**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA**
**Univerzita Karlova**

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Martin Agh

# Diskrétní systémy s náhodným vstupem

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D.
Studijní program: Obecná matematika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ............ dne ............ ..................................

Podpis autora

Hlavní poděkování patří RNDr. Petrovi Čoupkovi, Ph.D., za jeho čas, odborné vedení a podporu při tvorbě této bakalářské práce. Velmi si vážím jeho trpělivosti, cenných rad a ochoty sdílet své bohaté znalosti a zkušenosti. Bez jeho pomoci by nebylo možné dosáhnout dokončení této práce.

Dále bych rád poděkoval své nejbližší kamarádce Radce Kudlové za její neustálou podporu a povzbuzování během celého studia. Její přátelství a povzbuzení mi bylo nesmírnou oporou a pomohlo mi překonat mnoho náročných momentů.

Název práce: Diskrétní systémy s náhodným vstupem

Autor: Martin Agh

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá diskrétními systémy s náhodným vstupem. Hlavní pozornost je věnována náhodné procházce, principu reflexe a jejich aplikacím. Nejprve jsou představeny základní pojmy a definice související s náhodnými procesy a Markovovými procesy s diskrétním časem. Následně je podrobně analyzována symetrická náhodná procházka. Klíčovým tématem práce je princip reflexe, který je aplikován na jednoduchou symetrickou náhodnou procházku a dále rozšířen na procházky dvojitým exponenciálním rozdělením kroků. Je odvozeno rozdělení průběžného maxima symetrické náhodné procházky jak s diskrétním krokem, tak s absolutně spojitým krokem.

Klíčová slova: Markovův řetězec s diskrétním časem, náhodná procházka, princip reflexe, symetrická náhodná procházka, rozdělení průběžného maxima symetrické náhodné procházky

Title: Discrete systems with random input

Author: Martin Agh

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This bachelor's thesis focuses on discrete systems with random input. The main attention is paid to random walks, the reflection principle, and their applications. First, the basic concepts and definitions related to random processes and discrete-time Markov processes are presented. Subsequently, a detailed analysis of the symmetric random walk is provided. A key topic of the thesis is the reflection principle, which is applied to a simple symmetric random walk and further extended to walks with steps with double exponential distributions. The distribution of the running maximum of a symmetric random walk with both discrete and absolutely continuous steps is derived.

Keywords: discrete-time Markov chain, random walk, reflection principle, symmetric random walk, distribution of the running maximum of a symmetric random walk

# Obsah

# Seznam použitých symbolů a zkratek

| | |
|---|---|
| $\Omega$ | prostor elementárních jevů, stavový prostor |
| $\mathcal{A}$ | $\sigma$-algebra náhodných jevů na $\Omega$ |
| $\mathsf{P}$ | pravděpodobnost |
| $\emptyset$ | prázdná množina |
| $\mathbb{R}$ | množina reálných čísel |
| $\mathbb{N}$ | množina přirozených čísel |
| $\mathbb{N}_0$ | množina nezáporných celých čísel |
| $\mathbb{Z}$ | množina celých čísel |
| $\mathbb{R}^+$ | množina kladných reálných čísel |
| $\mathbb{R}_0^+$ | množina nezáporných reálných čísel |
| $\mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B})$ | podmíněná pravděpodobnost jevu $\mathsf{A}$ za podmínky jevu $\mathsf{B}$ |
| $\stackrel{\mathrm{d}}{=}$ | rovnost v distribuci |
| $\times$ | kartézský součin |
| $\min \mathsf{M}$ | minimum množiny $\mathsf{M}$ |
| $\max \mathsf{M}$ | maximum množiny $\mathsf{M}$ |
| $\perp\!\!\!\perp$ | nezávislost |
| $\Phi$ | distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $\mathcal{N}(0,1)$ |
| $f_X$ | hustota náhodné veličiny $X$ |
| $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ | posloupnost náhodných veličin $X_i$ |
| $\mathbb{E}X$ | střední hodnota náhodné veličiny $X$ |
| $\operatorname{var}(X)$ | rozptyl náhodné veličiny $X$ |
| $X \sim \mathcal{L}$ | $X$ má rozdělení $\mathcal{L}$ |
| $\inf \mathsf{M}$ | infimum množiny $\mathsf{M}$ |
| $\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ | indikátorová funkce intervalu $[a,b]$ proměnné $x$ |
| $F_X$ | distribuční funkce náhodné veličiny $X$ |
| iid | nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny |
| $\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}}$ | konvergence v distribuci |
| s.j. | skoro jistě |
| $F_1 * F_2$ | konvoluce distribučních funkcí $F_1$ a $F_2$ |

# Úvod

Tato bakalářská práce v úvodu seznámí čtenáře s náhodnou procházkou. Právě model náhodné procházky, díky své jednoduchosti a názornosti, se často používá k demonstrování různých vlastností náhodných procesů, včetně principu reflexe, který je významný pro analýzu symetrických náhodných procházek. Tento princip je rovněž klíčovým tématem této bakalářské práce, která ho vysvětluje a využívá při analýze náhodných procházek. Cílem bakalářské práce je také nabídnout čtenářům srozumitelný úvod do této oblasti a zároveň poskytnout podrobnější informace pro pokročilejší studium, zejména pro studenty se znalostmi pravděpodobnosti.

Struktura práce je rozdělena do tří kapitol. První kapitola je věnována náhodným procesům a náhodným procházkám, kde jsou představeny základní definice a teoretické základy těchto konceptů. Druhá kapitola se zaměřuje na princip reflexe a jeho využití, který je vysvětlován na příkladu symetrické náhodné procházky, což umožňuje lépe pochopit jeho aplikaci a význam. Třetí kapitola se pak věnuje exponenciální náhodné procházce a jejím vlastnostem.

Práce čerpá z odborné literatury a vědeckých článků. Druhá kapitola vychází především z knih Steele [1] a Štěpán [2]. Třetí kapitola nejčastěji čerpá z článku Kumar a Maheswaran [3]. Jelikož jsou tyto zdroje určeny spíše pro zkušenější čtenáře, práce často doplňuje informace, které v knihách a článku chybí nebo nejsou natolik přímočaré a vysvětlené.

# 1 Náhodná procházka

V celé práci uvažujeme pouze reálné náhodné veličiny definované na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, proto budeme používat pouze pojem náhodná veličina.

## 1.1 Náhodný proces

Nejdříve je potřeba definovat náhodný proces. Poté v dalších částech ukážeme, že náhodná procházka představuje náhodný proces. Následující definice náhodného procesu je převzata z [4, str. 7].

**Definice 1.** Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor, $\mathsf{T} \neq \emptyset$ a nechť pro každé $t \in \mathsf{T}$ je $X_t : (\Omega, \mathcal{A}) \to (H_t, \mathcal{H}_t)$, kde $(H_t, \mathcal{H}_t)$ je měřitelný prostor, náhodná veličina. Neprázdný systém náhodných veličin $X = \{X_t, t \in \mathsf{T}\}$ nazýváme *náhodný proces.*

V našem případě budeme uvažovat $\mathsf{T} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$ a mluvíme o *náhodném procesu s diskrétním časem* (nebo také o *časové řadě*). Dvojice $(\mathsf{S}, \mathcal{S})$, kde $\mathsf{S}$ je množina hodnot náhodných veličin $X_t$ a $\mathcal{S}$ je $\sigma$-algebra podmnožin $\mathsf{S}$, se nazývá *stavový prostor* procesu $\{X_t, t \in \mathsf{T}\}$. Množina $\mathsf{S}$ se nazývá *množina eficientních stavů* nebo *množina efektivních stavů* nebo *množina stavů* náhodného procesu $X$.

V případě, kdy je množina eficientních stavů náhodného procesu nejvýše spočetná množina (spočetná nebo konečná množina, která nemá žádný hromadný bod) říkáme, že se jedná o *proces s diskrétními stavy.* Nabývají-li náhodné veličiny $X_t$ hodnot z nějakého intervalu, proces $X$ nazýváme *proces se spojitými stavy.*

## 1.2 Markovův řetězec s diskrétním časem

### 1.2.1 Diskrétní množina stavů

V této podsekci budeme uvažovat náhodný proces s diskrétním časem a s diskrétními stavy, který je definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Opět podle práce Lachouta a Práškové [4, str. 15] definujeme Markovův řetězec.

**Definice 2.** Řekneme, že náhodný proces $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ s diskrétní nejvýše spočetnou množinou stavů $\mathsf{S}$ je *Markovův řetězec s diskrétním časem a s diskrétní množinou stavů*, jestliže splňuje tzv. *markovskou vlastnost*:

$$\mathsf{P}\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\right) = \mathsf{P}\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right) \quad (1.1)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a pro všechna $i, j, i_{n-1}, \ldots, i_0 \in \mathsf{S}$ taková, že

$$\mathsf{P}\left(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\right) > 0.$$

Markovská vlastnost nám tedy říká, že pokud známe výsledek v „přítomnosti“ (v čase $n$) a v „minulosti“ (v časech $n-1, n-2, \ldots, 0$), pak podmíněná pravděpodobnost výsledku v „budoucnosti“ (v čase $n+1$) je stejná, jako když známe jen výsledek v „přítomnosti“ (v čase $n$).

**Definice 3.** Řekneme, že Markovův řetězec s diskrétním časem $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ s diskrétní množinou eficientních stavů $\mathsf{S}$ je *homogenní*, pokud platí

$$\mathsf{P}\left(X_{n_1+m} = j \mid X_{n_1} = i\right) = \mathsf{P}\left(X_{n_2+m} = j \mid X_{n_2} = i\right)$$

pro každé $i, j \in \mathsf{S}$, $m \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ takové, že $\mathsf{P}\left(X_{n_1} = i\right) > 0$, $\mathsf{P}\left(X_{n_2} = i\right) > 0$.

Jinak řečeno, homogenní Markovův řetězec s diskrétním časem je takový Markovův řetězec s diskrétním časem, u kterého tzv. *pravděpodobnosti přechodu* $p_{i,j}(n,n+m) = \mathsf{P}\left(X_{n+m} = j \mid X_n = i\right)$ závisí pouze na rozdílu časů $m$ v nichž k přechodu došlo, a nikoli na časech $n$ samotných.

Následující definice a lemma jsou převzaty z knihy Lachout a Prášková [4, str. 25].

**Definice 4.** *Markovský čas* náhodného procesu $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je taková náhodná veličina $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, pro kterou jevy $[\tau \leq n]$ patří do $\sigma$-algebry $\mathcal{F}_n = \sigma\left(X_0, X_1, \ldots, X_n\right)$ generované náhodnými veličinami $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

**Lemma 1.** *Pro náhodný proces $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ a pro náhodnou veličinou $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ platí, že $\tau$ je markovský čas náhodného procesu $X$ právě tehdy, když pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je $[\tau = n] \in \mathcal{F}_n$.*

*Důkaz.* Máme-li $n = 0$ pak jsou podmínky shodné, neboť $[\tau = 0] = [\tau \leq 0]$. Mějme nyní $n \geq 1$. Je-li $\tau$ markovský čas, pak $[\tau = n] = [\tau \leq n] \setminus [\tau \leq n-1] \in \mathcal{F}_n$, neboť $[\tau \leq n] \in \mathcal{F}_n$ a $[\tau \leq n-1] \in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$.

Pokud $[\tau = n] \in \mathcal{F}_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, pak $\tau$ je markovský čas, neboť

$$[\tau \leq n] = \bigcup_{k=0}^{n} [\tau = k] \in \mathcal{F}_n.$$

□

Následující definice filtrace je převzata ze skript Lachout [5, str. 1].

**Definice 5.** Nechť $\emptyset \neq \mathsf{T} \subset \mathbb{N}$ je indexová množina. Když pro každé $t \in \mathsf{T}$ je $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ $\sigma$-algebra a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, pokud $s < t, s, t \in \mathsf{T}$, pak říkáme, že systém $\sigma$-algeber $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in \mathsf{F}\}$ je *filtrace*.

**Poznámka.** Filtrace je tedy rostoucí rodina $\sigma$-algeber $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, kde každá $\mathcal{F}_t$ je $\sigma$-algebra obsahující informace dostupné do času $t$ a

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{A}.$$

Pro markovský čas $\tau$ pak $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}$, kde $\mathcal{F}_\tau$ je taková $\sigma$-algebra, že

$$\mathcal{F}_\tau = \left\{\mathsf{F} \in \mathcal{A} : \mathsf{F} \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t, \forall\, t \in \mathbb{N}\right\}.$$

$\mathcal{F}_\tau$ tedy obsahuje obsahuje všechny informace dostupné do času $\tau$.

