



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matěj Jerhot

Optimální portfolia se střední hodnotou a rozptylem: Souvislosti s maximalizací užitku v diskrétním případě

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Večeř, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná Matematika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Poděkování.

Rád bych využil této příležitosti k vyjádření mého uznání a vděku doc. Janu Večerovi za jeho neocenitelnou podporu, odborné rady a připomínky během procesu psaní této bakalářské práce. Díky jeho vedení jsem byl schopen rozšířit své znalosti a porozumění danému tématu, což mi umožnilo dosáhnout lepších výsledků.

Název práce: Optimální portfolia se střední hodnotou a rozptylem: Souvislosti s maximalizací užítku v diskrétním případě

Autor: Matěj Jerhot

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Večeř, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá pohledem na trh optikou diskrétních pravděpodobnostních rozdělení. V první části zavádí základní definice a postupy pro tento náhled. Následně uvažuje logaritmický výnos jako rozdíl dvou Kullback–Leiblerových divergencí. Rovněž se snaží tento spíše náročnější výpočet zjednodušit aproximacemi využívajících Taylorova rozvoje. Dále ilustruje výpočet vah optimálního portfolia sestaveného dle Kullback–Leiblerových divergencí nebo jejich aproximací na bi/tri/tetranomiálním modelu. Ve druhé části se věnuje užitkové funkci a její maximalizaci. Ukazuje důležitost vybraného podkladového aktiva pro maximalizaci užitkové funkce. Na závěr porovnává výsledky maximalizace užitkové funkce v binomiálním modelu s výsledky dané Kellyho kritériem.

Klíčová slova: portfolia se střední hodnotou a rozptylem maximalizace užítku diskrétní rozdělení

Title: Optimal Mean Variance Portfolios: Link to Utility Maximization in Discrete Case

Author: Matěj Jerhot

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Jan Večeř, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This bachelor thesis examines the market through the lens of discrete probability distributions. The first part introduces basic definitions and procedures for this perspective. It then considers logarithmic returns as the difference of two Kullback-Leibler divergences. Additionally, it seeks to simplify this rather complex computation through approximations using Taylor expansions. Furthermore, it illustrates the calculation of weights for an optimal portfolio constructed according to Kullback-Leibler divergences or their approximations in a bi/tri/tetranomial model. In the second part, it focuses on utility function and its maximization. It demonstrates the importance of selected underlying assets for maximizing the utility function. Finally, it compares the results of utility function maximization in a binomial model with the results obtained from Kelly's criterion.

Keywords: mean variance portfolio utility maximization discrete distributions

Obsah

Úvod	2
1 Základní pojmy a předpoklady	3
1.1 Binomický model	6
1.2 Ceny v binomickém modelu	7
2 Optimální portfolia	9
2.1 Optimální portfolio	10
2.2 Fischerova aproximace	12
2.3 Markowitzova aproximace	14
2.4 Binomiální model	15
2.4.1 Přímý výpočet	16
2.4.2 Fischerova aproximace	16
2.5 Trinomiální model	17
2.5.1 Přímý výpočet	18
2.5.2 Fischerova aproximace	19
2.5.3 Markowitzova aproximace	20
2.6 Tertranomiální model	21
3 Maximalizace užitku v diskrétních případech	23
3.1 Užitek a užitková funkce	23
3.2 Maximalizace užitkové funkce v diskrétním případě	24
3.3 Kellyho kritérium	26
Závěr	29
Seznam použité literatury	30
A Přílohy	31
A.1 Váha optimálního portfolia v trinomiálním modelu přímým výpočtem	31

Úvod

Na přednáškách pana docenta Večeře mě zaujal náhled na tvoření portfolia jako na sázení proti trhu a na reprezentaci jednotlivých názorů pravděpodobnostními mírami. V první části se tak zabýváme převážně zavedením jednotlivých pojmů a prostředí, ve kterém budeme následně pracovat. Také se snažíme poukazovat na známé věty a tvrzení, které jsme probírali v průběhu studia, a spojit je s tématy, jež řešíme v práci.

Následně se dostáváme ke způsobům, jak definovat a popřípadě nalézt optimální portfolio. To počítané přímo nás zavede rozdílů dvou Kullbackova–Leiblerových divergencí jejichž výpočet může být poměrně náročný i při konečné množině možných stavů. Proto rovněž zmiňujeme metody aproximace pro nalezení vah určující optimální portfolio. Tyto metody využívají Taylorovi aproximace logaritmu a martingaleovských vlastností cen. Tyto aproximace poté ukazujeme na binomiálním a trinomiálním modelu, kde rovněž poukazujeme na úplnost popřípadě neúplnost těchto modelů.

Na poslední části se snažíme propojit metody a pohledy, které v práci používáme s definicí užitku a maximalizací užitkové funkce. Znovu se zde vracíme k binomiálnímu modelu, na kterém se snažíme ukázat blízkost maximalizace užitkové funkce pomocí pravděpodobnostních měr a Kellyho kritéria.

1. Základní pojmy a předpoklady

První a klíčový termín, kterému se budeme věnovat, je "aktivum". Aktivum zahrnuje veškeré hodnoty, které lze směnit za jiná aktiva. V této práci budeme aktiva označovat velkými písmeny. Pro identifikaci konkrétního aktiva X použijeme kroužek kolem něj \textcircled{X} , aby byla zdůrazněna jeho jedinečnost, nezávisle na numerické hodnotě. Tento značka nám umožňuje odlišit samotné aktivum od jeho číselné hodnoty, kterou zavedeme později. Pokud se budeme odkazovat na hodnotu aktiva X v určitém časovém bodě t , označíme ji jako $\textcircled{X}[t]$. Celou sadu možných aktiv označíme jako Θ .

Mějme množinu všech možných stavů, označenou jako Ω , a jednotlivým stavům ω . Aktiva lze také chápat jako různé perspektivy na pravděpodobnosti jednotlivých možných stavů ω . Tyto pravděpodobnostní míry budeme nazývat *stavové ceny* v případě diskrétních situací a *hustota stavových cen* v případě spojitých situací.

Definice 1 (Cena aktiva \textcircled{X}). *Cena aktiva \textcircled{X} značená $X_Y(t)$ udává množství aktiva \textcircled{Y} , které je potřebné k získání jednotky aktiva \textcircled{X} v určeném čase t :*

$$\textcircled{X} \equiv X_Y(t) \cdot \textcircled{Y}. \quad (1.1)$$

O cenách budeme přemýšlet jako o náhodných veličinách.

Aktivum \textcircled{Y} zde působí jako *podkladové aktivum*, které nám umožňuje stanovit hodnotu ostatních aktiv. Rovnost aktiv v rovnici (1.1) by měla být chápána jako třída ekvivalence aktiv, které sdílejí stejnou hodnotu v daném čase t . Pro tuto situaci, kdy aktiva mají stejnou hodnotu, použijeme symbol ' \equiv ' jako odlišení od ' $=$ ', které se týká numerické hodnoty.

Cena nám také určuje uspořádání jednotlivých aktiv.

Definice 2 (Uspořádání aktiv). *Tvrdíme, že $\textcircled{X} \succ \textcircled{Y}$, pokud platí, že $X_Y(t) > 1$.*

Podkladové aktivum lze volit libovolně, pokud platí, že má hodnotu, tedy platí $\textcircled{Y} \succ 0$.

Věta 1 (Změna podkladového aktiva). *Ceny $X_Z(t)$, $X_Y(t)$ a $Y_Z(t)$ splňují*

$$X_Z(t) = X_Y(t) \cdot Y_Z(t), \quad (1.2)$$

pro $\textcircled{Y} \succ 0$ a $\textcircled{Z} \succ 0$.

Důkaz. Víme, že platí

$$\textcircled{X}[t] \equiv X_Y(t) \cdot \textcircled{Y}[t] \equiv X_Y(t) \cdot Y_Z(t) \cdot \textcircled{Z}[t],$$

rovněž ovšem platí

$$\textcircled{X}[t] \equiv X_Z(t) \cdot \textcircled{Z}[t].$$

Odtud platí, že $X_Z(t) = X_Y(t) \cdot Y_Z(t)$.

□

(Večeř, 2024)

Definice 3 (Portfolio). Necht \mathbb{X}_i , $i = 1, \dots, N$, jsou aktiva z množiny aktiv Θ , portfolio v čase t je lineární kombinace aktiv:

$$\mathbb{P} \equiv \sum_{i=1}^N \Delta^i(t) \cdot \mathbb{X}_i[t],$$

kde $\Delta^i(t)$ představuje počet aktiv \mathbb{X}_i držených v čase t .

Je samozřejmé si představit, že Δ^i je kladná nebo rovná nule, my ovšem budeme brát v úvahu i možnost, že Δ^i je záporná. V takovém případě mluvíme o short pozici v \mathbb{X}_i .

Mějme libovolné podkladové aktivum \mathbb{Y} . Cena $P_Y(t)$ portfolia \mathbb{P} poté bude:

$$P_Y(t) = \sum_{i=1}^N \Delta^i(t) \cdot X_Y^i(t).$$

Uvažujme, že pracujeme v diskrétním čase a počty aktiv Δ^i v portfoliu \mathbb{P} zůstávají neměnné. Poté je možné vyjádřit vývoj ceny portfolia \mathbb{P} vůči podkladovému aktivu \mathbb{Y} :

$$P_Y(n+1) - P_Y(n) = \sum_{i=1}^N \Delta^i(t) [X_Y^i(n+1) - X_Y^i(n)].$$

Ve většině případů je přehlednější vyjadřovat počet držených aktiv Δ^i relativně $w^i(t)$, tedy jako zlomek kapitálu investovaný do každého aktiva místo absolutních hodnot. Toho dosáhneme škálováním jednotlivých aktiv vůči jejich relativní ceně vzhledem k portfoliu \mathbb{P} :

$$\mathbb{P}[t] \equiv \sum_{i=1}^N w^i(t) \cdot \frac{\mathbb{X}_i[t]}{X_P^i(t)}. \quad (1.3)$$

Rovněž by mohlo být užitečné vyjádření ve smyslu cen vzhledem k podkladovému aktivu \mathbb{Y} :

$$\frac{\mathbb{P}[t]}{P_Y} \equiv \sum_{i=1}^N w^i(t) \cdot \frac{X^i[t]}{X_Y^i(t)},$$

které dostaneme podělením rovnice 1.3 cenou portfolia $\mathbf{P}_Y(t)$ a využitím věty 1 o změně podkladového aktiva.

Pokud bychom vyjádřili cenu portfolia vůči \mathbb{Y} dostáváme:

$$1 = \frac{P_Y(t)}{P_Y(t)} = \sum_{i=1}^N w^i(t) \cdot \frac{X_Y^i(t)}{X_Y^i(t)} = \sum_{i=1}^N w^i(t),$$

což znamená, že $w^i(t)$ jsou váhy se součtem jedna. Stejně jako u absolutních hodnot Δ^i je zde možné, aby $w^i(t)$ byly záporné. Omezení, která ovšem u portfolií musíme respektovat jsou podmínky bankrotu. Chceme se tedy vyhnout scénářům, kdy $P_Y(T) < 0$ tedy situaci kdy je celková hodnota portfolia záporná pro nějaké $T > t$.

Pokud bychom chtěli vyjádřit jednotlivé relativní váhy vůči absolutním počtům držných aktiv, můžeme použít následující:

$$w^i(t) = \Delta^i(t) \cdot X_P^i(t) = \Delta^i(t) \cdot \frac{X_Y^i(t)}{P_Y(t)}, \quad (1.4)$$

a naopak

$$\Delta^i(t) = w^i(t) \cdot P_X^i(t) = \Delta^i \cdot \frac{P_Y(t)}{X_Y^i(t)}. \quad (1.5)$$

Definice 4 (Výnos). *Hodnotu*

$$R_Y^X(n+1) = \left[\frac{X_Y(n+1)}{X_Y(n)} - 1 \right]$$

označíme jako výnos v diskrétním případě. Na výnosy budeme rovněž nahlížet jako na náhodné veličiny.

