma z)^\delta = \frac{2^{\frac{\delta}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \left[(1 + \gamma)^\delta + (1 - \gamma)^\delta \right]. \quad (3.6)$$

3.4 Studentovo rozdělení

Hustota Studentova rozdělení o ν stupních volnosti je

$$h(y) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{y^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, y \in \mathbb{R},$$

kde gama funkce poskytuje normalizační faktory a činitel $\left(1 + \frac{y^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$ způsobuje těžší chvosty než má normální rozdělení, zvláště pro nižší hodnoty ν . S rostoucím počtem stupňů volnosti se $h(y)$ blíží k hustotě rozdělení $N(0,1)$. Hustota Studentova rozdělení je symetrická kolem nuly a první dva momenty jsou

$$E(y) = 0 \text{ pro } \nu > 1$$

$$\text{var}(y) = \frac{\nu}{\nu - 2} \text{ pro } \nu > 2.$$

Náhodnou veličinu y budeme transformovat, abychom dostali jednotkový rozptyl. Položme

$$t(y) = z = \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu}} y.$$

Označme $\tau = t^{-1}$ a s využitím věty o monotónní transformaci náhodné veličiny dostáváme standardizované Studentovo rozdělení $\text{St}(\nu)$ s hustotou

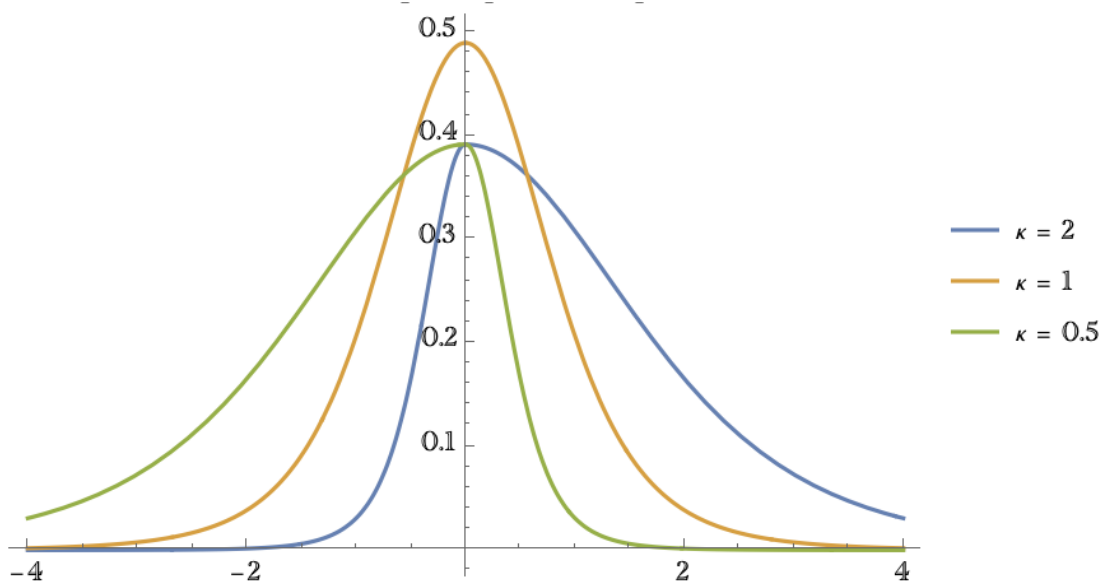
$$g(z) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{(\nu - 2)\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{z^2}{\nu - 2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, z \in \mathbb{R}.$$

Zešikmené standardizované Studentovo rozdělení $\text{St}_\kappa(\nu)$ má podle (3.1) hustotu

$$f(z) = \frac{2}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{(\nu - 2)\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{1}{\nu - 2}(\kappa z)^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \text{ pro } z \leq 0,$$

$$f(z) = \frac{2}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{(\nu - 2)\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{1}{\nu - 2}\left(\frac{z}{\kappa}\right)^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \text{ pro } z > 0.$$

Pro $\kappa = 1$ je $f(z)$ hustota standardizovaného Studentova rozdělení. Když $\kappa > 1$, hustota zešikmená doprava. Naopak, když $\kappa < 1$, hustota je zešikmená doleva.



Obrázek 3.2: Hustoty několika zešikmených $St_\kappa(5)$.

Pro výpočet $E(z^r)$ opět využijeme, že $E(z^r) = 2E^+(z^r) \frac{\kappa^{r+1} + \frac{(-1)^r}{\kappa^{r+1}}}{\kappa + \frac{1}{\kappa}}$. Podle (3.3) máme

$$E^+(z^r) = \int_0^\infty z^r \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{(\nu-2)\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{z^2}{\nu-2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dz.$$

Zavedeme substituci $\frac{z^2}{\nu-2} = u \Rightarrow dz = \frac{du\sqrt{\nu-2}}{2\sqrt{u}}$. Po substituci máme

$$\begin{aligned} E^+(z^r) &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) (\nu-2)^{r/2}}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}}{(1+u)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}} du, \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) (\nu-2)^{r/2}}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{u^{(\frac{r+1}{2})-1}}{(1+u)^{(\frac{r+1}{2})+\frac{\nu-r}{2}}} du. \end{aligned}$$

Použijeme alternativní definici beta funkce (transformací $x = \frac{t}{1-t}$, bychom dostali klasickou definici),

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx \text{ a } B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

a dostáváme

$$E^+(z^r) = \frac{(\nu-2)^{r/2}}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-r}{2}\right).$$

Celkem podle (3.2) dostáváme

$$E(z^r) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-r}{2}\right) (\nu-2)^{r/2} \kappa^{r+1} + \frac{(-1)^r}{\kappa^{r+1}}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \left(\kappa + \frac{1}{\kappa}\right)}, \text{ pro } \nu > r.$$

Pro $\kappa = 1$ dostaneme momenty rozdělení $\text{St}(\nu)$

$$E(z^r) = 0 \text{ pro } r \text{ liché, } E(z^r) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-r}{2}\right) (\nu-2)^{r/2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \text{ pro } r \text{ sudé.}$$

Speciálně pro $r = 2$ dostáváme

$$E(z^2) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-2}{2}\right) (\nu-2)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\nu-2}{2}\right) (\nu-2)}{\left(\frac{\nu-2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-2}{2}\right)} = 1,$$

kde jsme využili, že

$$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\nu-2}{2} + 1\right) = \left(\frac{\nu-2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-2}{2}\right).$$

Tedy pro $r=2$ se $\text{var}(z)$ rovná 1.

Pro ověření stacionarity v modelu APARCH potřebujeme spočítat $E(|z| - \gamma z)^\delta$ kvůli kontrole (2.5). Necht $z \sim \text{St}_\kappa(\nu)$. Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (|z| - \gamma z)^\delta f(z) dz \\ &= \frac{2}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{(\nu-2)\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[\int_{-\infty}^0 (-z)^\delta (1 + \gamma)^\delta \left(1 + \frac{1}{\nu-2} (\kappa z)^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dz \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{\infty} z^\delta (1 - \gamma)^\delta \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{z}{\kappa}\right)^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dz \right] \\ &= \frac{2}{\kappa + \frac{1}{\kappa}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{(\nu-2)\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} (I_1 + I_2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pro integrál I_1 nejprve provedeme substituci $z = -w$. Stejně jako v případě rozdělení $N_\kappa(0,1)$. Máme pak I_1 ve tvaru

$$\int_0^{\infty} w^\delta (1 + \gamma)^\delta \left(1 + \frac{1}{\nu-2} (\kappa w)^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dw.$$

Dále využijeme substituci $\frac{(\kappa w)^2}{\nu-2} = u$ a dostáváme

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left(\frac{\sqrt{u(\nu-2)}}{\kappa}\right)^\delta (1 + \gamma)^\delta (1 + u)^{-\frac{\nu+1}{2}} \frac{du \sqrt{\nu-2}}{2\kappa \sqrt{u}} \\ &= \frac{1}{2} (1 + \gamma)^\delta \kappa^{-(\delta+1)} (\nu-2)^{\frac{\delta+1}{2}} \int_0^{\infty} \frac{u^{\frac{\delta-1}{2}}}{(1+u)^{\frac{\nu+1}{2}}} du \\ &= \frac{1}{2} (1 + \gamma)^\delta \kappa^{-(\delta+1)} (\nu-2)^{\frac{\delta+1}{2}} \int_0^{\infty} \frac{u^{(\frac{\delta+1}{2})-1}}{(1+u)^{(\frac{\delta+1}{2})+\frac{\nu-\delta}{2}}} du \\ &= \frac{1}{2} (1 + \gamma)^\delta \kappa^{-(\delta+1)} (\nu-2)^{\frac{\delta+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Pro integrál I_2 uděláme substituci $\frac{z^2}{\kappa^2(\nu-2)} = u$ a dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(\sqrt{u(\nu-2)\kappa} \right)^\delta (1-\gamma)^\delta (1+u)^{-\frac{\nu+1}{2}} \frac{du\kappa\sqrt{(\nu-2)}}{2\sqrt{u}} \\ &= \frac{1}{2}(1-\gamma)^\delta \kappa^{\delta+1} (\nu-2)^{\frac{\delta+1}{2}} \int_0^\infty \frac{u^{\left(\frac{\delta+1}{2}\right)-1}}{(1+u)^{\left(\frac{\delta+1}{2}\right)+\frac{\nu-\delta}{2}}} du \\ &= \frac{1}{2}(1-\gamma)^\delta \kappa^{\delta+1} (\nu-2)^{\frac{\delta+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Po sečtení integrálů I_1 , I_2 a dosazení do (3.7) máme

$$E(|z| - \gamma z)^\delta = \frac{(\nu-2)^{\frac{\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\delta}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \left(\kappa + \frac{1}{\kappa}\right)} \left[(1+\gamma)^\delta \kappa^{-(\delta+1)} + (1-\gamma)^\delta \kappa^{\delta+1} \right]. \quad (3.8)$$

Pro $\kappa = 1$ máme

$$E(|z| - \gamma z)^\delta = \frac{(\nu-2)^{\frac{\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\delta}{2}\right)}{2\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[(1+\gamma)^\delta + (1-\gamma)^\delta \right], \quad (3.9)$$

což je hodnota ve standardizovaném Studentově rozdělení.