### 1.2.2 Obecná množina stavů

V této podsekci budeme uvažovat náhodný proces s diskrétním časem se stavovým prostorem $(S, \mathcal{S})$, kde $\mathsf{S}$ je obecná množinou stavů, jenž je definován na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Následující definice jsou převzaty z [6, str. 107, 108].

**Definice 6.** Řekneme, že náhodný proces $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ s obecnou množinou stavů $\mathsf{S}$ je *Markovův řetězec s diskrétním časem a s obecnou množinou stavů*, jestliže splňuje tzv. *markovskou vlastnost*:

$$\mathsf{P}\left(X_{n+1} \in \mathsf{A} \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathsf{P}\left(X_{n+1} \in \mathsf{A} \mid X_n\right), \quad \mathsf{A} \in \mathcal{S}, \tag{1.2}$$

kde $\mathcal{F}_n = \sigma\left(X_0, X_1, \ldots, X_n\right)$.

Markovskou vlastnost (1.2) lze pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ (a volbou $\mathsf{A} = (-\infty, x]$) také definovat jako

$$\mathsf{P}\left(X_{n+1} \leq x \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathsf{P}\left(X_{n+1} \leq x \mid X_n\right).$$

Markovská vlastnost má analogický význam jako u Markovových řetězců s dikrétním časem a s diskrétní množinou stavů.

**Definice 7.** Řekneme, že Markovův řetězec s diskétním časem $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ s obecnou množinou stavů $\mathsf{S}$ je *homogenní*, pokud platí

$$\mathsf{P}\left(X_{n_1+m} \in \mathsf{A} \mid X_{n_1} = i\right) = \mathsf{P}\left(X_{n_2+m} \in \mathsf{A} \mid X_{n_2} = i\right)$$

pro každé $i \in \mathsf{S}, \mathsf{A} \in \mathcal{S}, m \in \mathbb{N}, n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ takové, že platí $\mathsf{P}\left(X_{n_1} = i\right) > 0$ a $\mathsf{P}\left(X_{n_2} = i\right) > 0$.

Taktéž i význam homogenity je stejný jako u Markovových řetězců s diskrétním časem a s diskrétní množinou stavů.

Následující definice silné markovské vlastnosti je převzata z [6, str. 129].

**Definice 8.** Nechť $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je Markovův řetězec s obecnou množinou stavů a $\tau$ je skoro jistě konečný markovský čas. Říkáme, že tento proces $X$ má *silnou markovskou vlastnost*, pokud pro každé $m \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\mathsf{P}\left(X_{\tau+m} \in \mathsf{A} \mid \mathcal{F}_\tau\right) = \mathsf{P}\left(X_{\tau+m} \in \mathsf{A} \mid X_\tau\right), \quad \mathsf{A} \in \mathcal{S}.$$

**Tvrzení 2** ([6, tvrzení 9.1, str. 129])**.** *Každý Markovův řetězec s diskrétním časem a s obecnou množinou stavů má silnou markovskou vlastnost.*

*Důkaz.* Viz Bhattacharya a Waymire [6, tvrzení 9.1, str. 129].

$\square$

**Poznámka.** Předchozí tvrzení nám tedy říká, že je-li indexová množina spočetná, pak je silná markovská vlastnost ekvivalentní se standardní markovskou vlastností (1.2).

## 1.3 Náhodná procházka

Zde definujeme náhodnou procházku a ukážeme některé příklady jejích typů. Jednomu z těchto typů budeme poté věnovat samostatnou část, neboť hraje zasádní roli v celé práci.

**Definice 9.** Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$S_0 := 0, \qquad S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Potom posloupnost náhodných veličin $S := \{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *náhodná procházka.*

Náhodná procházka s diskrétními stavy tvoří náhodný proces s diskrétním časem a diskrétními stavy ([4, str. 21]).

Jelikož $X_n$ jsou stejně rozdělené, jde i o homogenní Markovův řetězec s diskrétním časem a s diskrétní množinou stavů, neboť pravděpodobnosti přechodu nezávisí na $n$ :

$$p_{i,j}(n, n+1) = \mathsf{P}\left(S_{n+1} = j \mid S_n = i\right) = \mathsf{P}\left(X_{n+1} = j - i\right) = \mathsf{P}\left(X_1 = j - i\right),$$

kde jsme v poslední rovnosti využili toho, že $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin.

**Tvrzení 3.** *Náhodná procházka s obecnou množinou stavů splňuje markovskou vlastnost (1.2), a tvoří tedy Markovův řetězec s diskrétním časem a s obecnou množinou stavů.*

*Důkaz.* Mějme náhodnou procházku $S = \{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ s obecnou množinou stavů. Ukážeme, že náhodný proces $S$ splňuje markovskou vlastnost (1.2).

Bez újmy na obecnosti mějme $\mathsf{A} = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Kdyby $a = -\infty$, resp. $b = \infty$, pak $\mathsf{A} = (-\infty, b]$, resp. $\mathsf{A} = [a, \infty)$, a důkaz je analogický.

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro $\mathcal{F}_n = \sigma\left(S_0, S_1, \ldots, S_n\right)$ máme

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(S_{n+1} \in \mathsf{A} \mid \mathcal{F}_n\right) &= \mathsf{P}\left(a \leq S_{n+1} \leq b \mid \mathcal{F}_n\right) \\
&= \mathsf{P}\left(a \leq X_{n+1} + S_n \leq b \mid \mathcal{F}_n\right) \\
&= \mathsf{P}\left(a - S_n \leq X_{n+1} \leq b - S_n \mid S_n\right) \\
&= \mathsf{P}\left(a \leq S_{n+1} \leq b \mid S_n\right) \\
&= \mathsf{P}\left(S_{n+1} \in \mathsf{A} \mid S_n\right),
\end{aligned}$$

kde jsme využili nezávislosti $X_{n+1}$ a $\mathcal{F}_n$ a nezávilosti $X_{n+1}$ a $S_n$ (viz [7, věta 7.5, str. 41]).

□

### 1.3.1 Jednoduchá procházka

Buď $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ náhodný proces, jehož prvky tvoří nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny $X_n, n \in \mathbb{N}$, takové, že pro $p \in (0,1)$, $q = 1 - p$ a $n \in \mathbb{N}$ máme

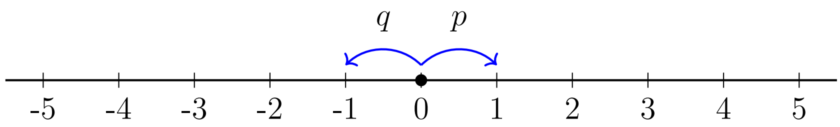
$$\mathsf{P}\left(X_n = 1\right) = p, \qquad \mathsf{P}\left(X_n = -1\right) = q.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$S_0 := 0, \qquad S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Posloupnost náhodných veličin $S := \{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *jednoduchá náhodná procházka*.

Můžeme si tento proces představit jako pohyb částice po celočíselných bodech na přímce, která začala svůj pohyb z bodu $S_0 = 0$. Tedy množina eficientních stavů je $\mathsf{S} = \mathbb{Z}$. Ilustraci této situace můžeme vidět na obrázku 1.1. Částice se pohybuje doleva s pravděpodobností $q$ a doprava s pravděpodobností $p$. Zadefinovaná suma $S_n$ pak představuje polohu částice po $n$ krocích.




**Obrázek 1.1** Jednoduchá procházka.

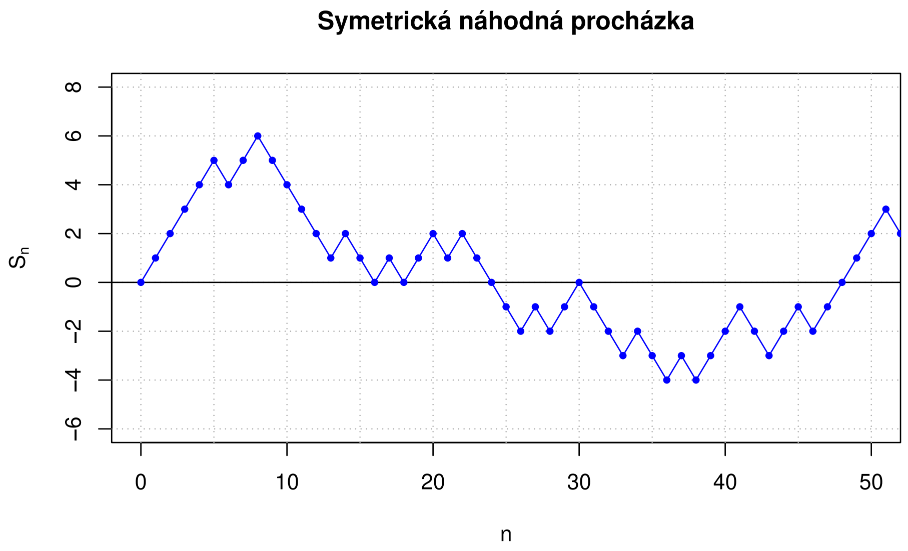
### 1.3.2 Symetrická náhodná procházka

Náhodná procházka, jejíž jednotlivé kroky, tj. náhodné veličiny $X_i, i \in \mathbb{N}$, mají pravděpodobnostní rozdělení symetrické kolem nuly, se nazývá *symetrická náhodná procházka*. To je např. pro rovnoměrné diskrétní rozdělení na množině $\{-1,1\}$, pro dvojité exponenciální rozdělení, pro normované normální rozdělení apod.

Tedy v případě, kdy u jednoduché náhodné procházky je $q = p = \frac{1}{2}$ , mluvíme o symetrické jednoduché náhodné procházce. Zde náhodné veličiny $X_n$ mají rovnoměrné rozdělení na $\{-1,1\}$, tj. $X_n \sim \mathrm{R}\{-1,1\}$. Tato náhodná procházka tvoří homogenní Markovův řetězec s diskrétním časem s množinou eficientních stavů $\mathsf{S} = \mathbb{Z}$ s pravděpodobností přechodu $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}, i \in \mathbb{Z}$.

**Poznámka.** U symetrické jednoduché náhodné procházky je $\mathbb{E}X_i = 0$ a $\operatorname{var}(X_i) = 1$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, neboť $\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}X_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ a $\operatorname{var}(X_i) = \operatorname{var}(X_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0^2 = 1$. Potom $\mathbb{E}S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_1 = 0$ a $\operatorname{var}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(X_1) = n$, kde jsme využili toho, že $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ je posloupnost nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin.

Zpravidla se náhodná procházka $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ interpretuje pomocí spojnicového grafu, kde jednotlivé body jsou $[n, S_n]$. Tento graf nazýváme *cesta procesu*. Pro nějaké pevné $\omega \in \Omega$ se funkce $S_{(\cdot)} = S_{(\cdot)}(\omega)$ proměnné $n \in \mathbb{N}_0$ nazývá *trajektorie procesu $S$*. Příklad takovéto reprezentace můžeme vidět na obrázku 1.2, kde osa $x$ představuje jednotlivé kroky (čas $n$) a osa $y$ polohu částice v čase $n$ (hodnoty $S_n$).




**Obrázek 1.2** Symetrická náhodná procházka s krokem R$\{-1,1\}$.

**Pozorování.** Po sudém počtu kroků $n$ bude hodnota symetrické jednoduché náhodné procházky $S_n$ také sudá. Je-li $n$ liché, pak i hodnota $S_n$ je lichá.

# 2 Princip reflexe

V této kapitole vycházíme z knih [1, kap. 1 a sekce 5.3] a [2, kap. V].

Mějme symetrickou jednoduchou náhodnou procházku $S$, tj. náhodnou posloupnost $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ takovou, že $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n \in \mathbb{N}$, kde $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ je posloupnost nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin takových, že

$$\mathsf{P}(X_i = -1) = \mathsf{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Takováto symetrická náhodná procházka nám poskytuje např. model procesu bohatství jednotlivce, který se živí házením spravedlivou mincí a sázením na výsledky. Jak uvidíme, nejedná se o lukrativní způsob vydělávání peněz. Představme si, že daný jednotlivec sází vždy po jedné koruně. Potom hodnota $S_n - S_0$ vyjadřuje čistý výdělek ze sázení.