Výnos může zjevně nabývat i záporných hodnot, v takovém případě můžeme místo slova výnos použít ztráta. My v této práci pro zachování značení, budeme upřednostňovat označení kladný popřípadě záporný výnos. Na výnos je možné nahlížet jako na smlouvu, která nám dodá $R_Y^X(n+1)$ jednotek aktiva \textcircled{Y} v čase $n+1$. Pro lepší pochopení uvedeme příklad. Mějme portfolio $\textcircled{P}[n]$ v čase n s pozicemi:

$$\textcircled{P}[n] \equiv \frac{1}{X_Y(n)} \cdot \textcircled{X}[n] - \textcircled{Y}[n].$$

V čase n má toto portfolio nulovou hodnotu vzhledem k podkladovému aktivu \textcircled{Y} :

$$P_Y(n) = \frac{1}{X_Y(n)} \cdot X_Y(n) - 1 = 0,$$

zatímco v čase $n+1$ má hodnotu:

$$P_Y(n+1) = \frac{1}{X_Y(n)} \cdot X_Y(n+1) - 1 = R_Y^X(n+1).$$

Tento příklad odpovídá zakoupení části aktiva \textcircled{X} , která odpovídá jednotce aktiva \textcircled{Y} . To vyústí v kladný nebo záporný výnos v závislosti na vývoji ceny aktiva \textcircled{X} mezi časy n a $n+1$. Pro přesnost, nulový výnos je také možnost, ovšem z našeho hlediska je taková smlouva bezpředmětná. Různé subjekty účastníci se trhu, mohou mít na výnos rozdílné názory. Tyto rozdíly jsou důležitý faktor, který tato práce bere v úvahu.

Věta 2. *Výnos $R_Y^P(n+1)$ portfolia \textcircled{P} je v diskrétním případě váženým průměrem výnosů jednotlivých aktiv $R_Y^{X^i}(n+1)$ v portfoliu:*

$$R_Y^P(n+1) = \sum_{i=1}^N w^i(n) \cdot R_Y^{X^i}(n+1).$$

(Večeř, 2024)

Důkaz. Budeme postupovat dle zavedených definic.

$$R_Y^P(n+1) = \left[\frac{P_Y(n+1)}{P_Y(n)} - 1 \right] = \sum_{i=1}^N w^i \cdot \left[\frac{X_Y^i(n+1)}{X_Y^i(n)} - 1 \right] = \sum_{i=1}^N w^i(n) \cdot R_Y^{X^i}(n+1).$$

□

Definice 5 (Statické portfolio). *Statickým portfoliem nazveme takové portfolio \textcircled{I} , které má konstantní absolutní pozice $\Delta^i(t) = \Delta^i$.*

Pro nás je podstatné, že ke statickému portfoliu budeme v průběhu práce přistupovat jako k jednotlivému aktivu. Rovněž je důležité si uvědomit, že zatímco absolutní pozice zůstávají ve statickém portfoliu konstantní, relativní pozice díky vztahu 1.4 konstantní není:

$$w^i(t) = \Delta^i \cdot X_I^i(t) = \Delta^i \cdot \frac{X_Y^i(t)}{I_Y(t)},$$

a tedy:

$$w^i(t) = w^i(0) \cdot \frac{X_I^i(t)}{X_I^i(0)} = w^i(0) \cdot \frac{\frac{X_Y^i(t)}{I_Y(t)}}{\frac{X_Y^i(0)}{I_Y(0)}},$$

kde jsme použili konstantní absolutní pozice k výpočtu relativních pozic v počátečním čase, dle vztahu 1.4.

1.1 Binomický model

Problémy, kterými se budeme v této práci zabývat jsou snáze uchopitelné na příkladu binomického modelu. Nechť tedy $\Omega = \{H, T\}$. Dále uvažujme binární smlouvu \textcircled{A} definovanou výplatami v čase $n = 1$:

$$\textcircled{A}[1] \equiv \begin{cases} \textcircled{Y}[1], & \omega = H, \\ 0, & \omega = T, \end{cases}$$

tedy výplata jednotky aktiva \textcircled{Y} v případě, že $\omega = H$ a nulová výplata v opačném případě.

Z hlediska výplat v čase $n = 1$, tedy situace vypadá následovně. Máme k dispozici bezrizikové aktivum \textcircled{Y} :

$$Y_Y(1) = \begin{cases} 1, & \omega = H, \\ 1, & \omega = T, \end{cases},$$

s počáteční cenou $Y_Y(0) = 1$ a rizikové aktivum \textcircled{A} :

$$A_Y(1) \equiv \begin{cases} 1, & \omega = H, \\ 0, & \omega = T, \end{cases}$$

s počáteční cenou $A_Y = q \in (0, 1)$, kde q reflektuje názor trhu na teoretickou četnost výskytu jevu H . Aktivum \textcircled{A} nemůžeme použít jako podkladové aktivum, neboť při $\omega = T$ je aktivum \textcircled{A} bezcenné a cena $Y_A(1, T)$ tak není definována.

Dále si zavedeme komplementární aktivum k aktivu \textcircled{A} a označíme ho $\textcircled{A^C}$. Platí:

$$\textcircled{A^C}[1] \equiv \begin{cases} 0, & \omega = H, \\ \textcircled{Y}[1], & \omega = T, \end{cases}$$

s cenou $A_Y^C(0) = 1 - A_Y(0) = 1 - q$, díky vztahu $\textcircled{A} + \textcircled{A^C} \equiv \textcircled{Y}$.

Ceny $A_Y(0)$ a $A_Y^C(0)$ jsou kladné a jejich součet je jedna. To znamená, že je můžeme vnímat jako pravděpodobnosti. Pravděpodobnostní míru, kterou tyto ceny indukují, nazveme *rozdělení stavových cen*. V tomto konkrétním případě rozdělení stavových cen příslušející aktivu \textcircled{Y} je $\mathbb{P}^Y = [q, 1 - q]^T$. Na míru \mathbb{P}^Y se budeme odkazovat také jako na rizikově neutrální míru. Tato míra reflektuje názor trhu. Ceny uváděné na trhu jsou transparentní a dostupné všem účastníkům, a tak je míra \mathbb{P}^Y viditelná.

Kromě této míry předpokládáme existenci míry $\hat{\mathbb{P}} = [\hat{p}, 1 - \hat{p}]^T$, kterou nazveme *fyzickou mírou*. Tato míra reprezentuje skutečnost. To znamená, že pokud míry $\hat{\mathbb{P}}$ a \mathbb{P}^Y nejsou totožné, \mathbb{P}^Y je nesprávným modelem. Dále je třeba si uvědomit, že fyzická míra není, na rozdíl od rizikově neutrální míry, přímo viditelná.

Za předpokladu, že máme k dispozici nekonečně mnoho identických a nezávisle rozdělených (iid) pozorování ze zmíněné množiny $\Omega = H, T$, parametr \hat{p} odpovídá frekvenci pozorování $\omega = H$, což vyplývá ze zákona velkých čísel.

Věta 3 (Silný zákon velkých čísel pro stejně rozdělené náhodné veličiny). *Mějme posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Pak pro $n \rightarrow \infty$*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mu, [P] - s.j.$$

pro nějaké $\mu \in \mathbb{R}$, právě když $E |X_1| < \infty$; v tom případě $E X_1 = \mu$

(Dupač a Hušková, 2013) str. 72

1.2 Ceny v binomickém modelu

V této části práce se pokusíme ukázat, že ceny na trhu jsou závislé na změně podkladového aktiva bez ohledu na maximalizaci užitkové funkce nebo tržního ekvilibria. Mějme pravděpodobnostní míru reprezentující skutečný stav věcí $\hat{\mathbb{P}} = [\hat{p}, 1 - \hat{p}]$. Dále uvažujeme jako výše míru \mathbb{P}^Y , která reprezentuje pravděpodobnosti dle pohledu trhu, a rozdílný názor na trh $\mathbb{P}^X = [p, 1 - p]^T$. Předpokládáme, že ani jedna z měr $\mathbb{P}^X, \mathbb{P}^Y$ se nerovná fyzické míře $\hat{\mathbb{P}}$, ale mají k ní v nějakém smyslu rozumně blízko.

Předpokládáme, že míra \mathbb{P}^X generuje aktivum \textcircled{X} a s ním spojené aktivum \textcircled{B} definované jako

$$\textcircled{B}[1] \equiv \begin{cases} \textcircled{X}[1], & \omega = H, \\ 0, & \omega = T. \end{cases}$$

Tedy ekvivalentně jako aktivum \textcircled{A} vůči aktivu \textcircled{Y} . Rovněž uvažujeme analogicky definované aktivum $\textcircled{B^C}$. Pravděpodobnostní míra \mathbb{P}^X určuje počáteční cenu $B_X(0) = p$. K lepšímu porozumění cen, popíšeme vztah mezi aktivy \textcircled{A} a \textcircled{B} .

$$\textcircled{B}[0] \equiv B_X(0) \cdot \textcircled{X}[0] \equiv pX_Y(0) \cdot \textcircled{Y}[0] \equiv pX_Y(0) \cdot Y_A(0) \cdot \textcircled{A}[0] \equiv \frac{p}{q}X_Y(0) \cdot \textcircled{A}[0].$$

Pro $\omega = H$ analogicky k předchozí rovnici spočteme:

$$\textcircled{X}[1] \equiv X_Y(1, \omega) \textcircled{Y}[1] \equiv B_A(0) \textcircled{Y}[1] \equiv B_X(0)X_Y(0)Y_A[1] \textcircled{Y}[1] = \frac{p}{q}X_Y(0) \textcircled{Y}[1],$$

tedy v kontextu cen platí $X_Y(1, H) = \frac{p}{q}X_Y(0)$. V opačném případě lze využít komplementárních aktiv $\textcircled{A^C}$, $\textcircled{B^C}$, abychom analogicky ukázali, že $X_Y(1, T) = \frac{1-p}{1-q}X_Y(0)$.

Věta 4 (Martingalovská vlastnost cen).

$$E^Y[X_Y(1)] = X_Y(0).$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} E^Y[X_Y(1)] &= \frac{p}{q} \cdot X_Y(0) \cdot q + \frac{1-p}{1-q} \cdot X_Y(0) \cdot (1-q) = (p+1-p) \cdot X_Y(0) \\ &= X_Y(0). \end{aligned}$$

□

(Večeř, 2024)

Tato věta nám ukazuje, že podle míry \mathbb{P}^Y zůstávají očekávané budoucí ceny vůči aktivu \textcircled{Y} konstantní.

2. Optimální portfolia

V závěru předchozí kapitoly jsme pracovali s cenami v binomickém modelu a ukázali jsme, že jsou martingaleovské a dle názoru trhu jsou očekávané ceny konstantní.

Podstatou optimalizace portfolia je v jistém smyslu maximalizovat zisk. V této kapitole se pokusíme ukázat, že k tomu je třeba mít správný názor na budoucí vývoj trhu. Rovněž se pokusíme ukázat, že pokud nám nejde o maximalizaci zisku, ale pouze o kladný zisk, není třeba mít správný názor na budoucí vývoj trhu, ale stačí jen lepší, než má trh samotný.

Mějme stejně jako v dříve dvě různé pravděpodobnostní míry \mathbb{P}^X a \mathbb{P}^Y , které reprezentují popořadě náš názor na trh a názor trhu samotného. Na rozdíl od předchozích situací ovšem budeme vývoj ceny zkoumat z pohledu míry \mathbb{P}^X .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^X[X_Y(1)] &= \frac{p}{q} \cdot X_Y(0) \cdot p + \frac{1-p}{1-q} \cdot X_Y(0) \cdot (1-p) = X_Y(0) \cdot \frac{p^2 - 2pq + q^2 - q^2 + q}{q(1-q)} \\ &= X_Y(0) \cdot \left(\frac{(p-q)^2}{q(1-q)} + 1 \right) \geq X_Y(0). \end{aligned}$$

Tuto situaci je možné rozšířit na n časových úseků.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^X[X_Y(1)] &= X_Y(0) \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{p}{q}\right)^k \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{n-k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= X_Y(0) \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{p^2}{q}\right)^k \left(\frac{(1-p)^2}{1-q}\right)^{n-k} \\ &= X_Y(0) \cdot \left(\frac{p^2}{q} + \frac{(1-p)^2}{1-q}\right)^n \\ &= X_Y(0) \cdot \left(\frac{(p-q)^2}{q(1-q)} + 1\right) \geq X_Y(0). \end{aligned}$$

Tedy očekávaná hodnota $X_Y(n)$ vykazuje exponenciální růst. (Večeř, 2024) str. 34

Věta 5 (Jensenova nerovnost). *Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní funkce a X je náhodná veličina taková, že $\mathbb{E}|f(X)| < \infty$. Potom*

$$\mathbb{E} f(X) \geq f(\mathbb{E} X).$$

(Lachaut, 1998) věta 5.9.