4. Simulační studie

V této kapitole se zaměříme na simulaci modelu APARCH(1,1) s různým rozdělením standardizovaných reziduí z_t , která jsme uvedli v předchozí kapitole. Délka simulovaných časových řad bude 1000 pozorování a použijeme pevně zvolené parametry pro jednotlivé simulace, u kterých budeme kontrolovat, zda splňují podmínku stacionarity (2.5). Na základě generované řady v jednotlivých modelech odhadneme parametry a posoudíme přesnost odhadů. Potom budeme předpovídat odhadnutým modelem na 5 budoucích obdobích.

K simulování použijeme volně dostupné prostředí RStudio Team (2020) a v něm programovací jazyk R Core Team (2023). Využijeme knihovnu (Galanos, 2023), která má model APARCH implementovaný, a diplomovou práci (Kostárová, 2023), kde je implementace detailně popsána.

4.1 Simulace procesu

Model APARCH řádu $p = 1$ a $q = 1$ má následující předpis

$$h_t^{\delta/2} = \alpha_0 + \alpha_1(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma_1\varepsilon_{t-1})^\delta + \beta_1 h_{t-1}^{\delta/2}. \quad (4.1)$$

Pro všechna rozdělení vygenerujeme jednu realizaci časové řady $\{y_t\}$ a příslušné volatility $\{h_t\}$ o délce 1000. Pro nastavení modelu využijeme funkci **ugarchspec** ve které volíme v argumentu `distribution.model` příslušné rozdělení náhodných veličin z_t . V argumentu `fixed.pars` si pevně volíme parametry u kterých vždy budeme kontrolovat zda splňují podmínku stacionarity (2.5). Poznamenejme, že software používá ω místo α_0 .

```
1 aparchspec <- ugarchspec(variance.model = list(model = "apARCH",
2                               garchOrder = c(1,1)),
3                               mean.model = list(armaOrder = c(0,0),
4                               include.mean = FALSE),
5                               distribution.model = "norm",
6                               fixed.pars=list(omega = 0.01, alpha1 =
7                               0.1, beta1 = 0.6, gamma1 = 0.1, delta = 2))
```

Funkce **ugarchpath** simuluje časovou řadu řídicí se modelem **aparchspec**. Argument **n.sim** nám zajistuje délku řady 1000 a argument **m.sim** nám udává počet nezávislých simulací.

```
1 aparchpath <- ugarchpath(aparchspec, n.sim = 1000, n.start = 0, m
  .sim = 1)
```

Předchozí dva kódy slouží jako ilustrační. Předpokládejme v rovnici (2.1) podmíněnou střední hodnotu $\mu_t = 0$. Dále budeme odhadovat parametry z prvních 1000 pozorování pomocí funkce **ugarchfit**, odhady zobrazíme v tabulkách. Následně pro každé rozdělení z_t budeme generovat 100 různých časových řad o délce 1000 pozorování. Výsledkem této analýzy budou průměrné hodnoty odhadnutých parametrů a jejich výběrové směrodatné odchylky. Budeme schopni identifikovat případné systematické odchylky a variabilitu odhadů, což je důležité pro správné použití modelu v praxi. Na závěr se zaměříme na grafické znázornění, kde porovnáme volatilitu nasimulované řady při pevně zvolených parametrech a volatilitu příslušného odhadnutého modelu APARCH(1,1) na 5 budoucích obdobích. K tomu využijeme funkci **ugarchforecast**.

4.2 Rozdělení $N(0,1)$

Nejprve uvažujme $z_t \sim N(0,1)$. Zvolíme parametry pro model APARCH(1,1) dle následující tabulky.

Model	α_0	α_1	β_1	γ_1	δ
APARCH(1,1)	0,01	0,1	0,4	0,1	2

Tabulka 4.1: Parametry modelu APARCH(1,1).

Ověřme, že splňují požadovanou podmínku (2.5), která má pro APARCH(1,1) tvar

$$\alpha_1 E(|z| - \gamma_1 z)^\delta + \beta_1 < 1.$$

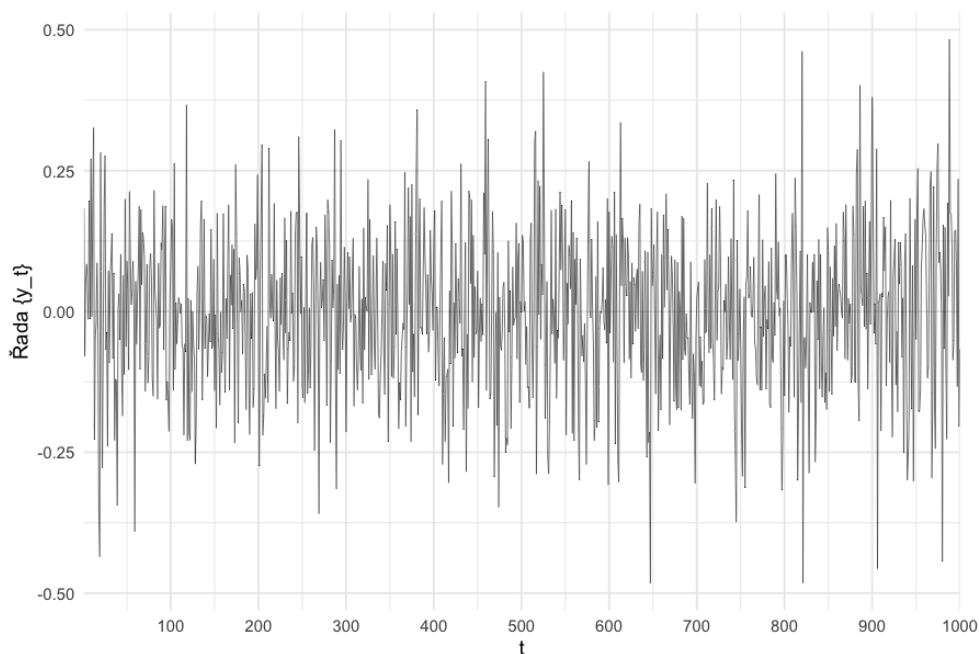
Nejprve spočítejme

$$E(|z| - \gamma_1 z)^2 = E(z^2) - 2\gamma_1 E(|z|z) + \gamma_1^2 E(z^2) = 1 - 0 + \gamma_1^2.$$

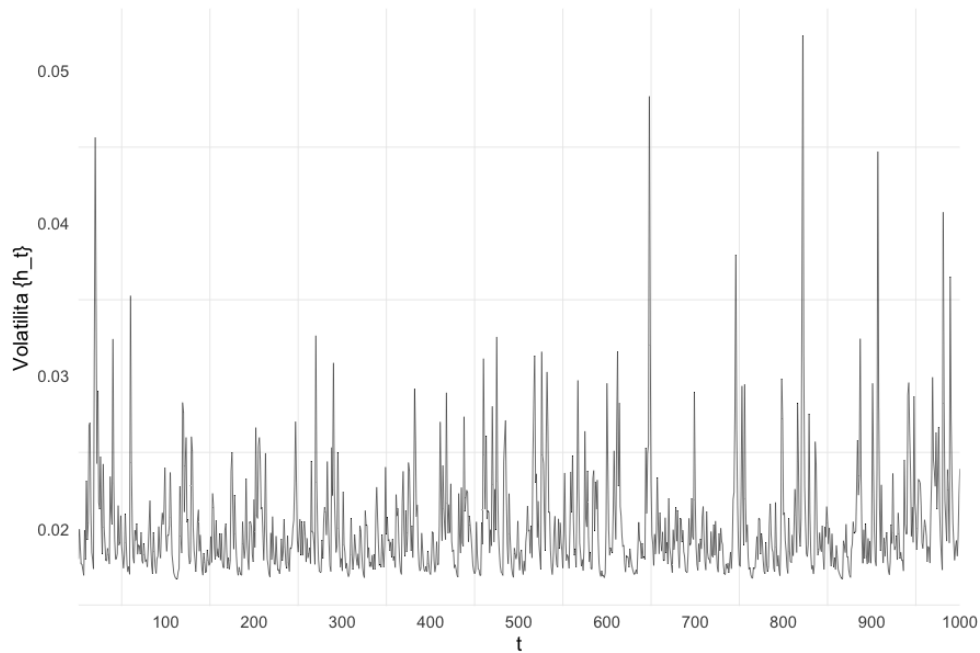
Využili jsme, že rozdělení má symetrickou hustotu, nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl. Stejný výsledek bychom měli i dosazením $\delta = 2$ do vzorce (3.6). Po dosazení číselných hodnot parametrů dostáváme

$$0,1(1 + 0,1^2) + 0,4 = 0,501 < 1.$$

Tedy zvolené parametry splňují (2.5).



Obrázek 4.1: Grafické znázornění simulace řady $\{y_t\}$ pro model APARCH(1,1) při pevně zvolených parametrech z tabulky 4.1 a pro $z_t \sim N(0,1)$.



Obrázek 4.2: Grafické znázornění volatility $\{h_t\}$ pro model APARCH(1,1) při pevně zvolených parametrech z tabulky 4.1 a pro $z_t \sim N(0,1)$.

Odhad parametrů modelu je zobrazen v následující tabulce.