Zde pro jednoduchost volíme $S_0 = 0$. Analogicky by také šlo uvažovat $S_0 = k$ pro $k \in \mathbb{N}$.

**Poznámka.** Připomeňme, že náhodná veličina $X$ s konečnou střední hodnotou $\mu$ má symetrické rozdělení kolem $\mu$, pokud platí

$$X - \mu \overset{\mathrm{d}}{=} \mu - X.$$

V případě symetrické jednoduché náhodné procházky je $\mathbb{E}X_i = 0$, tedy pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $X_i \overset{\mathrm{d}}{=} -X_i$.

**Definice 10** (Proces reflexe)**.** Nechť $S = \{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ je symetrická náhodná procházka a nechť $b \in \mathbb{R}_0^+$. Definujme *čas prvního vstupu do hodnoty* $b$ jako

$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \geq b\}.$$

Poté definujeme náhodnou posloupnost $R := \{R_n\}_{n=0}^{\infty}$, které budeme říkat *proces reflexe*, předpisem

$$R_n := \begin{cases} S_n, & n < \tau, \\ S_\tau - (S_n - S_\tau), & n \geq \tau. \end{cases}$$

**Poznámka.** Čas $\tau$ je markovský čas, neboť

$$[\tau = n] = [S_0 < b, S_1 < b, \ldots, S_{n-1} < b, S_n \geq b] \in \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n).$$

Navíc je čas $\tau$ skoro jistě konečný, což plyne z tvrzení v [8, tvrzení 7.2.3, str. 563].

Protože $S_n$ je měřitelnou funkcí náhodných veličin $X_i, i = 1, \ldots, n$, je $S_n$ také náhodná veličina. Analogicky $\tau$ je náhodná veličina, neboť závisí na náhodných veličinách $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ (viz [4, str. 27]). Hodnota $S_\tau$ v čase $\tau$ je proto rovněž náhodná veličina.

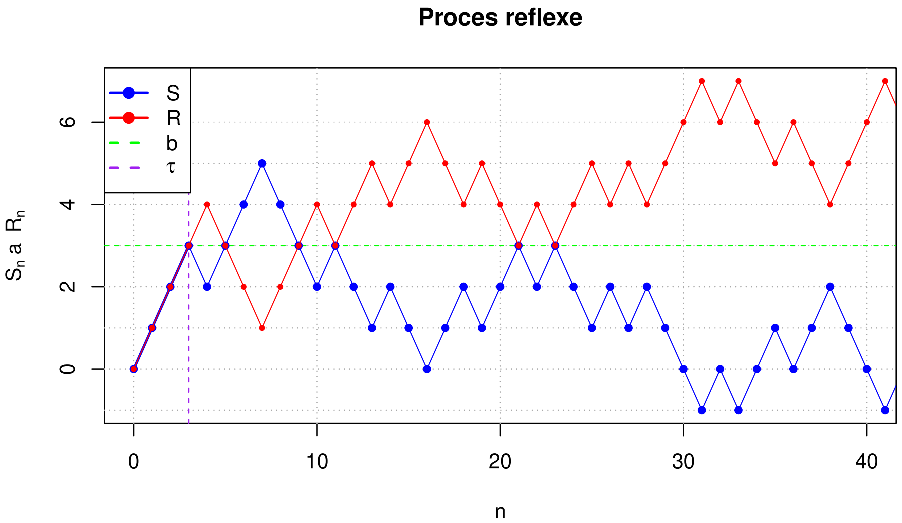
**Poznámka.** U symetrické jednoduché náhodné procházky $S$ pro $b \in \mathbb{N}$ je

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = b\}.$$

Tedy proces reflexe pro symetrickou jednoduchou náhodnou procházku je

$$R_n = \begin{cases} S_n, & n < \tau, \\ 2b - S_n, & n \geq \tau. \end{cases}$$

Ukázka definovaného procesu reflexe u symetrické jednoduché náhodné prochazky je vidět na obrázku 2.1. Můžeme si všimnout, že trajektorii procesu $R$ získáme z trajektorie procesu $S$ zrcadlením podle přímky $b$ od času $\tau$.




**Obrázek 2.1** Proces reflexe u symetrické jednoduché náhodné procházky.

**Poznámka.** Steele [1, str. 66] ve své práci uvádí, že všechna konečněrozměrná sdružená rozdělení náhodných procesů $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou stejná.

Jelikož autor pouze zmiňuje platnost a čtenáři neukazuje zdůvodnění, zformulujeme a dokážeme toto tvrzení zde.

**Tvrzení 4.** *Mějme symetrickou jednoduchou náhodnou procházku* $S := \{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, *proces reflexe* $R := \{R_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ *a skoro jistě konečný čas prvního vstupu* $\tau = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n = b\}$ *pro nějaké* $b \in \mathbb{N}$. *Potom*

$$\{S_n\}_{n=0}^{\infty} \stackrel{d}{=} \{R_n\}_{n=0}^{\infty},$$

*tj. všechna konečněrozměrná sdružená rozdělení náhodných procesů $S$ a $R$ jsou stejná.*

*Důkaz.* Nejdříve ukážeme, že $-S := \{-S_n\}_{n=0}^{\infty}$ je symetrická jednoduchá náhodná procházka. Pro posloupnost $\{-S_n\}_{n=0}^{\infty}$ máme $-S_0 = 0$ a

$$-S_n = -\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} (-X_i)\,.$$

Náhodné veličiny $-X_i, i \in \mathbb{N}$, jsou nezávislé a stejné rozdělené jako původní náhodné veličiny $X_i, i \in \mathbb{N}$, neboť pro $i \in \mathbb{N}$ platí

$$\mathsf{P}\left(-X_i = -1\right) = \mathsf{P}\left(X_i = 1\right) = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \mathsf{P}\left(-X_i = 1\right) = \mathsf{P}\left(X_i = -1\right) = \frac{1}{2}.$$

Tedy pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $\mathsf{P}\left(-X_i = -1\right) = \mathsf{P}\left(-X_i = 1\right) = \frac{1}{2}$ a $-S$ je symetrická jednoduchá náhodná procházka

Definujme posloupnost $Y := \{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ takovou, že $Y_n := S_{n+\tau} - S_\tau$. Potom pro $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$Y_n = S_{n+\tau} - S_\tau = \sum_{i=1}^{n+\tau} X_i - \sum_{i=1}^{\tau} X_i = \sum_{i=\tau+1}^{n+\tau} X_i.$$

Jelikož $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny, tak i $\{X_i\}_{i=\tau+1}^{n+\tau}$ jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny. Pravděpodobnostní rozdělení se nijak nezměnilo, proto $Y$ bude také symetrická jednoduchá náhodná procházka. Vzhledem k tomu, že náhodné veličiny $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ jsou nezávislé a stejně rozdělené, posunutí indexů o $\tau$ neovlivňuje jejich nezávilost a rozdělení, díky silné markovské vlastnosti [9, věta 1.4.2, str. 20]. Proto je symetrická jednoduchá náhodná procházka $Y$ nezávislá na $\tau$ a na $\mathcal{F}_\tau$.

Definujme funkci $\psi : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ předpisem

$$\psi(f,t,g)(k) := \begin{cases} f_k, & k \leq t, \\ f_t + g(k-t), & k > t. \end{cases}$$

Také definujme

$$F := \{S_{n\wedge\tau}\}_{n=0}^{\infty}, \qquad T := \tau, \qquad G := \{Y_n\}_{n=0}^{\infty},$$

kde $n \wedge \tau = \min\{n, \tau\}$ je markovský čas (viz [10, lemma 1.3.1, str. 245]).

Z výše dokázaného plyne, že i $-G := \{-Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ je symetrická jednoduchá náhodná procházka nezávislá na $\tau$. Potom

$$(F,T,G) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (F,T,-G).$$

A tedy

$$\psi(F,T,G) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \psi(F,T,-G).$$

Potom pro $j \in \mathbb{N}_0$ máme:

- Je-li $j \leq T$, pak $j \wedge T = j$ a
$$\psi(F,T,G)(j) = F_j = S_{j\wedge T} = S_j.$$
- Je-li $j > T$, pak $j \wedge T = T$ a
$$\psi(F,T,G)(j) = F_T + G(j-T) = S_T + Y_{j-T} = S_T + S_j - S_T = S_j.$$

Tedy pro každé $j \in \mathbb{N}_0$ je $\psi(F,T,G)(j) = S_j$.

Analogicky ukážeme, že $\psi(F,T,-G)(j) = R_j$. Pro $j \in \mathbb{N}_0$ máme:

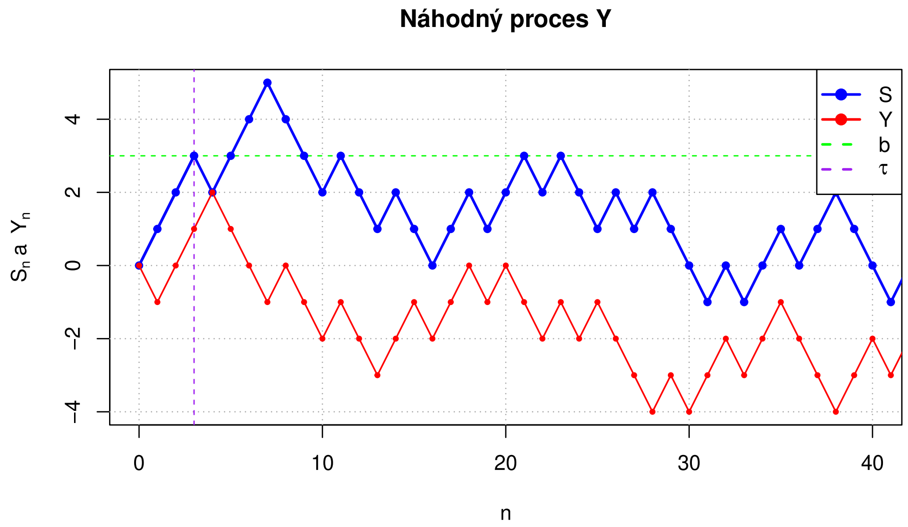
- Je-li $j \leq T$, pak $j \wedge T = j$ a
$$\psi(F,T,-G)(j) = F_j = S_{j\wedge T} = S_j.$$
- Je-li $j > T$, pak $j \wedge T = T$ a
$$\psi(F,T,-G)(j) = F_T + (-G)(j-T) = S_T + S_T - S_j = 2\,S_T - S_j.$$

Což odpovídá definici procesu reflexe $R$. Celkem máme

$$\forall j \in \mathbb{N}_0 : S_j = \psi(F,T,G)(j) = \psi(F,T,-G)(j) = R_j.$$

$\square$

V předešlém důkazu jsme si definovali náhodný proces $Y := \{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ předpisem $Y_n := S_{n+\tau} - S_\tau$. Vizualizaci tohoto procesu můžeme vidět na obrázku 2.2. Náhodný proces $Y$ začínající v 0 představuje náhodnou procházku $S$ od času $\tau$ posunutou dolů o hodnotu $S_\tau = b$. U této konkrétní náhodné procházky $S$, kde první čas vstupu do hodnoty $b$ je $\tau = 3$, je $Y_0 = 0$, $Y_1 = S_4 - b$, $Y_2 = S_5 - b$, apod.




**Obrázek 2.2** Náhodný proces $Y$ z důkazu tvrzení 4.

Tvrzení 4 bylo pro případ, kdy máme symetrickou jednoduchou náhodnou procházku z úvodu této kapitoly. Pojďme si nyní toto tvrzení zobecnit a dokázat pro symetrickou náhodnou procházku, jejíž kroky mají libovolné symetrické pravděpodobnostní rozdělení.

**Tvrzení 5.** *Nechť $b \in \mathbb{R}_0^+$, $\tau$ je čas prvního vstupu do hodnoty $b$ a $R$ je proces reflexe. Navíc definujme náhodný proces $S := \{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ takový, že*

$$S_0 := 0, \qquad S_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

*kde $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ je posloupnost nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin s libovolným symetrickým rozdělením (označme ho jako $\mathcal{D}$), tj. $\xi_i \sim \mathcal{D}, i \in \mathbb{N}$. Potom*

$$S \overset{d}{=} R.$$

*Důkaz.* Ukážeme, že $-S := \{-S\}_{n=0}^{\infty}$ je symetrická náhodná procházka. Pro posloupnost $\{-S_n\}_{n=0}^{\infty}$ máme $-S_0 = 0 = S_0$ a

$$-S_n = \sum_{i=1}^{n}(-\xi_i).$$

Jelikož $\xi_i, i \in \mathbb{N}$, jsou nezávislé náhodné veličiny, tak i náhodné veličiny $-\xi_i, i \in \mathbb{N}$, jsou nezávislé. Víme, že $\xi_i, i \in \mathbb{N}$, má symetrické rozdělení, tj. z definice symetrického rozdělení platí $\xi_i \stackrel{d}{=} -\xi_i$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Tedy pro libovolné symetrické rozdělení $\mathcal{D}$ mají náhodné veličiny $-\xi_i$ stejné rozdělení jako náhodné veličiny $\xi_i \sim \mathcal{D}, i \in \mathbb{N}$.