Již víme, že platí $X_Y(n) = \frac{1}{Y_X(n)}$, což odpovídá funkci $f(x) = \frac{1}{x}$. Pokud se v cenách omezíme na kladné hodnoty, je $f(x)$ konvexní a z Jensenovi nerovnosti dostáváme

$$\mathbb{E}^X[X_Y(n)] = \mathbb{E}^X \left[\frac{1}{Y_X(n)} \right] \geq \frac{1}{\mathbb{E}^X Y_X(n)} = \frac{1}{Y_X(0)} = X_Y(0) = \mathbb{E}^Y[X_Y(n)].$$

To tedy znamená, že očekávaná cena aktiva $\widehat{X}[n]$ vůči libovolnému jinému aktivu poroste, za předpokladu, že fyzická pravděpodobnostní míra odpovídá míře \mathbb{P}^X .

2.1 Optimální portfolio

Vývoj cen, jak jsme jej popsali v závěru první kapitoly této práce, je multiplikační. Rádi bychom na něj aplikovali známé věty jako například zákon velkých čísel nebo centrální limitní větu. K tomu je ovšem potřeba dostat vývoj cen do aditivní formy. Proto budeme v následující části pracovat s logaritmickým vývojem cen. Zavedeme proto nové značení.

Definice 6 (Logaritmický výnos). *Hodnotu $\xi(k) = \log\left(\frac{X_Y(k,\omega)}{X_Y(k-1)}\right)$ budeme nazývat logaritmickým výnosem.*

Můžeme si všimnout, že na rozdíl od dříve definovaného výnosu neodečítáme od podílu jedničku. Díky tomu můžeme pracovat se situacemi, které by generovaly záporný výnos a které by nebylo možné zlogaritmovat. Rovněž vidíme, že logaritmický výnos je aditivní.

$$\log\left(\frac{X_Y(n)}{X_Y(0)}\right) = \sum_{k=1}^n \log\left(\frac{X_Y(k)}{X_Y(k-1)}\right) = \sum_{k=1}^n \xi(k).$$

Věta 6 (Centrální limitní věta). *Nechť $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Nechť $0 < \text{var} X_1 < \infty$. Položme*

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n E X_1}{\sqrt{n \text{var} X_1}}, n = 1, 2, \dots$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x).$$

(Dupač a Hušková, 2013) str. 85

Předpokládejme, že $\xi(k)$ jsou stejně rozdělené nezávislé náhodné veličiny s kladným konečným rozptylem. Nyní použitím centrální limitní věty dostáváme

$$\hat{\mathbb{P}}\left(\frac{\log\left(\frac{X_Y(n)}{X_Y(0)}\right) - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} \leq x\right) = \hat{\mathbb{P}}\left(\frac{\sum_{k=1}^n \xi(k) - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x),$$

kde $\Phi(x)$ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení, $\mu = E|\xi(k)|$ a $\sigma^2 = \text{var}|\xi(k)|$. Abychom se vyhnuli nechtěné záměně používáme zde míru $\hat{\mathbb{P}}$, ale mohli bychom uvažovat i \mathbb{P}^X nebo \mathbb{P}^Y . Centrální limitní věta nám tak umožňuje zkoumat asymptotické chování vývoje cen $X_Y(n)$. Například nám umožňuje spočítat pravděpodobnost, že se cena $X_Y(n)$ nachází pod nějakou hranicí $K \cdot X_Y(0)$, pro $K > 0$ a $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}(X_Y(n) \leq K \cdot X_Y(0)) &= \hat{\mathbb{P}}\left(\log\left(\frac{X_Y(n)}{X_Y(0)}\right) \leq \log(K)\right) \\ &= \hat{\mathbb{P}}\left(\frac{\log\left(\frac{X_Y(n)}{X_Y(0)}\right) - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} \leq \frac{\log(K) - \mu n}{\sigma \sqrt{n}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{\log(K) - \mu n}{\sigma \sqrt{n}}\right) \rightarrow \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma} \sqrt{n}\right). \end{aligned}$$

(Večeř, 2024) str. 36 Asymptotické chování této distribuční funkce bude záležet na parametru μ ,

$$\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right) \rightarrow \begin{cases} 1, & \mu < 0, \\ \frac{1}{2}, & \mu = 0, \\ 0, & \mu > 0. \end{cases}$$

Abychom mohli dále pokračovat v naší analýze asymptotických výsledků je třeba zavést pojem relativní entropie.

Definice 7 (Relativní entropie). *Nechť \mathbb{P} a \mathbb{Q} jsou diskrétní pravděpodobnostní rozdělení na prostoru Ω . Předpokládejme, že platí $Q(\omega) = 0 \Rightarrow P(\omega) = 0$. Relativní entropie je definována jako*

$$D_{KL}(\mathbb{P} \parallel \mathbb{Q}) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \log\left(\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}\right).$$

Kde $P(\omega)$ a $Q(\omega)$ značí pravděpodobnosti jevu ω podle rozdělení \mathbb{P} a \mathbb{Q} . (MacKay, 2003) str. 34

V matematické statistice se relativní entropie označuje také jako Kullback-Leiblerova divergence. Relativní entropie se tedy používá jako nástroj pro měření odlišnosti mezi dvěma pravděpodobnostními rozděleními \mathbb{P} a \mathbb{Q} . Tato metrika nám říká, jak moc se rozdělení \mathbb{P} liší od rozdělení \mathbb{Q} . Jednodušeji řečeno, Kullback-Leiblerova divergence nám ukazuje, jak moc se odchylije od očekávaného, pokud používáme \mathbb{Q} jako model, když ve skutečnosti máme distribuci \mathbb{P} . Je důležité poznamenat, že Kullback-Leiblerova divergence není metrika ve smyslu tradiční vzdálenosti. To znamená, že není symetrická ve uvedených dvou rozděleních a nedodrжуje trojúhelníkovou nerovnost. (Amari, 2016) str. 11

Nyní, když máme zavedenou relativní entropii, můžeme pokračovat ve zkoumání dříve uvedených závěrů. Dále předpokládejme, že máme k dispozici pouze konečné množství aktiv (X^i) , $i = 1, \dots, N$, a bereme v úvahu pouze statická portfolia. Jak jsme definovali na začátku práce, jedná se o taková portfolia, která zavedeme v čase $t = 0$ a další vývoj je závislý už pouze na vývoji trhu. Mějme portfolio (V) , které indukuje míru \mathbb{P}^V . Počítáme s ním stejně jako s jakýmkoliv jiným aktivem.

Poznámka. Z důvodu značení a potřeby udávat cenu vůči fyzické míře $\hat{\mathbb{P}}$ budeme pro tuto míru rovněž používat značení \mathbb{P}^F .

$$\begin{aligned} \mu^V &= \mathbb{E}^F \left[\log \left(\frac{V_Y(1)}{V_Y(0)} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}^F \left[\log \left(\frac{V_F(1)F_Y(1)}{V_F(0)F_Y(0)} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}^F \left[\log \left(\frac{F_Y(1)}{F_Y(0)} \right) \right] + \mathbb{E}^F \left[\log \left(\frac{V_F(1)}{V_F(0)} \right) \right] \\ &= D_{KL}(\mathbb{P}^F \parallel \mathbb{P}^V) - D_{KL}(\mathbb{P}^F \parallel \mathbb{P}^V). \end{aligned}$$

Tedy očekávaný logaritmický výnos ceny $X_Y(1)$ za jednotku času a při předpokládané fyzické míře $\hat{\mathbb{P}}$ je možné vyjádřit jako rozdíl mezi relativními entropiemi.

Jak jsme ukázali dříve, limitní chování vývoje ceny $X_Y(1)$ závisí na kladnosti či zápornosti parametru μ . Konkrétně μ je kladné, pokud platí $D_{KL}(\mathbb{P}^{\mathbb{F}} \parallel \mathbb{P}^{\mathbb{Y}}) > D_{KL}(\mathbb{P}^{\mathbb{F}} \parallel \mathbb{P}^{\mathbb{X}})$. To tedy znamená, že v situaci, kdy je $\mathbb{P}^{\mathbb{F}}$ blíže k $\mathbb{P}^{\mathbb{X}}$ než k $\mathbb{P}^{\mathbb{Y}}$ ve smyslu relativní entropie, jde pravděpodobnost, že je logaritmický výnos omezený, k nule. Opačný případ naopak znamená trajektorii směrem k mínus nekonečnu na logaritmické škále a tedy k nule na absolutní.

Poznámka. Tento výpočet je možné rozšířit na libovolný diskretní časový úsek.

$$\mathbb{E}^F \left[\log \left(\frac{V_Y(n)}{V_Y(0)} \right) \right] = n \cdot \hat{\mathbb{E}} \left[\log \left(\frac{V_Y(1)}{V_Y(0)} \right) \right] = n \cdot (D_{KL}(\mathbb{P}^{\mathbb{F}} \parallel \mathbb{P}^{\mathbb{Y}}) - D_{KL}(\mathbb{P}^{\mathbb{F}} \parallel \mathbb{P}^{\mathbb{V}}))$$

Definice 8 (Optimální portfolio). *Optimálním portfoliem nazveme takové portfolio $\hat{\mathbb{V}}$, které bude maximalizovat očekávaný logaritmický výnos vůči všem podkladovým aktivům za předpokladu fyzické míry $\hat{\mathbb{P}}$.*

Věta 7. *Optimální portfolio $\hat{\mathbb{V}}$ vzhledem k fyzické míře $\mathbb{P}^{\mathbb{F}}$ je statické portfolio, které minimalizuje*

$$D_{KL}(\mathbb{P}^{\mathbb{F}} \parallel \mathbb{P}^{\mathbb{V}}).$$

Důkaz. Mějme $\hat{\mathbb{Y}}$ jako podkladové aktivum. Poté

$$\mathbb{E}^F \log \left(\frac{V_Y(n)}{V_Y(0)} \right) = \mathbb{E}^F \log \left(\frac{V_F(n)}{V_F(0)} \right) + \mathbb{E}^F \log \left(\frac{F_Y(n)}{F_Y(0)} \right).$$

Tuto rovnost nám udává věta 1. Dále člen $\mathbb{E}^F \log \left(\frac{F_Y(n)}{F_Y(0)} \right)$ bude konstantní, tedy pro výpočet maxima není podstatný. Použitím věty 1 a definice relativní entropie dostáváme rovnost

$$\mathbb{E}^F \log \left(\frac{V_F(n)}{V_F(0)} \right) = -\mathbb{E}^F \log \left(\frac{F_V(n)}{F_V(0)} \right) = -D_{KL}(\mathbb{P}^{\mathbb{F}} \parallel \mathbb{P}^{\mathbb{V}}),$$

která nám ukazuje, že minimalizace $D_{KL}(\mathbb{P}^{\mathbb{F}} \parallel \mathbb{P}^{\mathbb{V}})$ bude maximalizovat očekávaný logaritmický výnos. □

(Večeř, 2024) str. 47

2.2 Fischerova aproximace

Věta 8. *Mějme pravděpodobnostní míru závislou na parametru θ . Dále mějme $\theta_1, \theta_2 = \theta_1 + \delta$ pro $\delta > 0$. Poté platí*

$$D_{KL}(\mathbb{P}_{\theta_1} \parallel \mathbb{P}_{\theta_2}) \approx \frac{1}{2} \delta^{\mathbf{T}} I(\theta_1) \delta^{\mathbf{T}},$$

kde $I(\theta_1)$ značí Fischerovu informační matici.

(Jeffreys, 1946) Rovněž se zde nachází důkaz k tomuto tvrzení.