Model	α_0	α_1	β_1	γ_1	δ
Skutečné parametry	0,01	0,1	0,4	0,1	2
Odhadnuté parametry	0,0198	0,0741	0,7336	-0,3200	1,1963

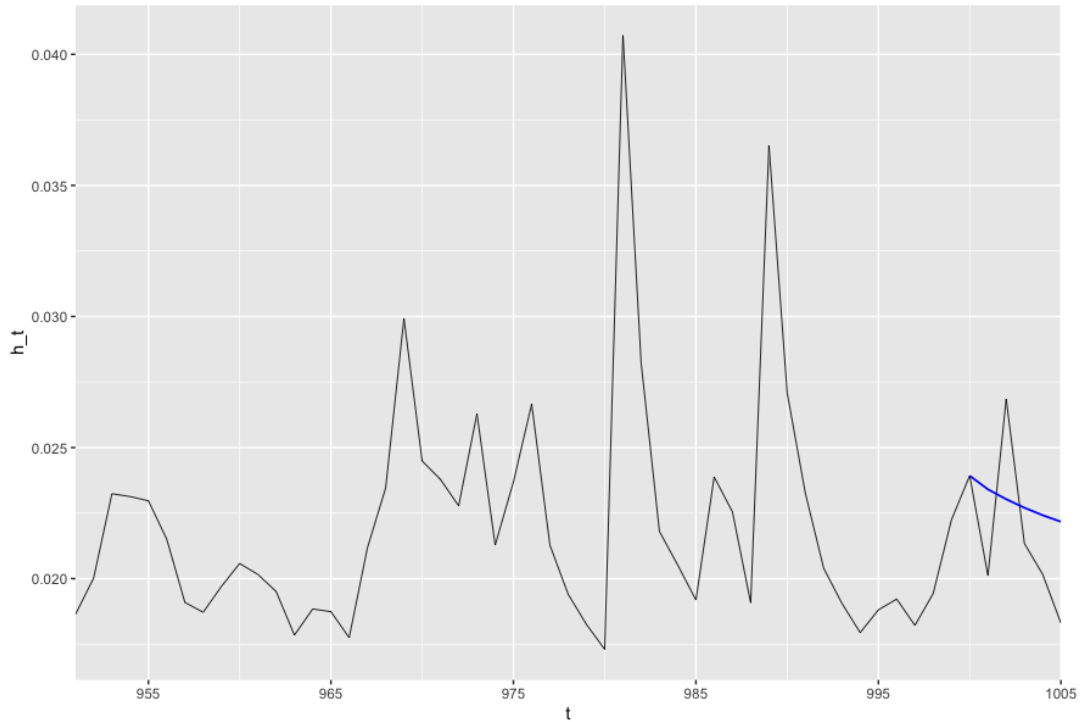
Tabulka 4.2: Odhadnuté parametry pro APARCH(1,1) s rozdělením $N(0,1)$.

Dále si zobrazíme tabulku průměrné hodnoty odhadnutých parametrů ze 100 simulovaných řad a příslušné výběrové směrodatné odchylky.

Parametr	α_0	α_1	β_1	γ_1	δ
Skutečné parametry	0,01	0,1	0,4	0,1	2
Průměr	0,0189	0,0605	0,5215	0,0542	2,4272
Směrodatná odchylka	0,0530	0,0477	0,3327	0,4737	1,0629

Tabulka 4.3: Průměr a směrodatná odchylka parametrů APARCH(1,1) odhadnutých ze 100 simulací s rozdělením $N(0,1)$.

Výsledky odhadů parametrů modelu APARCH(1,1) ze 100 simulací ukazují, že průměrné hodnoty odhadnutých parametrů se uspokojivě blíží skutečným hodnotám, což naznačuje, že náš model je schopen spolehlivě odhadovat parametry v řadách zkoumané délky 1 000 pozorování. Směrodatné odchylky odhadů poskytují informaci o variabilitě odhadů, nižší variabilita znamená, že odhady parametrů jsou stabilní. Konečně predikujeme volatilitu.



Obrázek 4.3: Hodnoty volatilita a predikované volatilita na 5 následujících období pomocí modelu APARCH(1,1) s odhadnutými parametry a $z_t \sim N(0,1)$.

4.3 Zešikmené rozdělení $N(0,1)$

Pro $z_t \sim N_\kappa(0,1)$ je třeba přidat ve funkci `ugarchspec` v argumentu `fixed.pars` parametr zešikmení. Zvolíme parametry pro model APARCH(1,1) dle následující tabulky.

Model	α_0	α_1	β_1	γ_1	δ	κ
APARCH(1,1)	0,01	0,1	0,4	0,1	2	0,5

Tabulka 4.4: Parametry modelu APARCH(1,1).

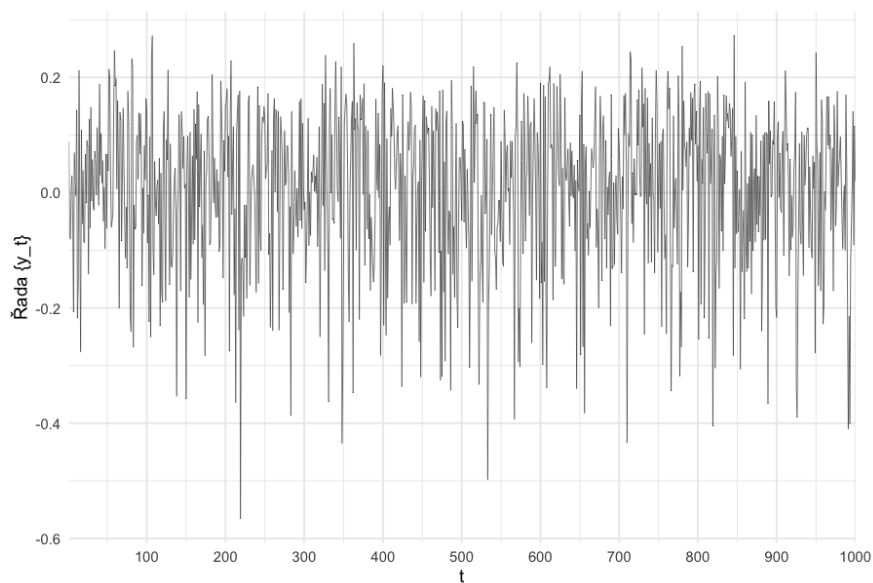
Opět ověříme, že splňují (2.5). Nejprve spočítejme $E(|z| - \gamma_1 z)^\delta$. Využijeme vztah (3.5), který jsme odvodili v předchozí kapitole a dosadíme konkrétní hodnoty. Máme

$$\frac{2^{\frac{2}{\delta}}}{(0,5 + \frac{1}{0,5})\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2 + 1}{2}\right) \left[(1 + 0,1)^2 (0,5)^{-(2+1)} + (1 - 0,1)^2 (0,5)^{2+1} \right],$$

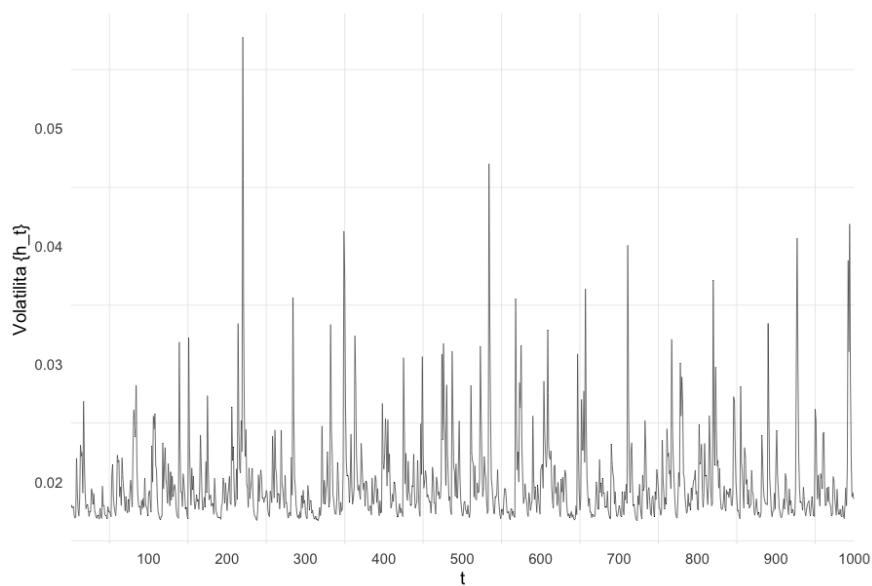
což se přibližně rovná 1,95. Po dosazení do (2.5) dostáváme

$$0,1 \cdot 1,95 + 0,4 < 1.$$

Podmínka stacionarity (2.5) je splněna a můžeme nasimulovat řadu a příslušnou volatilitu.



Obrázek 4.4: Grafické znázornění simulace řady $\{y_t\}$ pro model APARCH(1,1) při pevně zvolených parametrech z tabulky 4.4 a pro $z_t \sim N_\kappa(0,1)$.



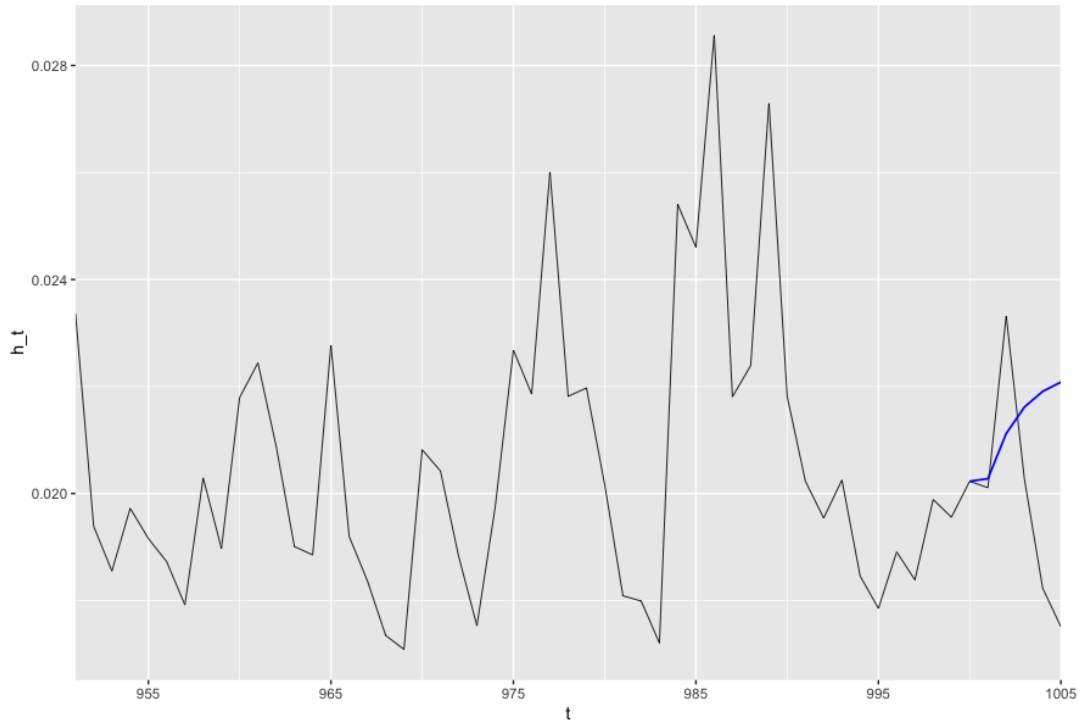
Obrázek 4.5: Grafické znázornění volatility $\{h_t\}$ pro model APARCH(1,1) při pevně zvolených parametrech z tabulky 4.4 a pro $z_t \sim N_\kappa(0,1)$.