Definujme posloupnost $Y := \{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ takovou, že $Y_n := S_{n+\tau} - S_\tau$. Potom pro $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$Y_n = S_{n+\tau} - S_\tau = \sum_{i=1}^{n+\tau} \xi_i - \sum_{i=1}^{\tau} \xi_i = \sum_{i=\tau+1}^{n+\tau} \xi_i.$$

Vzhledem k tomu, že náhodné veličiny $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ jsou nezávislé a stejně rozdělené a čas prvního vstupu $\tau$, který je skoro jistě konečný, je markovský čas, tak pomocí tvrzení 2 a silné markovské vlastnosti víme, že posunutí indexů o $\tau$ neovlivňuje jejich nezávilost a rozdělení. Proto náhodný proces $Y$ bude také symetrická náhodná procházka a symetrická náhodná procházka $Y$ je nezávislá na $\tau$ a na $\mathcal{F}_\tau$.

Definujme funkci $\psi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ předpisem

$$\psi(f,t,g)(k) := \begin{cases} f_k, & k \le t, \\ f_t + g(k-t), & k > t. \end{cases}$$

Potom je zbytek důkazu analogický důkazu tvrzení 4.

□

**Tvrzení 6.** *Nechť $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ je symetrická jednoduchá náhodná procházka a nechť $b \in \mathbb{N}$. Potom*

$$\mathsf{P}\left(S_n^* \ge b\right) = 2\,\mathsf{P}\left(S_n > b\right) + \mathsf{P}\left(S_n = b\right), \tag{2.1}$$

*kde* $S_n^* := \max\limits_{0\le i\le n} S_i$.

*Důkaz.* Jestliže v čase $n \ge \tau$ hodnota náhodné procházky $S_n$ překročí hranici $b+c$, tj. $S_n > b+c$ s.j., pro nějaké $c \ge 0$, potom $R_n < b-c$ s.j., neboť podle definice procesu reflexe je $R_n = S_\tau - (S_n - S_\tau), n \ge \tau$, a v čase $\tau$ je $S_\tau = b$. Tedy v čase $n \ge \tau$ dostáváme

$$R_n = S_\tau - (S_n - S_\tau) = 2\,S_\tau - S_n = 2\,b - S_n < 2\,b - b - c = b - c.$$

Podle tvrzení 4 víme, že procesy $S$ a $R$ mají stejné konečněrozměrné sdružené rozdělení, tj. $(\tau, S) \stackrel{\text{d}}{=} (\tau, R)$. Díky tomu máme

$$\mathsf{P}\left(n \ge \tau, S_n > b+c\right) = \mathsf{P}\left(n \ge \tau, R_n < b-c\right) = \mathsf{P}\left(n \ge \tau, S_n < b-c\right).$$

Nyní k náhodné posloupnosti $\{S_n^*\}_{n=0}^{\infty}$. Z definice $S_n^*$ víme, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ se jedná o maximální hodnotu náhodné procházky $S_n$ v čase od 0 do $n$.

Jelikož jsme si čas $\tau$ definovali jako $\tau = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n = b\}$, víme, že v čase $n \ge \tau$ již existuje nějaký čas $\tau \le k \le n$ takový, že $S_k \ge b$ s.j. Proto také platí

$$\mathsf{P}\left(S_n^* \ge b, S_n > b+c\right) = \mathsf{P}\left(S_n^* \ge b, S_n < b-c\right),$$

což nám říká i rovnost o pár řádků výše. Zřejmě $S_n > b+c$ implikuje, že $S_n^* \ge b$ s.j. Z toho dostáváme

$$\mathsf{P}\left(S_n > b+c\right) = \mathsf{P}\left(S_n^* \ge b, S_n < b-c\right). \tag{2.2}$$

Nyní volbou $c = 0$ z (2.2) získáme

$$\mathsf{P}(S_n > b) = \mathsf{P}(S_n^* \geq b, S_n < b).$$

Rovněž také platí

$$\mathsf{P}(S_n \geq b) = \mathsf{P}(S_n^* \geq b, S_n \geq b).$$

Sečtením těchto dvou rovností dostáváme

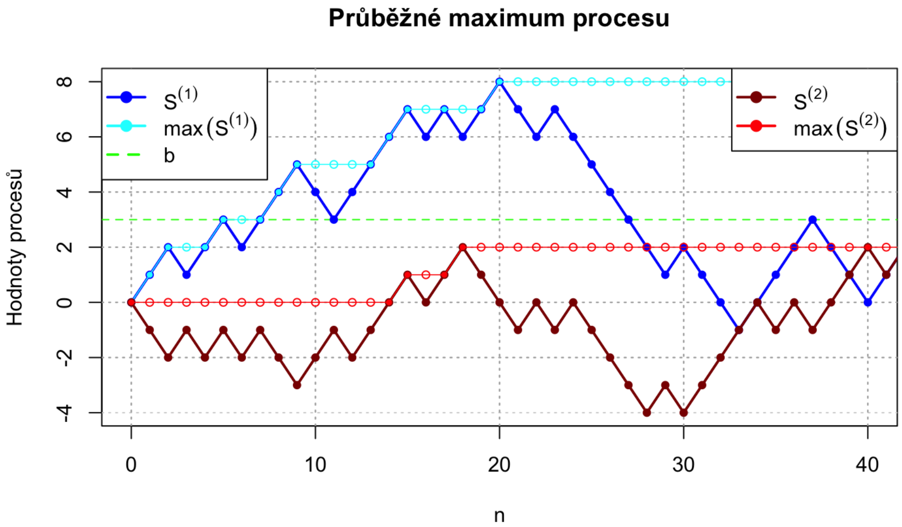
$$\begin{aligned} \mathsf{P}(S_n > b) + \mathsf{P}(S_n \geq b) &= \mathsf{P}(S_n^* \geq b, S < b) + \mathsf{P}(S_n^* \geq b, S_n \geq b) \\ \mathsf{P}(S_n > b) + \mathsf{P}(S_n > b) + \mathsf{P}(S_n = b) &= \mathsf{P}(S_n^* \geq b, S_n < b \text{ nebo } S_n \geq b) \\ 2\,\mathsf{P}(S_n > b) + \mathsf{P}(S_n = b) &= \mathsf{P}(S_n^* \geq b), \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

□

**Poznámka.** Rovnost (2.2) se nazývá ***princip reflexe*** pro symetrickou náhodnou procházku, avšak tento název se často užívá pro tvrzení 5.

Na obrázku 2.3 můžeme vidět průběžná maxima dvou symetrických jednoduchých náhodných procházek. Předchozí tvrzení nám dává možnost spočtení pravděpodobnosti, že maximum náhodné procházky překročí či dosáhne hodnoty $b$.




**Obrázek 2.3** Průběžná maxima symetrických jednoduchých náhodných procházek.

Pojďme se nyní podívat na využití dokázané rovnosti v konkrétním příkladu.

**Příklad** (Házením mincí k „bohatství“)**.** Mějme symetrickou náhodnou procházku, která představuje proces vydělávání peněz jedince, který se živí házením spravedlivou mincí a sázením na výsledky hodu. Jestliže vsadí na správný výsledek, získá 1 Kč. V opačném případě ztrácí 1 Kč. Jaká je pravděpodobnost, že po prvních 8 kolech získá alespoň 3 Kč, jestliže začíná s 0 Kč a může se dostat do záporných hodnot (tzv. do dluhu).

**Řešení.** Máme tedy symetrickou jednoduchou náhodnou procházku $S = \{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ a hledáme pravděpodobnost $\mathsf{P}(S_8^* \geq 3)$. Tvrzení 6 nám dává návod, jak požadovanou pravděpodobnost najít, a to

$$\mathsf{P}(S_8^* \geq 3) = 2 \cdot \mathsf{P}(S_8 > 3) + \mathsf{P}(S_8 = 3).$$

Nejdříve spočteme $\mathsf{P}(S_8 = 3)$.

Ptáme se, s jakou pravděpodobností se po 8 krocích symetrická náhodná procházka dostane do hodnoty 3. Máme $k$ kroků, ve kterých hráč zvítězí a dostane 1 Kč a $8-k$ kroků, ve kterých prohraje a ztratí 1 Kč, kde $k \leq 8$. Tedy učiní nějaký počet „vítězných“ kroků a nějaký počet „prohraných“ kroků. Číslo 8 můžeme získat buď součtem dvou sudých čísel, nebo součtem dvou lichých čísel. Jestliže učiníme sudý počet „vítezných“ kroků, a tedy i sudý počet „prohraných“ kroků, hodnota $S_8$ bude vždy sudé číslo, neboť po 8 krocích bude $S_8 = k-(8-k) = 2k-8$, kde $k$ značí počet vyhraných kol. Analogicky, učiníme-li lichý počet „vítězných“ a lichý počet „prohraných“ kroků, bude hodnota $S_8$ také sudé číslo. Z toho hned dostáváme, že $\mathsf{P}(S_8 = 3) = 0$.

Zbývá spočíst $\mathsf{P}(S_8 > 3)$. Nalezneme vyhovující počty „vítězných“ kroků jako

$$k - (8 - k) > 3 \iff k > \frac{11}{2} \implies k \in \{6,7,8\}.$$

Tím máme

$$\mathsf{P}(S_8 > 3) = \binom{8}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{37}{256}.$$

Celkem dostáváme

$$\mathsf{P}(S_8^* \geq 3) = 2 \cdot \frac{37}{256} + 0 = \frac{37}{128} \doteq 0{,}289.$$

△

Steele v práci [1, str. 67] ukazuje následující využití tvrzení 6 k nalezení asymptotického rozdělení maxima symetrické jednoduché náhodné procházky.

**Důsledek.** Pro $b \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{S_n^*}{\sqrt{n}} \geq b\right) = 2 \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq b\right) = 2\left(1 - \Phi(b)\right),$$

kde $\Phi$ značí distribuční funkci normovaného normálního rozdělení $\mathcal{N}(0,1)$.

*Důkaz.* Dosadíme-li do rovnosti (2.1) za $b$ hodnotu $\sqrt{n}\, b$, dostaneme

$$\mathsf{P}\left(\frac{S_n^*}{\sqrt{n}} \geq b\right) = 2 \cdot \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > b\right) + \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} = b\right). \tag{2.3}$$

Využitím centrální limitní věty (Dupač a Hušková [11, Věta 4.12, str. 86]) máme

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > b\right) = 1 - \Phi(b), \qquad \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} = b\right) = 0,$$

neboť normální rozdělení je absolutně spojité vůči Lebesgueově míře. Limitním přechodem pro $n \to \infty$ z (2.3) dostáváme požadovanou rovnost.

□

# 3 Exponenciální náhodná procházka

Nyní přejdeme od symetrické jednoduché náhodné procházky k náhodné procházce s jiným pravděpodobnostním rozdělením, které bude taky symetrické.

Buďte $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením s hustotou vůči Lebesgueově míře

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-\sqrt{2}\,|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Potom pro každé $i \in \mathbb{N}$ je střední hodnota $\mathbb{E}X_i = 0$ a rozptyl je $\operatorname{var}(X_i) = 1$, neboť

$$\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}X_1 = \int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\, dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\mathbb{R}} x\, e^{-\sqrt{2}\,|x|}\, dx = 0$$

a

$$\operatorname{var}(X_i) = \mathbb{E}X_1^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2\, f(x)\, dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\mathbb{R}} x^2\, e^{-\sqrt{2}\,|x|}\, dx = 1,$$

užitím substituce $t := -\sqrt{2}\,x$ a integrací per partes.

Náhodné veličiny $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ mají tzv. dvojité exponenciální rozdělení s parametrem $\sqrt{2}$, tj. $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{DvExp}\left(\sqrt{2}\right)$, což je speciální případ Laplaceova rozdělení $\operatorname{Laplace}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, jehož hustotu můžeme vidět na obrázku 3.1.