Využijeme věty 8 a zkusíme tak aproximovat závěr z věty 7. Mějme konečné množství aktiv $\hat{\mathbb{X}}^i$, $i = 1, \dots, N$ a fyzickou míru $\mathbb{P}^{\mathbb{F}}$. Určeme statické portfolio

Ⓟ[0] takové, že $V_F = \sum_{i \in N} w^i \cdot X_F^i(0)$. Rovněž pro jednoduchost uvažujme pouze jeden časový úsek, $n = 1$. Poté platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^F \log \left(\frac{V_F(1)}{V_F(0)} \right) &= \mathbb{E}^F \log \left(\sum_{i \in N} w^i \cdot \frac{X_F^i(1)}{X_F^i(0)} \right) \\ &= \mathbb{E}^F \log \left[\sum_{i \in N} w^i \cdot \left(\frac{X_F^i(1)}{X_F^i(0)} - 1 \right) + 1 \right] \\ &\approx \mathbb{E}^F \sum_{i \in N} w^i \cdot \left(\frac{X_F^i(1)}{X_F^i(0)} - 1 \right) - \frac{1}{2} \mathbb{E}^F \left[\sum_{i \in N} w^i \cdot \left(\frac{X_F^i(1)}{X_F^i(0)} - 1 \right) \right]^2, \end{aligned}$$

kde tuto aproximaci dostáváme z Taylorova rozvoje $\log(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$. (Večeř, 2024) str.60

Dále je možné psát

$$\mathbb{E}^F \sum_{i \in N} w^i \cdot \left(\frac{X_F^i(1)}{X_F^i(0)} - 1 \right) = 0,$$

neboť z věty 4 víme, že ceny jsou martigaleovské. Platí tedy $\mathbb{E}^F X_F^i(1) = X_F^i(0)$ a $\frac{1}{X_F^i(0)}$ je konstanta. U zbývajících členů použijeme definici výnosu

$R_F^{X^i}(1) = \frac{X_F^i(1)}{X_F^i(0)} - 1$, kde pro zjednodušení zápisu budeme psát $R_F^{X^i}(1)$ jako $R_F^{X^i}$.

Dostaneme

$$\frac{1}{2} \mathbb{E}^F \left[\sum_{i \in N} w^i \cdot \left(\frac{X_F^i(1)}{X_F^i(0)} - 1 \right) \right]^2 = \frac{1}{2} \mathbb{E}^F \left[\sum_{i \in N} w^i \cdot R_F^{X^i} \right]^2 = \mathbb{E}^F \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w},$$

kde

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_F^{X^1} R_F^{X^1} & R_F^{X^1} R_F^{X^2} & R_F^{X^1} R_F^{X^3} & \dots \\ R_F^{X^2} R_F^{X^1} & R_F^{X^2} R_F^{X^2} & R_F^{X^2} R_F^{X^3} & \dots \\ R_F^{X^3} R_F^{X^1} & R_F^{X^3} R_F^{X^2} & R_F^{X^3} R_F^{X^3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Pro další úpravy tohoto členu budeme potřebovat zavést kovariance.

Definice 9 (Kovariance). *Nechť X, Y jsou náhodné veličiny takové, že $\mathbb{E} X^2 < \infty$ a $\mathbb{E} Y^2 < \infty$. Kovariance $\text{cov}(X, Y)$ náhodných veličin X a Y je definována vztahem*

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E} X)(Y - \mathbb{E} Y).$$

(Dupač a Hušková, 2013)

V této situaci můžeme aplikovat střední hodnotu na matici náhodných veličin \mathbf{R} a upravit výraz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^F \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}^F R_F^{X^1} R_F^{X^1} & \mathbb{E}^F R_F^{X^1} R_F^{X^2} & \mathbb{E}^F R_F^{X^1} R_F^{X^3} & \dots \\ \mathbb{E}^F R_F^{X^2} R_F^{X^1} & \mathbb{E}^F R_F^{X^2} R_F^{X^2} & \mathbb{E}^F R_F^{X^2} R_F^{X^3} & \dots \\ \mathbb{E}^F R_F^{X^3} R_F^{X^1} & \mathbb{E}^F R_F^{X^3} R_F^{X^2} & \mathbb{E}^F R_F^{X^3} R_F^{X^3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \text{var}^F R_F^{X^1} & \text{cov}^F(R_F^{X^1}, R_F^{X^2}) & \text{cov}^F(R_F^{X^1}, R_F^{X^3}) & \dots \\ \text{cov}^F(R_F^{X^2}, R_F^{X^1}) & \text{var}^F R_F^{X^2} & \text{cov}^F(R_F^{X^2}, R_F^{X^3}) & \dots \\ \text{cov}^F(R_F^{X^3}, R_F^{X^1}) & \text{cov}^F(R_F^{X^3}, R_F^{X^2}) & \text{var}^F R_F^{X^3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \Sigma^F. \end{aligned}$$

Zde jsme stejně jako v nulování prvního členu Taylorova rozvoje využili nulového prvního momentu výnosů. Pokud se tedy vrátíme o krok zpět a dosadíme do původního vzorečku, vyjde aproximace logaritmického výnosu

$$\mathbf{E}^F \log \left(\frac{V_F(1)}{V_F(0)} \right) \approx -\frac{1}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma}^F \mathbf{w}.$$

Fischerova aproximace tedy využívá, že ceny aktiv jsou martingaly vzhledem k fyzické míře a tedy jediným podstatným aspektem pro logaritmický výnos se stává rozptyl, který se snažíme minimalizovat.

2.3 Markowitzova aproximace

Jak si můžeme povšimnout, Fischerova aproximace nebere v úvahu míru \mathbb{P}^Y , tedy názor trhu. Rovněž při výpočtech vah aproximujeme pouze $(D_{KL}(\mathbb{P}^F \parallel \mathbb{P}^V))$ pomocí rozptylu aktiv. Markowitzova aproximace na rozdíl od Fischerovi počítá i s názorem trhu a aproximuje i $(D_{KL}(\mathbb{P}^F \parallel \mathbb{P}^Y))$ pomocí středních hodnot.

Mějme stejně jako v předchozím případě konečné množství aktiv (X^i) , $i = 1, \dots, N$ a fyzickou míru \mathbb{P}^F . Určeme statické portfolio $(\mathbb{V})[0]$ takové, že $V_Y = \sum_{i \in N} w^i \cdot X_Y^i(0)$. Rovněž pro jednoduchost uvažujme pouze jeden časový úsek, $n = 1$. Poté platí

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^F \log \left(\frac{V_Y(1)}{V_Y(0)} \right) &= \mathbf{E}^F \log \left(\sum_{i \in N} w^i \cdot \frac{X_Y^i(1)}{X_Y^i(0)} \right) + \mathbf{E}^Y \log \left(\sum_{i \in N} w^i \cdot \frac{X_Y^i(1)}{X_Y^i(0)} \right) \\ &\quad - \mathbf{E}^Y \log \left(\sum_{i \in N} w^i \cdot \frac{X_Y^i(1)}{X_Y^i(0)} \right) \\ &\approx \mathbf{E}^F \left[\sum_{i \in N} w^i \cdot \left(\frac{X_Y^i(1)}{X_Y^i(0)} + 1 \right) \right] + \mathbf{E}^Y \log \left(\sum_{i \in N} w^i \cdot \frac{X_Y^i(1)}{X_Y^i(0)} \right) \\ &\approx \mathbf{E}^F \left[\sum_{i \in N} w^i \cdot \left(\frac{X_Y^i(1)}{X_Y^i(0)} + 1 \right) \right] - \frac{1}{2} \mathbf{E}^Y \left[\sum_{i \in N} w^i \cdot \left(\frac{X_Y^i(1)}{X_Y^i(0)} - 1 \right) \right]^2 \\ &= \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma}^Y \mathbf{w}, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\boldsymbol{\mu} = \left[\mathbf{E}^F w^i \cdot \left(\frac{X_Y^i(1)}{X_Y^i(0)} - 1 \right) \right]_{i \in \mathbb{N}}^T,$$

je vektor očekávaných výnosů jednotlivých aktiv podle fyzické míry \mathbb{P}^F a

$$\boldsymbol{\Sigma}^Y = \begin{bmatrix} \text{var}^Y R_Y^{X^1} & \text{cov}^Y(R_Y^{X^1}, R_Y^{X^2}) & \text{cov}^Y(R_Y^{X^1}, R_Y^{X^3}) & \dots \\ \text{cov}^Y(R_Y^{X^2}, R_Y^{X^1}) & \text{var}^Y R_Y^{X^2} & \text{cov}^Y(R_Y^{X^2}, R_Y^{X^3}) & \dots \\ \text{cov}^Y(R_Y^{X^3}, R_Y^{X^1}) & \text{cov}^Y(R_Y^{X^3}, R_Y^{X^2}) & \text{var}^Y R_Y^{X^3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

je kovarianční matice jednotlivých výnosů podle rizikově neutrální míry \mathbb{P}^Y . (Večeř, 2024) str. 64

V rovnici jsme využili nejprve Taylorova rozvoje pro logaritmus prvního a druhého řádu a , že ceny aktiv vůči míře \mathbf{P}^Y jsou podle té samé míry martingaly,

$$\mathbb{E}^Y \log \left(\sum_{i \in N} w^i \cdot \frac{X_Y^i(1)}{X_Y^i(0)} \right) \approx 0.$$

. Dále jsme aplikovali Taylorův rozvoj druhého řádu a rovněž martingaleovskou vlastnost cen vůči míře \mathbf{P}^Y podle té samé míry.

Věta 9 (Optimální Fischerovi váhy). *Nechť \mathbf{w} je n -rozměrný vektor a Σ^F je invertibilní, pozitivně definitní kovarianční matice. Problém maximalizace $-\frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Sigma^F \mathbf{w}$ pod podmínkou $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ řeší vektor vah daný:*

$$\mathbf{w} = \frac{(\Sigma^F)^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T (\Sigma^F)^{-1} \mathbf{1}},$$

kde $\mathbf{1}$ značí vektor jedniček a odpovídající maximální hodnota je:

$$-\frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Sigma^F \mathbf{w} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\mathbf{1}^T (\Sigma^F)^{-1} \mathbf{1}}.$$

(Večeř, 2024) str. 60, kde je možné nalézt i důkaz.

Věta 10 (Optimální Markowitzovo váhy bez bezrizikového aktiva). *Nechť μ je vektor očekávaných výnosů a Σ^Y je kovarianční matice výnosů odpovídající portfoliu určenému vektorem vah w . Pokud Σ^Y je invertibilní, optimální váhy maximalizující*

$$\mathbf{w}^T \mu - \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Sigma^Y \mathbf{w},$$

za podmínky $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ jsou dané:

$$\mathbf{w} = (\Sigma^Y)^{-1} \mu^{\mathbf{X}} + \left(\frac{1 - \mathbf{1}^T (\Sigma^Y)^{-1} \mu}{\mathbf{1}^T (\Sigma^Y)^{-1} \mathbf{1}} \right) (\Sigma^Y)^{-1} \mathbf{1},$$

kde $\mathbf{1}$ značí vektor jedniček.

(Večeř, 2024) str. 65, kde je možné nalézt i důkaz.

2.4 Binomiální model

Mějme prostor $\Omega = [H, T]$, aktiva (\mathbb{X}) , (\mathbb{Y}) a pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}^{X_1} = (p_1, p_2)$, $\mathbb{P}^{X_2} = (q_1, q_2)$, $\mathbb{P}^Y = (n_1, n_2)$ a $\mathbb{P}^F = (m_1, m_2)$. Kde \mathbb{P}^{X_1} a \mathbb{P}^{X_2} reprezentují aktiva (X_1) popřípadě (X_2) , \mathbb{P}^Y je rizikově neutrální míra a \mathbb{P}^F je fyzická míra. Jak jsme již zmínili dříve, pokusíme se najít optimální portfolio minimalizací $D_{KL}(\mathbb{P}^F \parallel \mathbb{P}^V)$. Naším cílem bude najít různými cestami optimální portfolio (V) sestávající se z aktiv (X_1) a (X_2) .