Model	α_0	α_1	β_1	γ_1	δ	κ
Skutečné parametry	0,01	0,1	0,4	0,1	2	0,5
Odhadnuté parametry	0,0018	0,0470	0,7885	0,0628	2,3267	0,5142

Tabulka 4.5: Odhadnuté parametry pro APARCH(1,1) s rozdělením $N_\kappa(0,1)$.

Parametr	α_0	α_1	β_1	γ_1	δ	κ
Skutečné param.	0,01	0,1	0,4	0,1	2	0,5
Průměr	0,0272	0,0807	0,3774	0,2666	2,2529	0,4991
Sm. odchylka	0,0626	0,0449	0,2309	0,3868	0,9776	0,0296

Tabulka 4.6: Průměr a směrodatná odchylka parametrů APARCH(1,1) odhadnutých ze 100 simulací s rozdělením $N_\kappa(0,1)$.



Obrázek 4.6: Hodnoty volatility a predikované volatility na 5 následujících období pomocí modelu APARCH(1,1) s odhadnutými parametry a $z_t \sim N_\kappa(0,1)$.

4.4 Standardizované Studentovo rozdělení $St(\nu)$

Pro $z_t \sim St(\nu)$ je třeba přidat ve funkci `ugarchspec` v argumentu `fixed.pars` parametr počtu stupňů volnosti. Zvolíme parametry pro model APARCH(1,1) dle následující tabulky.

Model	α_0	α_1	β_1	γ_1	δ	ν
APARCH(1,1)	0.01	0.1	0.4	0.1	2	5

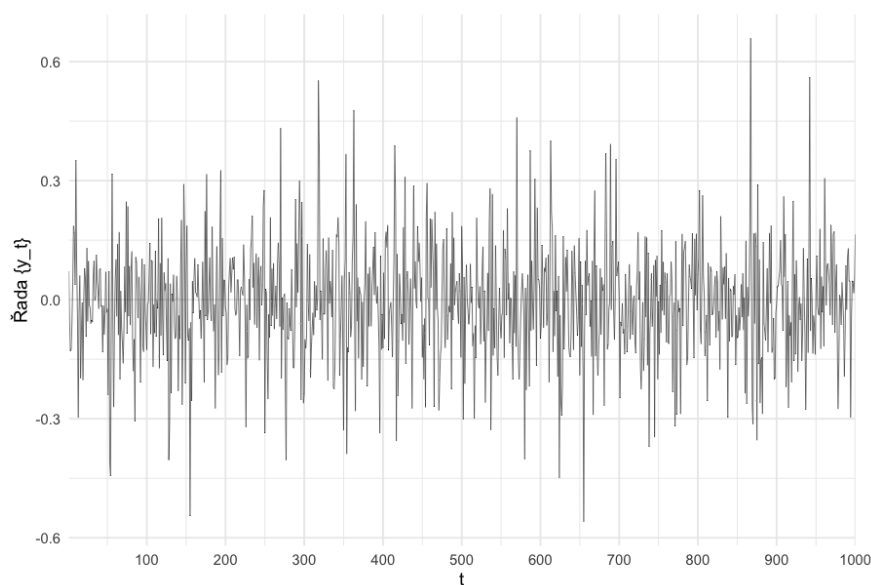
Tabulka 4.7: Parametry modelu APARCH(1,1).

Ověříme podmínku stacionarity (2.5) stejným způsobem jako u $N(0,1)$. Tedy

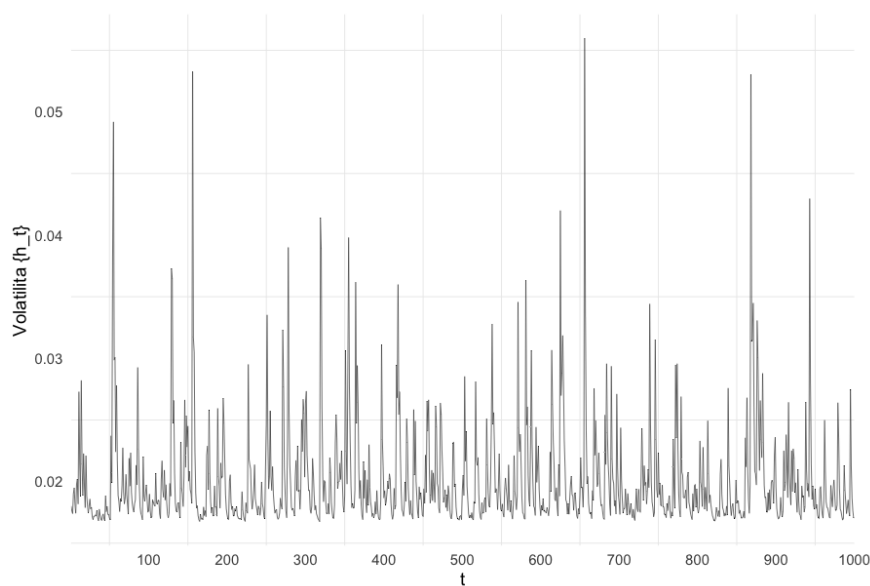
$$E(|z| - \gamma_1 z)^2 = E(z^2) - 2\gamma_1 E(|z|z) + \gamma_1^2 E(z^2) = 1 - 0 + \gamma_1^2,$$

což získáme i dosazením $\delta = 2$ do vzorce (3.9). Po dosazení dostáváme

$$0.1(1 + 0.1^2) + 0.4 = 0.501 < 1.$$



Obrázek 4.7: Grafické znázornění simulace řady $\{y_t\}$ pro model APARCH(1,1) při pevně zvolených parametrech z tabulky 4.7 a pro $z_t \sim \text{St}(\nu)$.



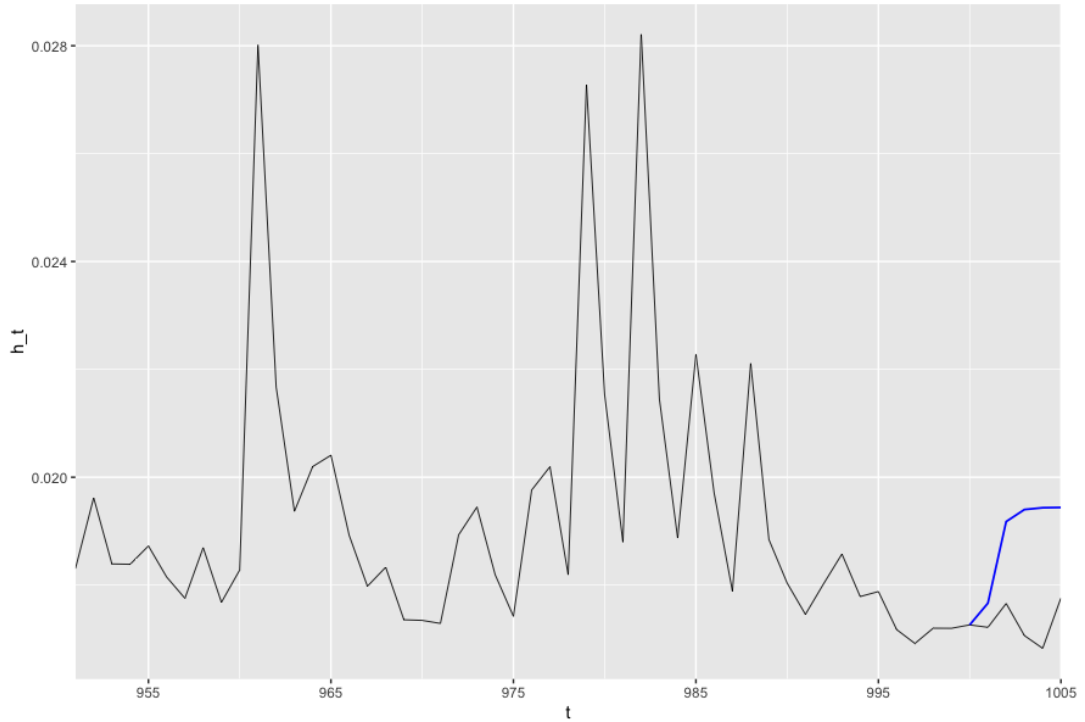
Obrázek 4.8: Grafické znázornění volatility $\{h_t\}$ pro model APARCH(1,1) při pevně zvolených parametrech z tabulky 4.7 a pro $z_t \sim \text{St}(\nu)$.

Model	α_0	α_1	β_1	γ_1	δ	ν
Skutečné parametry	0,01	0,1	0,4	0,1	2	5
Odhadnuté parametry	0,0199	0,104	0,5629	0,1367	1,4425	6,7098

Tabulka 4.8: Odhadnuté parametry pro APARCH(1,1) s rozdělením $\text{St}(\nu)$.

Parametr	α_0	α_1	β_1	γ_1	δ	ν
Skutečné parametry	0,01	0,1	0,4	0,1	2	5
Průměr	0,0081	0,0541	0,6061	0,0281	2,4735	5,1727
Směrodatná odchylka	0,0225	0,0594	0,3237	0,6378	0,8368	0,9756

Tabulka 4.9: Průměr a směrodatná odchylka parametrů APARCH(1,1) odhadnutých ze 100 simulací s rozdělením $St(\nu)$.



Obrázek 4.9: Hodnoty volatilita a predikované volatilita na 5 následujících období pomocí modelu APARCH(1,1) s odhadnutými parametry a $z_t \sim St(\nu)$.

4.5 Zešikmené rozdělení $St(\nu)$

Pro $z_t \sim St_\kappa(\nu)$ je třeba přidat ve funkci `ugarchspec` v argumentu `fixed.pars` parametr počtu stupňů volnosti a parametr zešikmení. Zvolíme parametry pro model APARCH(1,1) dle následující tabulky.