Definujme *exponenciální náhodnou procházku* $S := \{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ jako

$$S_0 := 0, \qquad S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Také definujme pro reálné číslo $b \geq 0$ náhodný čas zastavení předpisem

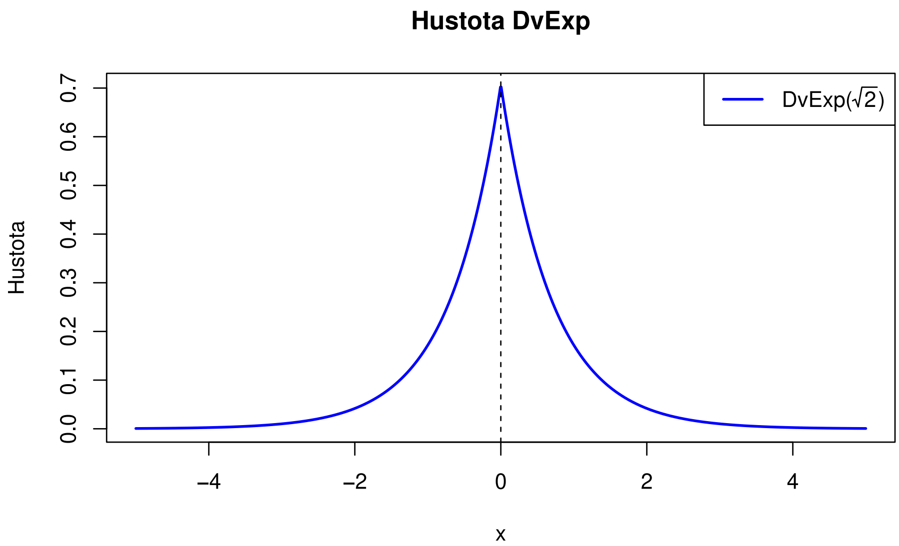
$$\tau_b := \inf \{n \in \mathbb{N} : S_n > b\}.$$

V čase $\tau_b$ exponenciální náhodná procházka $S$ nedosáhne skoro jistě přesné hodnoty $b$, nýbrž ji s kladnou pravděpodobností překročí (viz obrázek 3.2). Proto pro náhodnou procházku $S$ definujme překročení hodnoty $b$ jako

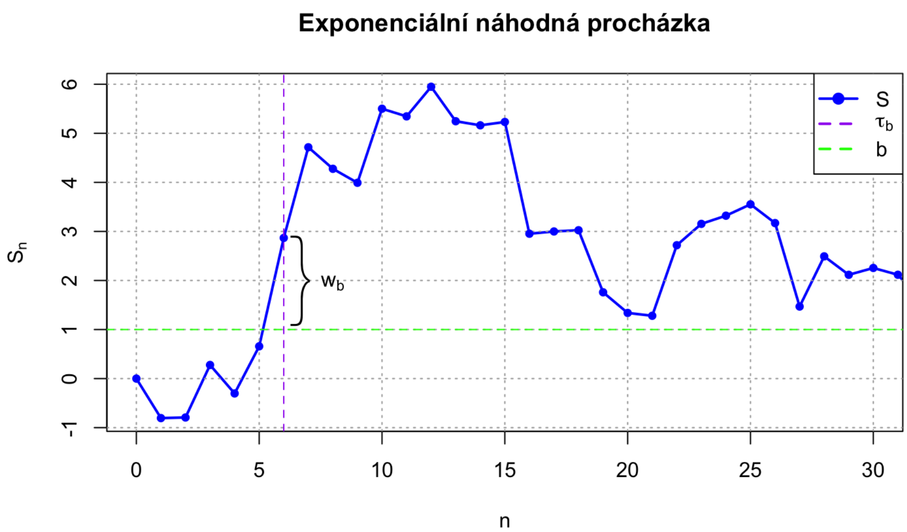
$$w_b := S_{\tau_b} - b.$$

Překročení hodnoty $b$ je skoro jistě kladné, neboť skoro jistě v čase $\tau_b$ je $S_{\tau_b} > b$, tedy

$$w_b = S_{\tau_b} - b > b - b = 0.$$




**Obrázek 3.1** Symetrická hustota rozdělení DvExp$\left(\sqrt{2}\right)$.




**Obrázek 3.2** Náhodný čas zastavení $\tau_b$ a překročení hodnoty $b$.

**Tvrzení 7** (Kumar a Maheswaran [3, str. 34])**.** *Pro jakékoli $b \geq 0$ bude mít náhodná veličina $w_b$ exponenciální rozdělení s parametrem $\sqrt{2}$, tj. $w_b \sim Exp\left(\sqrt{2}\right)$, s hustotou vůči Lebesgueově míře*

$$g(x) = \sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}\,x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Navíc náhodná veličina $w_b$ bude nezávislá s $\tau_b$.*

V následujícím důkazu využíváme myšlenky uvedené v důkazu tvrzení v [12, tvrzení 2.1, str. 508].

*Důkaz.* Pro kladnou, resp. zápornou, část se dvojité exponenciální rozdělení chová jako exponenciální rozdělení, neboť pro $x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-\sqrt{2}\,|x|} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{-\sqrt{2}x}\mathbb{1}_{[x\geq 0]} + e^{\sqrt{2}x}\mathbb{1}_{[x<0]}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-\sqrt{2}x}\mathbb{1}_{[x\geq 0]} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{\sqrt{2}x}\mathbb{1}_{[x<0]}.
\end{aligned}
$$

Nejdříve si odvodíme distribuční funkci exponenciálního rozdělení s parametrem $\sqrt{2}$. Mějme $Y \sim \operatorname{Exp}\left(\sqrt{2}\right)$. Pro $y \in \mathbb{R}$ chceme nalézt

$$
F(y) = \mathsf{P}\left(Y \leq y\right) = \int_{-\infty}^{y} g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{y} \sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}\,x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\, dx.
$$

Pro $y \leq 0$ je zřejmé, že $F(y) = 0$. Tedy pro $y > 0$ máme

$$
F(y) = \int_{0}^{y} \sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}\,x}\, dx = 1 - e^{-\sqrt{2}y},
$$

kde jsme využili substituci $t := -\sqrt{2}x$. Celkem dostáváme, že distribuční funkce exponenciálního rozdělení s parametrem $\sqrt{2}$ je

$$
F(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ 1 - e^{-\sqrt{2}y}, & y > 0. \end{cases}
$$

Budeme chtít ukázat, že pro $x > 0$ platí

$$
\mathsf{P}\left(w_b \geq x\right) = 1 - \mathsf{P}(w_b \leq x) = e^{-\sqrt{2}x},
$$

neboť exponenciální rozdělení je absolutně spojité vůči Lebesgueově míře.

Rovněž budeme potřebovat distribuční funkci $F$ dvojitého exponenciálního rozdělení s parametrem $\sqrt{2}$. Hledáme tedy

$$
F(x) = \mathsf{P}\left(X_1 \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.
$$

Pro $x < 0$ :

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-\sqrt{2}\,|t|}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{\sqrt{2}\,t}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\sqrt{2}\,x} e^{u}\, du = \frac{1}{2}\, e^{\sqrt{2}\,x},
\end{aligned}
$$

kde jsme ve čtvrté rovnosti využili substituci $u := \sqrt{2}\, t$.

Pro $x \geq 0$ :

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-\sqrt{2}\,|t|}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{2}\,t}\, dt + \int_{0}^{x} e^{-\sqrt{2}\,t}\, dt\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \int_{0}^{x} e^{-\sqrt{2}\,t}\, dt\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2}\,x}^{0} e^{u}\, du\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - e^{-\sqrt{2}\,x}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2}\, e^{-\sqrt{2}\,x},
\end{aligned}
$$

kde jsme ve čtvrté rovnosti využili substituci $u := -\sqrt{2}\,t$.

Celkově dostáváme, že distribuční funkce dvojitého exponenciálního rozdělení s parametrem $\sqrt{2}$ je

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, e^{\sqrt{2}\,x}, & x < 0, \\ \\ 1 - \frac{1}{2}\, e^{-\sqrt{2}\,x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Potom pro $x \geq 0$ také $\mathsf{P}\left(X_i \geq x\right) = 1 - \mathsf{P}\left(X_i \leq x\right) = 1 - F(x) = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{2}x}$, neboť dvojité exponenciální rozdělení je absolutně spojité vůči Lebesgueově míře.

Nechť $x > 0$. Podle věty o celkové pravděpodobnosti (Dupač a Hušková [11, věta 1.3, str. 11]) máme pro nějaký čas $t \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{P}\left(w_b \geq x, \tau_b \leq t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(S_n - b \geq x, n = \tau_b \leq t\right) =: \sum_{n=0}^{\infty} p_n, \tag{3.1}$$

kde jsme využili definici překročení $w_b$ hodnoty $b$.

Nyní se pojďme podrobněji podívat na pravděpodobnost $p_n$. Je-li $n = \tau_b \leq t$, pak skoro jistě

$$S_{n-1}^* := \max_{0 \leq i \leq n-1} S_i < b,$$

jak můžeme vidět například i na obrázku 3.2. Potom

$$\begin{aligned} p_n &= \mathsf{P}\left(S_n - b \geq x, n = \tau_b \leq t\right) \\ &= \mathsf{P}\left(S_{n-1}^* < b, S_n - b \geq x, n = \tau_b \leq t\right) \\ &= \mathsf{P}\left(S_{n-1}^* < b, S_n \geq b + x, n = \tau_b \leq t\right). \end{aligned}$$

Nyní pomocí Billingsley [13, tvrzení 34.4, str. 448] máme

$$p_n = \mathbb{E}\left[\mathsf{P}\left(S_{n-1}^* < b, S_n \geq b + x, n = \tau_b \leq t \mid \mathcal{F}_{n-1}, \tau_b = n\right)\right],$$

kde $\mathcal{F}_{n-1}$ je $\sigma$-algebra generovaná náhodnými veličinami $X_1, \ldots, X_{n-1}$, neboli $\mathcal{F}_{n-1} = \sigma\left(X_1, \ldots, X_{n-1}\right)$. Využitím [2, věta VI.1.13, str. 335] dostaneme

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{E}\left[\mathsf{P}\left(S_n \geq b + x \mid \mathcal{F}_{n-1}, \tau_b = n\right) \mathbb{1}_{[S_{n-1}^* < b,\, n = \tau_b \leq t]}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathsf{P}\left(X_n \geq b + x - X_1 - X_2 - \cdots - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}, \tau_b = n\right) \mathbb{1}_{[S_{n-1}^* < b,\, n = \tau_b \leq t]}\right], \end{aligned}$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili vztahu $S_n = S_{n-1} + X_n$. Potom pomocí $\mathsf{P}\left(X_n \geq x\right) = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{2}x}$ dostaneme

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2} e^{-\sqrt{2}(b + x - X_1 - X_2 - \cdots - X_{n-1})} \mathbb{1}_{[S_{n-1}^* < b,\, n = \tau_b \leq t]}\right] \\ &= e^{-\sqrt{2}x}\, \mathbb{E}\left[\frac{1}{2} e^{-\sqrt{2}(b - X_1 - X_2 - \cdots - X_{n-1})} \mathbb{1}_{[S_{n-1}^* < b,\, n = \tau_b \leq t]}\right] \\ &= e^{-\sqrt{2}x}\, \mathbb{E}\left[\mathsf{P}\left(X_n > b - X_1 - X_2 - \cdots - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}, \tau_b = n\right) \mathbb{1}_{[S_{n-1}^* < b,\, n = \tau_b \leq t]}\right] \\ &= e^{-\sqrt{2}x}\, \mathbb{E}\left[\mathsf{P}\left(S_n > b \mid \mathcal{F}_{n-1}, \tau_b = n\right) \mathbb{1}_{[S_{n-1}^* < b,\, n = \tau_b \leq t]}\right] \\ &= e^{-\sqrt{2}x}\, \mathsf{P}\left(S_{n-1}^* < b, S_n > b, n = \tau_b \leq t\right) \\ &= e^{-\sqrt{2}x}\, \mathsf{P}\left(S_n - b > 0, n = \tau_b \leq t\right). \end{aligned}$$

Pro $x > 0$ tedy máme

$$p_n = e^{-\sqrt{2}x}\,\mathsf{P}\left(S_n - b > 0, n = \tau_b \leq t\right).$$

Nyní vyjádřenou pravděpodobnost $p_n$ dosadíme nazpět do rovnice (3.1) a získáme

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(w_b \geq x, \tau_b \leq t\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{2}x}\,\mathsf{P}\left(S_n - b > 0, n = \tau_b \leq t\right) \\
&= e^{-\sqrt{2}x} \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(S_n - b > 0, n = \tau_b \leq t\right) \\
&= e^{-\sqrt{2}x}\,\mathsf{P}\left(S_{\tau_b} - b > 0, \tau_b \leq t\right) \\
&= e^{-\sqrt{2}x}\,\mathsf{P}\left(S_{\tau_b} > b, \tau_b \leq t\right), \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

kde jsme ve třetí rovnosti využili opět větu o celkové pravděpodobnosti [11, věta 1.3, str. 11]. Jelikož čas $\tau_b$ je skoro jistě konečný, tak limitním přechodem pro $t \to \infty$ z (3.2) dostaneme

$$\mathsf{P}\left(w_b \geq x\right) = e^{-\sqrt{2}x}\,\mathsf{P}\left(S_{\tau_b} > b\right).$$

Jak jsme si dříve rozmysleli, tak $S_{\tau_b} > b$ s.j. Proto

$$\mathsf{P}\left(w_b \geq x\right) = e^{-\sqrt{2}x}$$

a náhodná veličina $w_b$ má exponenciální rozdělení s parametrem $\sqrt{2}$.