2.4.1 Přímý výpočet

Použijeme větu 7 a pokusíme se najít minimalizovat $D_{KL}(\mathbb{P}^F \parallel \mathbb{P}^V)$. Podle definice platí

$$\begin{aligned} D_{KL}(\mathbb{P}^F \parallel \mathbb{P}^V) &= \sum_{\omega \in \Omega} P^F(\omega) \log \left(\frac{P^F(\omega)}{P^V(\omega)} \right) = - \sum_{\omega \in \Omega} P^F(\omega) \log \left(\frac{P^V(\omega)}{P^F(\omega)} \right) \\ &= -m_1 \log \left(\frac{w^{x_1} p_1 + w^{x_2} q_1}{m_1} \right) - m_2 \log \left(\frac{w^{x_1} p_2 + w^{x_2} q_2}{m_2} \right) \\ &= -m_1 \log \left(\frac{w^{x_1} (p_1 - q_1) + q_1}{m_1} \right) - m_2 \log \left(\frac{w^{x_1} (q_1 - p_1) + 1 - q_1}{1 - m_1} \right), \end{aligned}$$

kde jsme v poslední rovnosti využili faktu, že $p_2 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - q_1$, $m_2 = 1 - m_1$ a $w^{x_2} = 1 - w^{x_1}$. Spočteme první derivaci podle w^{x_1} :

$$(p_1 - q_1) \left(\frac{m_1}{w^{x_1} (p_1 - q_1) + q_1} - \frac{1 - m_1}{w^{x_1} (q_1 - p_1) + 1 - q_1} \right)$$

Tento výraz se rovná nule pro:

$$\begin{aligned} \frac{w^{x_1} (p_1 - q_1) + q_1}{m_1} &= \frac{w^{x_1} (q_1 - p_1) + 1 - q_1}{1 - m_1} \\ w^{x_1} (p_1 - q_1) + q_1 &= m_1 \\ w^{x_1} &= \frac{m_1 - q_1}{p_1 - q_1}, \end{aligned}$$

kde $p_1 \neq q_1$. Pokud do původního vzorce dosadíme spočtenou hodnotu w^{x_1} , vyjde nám

$$\begin{aligned} D_{KL}(\mathbb{P}^F \parallel \mathbb{P}^V)[w^{x_1}] &= -m_1 \log \left(\frac{m_1 - q_1 + q_1}{m_1} \right) - (1 - m) \log \left(\frac{q_1 - m_1 + 1 - q_1}{1 - m_1} \right) \\ &= -m_1 \log(1) - (1 - m) \log(1) = 0. \end{aligned}$$

To odpovídá tomu, že jsme schopni nalézt portfolio, které replikuje libovolnou pravděpodobnostní míru \mathbb{P}^F . Tedy náš model je úplný.

Nyní spočteme očekávaný logaritmičkový výnos. Dosazením spočtené hodnoty $D_{KL}(\mathbb{P}^F \parallel \mathbb{P}^V) = 0$ získáme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^F \left[\log \left(\frac{V_Y(1)}{V_Y(0)} \right) \right] &= D_{KL}(\mathbb{P}^F \parallel \mathbb{P}^Y) = \mathbb{E}^F \log \left(\frac{\mathbb{P}^F}{\mathbb{P}^Y} \right) \\ &= m_1 \cdot \log \left(\frac{m_1}{n_1} \right) + (1 - m_1) \cdot \log \left(\frac{1 - m_1}{1 - n_1} \right). \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že vzdálenost měř \mathbb{P}^F a \mathbb{P}^Y nemůžeme volbou našeho portfolia nijak ovlivnit a vzdálenost \mathbb{P}^F a \mathbb{P}^V je nulová, je tento výnos nejlepší možný.

2.4.2 Fischerova aproximace

Nyní zkusíme k výpočtu vah optimálního portfolia v binomickém modelu využít Fischerovi aproximace. Ze stejné pojmenované kapitoly víme, že

$$\mathbb{E}^F \log \left(\frac{V_F(1)}{V_F(0)} \right) \approx -\frac{1}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma}^F \mathbf{w}.$$

Tedy očekávaný logaritmický výnos vůči fyzické míře odpovídá kovarianční matici $\Sigma^{\mathbb{F}}$ navážené vzhledem k portfoliu (\mathbb{V}) . Začneme tedy výpočtem prvků kovarianční matice.

$$\text{var}^F(R_F^{X_1}) = \left(\frac{p_1}{m_1} - 1\right)^2 m_1 + \left(\frac{p_2}{m_2} - 1\right)^2 m_2 = \frac{(p_1 - m_1)^2}{m_1(1 - m_1)},$$

kde jsme využili $p_2 = 1 - p_1$ a $q_2 = 1 - q_1$. Rovněž vycházíme ze vzorečku pro rozptyl tvaru $\text{var}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbb{E} X)p_i$, kde x_i jsou jednotlivé hodnoty náhodné veličiny X a p_i jsou jejich pravděpodobnosti. Víme, že první moment $R_F^{X_1}$ je při míře $\mathbb{P}^{\mathbb{F}}$ nulový. Z definice platí rovnost $R_F^{X_1} = \left[\frac{X_{1,F}(1)}{X_{1,F}(0)} - 1\right]$. Odtud využijeme, znalosti o tvorbě ceny z první kapitoly, tedy $X_{1,F}(1, H) = \frac{p_1}{m_1} X_F(0)$, $X_F(1, T) = \frac{p_2}{m_2} X_{1,F}(0)$. Analogicky můžeme vypočít

$$\text{var}^F(R_F^{X_2}) = \left(\frac{q_1}{m_1} - 1\right)^2 m_1 + \left(\frac{q_2}{m_2} - 1\right)^2 m_2 = \frac{(q_1 - m_1)^2}{m_1(1 - m_1)}.$$

U počítání kovariance znovu využijeme nulových prvních momentů $R_F^{X_1}$ popřípadě $R_F^{X_2}$ při míře $\mathbb{P}^{\mathbb{F}}$ a hodnot, kterých nabývají.

$$\begin{aligned} \text{cov}^F(R_F^{X_1}, R_F^{X_2}) &= E^F(R_F^{X_1} - E^F R_F^{X_1})(R_F^{X_2} - E^F R_F^{X_2}) = E^F R_F^{X_1} R_F^{X_2} \\ &= \left(\frac{p_1}{m_1} - 1\right) \left(\frac{q_1}{m_1} - 1\right) m_1 + \left(\frac{p_2}{m_2} - 1\right) \left(\frac{q_2}{m_2} - 1\right) m_2 \\ &= -\frac{(p_1 - m_1)(q_1 - m_1)}{m_1(1 - m_1)}. \end{aligned}$$

Pokud dosadíme do matice $\Sigma^{\mathbb{F}}$ už vidíme, že je determinant kovarianční matice nulový a ta bude tedy singularární. To ilustruje rovnost $D_{KL}(\mathbb{P}^{\mathbb{F}} \parallel \mathbb{P}^{\mathbb{V}}) = 0$ a potvrzuje výsledek předchozího početního příkladu. Tedy jsme schopni replikovat libovolnou pravděpodobnostní míru $(\mathbb{P}^{\mathbb{F}})$ a tím pádem je model úplný.

$$\begin{aligned} \Sigma^{\mathbb{F}} &= \begin{bmatrix} \text{var}^F(R_F^{X_1}) & \text{cov}^F(R_F^{X_1}, R_F^{X_2}) \\ \text{cov}^F(R_F^{X_1}, R_F^{X_2}) & \text{var}^F(R_F^{X_2}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(p_1 - m_1)^2}{m_1(1 - m_1)} & -\frac{(p_1 - m_1)(q_1 - m_1)}{m_1(1 - m_1)} \\ -\frac{(p_1 - m_1)(q_1 - m_1)}{m_1(1 - m_1)} & \frac{(q_1 - m_1)^2}{m_1(1 - m_1)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rovněž tím získáváme, že je očekávaný logaritmický výnos je roven $D_{KL}(\mathbb{P}^{\mathbb{F}} \parallel \mathbb{P}^{\mathbb{V}})$ neboť aproximace $D_{KL}(\mathbb{P}^{\mathbb{F}} \parallel \mathbb{P}^{\mathbb{V}})$ je nulová. To odpovídá naší představě. Pokud máme správný názor na trh, tedy názor rovnající se fyzické míře, $D_{KL}(\mathbb{P}^{\mathbb{F}} \parallel \mathbb{P}^{\mathbb{V}})$ bude nula, neboť naše portfolio přesně následuje fyzickou míru. Pokud by náš názor byl rozdílný oproti fyzické míře, $D_{KL}(\mathbb{P}^{\mathbb{F}} \parallel \mathbb{P}^{\mathbb{V}})$ bude záporný. Portfolio indukované fyzickou mírou nám tak dává nejlepší možný výnos.

2.5 Trinomiální model

Mějme prostor $\Omega = [H, T, E]$, aktiva $(\mathbb{X}), (\mathbb{Y})$ a pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}^{X_1} = (p_1, p_2, p_3)$, $\mathbb{P}^{X_2} = (q_1, q_2, q_3)$, $\mathbb{P}^{\mathbb{Y}} = (n_1, n_2, n_3)$ a $\mathbb{P}^{\mathbb{F}} = (m_1, m_2, m_3)$. Zde \mathbb{P}^{X_1} a \mathbb{P}^{X_2} reprezentují aktiva (X_1) popřípadě (X_2) , $\mathbb{P}^{\mathbb{Y}}$ je rizikově neutrální míra a $\mathbb{P}^{\mathbb{F}}$ je fyzická míra. Stejně jako v předchozí podkapitole se pokusíme najít různými cestami optimální portfolio (\mathbb{V}) sestávající se z aktiv (X_1) a (X_2) .

2.5.1 Přímý výpočet

Nejprve se pokusíme spočítat váhy optimálního portfolia přímo, chceme tedy maximalizovat člen

$$\max_{\mathbf{w}} \mathbb{E}^F \log \left(\frac{V_F(1)}{V_F(0)} \right) = \max_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^3 \left[\log \left(w^{X_1} \frac{p_i}{m_i} + w^{X_2} \frac{q_i}{m_i} \right) m_i \right].$$

Víme, že $w^{X_2} = 1 - w^{X_1}$. Pokud tuto skutečnost dosadíme do rovnice, dostáváme funkci jedné proměnné:

$$f(w^X) = \sum_{i=1}^3 \left[\log \left(w^{X_1} \frac{p_i}{m_i} + (1 - w^{X_1}) \frac{q_i}{m_i} \right) m_i \right].$$

Pro nalezení maxima funkci zderivujeme

$$f'(w^{X_1}) = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i - q_i}{w^{X_1} \frac{p_i}{m_i} + (1 - w^{X_1}) \frac{q_i}{m_i}},$$

a pokusíme se najít takové w^{X_1} , aby platilo $f'(w^{X_1}) = 0$. Přesné analytické řešení tohoto problému je možné najít v příloze A1. Nám bude stačit, že se jedná o kvadratickou rovnici a tedy dostáváme až dva možné výsledky, které označíme $w_1^{X_1}$ a $w_2^{X_1}$.

Pokračujeme spočtením očekávaného logaritmického výnosu.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^F \left[\log \left(\frac{V_Y(1)}{V_Y(0)} \right) \right] &= \mathbb{E}^F \left[\log \left(\frac{F_Y(1)}{F_Y(0)} \right) \right] + \mathbb{E}^F \left[\log \left(\frac{V_F(1)}{V_F(0)} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 \log \left(\frac{m_i}{n_i} \right) m_i + \sum_{i=1}^3 \left[\log \left(w^{X_1} \frac{p_i}{m_i} + (1 - w^{X_1}) \frac{q_i}{m_i} \right) m_i \right] \\ &= D_{KL}(\mathbb{P}^F \parallel \mathbb{P}^Y) + \sum_{i=1}^3 \left[\log \left(w^{X_1} \frac{p_i}{m_i} + (1 - w^{X_1}) \frac{q_i}{m_i} \right) m_i \right]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Kvůli rozsáhlosti $w_1^{X_1}$ a $w_2^{X_1}$ nebudeme počítat tento výnos analyticky, ale ilustrujeme ho na konkrétních hodnotách. $\mathbb{P}^{X_1} = (1/5, 2/5, 2/5)$, $\mathbb{P}^{X_2} = (4/7, 2/7, 1/7)$, $\mathbb{P}^Y = (1/3, 1/3, 1/3)$ a $\mathbb{P}^F = (3/10, 4/10, 3/10)$. Potom dostaneme podle vzorce v příloze A1

$$w_1^{X_1} = -1,5213, \quad w_2^{X_1} = 0,7093.$$

Pro $w_2^{X_1}$ dostáváme záporné hodnoty v logaritmech, zvolíme tedy $w_2^{X_1}$ a dosadíme do rovnosti (2.1)

$$= 0,0097 + (-0,0026) = 0,0071.$$

Na tomto příkladu jsme ilustrovali, že očekávaný logaritmický výnos se liší od $D_{KL}(\mathbb{P}^F \parallel \mathbb{P}^Y)$, tedy nedosahuje maximálního možného výnosu, neboť nejsme schopni v tomto modelu replikovat přesně míru \mathbb{P}^F pomocí aktiv (X_1) a (X_2) . Jedná se tedy o neúplný model.