Model	α_0	α_1	β_1	γ_1	δ	κ	ν
APARCH(1,1)	0,01	0,1	0,4	0,1	2	0,5	5

Tabulka 4.10: Parametry modelu APARCH(1,1).

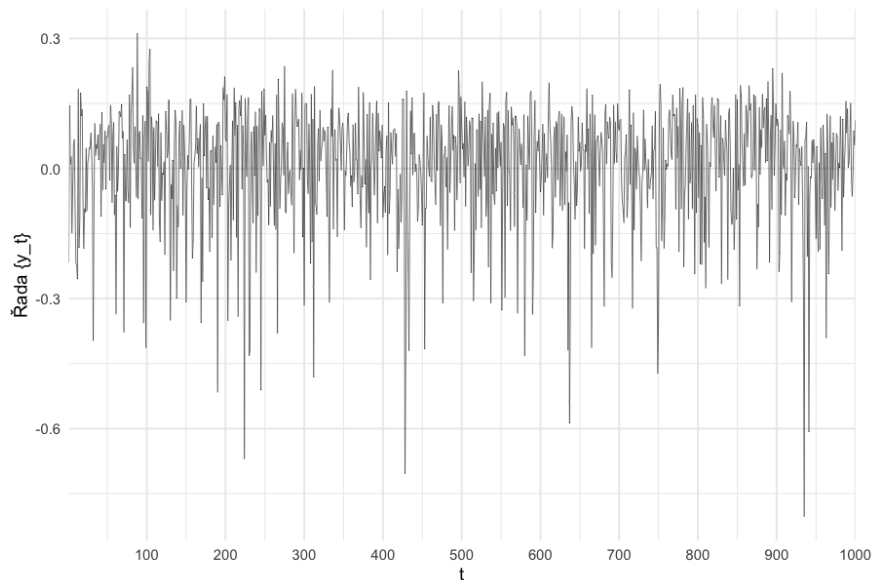
Pro ověření podmínku stacionarity (2.5) využijeme vztah (3.8), který jsme si odvodili ve třetí kapitole. Dosadíme parametry

$$\frac{(5-2)^{\frac{5}{2}} \Gamma(\frac{2+1}{2}) \Gamma(\frac{5-2}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{5}{2}) (0,5 + \frac{1}{0,5})} [(1+0,1)^2 (0,5)^{-(2+1)} + (1-0,1)^2 (0,5)^{2+1}],$$

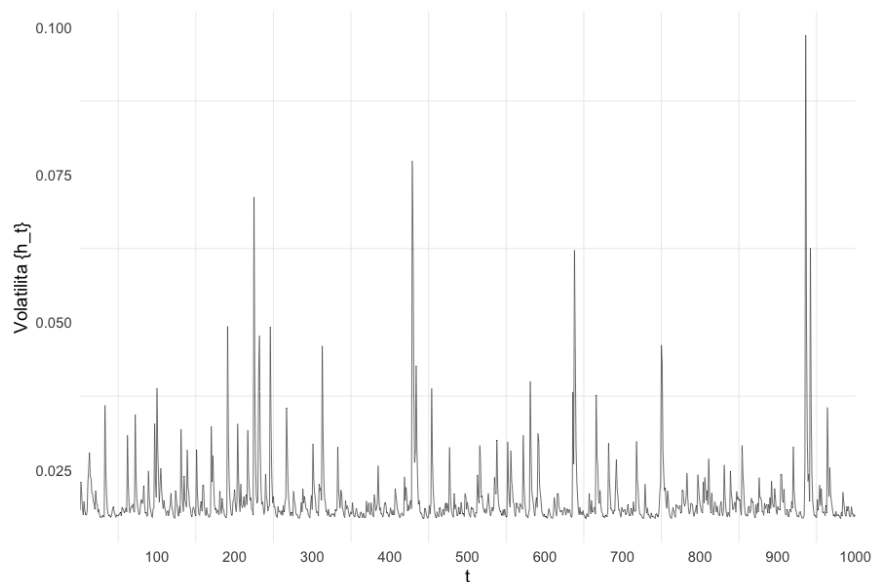
což se přibližně rovná 3,91. Po dosazení do (2.5) dostáváme

$$0,1 \cdot 3,91 + 0,4 < 1,$$

a tedy podmínka je splněna.



Obrázek 4.10: Grafické znázornění simulace řady $\{y_t\}$ pro model APARCH(1,1) při pevně zvolených parametrech z tabulky 4.10 a pro $z_t \sim St_\kappa(5)$.



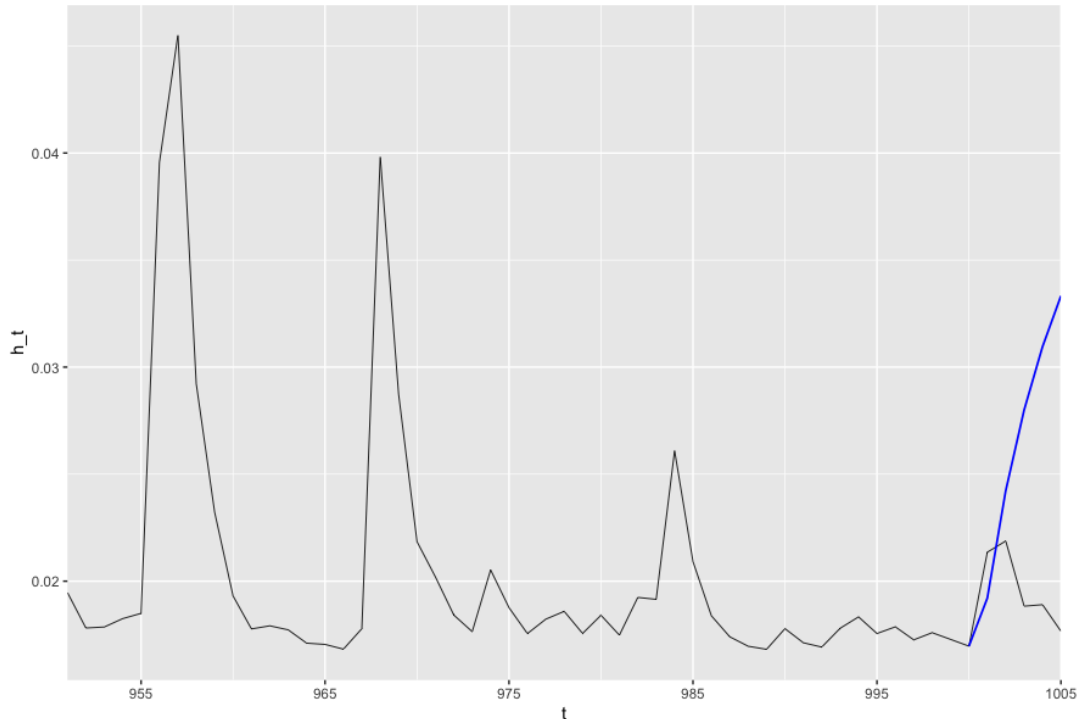
Obrázek 4.11: Grafické znázornění volatility $\{h_t\}$ pro model APARCH(1,1) při pevně zvolených parametrech z tabulky 4.10 a pro $z_t \sim St_\kappa(5)$.

Model	α_0	α_1	β_1	γ_1	δ	κ	ν
Skutečné par.	0,01	0,1	0,4	0,1	2	0,5	5
Odhadnuté par.	0,0001	0,0006	0,9861	0,9999	2,3857	0,5315	4,171

Tabulka 4.11: Odhadnuté parametry pro APARCH(1,1) s rozdělením $St_\kappa(\nu)$.

Parametr	α_0	α_1	β_1	γ_1	δ	κ	ν
Skutečné param.	0,01	0,1	0,4	0,1	2	0,5	5
Průměr	0,0155	0,0769	0,4458	0,3391	2,1803	0,5019	5,1364
Sm. odchylka	0,0253	0,0604	0,2324	0,4886	0,7654	0,0240	0,9782

Tabulka 4.12: Průměr a směrodatná odchylka parametrů APARCH(1,1) odhadnutých ze 100 simulací s rozdělením $St_\kappa(\nu)$.



Obrázek 4.12: Hodnoty volatility a predikované volatility na 5 následujících období pomocí modelu APARCH(1,1) s odhadnutými parametry a $z_t \sim St_\kappa(5)$.

Na závěr uvedeme tabulku (4.13), která srovnává výstupy ze 100 řad pro všechna 4 rozdělení.

Parametr	α_0	α_1	β_1	γ_1	δ	κ	ν
Skutečné param.	0,01	0,1	0,4	0,1	2	0,5	5
Průměr $N(0,1)$	0,0189 (0,0530)	0,0605 (0,0477)	0,5215 (0,3327)	0,0542 (0,4737)	2,4272 (1,0629)	- -	- -
Průměr $N_\kappa(0,1)$	0,0272 (0,0225)	0,0807 (0,0594)	0,3774 (0,3237)	0,2666 (0,6378)	2,2529 (0,8368)	0,4991 (0,9756)	- -
Průměr $St(\nu)$	0,0081 (0,0225)	0,0541 (0,0594)	0,6061 (0,3237)	0,0281 (0,6378)	2,4735 (0,8368)	- -	5,1727 (0,9756)
Průměr $St_\kappa(\nu)$	0,0155 (0,0253)	0,0769 (0,0604)	0,4458 (0,2324)	0,3391 (0,4886)	2,1803 (0,7654)	0,5019 (0,0240)	5,13642 (0,9782)

Tabulka 4.13: Průměry a směrodatné odchylky parametrů APARCH(1,1) odhadnutých ze 100 simulací se všemi 4 rozděleními.

Z tabulky (4.13) si všimneme, že zešikmení v normálním i Studentově rozdělení zhorší přesnost odhadu pro α_0 a γ_1 z hlediska průměrné hodnoty. Ve Studentově (symetrickém i zešikmeném) rozdělení je přesnost většiny odhadů z hlediska průměrů mírně horší než v odpovídajícím normálním. U normálního rozdělení se variabilita odhadů reprezentovaná směrodatnou odchylkou po zešikmení u většiny parametrů snížila. U Studentova rozdělení jsou směrodatné odchylky v zešikmeném rozdělení srovnatelné nebo menší než v původním.