Z rovnosti (3.2) pro $S_{\tau_b} > b$ s.j. také máme

$$\mathsf{P}\left(w_b \geq x, \tau_b \leq t\right) = e^{-\sqrt{2}x}\,\mathsf{P}\left(\tau_b \leq t\right) = \mathsf{P}\left(w_b \geq x\right)\mathsf{P}\left(\tau_b \leq t\right).$$

Náhodné veličiny $w_b$ a $\tau_b$ jsou tedy nezávislé.

$\square$

Nyní se budeme věnovat tomu, co se stane v čase $\tau_b$, tj. v čase, kdy náhodná procházka poprvé překročí hodnotu $b \geq 0$. Pro nějaké $x < b$ a pro jev $[\tau_b < N]$ se podíváme, co se stane s pravděpodobností $\mathsf{P}\left(S_N < x \mid \mathcal{F}_{\tau_b}\right)$, kde $\mathcal{F}_{\tau_b} \subset \mathcal{F}$, tj. taková $\sigma$-algebra, že

$$\mathcal{F}_{\tau_b} = \left\{\mathsf{F} \in \mathcal{A} : \mathsf{F} \cap [\tau_b \leq t] \in \mathcal{F}_t, \forall\, t \in \mathbb{N}\right\}.$$

$\mathcal{F}_{\tau_b}$ tedy obsahuje obsahuje všechny informace dostupné do času $\tau_b$, včetně hodnoty $S_{\tau_b}$.

Po $\tau_b$ krocích se můžeme na náhodnou procházku podívat znovu jako na „novou“ náhodnou procházku, která představuje náhodný proces $\{S_n\}_{n \geq \tau_b}$. Je-li $N > \tau_b$, pak celková hodnota $S_N$ může být vyjádřena jako součet hodnoty $S_{\tau_b}$ v náhodném času zastavení $\tau_b$ a součtu všech následných kroků od $\tau_b + 1$ do $N$ :

$$S_{\tau_b} + \sum_{i=\tau_b+1}^{N} X_i = S_{\tau_b} + \sum_{i=1}^{N} X_i - \sum_{i=1}^{\tau_b} X_i = S_{\tau_b} + S_N - S_{\tau_b} = S_N.$$

Tedy po $\tau_b$ krocích se můžeme na náhodnou procházku podívat jako na dva oddělené procesy: před časem zastavení a po něm.

Nechť $\tau_b = j$ pro nějaké $1 \leq j \leq N$ a $w_b = w$ pro nějaké $w > 0$. Potom potřebujeme $N - j$ kroků abychom se dostali z hodnoty $b + w$ pod hodnotu $x$. Z toho dostáváme

$$\mathsf{P}\left(S_N < x \mid \tau_b = j, S_1 = s_1, \ldots, S_{j-1} = s_{j-1}, S_j = b + w\right) = F_{N-j}\left(x - (b + w)\right), \tag{3.3}$$

kde $F_n(x)$ je distribuční funkce $F_n(x) = \mathsf{P}\left(S_n \leq x\right)$. Výraz na levé straně rovnosti (3.3) je taková funkce proměnných $j, s_1, \ldots, s_{j-1}, b$ a $w$, že skoro jistě platí

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(S_N < x \mid \tau_b = \cdot\,, S_1 = \cdot\,, \ldots, S_{j-1} = \cdot\,, S_j = \cdot\,)\,(\tau_b, S_1, \ldots, S_{j-1}, S_j)\\ &\qquad = \mathsf{P}\left(S_N < x \mid \mathcal{F}_{\tau_b}\right).\end{aligned}$$

Vzorec (3.3) platí, neboť

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(S_N < x \mid \tau_b = j, S_1 = s_1, \ldots, S_{j-1} = s_{j-1}, S_j = b + w)\\ &= \mathsf{P}\left(S_j + \sum_{i=j+1}^{N} X_i < x \mid \tau_b = j, S_1 = s_1, \ldots, S_{j-1} = s_{j-1}, S_j = b + w\right)\\ &= \mathsf{P}\left(b + w + \sum_{i=j+1}^{N} X_i < x \mid \tau_b = j, S_1 = s_1, \ldots, S_{j-1} = s_{j-1}, S_j = b + w\right)\\ &= \mathsf{P}\left(\sum_{i=j+1}^{N} X_i < x - (b + w) \mid \tau_b = j, S_1 = s_1, \ldots, S_{j-1} = s_{j-1}, S_j = b + w\right)\\ &= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{N-j} < x - (b + w) \mid \tau_b = j, S_1 = s_1, \ldots, S_{j-1} = s_{j-1}, S_j = b + w\right)\\ &= F_{N-j}\left(x - (b + w)\right)\end{aligned}$$

Náhodná veličina $\sum_{i=j+1}^{N} X_i$ má stejné rozdělení jako $S_{N-j} = \sum_{i=1}^{N-j} X_i$, tj. jejich distribuční funkce jsou stejné, neboť $X_i, i \in \mathbb{N}$, jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny a obě řady jsou přes $N - j$ kroků.

Díky symetrii rozdělení platí, že

$$F_{N-j}\left(x - (b + w)\right) = F'_{N-j}\left(-(x - (b + w))\right) = F'_{N-j}\left(b - x + w\right),$$

kde $F'_n(x) = 1 - F_n(x) = \mathsf{P}\left(S_n > x\right)$. Tedy rovnost (3.3) můžeme přepsat jako

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(S_N < x \mid \tau_b = j, S_1 = s_1, \ldots, S_{j-1} = s_{j-1}, S_j = b + w)\\ &\qquad = F_{N-j}\left(x - (b + w)\right) = F'_{N-j}(b - x + w).\end{aligned}$$

Tím dostáváme

$$\mathsf{P}\left(S_N < x \mid \tau_b = j, S_1 = s_1, \ldots, S_{j-1} = s_{j-1}, S_j = b + w\right) = F'_{N-j}(b - x + w). \tag{3.4}$$

Zintegrujeme-li obě strany rovnosti (3.4) přes množinu $\{\tau_b < N\}$, dostaneme podle Kumar a Maheswaran [3, str. 35]

$$\mathsf{P}\left(S_N < x, \tau_b < N\right) = \sum_{j=1}^{N-1} \int_0^{\infty} F'_{N-j}\left(b - x + w\right) \mathsf{P}\left(\tau_b = j\right) f_{w_b}(w)\, dw. \tag{3.5}$$

Jelikož autoři tento integrační přechod uvádí bez vysvětlení, ukážeme si podrobnější postup k získání dané rovnosti.

Nejdříve výraz na levé straně rovnosti (3.5). Podle věty o celkové pravděpodobnosti (Dupač a Hušková [11, věta 1.3, str. 11]) máme

$$\mathsf{P}\left(S_N < x, \tau_b < N\right) = \sum_{j=1}^{N-1} \mathsf{P}\left(S_N < x, \tau_b = j\right). \tag{3.6}$$

Každou pravděpodobnost $\mathsf{P}\left(S_N < x, \tau_b = j\right)$ můžeme pak přepsat pomocí podmíněné pravděpodobnosti jako

$$\int_0^\infty \mathsf{P}\left(S_N < x \mid \tau_b = j, w_b = w\right) \mathsf{P}\left(\tau_b = j\right) f_{w_b|\tau_b=j}(w)\, dw,$$

kde $\mathsf{P}\left(S_N < x \mid \tau_b = j, w_b = w\right)$ je funkce proměnných $j, w_b$ taková, že

$$\mathsf{P}\left(S_N < x \mid \tau_b = \cdot\,, w_b = \cdot\,\right)(\tau_b, w_b) = \mathsf{P}\left(S_N < x \mid \tau_b, w_b\right) \quad \text{s.j.}$$

Díky nezávilosti $\tau_b$ a $w_b$ dostaneme: $f_{w_b|\tau_b=j}(w) = f_{w_b}(w)$.

Tedy

$$\mathsf{P}\left(S_N < x, \tau_b = j\right) = \int_0^\infty \mathsf{P}\left(S_N < x \mid \tau_b = j, w_b = w\right) \mathsf{P}\left(\tau_b = j\right) f_{w_b}(w)\, dw. \tag{3.7}$$

Nyní se podívejme na $\mathsf{P}\left(S_N < x \mid \tau_b = j, w_b = w\right)$ :

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(S_N < x \mid \tau_b = j, w_b = w\right) &= \mathsf{P}\left(S_{\tau_b} + \sum_{i=\tau_b+1}^{N} X_i < x \mid \tau_b = j, w_b = w\right) \\
&= \mathsf{P}\left(w_b + b + \sum_{i=\tau_b+1}^{N} X_i < x \mid \tau_b = j, w_b = w\right) \\
&= \mathsf{P}\left(w + b + \sum_{i=j+1}^{N} X_i < x \mid \tau_b = j, w_b = w\right) \\
&= \mathsf{P}\left(\sum_{i=j+1}^{N} X_i < x - (b+w) \mid \tau_b = j, w_b = w\right) \\
&= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{N-j} X_i < x - (b+w) \mid \tau_b = j, w_b = w\right) \\
&= F_{N-j}\left(x - (b+w)\right) = F'_{N-j}(b - x + w).
\end{aligned}$$

Dosadíme-li tento vztah do rovnosti (3.7), získáme

$$\mathsf{P}\left(S_N < x, \tau_b = j\right) = \int_0^\infty F'_{N-j}(b - x + w) \mathsf{P}\left(\tau_b = j\right) f_{w_b}(w)\, dw.$$

Dosazení vyjádřené pravděpodobnosti $\mathsf{P}\left(S_N < x, \tau_b = j\right)$ do rovnosti (3.6) nám dá požadovanou rovnost (3.5).

**Tvrzení 8** (Kumar a Maheswaran [3, str. 35])**.** *Pro $N \geq 2$ a pro $x < b, b \geq 0$, platí*

$$\mathsf{P}\left(S_N < x, \tau_b < N\right) = 2\,\mathbb{E}\left[F'_N\left(u + w^*\right)\right] - F'_N(u), \tag{3.8}$$

*kde $u = 2\,b - x$ a $w^* \sim Exp\left(\sqrt{2}\right)$.*

Než tvrzení dokážeme, připomeňme definici vytvořující funkce náhodné veličiny, která bude klíčová pro důkaz tvrzení 8. Následující definice je převzata z [4, str. 143].

**Definice 11.** Nechť $\{a_n\} = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže mocninná řada $A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n$ konverguje pro $|s| < s_0$ pro nějaké $s_0 > 0$, potom $A(s)$ nazveme *vytvořující funkcí* posloupnosti $\{a_n\}$.

Nechť $X$ je nezáporná celočíselná náhodná veličina s rozdělením $\{p_n, n \in \mathbb{N}\}$, kde $p_n = \mathsf{P}(X = n)$. Vytvořující funkci posloupnosti $\{p_n\}$ nazýváme *vytvořující funkcí náhodné veličiny* $X$, značíme $P(s)$, nebo přesněji $P_X(s)$. Platí

$$P_X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n = \mathbb{E}\left[s^X\right],$$

pro $s \in \mathbb{R}$, pro které mocninná řada konverguje.