2.5.2 Fischerova aproximace

Dále budeme řešit identický příklad jako výše, pouze s tím rozdílem, že k jeho řešení použijeme větu 9. Nejprve spočteme kovarianční matici $\Sigma^{\mathbf{M}}$. Ta bude v tomto případě velikosti 2x2 a potřebujeme tedy spočítat $var^F(R_F^X)$, $var^F(R_F^Y)$ a $cov^F(R_F^X, R_F^Y)$. Začneme výpočtem rozptylů

$$var^F(R_F^{X_1}) = \left(\frac{p_1}{m_1} - 1\right)^2 m_1 + \left(\frac{p_2}{m_2} - 1\right)^2 m_2 + \left(\frac{p_3}{m_3} - 1\right)^2 m_3,$$

$$var^F(R_F^{X_2}) = \left(\frac{q_1}{m_1} - 1\right)^2 m_1 + \left(\frac{q_2}{m_2} - 1\right)^2 m_2 + \left(\frac{q_3}{m_3} - 1\right)^2 m_3.$$

Znovu počítáme analogicky k výpočtům v binomiálním modelu.

$$\begin{aligned} cov^F(R_F^{X_1}, R_F^{X_2}) &= E^F(R_F^{X_1} - E^F R_F^{X_1})(R_F^{X_2} - E^F R_F^{X_2}) = E^F R_F^{X_1} R_F^{X_2} \\ &= \left(\frac{p_1}{m_1} - 1\right) \left(\frac{q_1}{m_1} - 1\right) m_1 + \left(\frac{p_2}{m_2} - 1\right) \left(\frac{q_2}{m_2} - 1\right) m_2 \\ &\quad + \left(\frac{p_3}{m_3} - 1\right) \left(\frac{q_3}{m_3} - 1\right) m_3, \end{aligned}$$

tedy dostáváme

$$\Sigma^{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} var^F(R_F^{X_1}) & cov^F(R_F^{X_1}, R_F^{X_2}) \\ cov^F(R_F^{X_1}, R_F^{X_2}) & var^F(R_F^{X_2}) \end{bmatrix}.$$

Předpokládáme, že $\Sigma^{\mathbf{F}}$ je invertibilní a pozitivně definitní,

$$\begin{aligned} (\Sigma^{\mathbf{F}})^{-1} &= \frac{1}{var^F(R_F^{X_1})var^F(R_F^{X_2}) - [cov^F(R_F^{X_1}, R_F^{X_2})]^2} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} var^F(R_F^{X_2}) & -cov^F(R_F^{X_1}, R_F^{X_2}) \\ -cov^F(R_F^{X_1}, R_F^{X_2}) & var^F(R_F^{X_1}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní už jen dosadíme do vzorečku

$$\tilde{\mathbf{w}} = \frac{(\Sigma^{\mathbf{F}})^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T (\Sigma^{\mathbf{F}})^{-1} \mathbf{1}}.$$

Pro výpočet očekávaného logaritmického výnosu použijeme stejný vzorec jako v přímém výpočtu, pouze s váhami spočtenými Fisherovou aproximací

$$D_{KL}(\mathbb{P}^{\mathbf{F}} \parallel \mathbb{P}^{\mathbf{Y}}) + \sum_{i=1}^3 \left[\log \left(\tilde{w}^{X_1} \frac{p_i}{m_i} + (1 - \tilde{w}^{X_1}) \frac{q_i}{m_i} \right) m_i \right].$$

Pro míry dané $\mathbb{P}^{X_1} = (1/5, 2/5, 2/5)$, $\mathbb{P}^{X_2} = (4/7, 2/7, 1/7)$, $\mathbb{P}^{\mathbf{Y}} = (1/3, 1/3, 1/3)$ a $\mathbb{P}^{\mathbf{F}} = (3/10, 4/10, 3/10)$ máme $\tilde{\mathbf{w}} = (0,7061 \quad 0,2939)^T$. Dosazením dostaneme

$$0,0097 - 0,0026 = 0,0071.$$

2.5.3 Markowitzova aproximace

Začneme výpočtem μ ,

$$\mu = \left(E^F \frac{\mathbb{P}^{X_{\neq}}}{\mathbb{P}^Y} - 1, E^F \frac{\mathbb{P}^{X_{\neq}}}{\mathbb{P}^Y} - 1 \right)^T = \left(\sum_{i=1}^3 \left[\frac{p_i}{n_i} - 1 \right] m_i, \sum_{i=1}^3 \left[\frac{q_i}{n_i} - 1 \right] m_i \right)^T.$$

Následně zjistíme analogicky jako Σ^F matici Σ^Y a $(\Sigma^Y)^{-1}$.

$$\Sigma^Y = \begin{bmatrix} \text{var}^Y(R_Y^{X_1}) & \text{cov}^Y(R_Y^{X_1}, R_Y^{X_2}) \\ \text{cov}^Y(R_Y^{X_1}, R_Y^{X_2}) & \text{var}^Y(R_Y^{X_2}) \end{bmatrix},$$

kde

$$\text{var}^Y(R_Y^{X_1}) = \left(\frac{p_1}{n_1} - 1 \right)^2 n_1 + \left(\frac{p_2}{n_2} - 1 \right)^2 n_2 + \left(\frac{p_3}{n_3} - 1 \right)^2 n_3,$$

$$\text{var}^Y(R_Y^{X_2}) = \left(\frac{q_1}{n_1} - 1 \right)^2 n_1 + \left(\frac{q_2}{n_2} - 1 \right)^2 n_2 + \left(\frac{q_3}{n_3} - 1 \right)^2 n_3,$$

$$\text{cov}^Y(R_Y^{X_1}, R_Y^{X_2}) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{p_i}{n_i} - 1 \right) \left(\frac{q_i}{n_i} - 1 \right) n_i.$$

Předpokládáme, že Σ^Y je invertibilní a pozitivně definitní,

$$(\Sigma^Y)^{-1} = \frac{1}{\text{var}^Y(R_Y^{X_1})\text{var}^Y(R_Y^{X_2}) - [\text{cov}^Y(R_Y^{X_1}, R_Y^{X_2})]^2} \cdot \begin{bmatrix} \text{var}^Y(R_Y^{X_2}) & -\text{cov}^Y(R_Y^{X_1}, R_Y^{X_2}) \\ -\text{cov}^Y(R_Y^{X_1}, R_Y^{X_2}) & \text{var}^Y(R_Y^{X_1}) \end{bmatrix}.$$

Výsledný vektor vah spočteme pomocí vzorečku z věty 10,

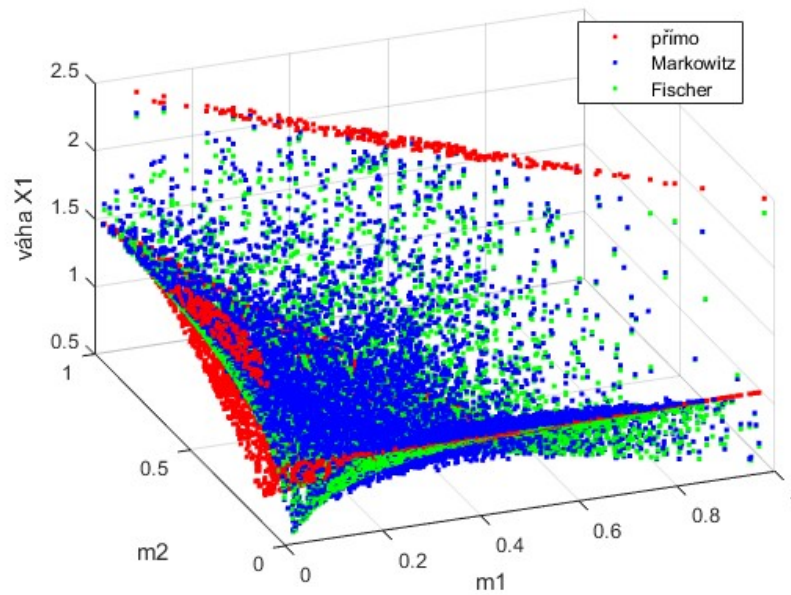
$$\hat{\mathbf{w}} = (\Sigma^Y)^{-1} \mu^X + \left(\frac{1 - \mathbf{1}^T (\Sigma^Y)^{-1} \mu}{\mathbf{1}^T (\Sigma^Y)^{-1} \mathbf{1}} \right) (\Sigma^Y)^{-1} \mathbf{1}.$$

Očekávaný logaritmický výnos lze spočítat využitím optimálních vah $\hat{\mathbf{w}}$ ve stejném vzorci jako v obou předchozích příkladech pouze s váhami spočtenými Markowitzovou aproximací.

Znovu budeme pracovat s $\mathbb{P}^{X_1} = (1/5, 2/5, 2/5)$, $\mathbb{P}^{X_2} = (4/7, 2/7, 1/7)$, $\mathbb{P}^Y = (1/3, 1/3, 1/3)$ a $\mathbb{P}^F = (3/10, 4/10, 3/10)$. Poté nám vyjde $\hat{\mathbf{w}} = (0.5687 \quad 0.4313)^T$. A logaritmický výnos je tak

$$0,0097 - 0,0033 = 0,0064.$$

Rádi bychom předchozí výpočty zobrazili na konkrétní situaci. Na obrázku 2.1 můžeme vidět trojrozměrný graf. Plocha daná osami m_1 a m_2 představuje prostor všech možných trojic (m_1, m_2, m_3) . Tato množina je určena pouze hodnotami na osách m_1 a m_2 , neboť platí $m_3 = 1 - m_1 - m_2$. O těchto trojicích budeme nadále mluvit jako o situacích, neboť nám určují fyzickou míru \mathbb{P}^F . Pro každou takovou situaci jsme následně spočetli optimální váhu aktiva (X_1) . Vzhledem k tomu, že $w_{X_2} = 1 - w_{X_1}$ nám hodnota w_{X_1} určuje celé portfolio. Optimální hodnotu pro každou situaci jsme počítali přímým výpočtem, Fischerovou aproximací a Markowitzovou aproximací a následně je zanesli do grafu. Vzhledem k náhodnosti



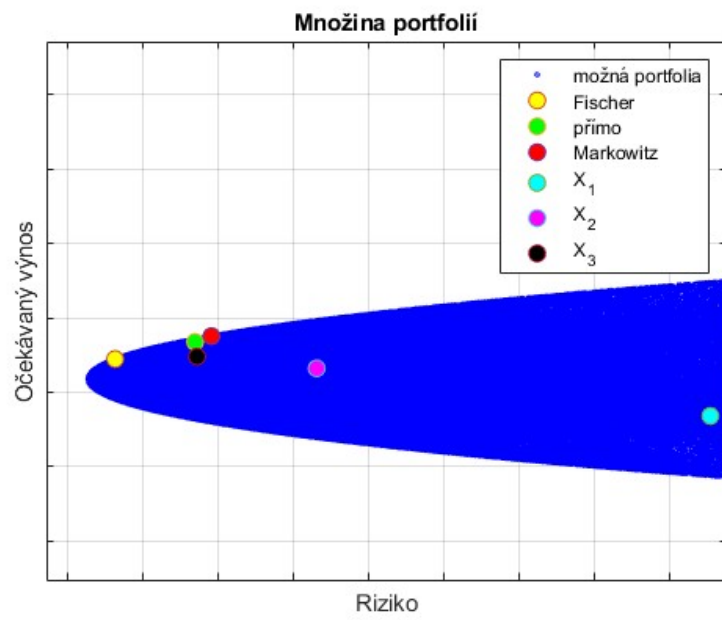
Obrázek 2.1: Váha aktiva X_1 při $\mathbb{P}^{\mathbb{F}} = (m_1, m_2, 1 - m_1 - m_2)$

situací, jsme zvolili míru $\mathbb{P}^{\mathbb{Y}}$ takovou, že $n_i \in [(m_i - 0.1)^+, m_i + 0.1]$ pro $i = 1, 2, 3$. To kvůli předpokladu, že se od sebe $\mathbb{P}^{\mathbb{Y}}$ a $\mathbb{P}^{\mathbb{F}}$ příliš neliší.