5. Aplikace na Dow Jonesův index

V poslední kapitole budeme aplikovat model APARCH(1,1) na Dow Jonesův index (ticker DJIA), který je jedním z nejstarších akciových indexů na světě. Sleduje výkonnost 30 významných veřejně obchodovaných společností z různých průmyslových odvětví. DJIA je často používán jako měřič celkového zdraví amerického akciového trhu a ekonomiky. Zpracujeme uzavírací ceny v období od 1.1.2015 do 31.12.2023. Celkem máme 2263 pozorování.

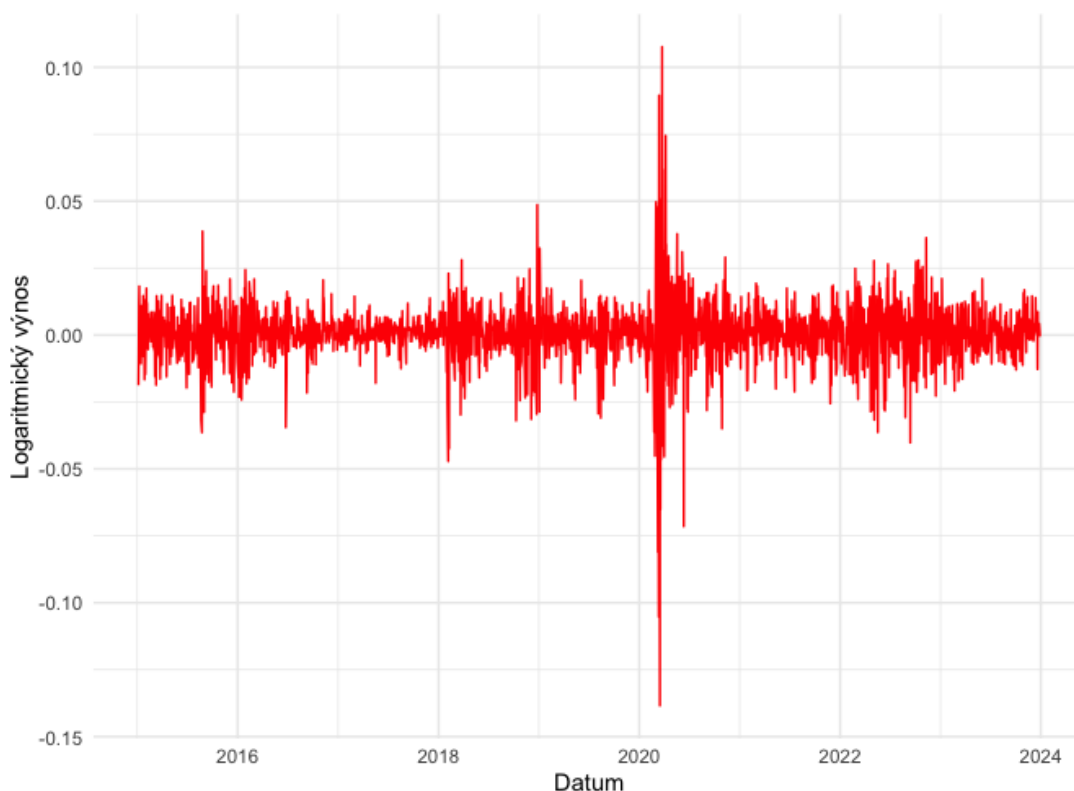


Obrázek 5.1: Uzavírací ceny DJIA.

Pozorované hodnoty indexu převedeme na logaritmické výnosy, abychom dostali stacionární řadu. Připomeňme definici logaritmického výnosu

$$r_t = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1}) = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right),$$

kde p_t je hodnota indexu v čase t , $t = 2, \dots, 2263$.



Obrázek 5.2: Logaritmické výnosy DJIA.

V tabulkách (5.1) a (5.2) uvedeme vybrané charakteristiky logaritmických výnosů.

Minimum	1. kvartil	Medián	Průměr	3. kvartil	Maximum
-0,1384	-0,0040	0,0006	0,0003	0,0055	0,1076

Tabulka 5.1: Charakteristiky popisné statistiky logaritmických výnosů DJIA

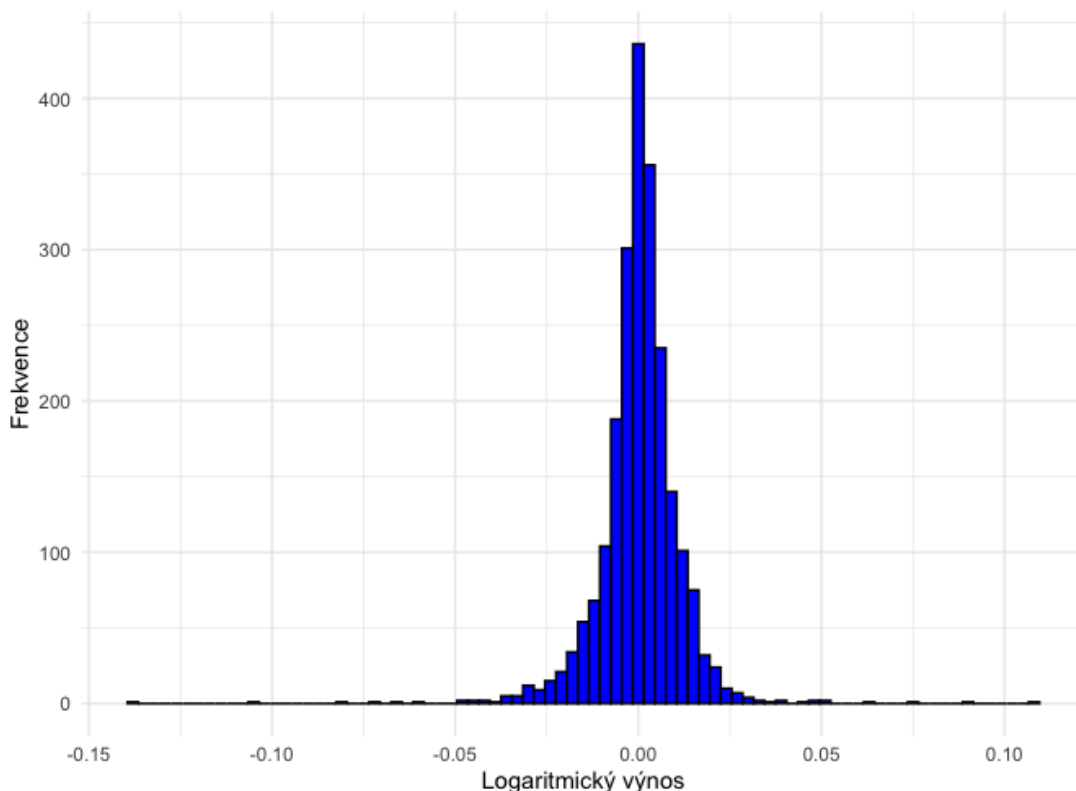
Tabulka (5.1) uvádí základní míry polohy denních logaritmických výnosů DJIA v období od 2.1.2015 do 31.12.2023. Z tabulky můžeme vidět, že průměrný denní výnos je velmi blízko nule, což je běžné pro finanční časové řady.

Výběrová směrodatná odchylka	Výběrový koeficient šikmosti	Výběrový koeficient špičatosti
0,0114	-0,9520	25,0393

Tabulka 5.2: Charakteristiky popisné statistiky logaritmických výnosů DJIA

Tabulka (5.2) poskytuje momentové charakteristiky logaritmických výnosů. Výběrová směrodatná odchylka je míra volatility výnosů a hodnota 0.0114 naznačuje, že denní výnosy DJIA mají relativně nízkou volatilitu. Výběrový koeficient šikmosti je -0.9520, což ukazuje, že rozdělení výnosů je asymetrické a má delší levý chvost, což znamená, že extrémní negativní výnosy jsou pravděpodobnější než extrémní pozitivní výnosy. Výběrový koeficient špičatosti je 25.0393, což naznačuje, že rozdělení výnosů má těžké chvosty a je výrazně více špičaté než

normální rozdělení, což je typické pro finanční časové řady s častými extrémními hodnotami. Tedy máme silné indície, že nejde o normální rozdělení.



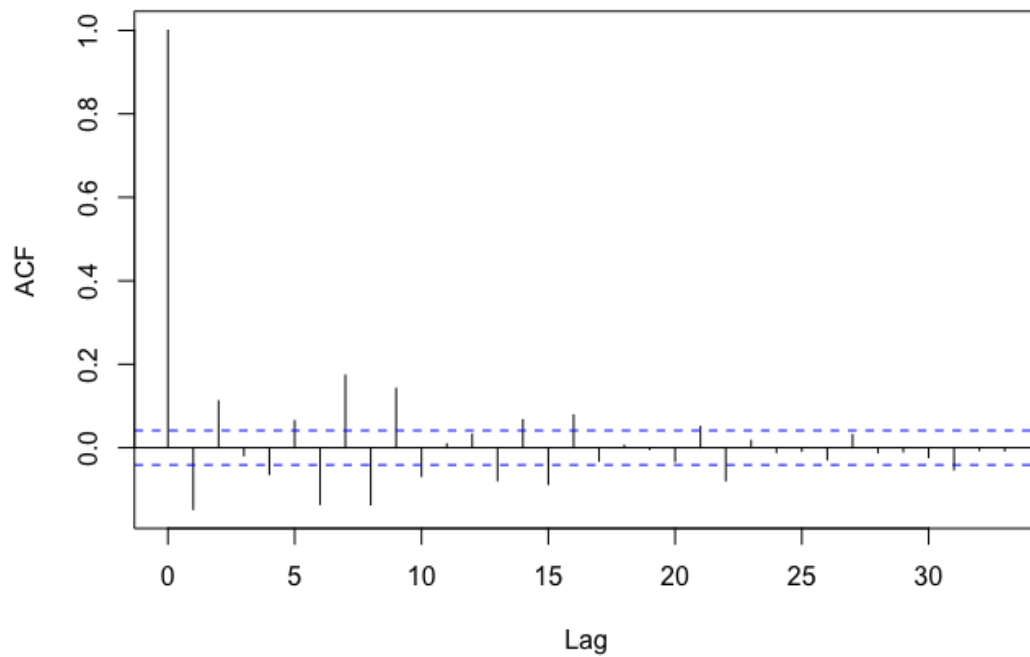
Obrázek 5.3: Histogram logaritmických výnosů DJIA.