$P_X$ jednoznačně určuje rozdělení náhodné veličiny $X$ (viz [14, str. 150]).

*Důkaz.* Ukážeme, že vytvořující funkce výrazu na pravé straně rovnosti (3.5) a vytvořující funkce výrazu na pravé straně rovnosti (3.8) chápaných jako posloupnosti v $N$ jsou identické. Tvrzení pak již bude platit díky jednoznačnosti vytvořující funkce.

Vytvořující funkce výrazu na pravé straně rovnosti (3.5) je

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} s^n \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^{\infty} F'_{n-j}(b-x+w)\mathsf{P}(\tau_b = j)\, f_{w_b}(w)\, dw \\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^{\infty} s^n F'_{n-j}(b-x+w)\mathsf{P}(\tau_b = j)\, f_{w_b}(w)\, dw \\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^{\infty} s^{n-j} s^j F'_{n-j}(b-x+w)\mathsf{P}(\tau_b = j)\, f_{w_b}(w)\, dw. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Položme $k := n - j$, potom v rovnosti (3.9) z množiny indexů obou součtů $\{n \geq 1,\, 1 \leq j \leq n-1\}$ dostaneme množinu indexů $\{j \geq 1, k \geq 1\}$. Máme tak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{P}(S_n < x, \tau_b < n) &= \sum_{j=1}^{\infty} s^j \mathsf{P}(\tau_b = j) \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} s^k F'_k(b-x+w) f_{w_b}(w)\, dw \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} s^j \mathsf{P}(\tau_b = j) \int_0^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} s^k F'_k(b-x+w) \right) f_{w_b}(w)\, dw. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Chceme ukázat, že výraz (3.10) se rovná vytvořující funkci výrazu na pravé straně rovnosti (3.8).

Vytvořující funkce výrazu na pravé straně rovnosti (3.8) je

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} s^n \left(2\,\mathbb{E}\left[F'_n(u+w^*)\right] - F'_n(u)\right) \\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \left( 2 \int_0^{\infty} F'_n(u+w) f_{w^*}(w)\, dw - F'_n(u) \right) \\
&\quad = 2 \left( \int_0^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} s^n F'_n(u+w) \right) f_{w^*}(w)\, dw \right) - \sum_{n=1}^{\infty} s^n F'_n(u). \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Než ukážeme, že výrazy (3.10) a (3.11), konvergující pro $|s| < 1$, si jsou rovny, budeme potřebovat:

(i) vytvořující funkci $F_n'(x)$, tj. pro $x > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n F_n'(x),$$

kde $F_n'(x) = 1 - F_n(x) = \mathsf{P}\left(S_n > x\right)$;

(ii) vytvořující funkci náhodného času zastavení $\tau_b$, tj. pro $b \geq 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} s^j \mathsf{P}\left(\tau_b = j\right).$$

Ad (i): Nechť $f_n(x)$ je hustota $S_n$ pro $n \geq 1$ taková, že

$$f_n(x) = \frac{d}{dx} F_n(x) = \frac{d}{dx} \mathsf{P}\left(S_n \leq x\right).$$

Zejména pak pro $S_1 = X_1$ máme

$$f_1(x) = \frac{\beta}{2} e^{-\beta|x|}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\beta = \sqrt{2}$. Nyní spočteme charakteristickou funkci náhodné veličiny $X_1$, tj.

$$\widehat{P}_1(t) = \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}tX_1}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}tx} \frac{\beta}{2} e^{-\beta|x|}\, dx.$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \widehat{P}_1(t) &= \frac{\beta}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{\mathrm{i}tx} e^{\beta x}\, \mathrm{d}x + \int_0^{\infty} e^{\mathrm{i}tx} e^{-\beta x}\, dx\right) \\ &= \frac{\beta}{2}\left(\frac{1}{\beta - \mathrm{i}t} + \frac{1}{\beta + \mathrm{i}t}\right) = \frac{\beta^2}{\beta^2 + t^2}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

neboť $\int_{-\infty}^{0} e^{\mathrm{i}tx} e^{\beta x}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x(\beta+\mathrm{i}t)}\, dx$ a označíme-li $f_n^1(x) := e^{x(\beta+\mathrm{i}t)} \mathbb{1}_{(-n,0)}(x)$, pak $f_n^1(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{x(\beta+\mathrm{i}t)} \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) =: f^1(x)$, pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Také platí $|f_n^1(x)| = \left|e^{\beta x} e^{\mathrm{i}tx} \mathbb{1}_{(-n,0)}(x)\right| \leq e^{\beta x}$ a $\int_{-\infty}^{0} e^{\beta x}\, dx < +\infty$, tj. $e^{\beta x}$ je integrovatelná majoranta. Podle Lebesgueovy věty [15, věta 8.13, str. 34] máme

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} e^{x(\beta+\mathrm{i}t)}\, dx &= \int_{-\infty}^{0} \lim_{n\to\infty} f_n^1(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{0} f_n^1(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{0} f^1(x)\, dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{0} e^{x(\beta+\mathrm{i}t)}\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\beta+\mathrm{i}t}\left(1 - e^{-n(\beta+\mathrm{i}t)}\right) = \frac{1}{\beta+\mathrm{i}t}. \end{aligned}$$

Analogicky pro $f_n^2(x) := e^{-x(\beta+\mathrm{i}t)} \mathbb{1}_{(0,n)}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-x(\beta+\mathrm{i}t)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) =: f^2(x)$, pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|f_n^2(x)| \leq e^{-\beta x}$, bychom ukázali, že

$$\int_0^{\infty} e^{-x(\beta-\mathrm{i}t)}\, dx = \frac{1}{\beta - \mathrm{i}t}.$$

Budeme chtít využít větu o inverzním vzorci (viz [7, věta 16.2, str. 93]). Nejdříve tedy přepoklady věty. Chceme ukázat, že

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{P}_1(t) \right| dt < \infty.$$

Pro $\beta > 0$ máme

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\beta^2}{\beta^2 + t^2} \right| dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\beta^2}{\beta^2 + t^2} \, dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\beta}{1 + u^2} \, du = \beta\pi < \infty,$$

kde jsme využili substituci $u := \frac{t}{\beta}$ a známý integrál $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \pi$. Tedy podle věty Lachout [7, věta 16.2, str. 93] pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $\beta > 0$ platí

$$\frac{\beta}{2} e^{-\beta|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}tx} \widehat{P}_1(t) \, dt. \tag{3.13}$$

Nyní nás bude zajímat vytvořující funkce charakteristické funkce $S_n$, tj.

$$\widehat{P}(s; t) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \, \mathbb{E}\left[ e^{\mathrm{i}tS_n} \right].$$

Nejdříve charakteristická funkce $S_n$:

$$\widehat{P}_n(t) = \mathbb{E}\left[ e^{\mathrm{i}tS_n} \right] = \left( \mathbb{E}\left[ e^{\mathrm{i}tX_1} \right] \right)^n = \left( \frac{\beta^2}{\beta^2 + t^2} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili toho, že $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ je posloupnost nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin. Z toho dostáváme vytvořující funkci

$$\widehat{P}(s; t) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \left( \frac{\beta^2}{\beta^2 + t^2} \right)^n.$$

Označme $\gamma := \frac{\beta^2}{\beta^2+t^2}$, potom

$$\widehat{P}(s; t) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \gamma^n = \sum_{n=1}^{\infty} (s\gamma)^n = \frac{s\gamma}{1 - s\gamma}, \quad |s\gamma| \le 1.$$

Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} \widehat{P}(s; t) &= \frac{s\beta^2}{\beta^2 + t^2} \frac{1}{1 - \frac{s\beta^2}{\beta^2+t^2}} = \frac{s\beta^2}{\beta^2 + t^2} \frac{\beta^2 + t^2}{\beta^2(1 - s) + t^2} = \frac{s\beta^2}{\beta^2(1 - s) + t^2} \\ &= \frac{s\beta^2}{\beta^2(1 - s)} \frac{\beta^2(1 - s)}{\beta^2(1 - s) + t^2} = \frac{s}{1 - s} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

kde $\lambda^2 := \beta^2(1 - s)$.

V (3.13) jsme si rozmysleli, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $\beta > 0$ platí

$$\frac{\beta}{2} e^{-\beta|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}tx} \widehat{P}_1(t) \, dt.$$

Analogicky pro (3.14) platí

$$\frac{s}{1 - s} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}tx} \widehat{P}(s; t) \, dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\, \lambda > 0.$$

Tudíž vytvořující funkce hustoty $S_n$ je

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n f_n(x) = \frac{s}{1-s}\,\frac{\lambda}{2}\, e^{-\lambda|x|}. \tag{3.15}$$

Nyní pro $y > 0$ najdeme vytvořující funkci $F'_n(y)$. Označme hledanou vytvořující funkci jako $\widehat{P}_{F'}$. Tedy pro $y > 0$ hledáme

$$\widehat{P}_{F'}(s;y) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n F'_n(y).$$

Jelikož $F'_n(y) = \mathsf{P}\left(S_n > y\right)$, pro $y > 0$ máme

$$\begin{aligned}
\widehat{P}_{F'}(s;y) &= \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_y^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_y^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} s^n f_n(x) \right) dx \\
&= \int_y^{\infty} \frac{s}{1-s}\,\frac{\lambda}{2}\, e^{-\lambda|x|}\,dx = \frac{s}{1-s}\,\frac{\lambda}{2} \int_y^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx \\
&= \frac{s}{1-s}\,\frac{1}{2}\, e^{-\lambda y},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

kde jsme ve třetí rovnosti využili (3.15), v páté rovnosti substituci $t := -\lambda x$ a $\lambda = \beta\sqrt{1-s}$.

V rovnostech (3.10), (3.11) a (3.16) jsme využili toho, že distribuční funkce a hustota jsou nezáporné měřitelné a omezené funkce, $|s| < 1$ a [15, věta 8.14, str. 34] pro integrovatelnou majorantu $g(\omega) = 1$.

Ve výrazu na pravé straně rovnosti (3.10) také potřebujeme zjistit, čemu se rovná

$$\int_0^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} s^k F'_k(b-x+w) \right) f_{w_b}(w)\,dw.$$

Pomocí rovnosti (3.16) a $w_b \sim \mathrm{Exp}(\beta)$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} s^k F'_k(b-x+w) \right) f_{w_b}(w)\,dw &= \int_0^{\infty} \left( \frac{s}{1-s}\,\frac{1}{2}\, e^{-\lambda(b-x+w)} \right) \beta e^{-\beta w}\,dw \\
&= \frac{s}{1-s}\,\frac{e^{-\lambda(b-x)}}{2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda w} \beta e^{-\beta w}\,dw \\
&= \frac{\beta}{2}\,\frac{s}{1-s}\, e^{-\lambda(b-x)} \int_0^{\infty} e^{-w(\lambda+\beta)}\,dw \\
&= \frac{\beta}{2}\,\frac{s}{1-s}\, e^{-\lambda(b-x)}\,\frac{1}{\lambda+\beta} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{s}{1-s}\,\frac{1}{\sqrt{1-s}+1}\, e^{-\beta\sqrt{1-s}(b-x)},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

kde jsme ve čtvrté rovnosti využili substituci $t := -w(\lambda + \beta)$.

Ad (ii): K nalezení vytvořující funkce náhodného času zastavení $\tau_b$ musíme zkoumat chování náhodné procházky do chvíle, než vstoupí do intervalu $(b, +\infty)$ pro nějaké $b \geq 0$. K tomu můžeme využít metodu z Feller [16, sekce 18.1] a dostaneme

$$\sum_{j=1}^{\infty} s^j \mathsf{P}\left(\tau_b = j\right) = e^{-\beta b\sqrt{1-s}} \left(1 - \sqrt{1-s}\right), \quad b \geq 0. \tag{3.18}$$

Spojíme-li nyní rovnice (3.17) a (3.18), získáme pravou stranu rovnice (3.10) a také

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} s^j \,\mathsf{P}\left(\tau_b = j\right) \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} s^k F_k'(b-x+w)\right) f_{w_b}(w)\, dw \\
&= e^{-\beta b\sqrt{1-s}} \left(1-\sqrt{1-s}\right) \frac{1}{2} \frac{s}{1-s} \frac{1}{\sqrt{1-s}+1} e^{-\beta\sqrt{1-s}(b-x)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{s}{1-s} \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}}\, e^{-\beta u\sqrt{1-s}},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

kde $u := 2b - x$.

Zbývá jen ukázat, že výraz na pravé straně rovnosti (3.11) je roven výrazu na pravé straně rovnosti (3.19).