Z grafu lze vyčíst, že aproximace mají tendenci selhávat převážně na okrajích uvažované množiny. Tedy na takových situacích, kde je pravděpodobnost jednoho z jevů výrazně vyšší než pravděpodobnost zbývajících dvou jevů. Nelze tvrdit, že by jedna z aproximací byla na tomto příkladu výrazně lepší než ta druhá. Ovšem zdá se, že Markowitzova aproximace je o něco přesnější.

2.6 Tertranomiální model

Mějme prostor $\Omega = [A, B, C, D]$, tři aktiva (X_i) dané \mathbb{P}^{X_i} , pro $i=1,2,3$. Stejně jako v předchozích příkladech máme určené $\mathbb{P}^{\mathbb{Y}}$ a $\mathbb{P}^{\mathbb{F}}$. Analogicky k předchozím příkladům spočteme váhy přímo, Fischerovou a Markowitzovou aproximací. Výpočty jsme prováděli pouze numericky a vzhledem k jejich podobnosti s předchozími příklady je zde nebudeme uvádět. Střední hodnotu $X_{i,Y}(1)$ získáme součtem možných hodnot vynásobenými jejich pravděpodobnostmi podle fyzické míry. Naopak kovarianční matici dostaneme podle rizikově neutrální míry. Na obrázku 2.2 máme modře zobrazenou množinu všech možných portfolií tvořenými navážením aktiv \mathbb{P}^{X_i} , pro $i=1,2,3$. Rovněž v něm máme zvýrazněné hodnoty námi spočtených optimálních portfolií a jednotlivá aktiva. Z grafu můžeme vidět, že se námi spočtené optimální portfolia seskupují na horní hranici množiny. Tuto horní hranici tvoří portfolia, která mají pro jejich očekávaný výnos, nejmenší rozptyl. Množinu všech takových portfolií nazýváme eficientní množinou. (Dupačová a kol., 2002) str.81.



Obrázek 2.2: Množina možných portfolií

3. Maximalizace užitku v diskrétních případech

3.1 Užitek a užitková funkce

Užitkem se v ekonomické teorii rozumí míra spokojenosti nebo blahobytu, který jedinec získává z ekonomických aktivit, vlastnictví nebo spotřeby zboží. V kontextu této práce se užitek často používá k popisu blahobytu, který jedinec získává z investic. Předpokládáme-li, že máme N -dimenzionální prostor investičních příležitostí X . Pro každé $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in X$, přičemž x_i značí množství investované do i -té složky. Potom v užitkové teorii předpokládáme, že existuje určité uspořádání mezi těmito investičními příležitostmi, což značíme symbolicky jako \preceq . Pokud $x_i \preceq y_i$, pak to znamená, že investor upřednostňuje investici y_i před investicí x_i . Pokud platí $x_i \preceq y_i$ a zároveň neplatí $x_i \sim y_i$, pak říkáme, že investor preferuje investici y_i před investicí x_i a píšeme $x_i \prec y_i$. Pokud $x_i \preceq y_i$ a zároveň platí $x_i \succeq y_i$, pak jsou investice x_i a y_i ekvivalentní a píšeme $x_i \sim y_i$. Předpokládáme, že toto uspořádání splňuje následující vlastnosti.

- *úplnost* - každé dvě investice jsou porovnatelné,
- *reflexivitu* - každá investice je srovnatelná sama se sebou,
- *tranzitivitu* - pokud x_i je upřednostňováno před y_i a y_i je upřednostňováno před z_i , pak x_i je upřednostňováno před z_i . (Dupačová a kol., 2002).

K ilustraci tohoto problému nám pomůže termín spotřebního koše, který popisuje kombinace různých druhů zboží a služeb, které jednotlivec spotřebovává nebo plánuje spotřebovat. Každý spotřební koš může být vyjádřen jako vektor (x_1, x_2, \dots, x_n) , kde x_i představuje množství spotřebovaného zboží či služby i .

Užitková funkce $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ přiřazuje každému spotřebnímu koši určitou hodnotu, která vyjadřuje míru spokojenosti, které jednotlivec dosáhne při spotřebě daného množství zboží a služeb.

Pro jednotlivce, který se snaží maximalizovat svůj užitek, je úkolem nalézt takový spotřební koš, který mu poskytne nejvyšší možnou míru spokojenosti při omezených zdrojích. Omezení mohou zahrnovat například příjmy nebo rozpočet, což lze matematicky vyjádřit pomocí omezení tvaru:

$$\sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i \leq I,$$

kde p_i jsou ceny jednotlivých zboží, x_i jsou jejich množství ve spotřebním koši a I je rozpočet jednotlivce.

Optimalizační problém maximalizace užitku se tak redukuje na hledání takové kombinace množství zboží a služeb, která maximalizuje hodnotu užitkové funkce $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ za splnění daných omezení. Řešením tohoto problému je optimální spotřební koš, který poskytuje jednotlivci nejvyšší možný užitek při daných cenách zboží a omezeních rozpočtu. (Board, 2009)

Definice 10 (užitková funkce). *Pokud existuje reálná funkce $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že*

$$(U(x) > U(y) \Leftrightarrow x \succ y) \wedge (U(x) = U(y) \Leftrightarrow x \sim y),$$

nazýváme ji užitková funkce.

(Dupačová a kol., 2002).

3.2 Maximalizace užitkové funkce v diskrétním případě

Mějme aktivum (\mathbb{Y}) jako v předchozí kapitole a stejně tak pravděpodobnostní míry $\hat{\mathbb{P}}$ a \mathbb{P}^Y . Pro maximalizaci užitkové funkce předpokládáme, že máme vlastní subjektivní názor na fyzickou míru $\mathbb{P}^M(\omega) = P(\omega|M)$, $\omega \in \Omega$. Problémem, kterým se budeme nyní zabývat je, jakým způsobem bychom mohli využít potenciálního rozdílu mezi zmíněnými mírami.

Uvažujme specifickou užitkovou funkci $U(x)$ definovanou na $x > 0$, která je rostoucí a konkávní. Cíl je najít takové portfolio (\mathbb{V}) , které maximalizuje funkci

$$\max_{V_y(1)} [\mathbf{E}^M U(V_y(1))],$$

s omezením

$$\mathbf{E}^Y V_Y(1) = V_Y(0),$$

zachovávající martingaleovskou vlastnost a tím tedy neutrálnost vůči riziku míry \mathbb{P}^Y .

Věta 11. *Řešení pro optimální výplatu problému*

$$\max_{V_y(1)} [\mathbf{E}^M U(V_y(1))],$$

s omezením

$$\mathbf{E}^Y V_Y(1) = V_Y(0),$$

je dáno

$$V_Y(1, \omega) = I \left(\frac{1}{\lambda} \frac{P(\omega|Y)}{P(\omega|M)} \right),$$

kde I je inverzní funkce U' , $I = |U'(x)|^{-1}$ a λ splňuje

$$\mathbf{E}^Y I \left(\frac{1}{\lambda} \frac{P(\omega|Y)}{P(\omega|M)} \right) = V_Y(0).$$

Důkaz. Mějme Lagrangeovu funkci

$$F(V_Y(1), \lambda) = \mathbf{E}^M U(V_y(1)) - \lambda \cdot (\mathbf{E}^Y V_y(1) - V_Y(0)).$$

Nalezneme nulový bod

$$\frac{\partial F}{\partial V_Y(1, \omega)} = U'(V_Y(1, \omega)) \cdot P(\omega|M) - \lambda \cdot P(\omega|Y) = 0,$$

čímž dostáváme

$$V_Y(1, \omega) = I \left(\frac{1}{\lambda} \frac{P(\omega|Y)}{P(\omega|M)} \right).$$

Hodnota λ by měla být zvolena tak, aby uspokojovala podmínku $E^Y V_Y(1) = V_Y(0)$.

□

(Večeř, 2024)

Poznámka. Aktivum \textcircled{V} poté určuje pravděpodobnostní míru \mathbb{P}^V nebo-li stavové ceny dané předpisem

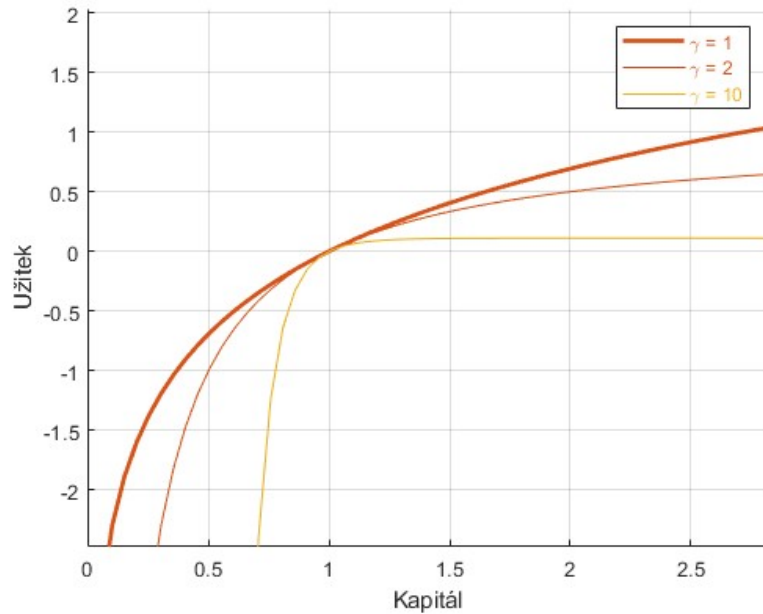
$$P(\omega|V) = \frac{V_Y(1, \omega)}{V_Y(0)} \cdot P(\omega|Y) = \frac{I \left(\frac{1}{\lambda} \frac{P(\omega|Y)}{P(\omega|M)} \right)}{E I \left(\frac{1}{\lambda} \frac{P(\omega|Y)}{P(\omega|M)} \right)} \cdot P(\omega|Y).$$

Příklad. Na tomto příkladu ukážeme, jak by vypadalo výše zmíněné řešení aplikované na binomický model. Mějme tedy dvě rozdílné pravděpodobnostní míry na binomickém modelu dané, jak můžeme vidět v tabulce 3.1. V tomto příkladě, představuje P^X náš subjektivní názor. Rovněž uvažujme isoelastickou užítkovou

Tabulka 3.1: Příklad

Stavové ceny	H	T
\mathbb{P}^Y	q	$1 - q$
\mathbb{P}^X	p	$1 - p$

funkci tvaru $U(x, \gamma) = \frac{x^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$, kde γ představuje averzi k riziku. Jak můžeme vidět na obrázku 3.1, jedná e o rostoucí a konkávní funkci.



Obrázek 3.1: Isoelastická užítková funkce pro různé volby parametru γ .

Nyní můžeme určit $U'(x) = x^{-\gamma}$ a tedy $I(x) = x^{-\frac{1}{\gamma}}$. Poté řešení pro optimální výplatu bude

$$V_Y(1, \omega) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot q + \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot (1-q)} \cdot V_Y(0) & , \text{if } \omega = H, \\ \frac{\left(\frac{p-1}{q-1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot q + \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot (1-q)} \cdot V_Y(0) & , \text{if } \omega = T. \end{cases}$$

Jak zmíněno výše, lze vytvořit pravděpodobnostní míru

$$P(\omega|V) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot q}{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot q + \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot (1-q)} & , \text{if } \omega = H, \\ \frac{\left(\frac{p-1}{q-1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot (1-q)}{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot q + \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot (1-q)} & , \text{if } \omega = T. \end{cases}$$

Poznámka. Nemělo by nám uniknout, že $U(x, \gamma)$ se pro $\gamma \rightarrow 1$ rovná logaritmické funkci.

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} U(x, \gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{x^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma} = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{\log(x)x^{1-\gamma}}{1} = \log(x).$$

3.3 Kellyho kritérium

Běžně používaný postup pro maximalizaci zisku je takzvané Kellyho kritérium. Jedná se o vzorec pro optimalizaci velikosti sázky v hazardních hrách nebo investicích, které se snaží maximalizovat očekávaný logaritmický růst portfolia. Mějme rizikové aktivum \mathbb{A} generující $\mathbb{P}^{\mathbb{A}} = [1, 0]^T$ a dále pravděpodobnosti určené tabulkou 3.2, kde $\tilde{p} \in (0, 1)$ a $A_Y(0) = 1$.