Histogram logaritmických výnosů DJIA ukazuje, že většina denních výnosů je koncentrována kolem nuly, což je typické pro finanční časové řady. Nicméně v histogramu lze pozorovat i několik extrémních hodnot vpravo a zejména vlevo od nuly. Při vyšetřování normality se používá Jarque-Bera test. Po jeho provedení v softwarovém balíčku (Trapletti a Hornik, 2024) jsme dostali následující výstup

Jarque Bera Test

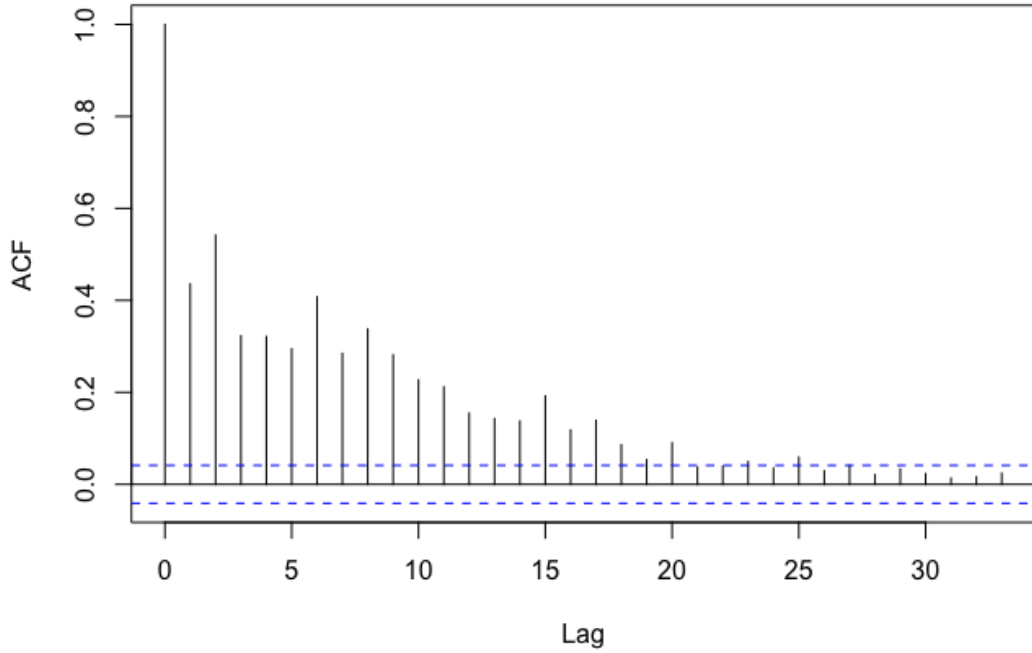
X-squared = 46142, df = 2, p-value < 2.2e-16

Jarque-Bera test ukazuje velmi vysokou hodnotu testové statistiky 46142 a nízkou p-hodnotu. Tyto výsledky ukazují, že rozdělení logaritmických výnosů se významně odchyluje od normálního rozdělení. Tato odchylka odpovídá údajům z tabulky 5.2 a histogramu z obrázku 5.3. Tedy můžeme očekávat, že při aplikaci modelu APARCH(1,1) bude vhodnější zešikmené rozdělení, a to spíše Studentovo než normální. Pro další analýzu logaritmických výnosů DJIA použijeme výběrovou autokorelační funkci a autokorelační funkci druhých mocnin.



Obrázek 5.4: Autokorelační funkce logaritmických výnosů DJIA.

Autokorelační funkce logaritmických výnosů DJIA 5.4 ukazuje, že výnosy nevykazují výraznou autokorelaci. V grafu vidíme několik statisticky významných autokorelací, které ale nejsou v absolutní hodnotě velké.



Obrázek 5.5: Autokorelační funkce druhých mocnin logaritmických výnosů DJIA.

Autokorelační funkce druhých mocnin v obrázku (5.5) však vykazuje statisticky významné velké hodnoty na více zpožděních po sobě. To naznačuje přítomnost dlouhodobé závislosti ve variabilitě výnosů, což je typický znak při shlukování volatilit. Tento jev je charakteristický pro finanční časové řady, kde období vysoké volatility mají tendenci následovat další období vysoké volatility, a naopak období nízké volatility mají tendenci následovat další období nízké volatility. Akaikeho informační kritérium (AIC) je statistické měřítko používané k porovnání různých modelů a jejich vhodnosti pro daná data. V balíčku (Galanos, 2023) je definované ve tvaru

$$AIC = \frac{-2LL}{N} + \frac{2m}{N},$$

kde LL představuje hodnotu logaritmické věrohodnosti v odhadnutého parametru. N značí celkový počet pozorování a m značí počet odhadovaných parametrů v modelu.

Model	$N(0,1)$	$N_{\kappa}(0,1)$	$St(\nu)$	$St_{\kappa}(\nu)$
APARCH(1,1)	-6,697678	-6,716247	-6,769178	-6,776691

Tabulka 5.3: Hodnoty AIC pro různé modely APARCH(1,1) pro logaritmické výnosy DJIA.

Z tabulky (5.3) můžeme vidět, že model APARCH(1,1) se zešikmeným standardizovaným Studentovým rozdělením $St_{\kappa}(\nu)$ má nejnižší hodnotu AIC, což potvrzuje naše domněnky, které jsme nabyli po provedení Jarque-Bera testu a prohlídce histogramu. Odhadnuté parametry pro optimální model s rozdělením

$St_\kappa(\nu)$ uvádíme v následující tabulce, byly spočítané v softwarovém balíčku Galanos (2023).

Parametr	Odhad	Std. chyba	t-hodnota	$Pr(> t)$
μ	0,000302	0,000149	2,0238	0,04299
α_0	0,000226	0,000178	1,2715	0,20356
α_1	0,115769	0,017068	6,7828	0,00000
β_1	0,878373	0,016291	53,9164	0,00000
γ_1	0,809767	0,125776	6,4382	0,00000
δ	1,061015	0,157788	6,7243	0,00000
κ	0,878023	0,026788	32,7764	0,00000
ν	6,399167	0,833217	7,6801	0,00000

Tabulka 5.4: Odhady parametrů modelu APARCH(1,1) se zešikmeným standardizovaným Studentovým rozdělením.

Téměř všechny parametry modelu (4.1) jsou statisticky významné na pěti-procentní hladině, což je indikováno nízkými p-hodnotami v posledním sloupci tabulky.

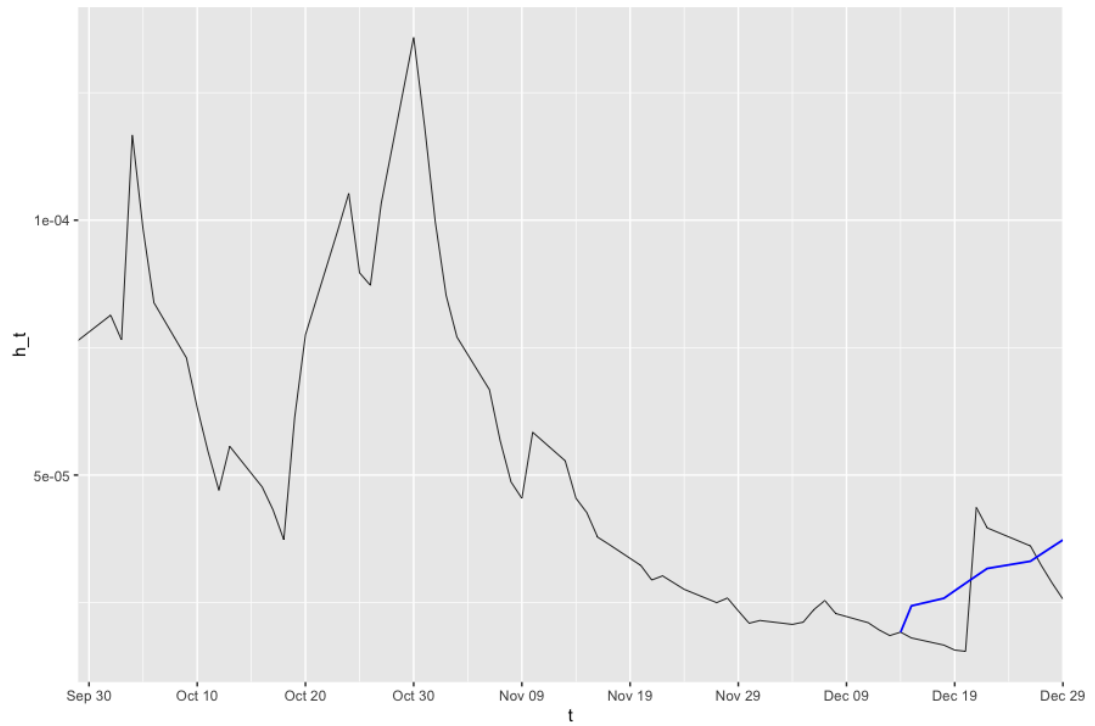
Připomeňme, že μ představuje střední hodnotu (2.1), která je předpokládána jako konstantní. Hodnota parametru μ je blízko nule, což je očekávané pro logaritmické výnosy, nulovost zamítáme od hladiny 4,3%. Parametr α_0 je na pěti-procentní hladině statisticky nevýznamný. Všechny další parametry mají nulové p-hodnoty, jsou tedy pro model klíčové. Parametry α_1 a β_1 umožňují zachycení dynamiky volatility. Parametr γ_1 je důležitý pro zachycení asymetrie v rozdělení výnosů. Parametr δ určuje tvar rozdělení podmíněné volatility. Hodnoty parametrů κ a ν naznačují, že model je schopen dobře zachytit asymetrii a těžké chvosty v datech. Přítomnost statisticky významných parametrů κ a ν potvrzuje, že model APARCH(1,1) nelze zjednodušit na model GARCH, protože zjednodušení by vedlo k opomenutí důležitých charakteristik časové řady výnosů.