Vraťme se tedy k výrazu na pravé straně rovnosti (3.11).

$$\begin{aligned}
2\left(\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} s^n F_n'(u+w)\right) f_{w^*}(w)\, dw\right) - \sum_{n=1}^{\infty} s^n F_n'(u) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\frac{s}{1-s}\, e^{-\beta u\sqrt{1-s}} \left(\frac{1}{1+\sqrt{1-s}}\right)\right) - \frac{s}{1-s}\frac{1}{2}\, e^{-\beta u\sqrt{1-s}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{s}{1-s}\, e^{-\beta u\sqrt{1-s}} \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-s}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{s}{1-s}\, e^{-\beta u\sqrt{1-s}}\, \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}},
\end{aligned} \tag{3.20}$$

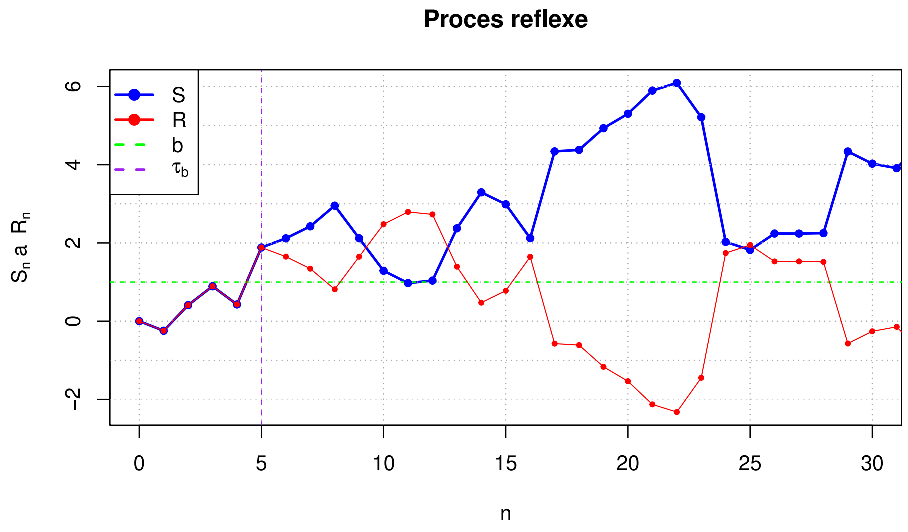
kde jsme v první rovnosti využili (3.17) a (3.16), tj.

$$\begin{aligned}
(3.17): &\quad \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} s^k F_n'(u+w)\right) f_{w_b}(w)\, dw = \frac{1}{2}\frac{s}{1-s}\frac{1}{1+\sqrt{1-s}}\, e^{-\beta u\sqrt{1-s}}, \\
(3.16): &\quad \sum_{n=1}^{\infty} s^n F_n'(u) = \frac{s}{1-s}\frac{1}{2}\, e^{-\beta u\sqrt{1-s}}.
\end{aligned}$$

Tedy výrazy na pravých stranách rovností (3.20) a (3.19) se rovnají. Tedy se rovnají i výrazy na pravých stranách rovností (3.11) a (3.10). Díky jednoznačnosti vytvořující funkce (viz [14, str. 150]) již platí požadovaná rovnost (3.8).

□

Definujeme-li proces reflexe jako v definici 10, můžeme si zakreslit proces reflexe $R$ jako na obrázku 3.3. Zde, na rozdíl od symetrické jednoduché náhodné procházky z předešlé kapitoly, trajektorie procesu $R$ nevznikne z trajektorie procesu $S$ zrcadlením podle přímky $b$, ale zrcadlením podle přímky $S_{\tau_b}$. To je důsledkem toho, jak jsme si zadefinovali náhodný čas zastavení $\tau_b$.




**Obrázek 3.3** Proces reflexe u exponenciální náhodné procházky.

Pojďme se nyní podívat, jak by vypadala analogie tvrzení 6 pro exponenciální náhodnou procházku.

**Tvrzení 9.** *Nechť $S = \{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ je exponenciální náhodná procházka, $\tau_b$ je pro $b \geq 0$ náhodný čas zastavení a $R = \{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ je proces reflexe takový, že*

$$R_n := S_n \, \mathbb{1}_{[n<\tau_b]} + (2\, S_{\tau_b} - S_n) \, \mathbb{1}_{[n\geq\tau_b]}.$$

*Potom pro $S_n^* := \max\limits_{0\leq i\leq n} S_i$ platí*

$$\mathsf{P}\left(S_n^* \geq b\right) = 2\,\mathsf{P}\left(S_n \geq b\right) = 2\,\mathsf{P}\left(S_n > b\right).$$

*Důkaz.* Podle věty o celkové pravděpodobnosti ([11, věta 1.3, str. 11]) máme

$$\mathsf{P}\left(S_n^* \geq b\right) = \mathsf{P}\left(S_n^* \geq b, S_n \geq b\right) + \mathsf{P}\left(S_n^* \geq b, S_n < b\right).$$

Je-li $S_n \geq b$, pak nutně i $S_n^* \geq b$. Potom tedy platí

$$\mathsf{P}\left(S_n^* \geq b, S_n \geq b\right) = \mathsf{P}\left(S_n \geq b\right).$$

Nastanou-li zároveň jevy $[S_n^* \geq b]$ a $[S_n < b]$, tj. jev $[S_n^* \geq b > S_n]$, pak je tento jev shodný s jevem $[R_n > b]$ (viz obrázek 3.4). Z toho dostáváme

$$\mathsf{P}\left(S_n^* \geq b, S_n < b\right) = \mathsf{P}\left(R_n > b\right) = \mathsf{P}\left(S_n > b\right),$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili tvrzení 5. Celkem dostáváme

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(S_n^* \geq b\right) &= \mathsf{P}\left(S_n^* \geq b, S_n \geq b\right) + \mathsf{P}\left(S_n^* \geq b, S_n < b\right)\\ &= \mathsf{P}\left(S_n \geq b\right) + \mathsf{P}\left(S_n > b\right) = 2\,\mathsf{P}\left(S_n \geq b\right) = 2\,\mathsf{P}\left(S_n > b\right),\end{aligned}$$

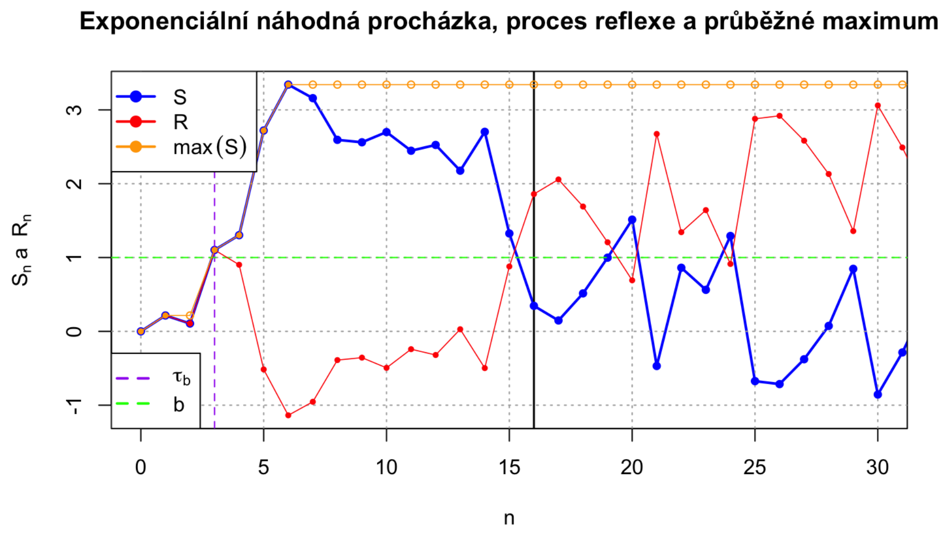
kde jsme využili toho, že náhodná veličina $S_n$ má absolutně spojité rozdělení vůči Lebesgueově míře. To platí, neboť náhodné veličiny $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou stejně rozdělené s absolutně spojitým rozdělením, tedy pro každé $i \in \mathbb{N}$ je distribuční funkce

$F_i$ náhodné veličiny $X_i$ absolutně spojitá. Jelikož jsou náhodné veličiny $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ nezávislé, distribuční funkce $F$ náhodné veličiny $S_n$ je konvolucí distribučních funkcí $F_i$ (viz [10, věta 3.13, str. 55]), tj.

$$F(x) = (F_1 * F_2 * \cdots * F_n)(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Poté podle [10, věta 3.14, str. 55] víme, že distribuční funkce $F$ je absolutně spojitá.

$\square$




**Obrázek 3.4** Proces reflexe u exponenciální náhodné procházky a její průběžné maximum se zvýrazněnými jevy $[S_n^* \geq b, S_n < b]$ a $[R_n > b]$ (černou svislou čarou).

# Závěr

V práci jsme začali připomenutím náhodných procesů a náhodné procházky, obzvlášť symetrické náhodné procházky, kterou jsme se zabývali po zbytku celé práce. V další části jsme si vysvětlili princip reflexe, jenž byl demonstrován na jednoduché symetrické náhodné procházce. V poslední kapitole jsme se věnovali náhodné symetrické procházce s krokem, který měl dvojité exponenciální rozdělení. V druhé a třetí kapitole jsme, mimo jiné, zjistili rozdělení průběžného maxima symetrické náhodné procházky s příslušným krokem.

Princip reflexe nachází široké využití v praxi, například ve financích, pojišťovnictví a biologii. Ve financích se používá při modelování cen akcií a dalších finančních nástrojů, kde pomáhá analyzovat rizika a pravděpodobnosti dosažení určitých cenových hladin (viz Kumar a Maheswaran [3]). V pojišťovnictví je užitečný při výpočtu rizik spojených s pojistnými událostmi. V biologii se princip reflexe uplatňuje při modelování náhodných pohybů organismů nebo šíření nemocí.

# Seznam použité literatury


1. Steele, J. M. *Stochastic Calculus and Financial Applications*. New York: Springer New York, 2001. Druhé opravené vydání. isbn 0-387-95016-8.
2. Štěpán, J. *Teorie pravděpodobnosti*. Praha: Academia, Československá akademie věd, 1987. První vydání.
3. Kumar, D.; Maheswaran, S. A reflection principle for a random walk with implications for volatility estimation using extreme values of asset prices. *Elsevier*. 2014, roč. 38, č. 1, s. 33–44.
4. Lachout, P.; Prášková, Z. *Základy náhodných procesů I*. Praha: MatfyzPress, 2020. Druhé vydání. isbn 978-80-7378-428-7.
5. Lachout, P. *Diskrétní martingaly* [online]. Praha, 2007 [cit. 2024-07-02]. Dostupné z: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~lachout/Vyuka/TEXTY/071023-Diskretni_Martingaly.pdf`.
6. Bhattacharya, R.; Waymire, E. C. *Stationary Processes and Discrete Parameter Markov Processes*. Cham: Springer Cham, 2022. První vydání. isbn 978-3-031-00943-3.
7. Lachout, P. *Teorie pravděpodobnosti*. Praha: Karolinum, 2022. Třetí vydání. isbn 978-80-246-5430-0.
8. Resnick, S. I. *Adventures in Stochastic Processes*. Ithaca: Birkhäuser Boston, 1992. První vydání. isbn 0-8176-3591-2.
9. Norris, J. R. *Markov Chains*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. První vydání. isbn 0-521-48181-3.
10. Dupačová, J.; Hurt, J.; Štěpán, J. *Stochastic Modeling in Economics and Finance*. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2003. isbn 1-4020-0840-6.
11. Dupač, V.; Hušková, M. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Praha: Karolinum, 2013. Druhé upravené vydání. isbn 978-80-246-2208-8.
12. Kou, S.G.; Wang, H. First passage times of a jump diffusion process. *Applied Probability Trust*. 2003, roč. 35, č. 2, s. 504–531.
13. Billingsley, P. *Probability and Measure*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995. Třetí vydání. isbn 0-471-00710-2.
14. Grimmett, G. R.; Stirzaker, D. R. *Probability and Random Processes*. New York: Oxford University Press, 2001. Třetí vydání. isbn 0-19-857222-0.
15. Lukeš, J.; Malý, J. *Measure and Integral*. Praha: MatfyzPress, 2017. Třetí vydání. isbn 978-80-7378-253-5.
16. Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1971. Druhé vydání. isbn 9780471257097.