Tabulka 3.2: Kelly		
Pravděpodobnost		
H	\tilde{p}	$a = \frac{A_Y(1,H) - A_Y(0)}{A_Y(0)}$
T	$1 - \tilde{p}$	$b = \frac{A_Y(0) - A_Y(1,T)}{A_Y(0)}$

Naším cílem je tedy najít takové w , které bude maximalizovat:

$$\mathbb{E} \log(R) = \tilde{p} \log(1 + wa) + (1 - \tilde{p}) \log(1 - wb),$$

$$\frac{\partial \mathbb{E} \log(R)}{\partial w} = \frac{\tilde{p}a}{1 + \hat{w}a} + \frac{-(1 - \tilde{p})b}{1 - \hat{w}b} = 0.$$

Tedy dostáváme, že optimální \hat{w} je rovno,

$$\hat{w} = \frac{\tilde{p}}{b} - \frac{1 - \tilde{p}}{a}.$$

(Thorp, 1997) str. 7

Nyní zkusíme toto kritérium použít na náš binomický model. Pravděpodobnosti jsou určeny naším názorem na vývoj trhu, tedy stavovými cenami $\mathbb{P}^{\mathbb{X}} = [p, 1 - p]$.

Ceny jsou určeny názorem trhu, tedy stavovými cenami $\mathbb{P}^Y = [q, 1 - q]$. Averzi k riziku bude stejně jako v minulém příkladě určovat γ . Tedy čím větší γ , tím menší část kapitálu jsme ochotni investovat do rizikového aktiva \textcircled{A} . Tedy po dosažení těchto již dříve definovaných skutečností do tabulky 3.2 dostáváme tabulku 3.3. Po dosazení do vzorečku dostáváme

Tabulka 3.3: Kelly příklad

Pravděpodobnost		
H	p	$a = \frac{1-q}{q}$
T	$1 - p$	$b = \frac{q-0}{q} = 1$

$$\frac{p}{1} - \frac{(1-p)q}{1-q} = \frac{p-q}{1-q},$$

tuto hodnotu, ještě naškálujeme averzí k riziku a dostáváme

$$w^Y(0) = \frac{p-q}{\gamma(1-q)}.$$

Hodnotu $w^Y(0)$ dopočteme jednoduše, jako

$$w^Y(0) = 1 - w^A(0) = \frac{(1-q) - \frac{1}{\gamma}(p-q)}{1-q}.$$

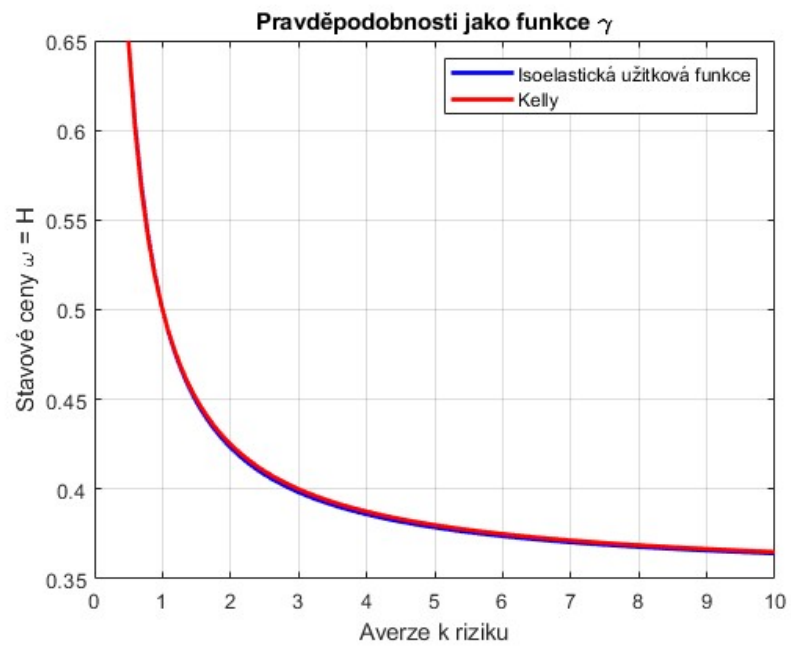
Dle definice 3 tedy podle Kellyho kritéria dostáváme portfolio ve tvaru

$$\textcircled{\hat{V}}[0] = \left[\frac{p-q}{\gamma(1-q)} \right] \frac{\textcircled{A}[0]}{A_{\hat{V}}(0)} + \left[\frac{(1-p) - \frac{1}{\gamma}(p-q)}{(1-q)} \right] \frac{\textcircled{Y}[0]}{Y_{\hat{V}}(0)}.$$

Toto portfolio generuje pravděpodobnostní míru $\mathbb{P}^{\hat{V}}$ danou předpisem

$$\mathbb{P}^{\hat{V}} = \begin{pmatrix} P(H|\hat{V}) \\ P(T|\hat{V}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p-q}{\gamma(1-q)} \\ \frac{(1-p) - \frac{1}{\gamma}(p-q)}{(1-q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + \frac{p-q}{\gamma} \\ 1 - q - \frac{p-q}{\gamma} \end{pmatrix}.$$

To nám na první pohled mnoho neřekne. Ovšem pokud si jednotlivé pravděpodobnosti pravděpodobnostních měr \mathbb{P}^V a $\mathbb{P}^{\hat{V}}$ vykreslíme jako funkci γ pro nějaké pevné p, q zjistíme, jak můžeme vidět na 3.2, že se téměř neliší. (Večeř, 2024)



Obrázek 3.2: $P(H|V)$ a $P(H|\hat{V})$ jako funkce γ .

Závěr

V této práci jsme zkoumali pohled trh a názory na jeho budoucí vývoj z hlediska pravděpodobnostních měr. Ukázali jsme, že maximálního zisku lze dosáhnout pouze s názorem, který bude odpovídat skutečnému budoucího vývoji. Rovněž jsem ale došli k závěru, že ke kladnému zisku stačí mít lepší názor na budoucí vývoj trhu než má trh samotný. Tedy, že míra určená naším názorem má blíže k míře skutečného budoucího vývoje než míra určena cenami na trhu ve smyslu Kullback-Leiblerovi divergence.

Následně jsme se snažili najít optimální portfolio výpočtem vah, které by maximalizovali zisk za předpokladu, že známe míru skutečného budoucího vývoje. U přímého výpočtu jsme zjistili, že může být výpočetně velmi náročný i pro konečné množství možných jevů a aktiv. Proto jsme se snažili nalézt vhodné aproximace. Tyto aproximace jsme následně ukázali na příkladech v binomiálním a trinomiálním modelu. Zjistili jsme, že dvě aktiva nám na prostoru dvou možných jevů tvoří úplný prostor. Tedy jsme byli schopni pomocí těchto dvou aktiv přesně replikovat fyzickou míru. Naopak v modelu dvou aktiv na třech možných jevech jsme byli schopni ukázat, že váhy určující optimální portfolio, určují míru, která má k fyzické míře nejblíže, ale nerovná se jí. I v těchto modelech jsme využívali Kullback-Leiblerovu divergenci. V závěru druhé kapitoly jsme rovněž představili tetranomiální model, který už jsme ovšem řešili pouze numericky. Výstupem tohoto modelu je graf zobrazující námi vypočtená optimální portfolia na množině všech možných portfolií tvořených zadanými aktivy. Spočtená optimální portfolia se nacházejí na horní hranici této množiny a jistým způsobem, tak tento graf potvrzuje smysl a správnost našich výpočtů.

V další části práce jsme se zaměřili na maximalizaci užitku ukázali jsme důležitost podkladového aktiva při maximalizaci užitkové funkce. Rovněž jsme zjistili, že investoři s větší averzí k riziku budou dávat míře podkladového aktiva, které je neutrální k riziku, větší důležitost než investoři, kteří mají averzi k riziku menší. Na konci této kapitoly jsme na binomiálním modelu provedli výpočet takové užitek maximalizující funkce a ukázali blízkost tohoto výpočtu s hodnotami získanými Kellyho kritériem.

Seznam použité literatury

- AMARI, S. (2016). *Information Geometry and Its Applications*, volume 194. Springer Japan. ISBN 978-4-431-55977-1.
- BOARD, S. (2009). Utility maximisation problem. **2**.
- DUPAČ, V. a HUŠKOVÁ, M. (2013). *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Druhé upravené vydání. Karolinum, Praha. ISBN 978-80-246-2208-8.
- DUPAČOVÁ, J., HURT, J. a ŠTĚPÁN, J. (2002). *Stochastic Modeling in Economics and Finance*, volume 75. Kluwer Academic Publishers, Praha. ISBN 0-306-48167-7.
- JEFFREYS, H. (1946). An invariant form for the prior probability in estimation problems. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **186**, 453 – 461.
- LACHAUT, P. (1998). *Teorie pravděpodobnosti*. Karolinum, Praha.
- MACKEY, D. J. C. (2003). *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 9780521642989.
- THORP, E. O. (1997). The kelly criterion in blackjack, sports betting, and the stock market. *10th International Conference on Gambling and Risk Taking*.
- VEČEŘ, J. (2024). *Principles of Bayesian Portfolio Selection*. Praha, first edition.

A. Přílohy

A.1 Váha optimálního portfolia v trinomiálním modelu přímým výpočtem

Konkrétní analytické řešení příkladu ze závěru druhé kapitoly přímým výpočtem.

$$\begin{aligned} w_{1,2}^X = & ((-p_2q_3m_1(p_1 - q_1) - p_1q_3m_2(p_2 - q_2) - p_3q_2m_1(p_1 - q_1) \\ & - p_1q_2m_3(p_3 - q_3) + 2q_2q_3m_1(p_1 - q_1) - p_3q_1m_2(p_2 - q_2) \\ & - p_2q_1m_3(p_3 - q_3) + 2q_1q_3m_2(p_2 - q_2) + 2q_1q_2m_3(p_3 - q_3)) \\ & \pm ((p_2q_3m_1(p_1 - q_1) + p_1q_3m_2(p_2 - q_2) + p_3q_2m_1(p_1 - q_1) \\ & + p_1q_2m_3(p_3 - q_3) - 2q_2q_3m_1(p_1 - q_1) + p_3q_1m_2(p_2 - q_2) \\ & + p_2q_1m_3(p_3 - q_3) - 2q_1q_3m_2(p_2 - q_2) - 2q_1q_2m_3(p_3 - q_3))^2 \\ & - 4(q_2q_3m_1(p_1 - q_1) + q_1q_3m_2(p_2 - q_2) + q_1q_2m_3(p_3 - q_3)) \\ & \cdot (p_2p_3m_1(p_1 - q_1) + p_1p_3m_2(p_2 - q_2) + p_1p_2m_3(p_3 - q_3) \\ & - p_2q_3m_1(p_1 - q_1) - p_1q_3m_2(p_2 - q_2) - p_3q_2m_1(p_1 - q_1) \\ & - p_1q_2m_3(p_3 - q_3) + q_2q_3m_1(p_1 - q_1) - p_3q_1m_2(p_2 - q_2) \\ & - p_2q_1m_3(p_3 - q_3) + q_1q_3m_2(p_2 - q_2) + q_1q_2m_3(p_3 - q_3)))^{1/2}) \\ & \cdot (2(p_2p_3m_1(p_1 - q_1) + p_1p_3m_2(p_2 - q_2) + p_1p_2m_3(p_3 - q_3) \\ & - p_2q_3m_1(p_1 - q_1) - p_1q_3m_2(p_2 - q_2) - p_3q_2m_1(p_1 - q_1) \\ & - p_1q_2m_3(p_3 - q_3) + q_2q_3m_1(p_1 - q_1) - p_3q_1m_2(p_2 - q_2) \\ & - p_2q_1m_3(p_3 - q_3) + q_1q_3m_2(p_2 - q_2) + q_1q_2m_3(p_3 - q_3)))^{-1}, \end{aligned}$$

za podmínky

$$(p_2 - q_2)(p_3 - q_3)m_1(p_1 - q_1) + (p_1 - q_1)((p_3 - q_3)m_2(b - e) + (p_2 - q_2)m_3(p_3 - q_3)) \neq 0.$$