Ověřme ještě, že odhadnuté parametry splňují podmínku stacionarity (2.5). Tedy využijeme vztah (3.8) a dosadíme odhadnuté parametry. Dostaneme přibližně 0,97 a po dosazení do (2.5)

$$\alpha_1 E(|z| - \gamma_1 z)^\delta + \beta_1 = 0,115 \cdot 0,97 + 0,878 = 0,9902 < 1.$$

Tedy podmínka stacionarity je velmi těsně splněna.

Na závěr této kapitoly pomocí funkce `ugarchforecast` z balíčku Galanos (2023) spočítáme odhad volatility na základě T-10 pozorování. Následně si graficky znázorníme skutečnou volatilitu a odhadnutou volatilitu pro 10 posledních pracovních dní v kalendářním roce 2023.



Obrázek 5.6: Hodnoty volatility a predikované volatility 10 posledních pracovních dní v kalenářním roce 2023 pomocí modelu APARCH(1,1) s odhadnutými parametry a $z_t \sim St(\nu)$.

Závěr

V této bakalářské práci se zaměřujeme na detailní analýzu a aplikaci modelu APARCH. Model APARCH, který rozšiřuje tradiční modely ARCH a GARCH, umožňuje efektivnější modelování volatility finančních časových řad díky své schopnosti zachytit asymetrické reakce na pozitivní a negativní šoky. Tato vlastnost je klíčová pro přesnější predikce v situacích, kdy finanční trhy reagují odlišně na různé typy informací.

V teoretické části práce jsou popsány základní pojmy a principy stochastických modelů, které tvoří nezbytný základ pro pochopení modelu APARCH. Jsou představeny různé varianty tohoto modelu. Ve třetí kapitole je popsána konstrukce zešikmených hustot, postup je aplikovaný na normální a Studentovo rozdělení. U těchto rozdělení je podrobně odvozena momentová struktura, zejména střední hodnoty potřebné pro ověření stacionarity modelu APARCH. Tato odvození nejsou detailně provedena ve studované literatuře.

Praktická část práce je zaměřena na simulace a odhady parametrů modelu APARCH na uměle generovaných datech. Výsledky ukazují, že model je schopen spolehlivě odhadnout parametry a poskytnout věrohodné predikce volatility. Dále použijeme model APARCH(1,1) na reálná data Dow Jonesova indexu, což ilustruje praktickou využitelnost modelu v reálných podmínkách finančního trhu. Analýza Dow Jonesova indexu ukazuje, že APARCH dokáže efektivně modelovat volatilitu tohoto významného finančního ukazatele. Identifikujeme klíčové parametry modelu, které poskytují důležité informace o dynamice volatility a jejích změnách v čase.

Model APARCH představuje silný nástroj pro analýzu a predikci volatility finančních časových řad. Jeho schopnost zachytit asymetrické reakce na šoky a flexibilitu při volbě parametrů ho činí vhodným pro široké spektrum aplikací ve finanční ekonomii. Budoucí výzkum by mohl být zaměřen na rozšíření modelu, například integrací dalších typů rozdělení chybového procesu nebo rozšířením na mnohorozměrné verze, které by umožnily analýzu více proměnných současně.

Seznam použité literatury

- BOLLERSLEV, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, **31**(3), 307–327.
- CIPRA, T. (2008). *Finanční ekonometrie*. Ekopress, Praha.
- DING, Z., GRANGER, C. W. a ENGLE, R. F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of empirical finance*, **1**(1), 83–106.
- ENGLE, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the econometric society*, pages 987–1007.
- FERNÁNDEZ, C. a STEEL, M. F. (1998). On bayesian modeling of fat tails and skewness. *Journal of the american statistical association*, **93**(441), 359–371.
- GALANOS, A. (2023). *rugarch: Univariate GARCH models*. URL <https://CRAN.R-project.org/package=rugarch>. R package version 1.5-1.
- GEWEKE, J. (1986). Modeling the persistence of conditional variances: a comment. *Econometric Reviews*, **5**, 57–61.
- GLOSTEN, L. R., JAGANNATHAN, R. a RUNKLE, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The journal of finance*, **48**(5), 1779–1801.
- HIGGINS, M. L. a BERA, A. K. (1992). A class of nonlinear ARCH models. *International Economic Review*, pages 137–158.
- KOSTÁROVÁ, A. (2023). Modely pre finančné časové rady a ich softvérová implementácia. Diplomová práca. *MFF UK, Praha*.
- PALMITESTA, P. a PROVASI, C. (2006). Maximum likelihood estimation of the APARCH model with skew distributions for the innovation process. *Statistica Applicata*, **18**(3), 499–520.
- PRÁŠKOVÁ, Z. (2016). *Základy náhodných procesů II*. Karolinum Press, Praha.
- R CORE TEAM (2023). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- RSTUDIO TEAM (2020). *RStudio: Integrated Development Environment for R*. RStudio, PBC., Boston, MA. URL <http://www.rstudio.com/>.
- TRAPLETTI, A. a HORNIK, K. (2024). *tseries: Time Series Analysis and Computational Finance*. URL <https://CRAN.R-project.org/package=tseries>. R package version 0.10-56.
- ZAKOIAN, J.-M. (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of economic dynamics and control*, **18**(5), 931–955.

Seznam obrázků

3.1	Hustoty několika zešikmených normálních rozdění.	15
3.2	Hustoty několika zešikmených $St_\kappa(5)$	18
4.1	Grafické znázornění simulace řady $\{y_t\}$ pro model APARCH(1,1) při pevně zvolených parametrech z tabulky 4.1 a pro $z_t \sim N(0,1)$	22
4.2	Grafické znázornění volatilit $\{h_t\}$ pro model APARCH(1,1) při pevně zvolených parametrech z tabulky 4.1 a pro $z_t \sim N(0,1)$	23
4.3	Hodnoty volatilit a predikované volatilit na 5 následujících období pomocí modelu APARCH(1,1) s odhadnutými parametry a $z_t \sim N(0,1)$	24
4.4	Grafické znázornění simulace řady $\{y_t\}$ pro model APARCH(1,1) při pevně zvolených parametrech z tabulky 4.4 a pro $z_t \sim N_\kappa(0,1)$	25
4.5	Grafické znázornění volatilit $\{h_t\}$ pro model APARCH(1,1) při pevně zvolených parametrech z tabulky 4.4 a pro $z_t \sim N_\kappa(0,1)$	25
4.6	Hodnoty volatilit a predikované volatilit na 5 následujících období pomocí modelu APARCH(1,1) s odhadnutými parametry a $z_t \sim N_\kappa(0,1)$	26
4.7	Grafické znázornění simulace řady $\{y_t\}$ pro model APARCH(1,1) při pevně zvolených parametrech z tabulky 4.7 a pro $z_t \sim St(\nu)$	27
4.8	Grafické znázornění volatilit $\{h_t\}$ pro model APARCH(1,1) při pevně zvolených parametrech z tabulky 4.7 a pro $z_t \sim St(\nu)$	27
4.9	Hodnoty volatilit a predikované volatilit na 5 následujících období pomocí modelu APARCH(1,1) s odhadnutými parametry a $z_t \sim St(\nu)$	28
4.10	Grafické znázornění simulace řady $\{y_t\}$ pro model APARCH(1,1) při pevně zvolených parametrech z tabulky 4.10 a pro $z_t \sim St_\kappa(5)$	29
4.11	Grafické znázornění volatilit $\{h_t\}$ pro model APARCH(1,1) při pevně zvolených parametrech z tabulky 4.10 a pro $z_t \sim St_\kappa(5)$	29
4.12	Hodnoty volatilit a predikované volatilit na 5 následujících období pomocí modelu APARCH(1,1) s odhadnutými parametry a $z_t \sim St_\kappa(5)$	30
5.1	Uzavírací ceny DJIA.	32
5.2	Logaritmické výnosy DJIA.	33
5.3	Histogram logaritmických výnosů DJIA.	34
5.4	Autokorelační funkce logaritmických výnosů DJIA.	35
5.5	Autokorelační funkce druhých mocnin logaritmických výnosů DJIA.	36
5.6	Hodnoty volatilit a predikované volatilit 10 posledních pracovních dní v kalenářním roce 2023 pomocí modelu APARCH(1,1) s odhadnutými parametry a $z_t \sim St(\nu)$	38

Seznam tabulek

4.1	Parametry modelu APARCH(1,1).	22
4.2	Odhadnuté parametry pro APARCH(1,1) s rozdělením $N(0,1)$. . .	23
4.3	Průměr a směrodatná odchylka parametrů APARCH(1,1) odhadnutých ze 100 simulací s rozdělením $N(0,1)$	23
4.4	Parametry modelu APARCH(1,1).	24
4.5	Odhadnuté parametry pro APARCH(1,1) s rozdělením $N_\kappa(0,1)$. . .	25
4.6	Průměr a směrodatná odchylka parametrů APARCH(1,1) odhadnutých ze 100 simulací s rozdělením $N_\kappa(0,1)$	26
4.7	Parametry modelu APARCH(1,1).	26
4.8	Odhadnuté parametry pro APARCH(1,1) s rozdělením $St(\nu)$	27
4.9	Průměr a směrodatná odchylka parametrů APARCH(1,1) odhadnutých ze 100 simulací s rozdělením $St(\nu)$	28
4.10	Parametry modelu APARCH(1,1).	28
4.11	Odhadnuté parametry pro APARCH(1,1) s rozdělením $St_\kappa(\nu)$. . .	30
4.12	Průměr a směrodatná odchylka parametrů APARCH(1,1) odhadnutých ze 100 simulací s rozdělením $St_\kappa(\nu)$	30
4.13	Průměry a směrodatné odchylky parametrů APARCH(1,1) odhadnutých ze 100 simulací se všemi 4 rozděleními.	31
5.1	Charakteristiky popisné statistiky logaritmických výnosů DJIA . .	33
5.2	Charakteristiky popisné statistiky logaritmických výnosů DJIA . .	33
5.3	Hodnoty AIC pro různé modely APARCH(1,1) pro logaritmické výnosy DJIA.	36
5.4	Odhady parametrů modelu APARCH(1,1) se zešikmeným standardizovaným Studentovým rozdělením.	37