MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Šlachta

Zákon velkých čísel pro závislé náhodné veličiny

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Děkuji svému vedoucímu, docentu Hlubinkovi, za bezvadné vedení mé práce a za ochotu se mi věnovat nad rámec svých povinností. Při konzultacích jsem neměl dojem, že by existoval špatný dotaz a pod jeho vedením jsem se zas něčemu novému přiučil.

Název práce: Zákon velkých čísel pro závislé náhodné veličiny

Autor: Michal Šlachta

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V předložené práci se věnujeme zákonu velkých čísel. Ty rozlišujeme dva: slabý a silný. Zatímco slabý souvisí s konvergencí v pravděpodobnosti, silný souvisí s konvergencí skoro jistě. Největší část této práce věnujeme porovnání Kolmogorovovy a Etemadiho věty a zejména jejich důkazů. Tyto věty, za odlišných předpokladů na nezávislost, tvrdí to samé. V poslední části práce pak simulujeme data pro vizuální představu Etemadiho věty.

Klíčová slova: Zákony velkých čísel Etemadiho věta Kolmogorovova věta

Title: Law of large numbers for dependent random variables

Author: Michal Šlachta

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In the presented work, we focus on the law of large numbers. We distinguish between two: weak law and strong law. While weak is related to convergence in probability, strong is related to convergence almost surely. We devote the largest part of this work to the comparison of Kolmogorov's and Etemadi's theorems and especially their proofs. These theorems, under different independence conditions, assert the same thing. In the last part of the work, we simulate the data for a visual representation of Etemadi's theorem.

Keywords: Laws of large numbers Etemadi's Theorem Kolmogorov's Theorem

Obsah

Úvod

V této práci se věnujeme zákonu velkých čísel pro celkově nezávislé náhodné veličiny a po dvou nezávislé náhodné veličiny. V první kapitole dáváme ZVČ do historického kontextu a diskutujeme jeho význam. Zároveň zde formulujeme slabý a silný zákon velkých čísel společně s pomocnými lemmaty a větami, které později potřebujeme k důkazu Etamadiho a Kolmogorovovy věty.

Ve druhé kapitole jsou pak rozebírány rozdíly mezi Etemadiho a Kolmogorovovou větou a jejich důkazy. Protože obě věty tvrdí to samé, ale jen Kolmogorovova má podmínku na celkovou nezávislost, je cílem této kapitoly najít tu část důkazu Kolmogorovovy věty pracující s podmínkou celkové nezávislosti, která by Etemadimu nestačila a musel ji tedy nutně obejít. Dále v této kapitole diskutujeme některé zajímavé prvky Etemadiho důkazu.

Ve třetí a poslední kapitole simulujeme ZVČ pro Etemadiho posloupnost na jednoduchém příkladu za cílem vizuální demonstrace platnosti Etemadiho věty.

1. Význam zákonů velkých čísel

1.1 Myšlenka zákonů velkých čísel

Představme si experiment, kdy opakovaně házíme mincí. Vzhledem k tomu, že se jednotlivé hody navzájem neovlivňují, lze výsledky hodů považovat za nezávislé a v tomto případě navíc stejně rozdělené. Označme si nyní ty případy, kdy v hodu padne orel číslem 1 a 0, pokud padne panna. Intuice nám říká, že čím více hodů provedeme, tím více se průměr naházených hodnot bude blížit 1/2. Je ale naše intuice správná? Přesně touto myšlenkou se zabývá zákon velkých čísel.

Tímto fenoménem se poprvé zabýval italský matematik Gerolamo Cardano (1501–1575), který zpozoroval, že se přesnost pozorování zlepšuje se vzrůstajícím počtem pokusů. Cardano toto pozorování ovšem nedokázal a první formulace zákonu velkých čísel se důkazu dočkala až o více než 200 let později v roce 1713 švýcarským matematikem Jacobem Bernoullim (1655–1705). Bernoulli tento zákon formuloval a dokazoval 20 let. Zveřejnění se však dočkal až po jeho smrti, kdy pod názvem „Golden Theorem“ vyšel v jeho knize *Ars Conjectandi*. V knize je pracováno s myšlenkou tahaní míčků dvou různých barev z urny. Bernoulli zde uvádí, že dostatečným počtem vytažení míčků z urny a jejich následným navracením zpět lze dosáhnout libovolně přesného odhadu skutečného poměru mezi jednotlivými barvami míčků. Tato intepretace ZVČ se později začala označovat jako *Bernoulliova věta*. Název Zákon velkých čísel poprvé použil matematik Simeon Denis Poisson v roce 1837.

1.2 Zákony velkých čísel

Ve statistice existují dva typy zákonů velkých čísel a to **silné** a **slabé**. Slabý zákon velkých čísel popisuje konvergenci posloupnosti pravděpodobností, zatímco silný zákon velkých čísel popisuje, jak se posloupnost náhodných veličin chová v limitě Ibe (2014). Pro potřeby této práce bude v budoucích kapitolách třeba následující věta, kterou zde uvedeme i dokážeme dle vzoru Dupač a Hušková (2013)

Definice 1. *Řekneme, že posloupnost stejně rozdělených náhodných veličin* $\{X_i\}_{i=1}^n$ *s výběrovým průměrem* $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ *a střední hodnotou* $\eta < \infty$ *splňuje* ***Slabý zákon velkých čísel****, jestliže platí*

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - \eta| < \epsilon) = 1, \forall \epsilon > 0. \tag{1.1}$$

Definice 2. *Řekneme, že posloupnost stejně rozdělených náhodných veličin* $\{X_i\}_{i=1}^n$ *s výběrovým průměrem* $\overline{X}_n$ *a střední hodnotou* $\eta < \infty$ *splňuje* ***Silný zákon velkých čísel****, jestliže platí*

$$P(\lim_{n\to\infty} |\overline{X}_n - \eta| = 0) = 1. \tag{1.2}$$

Pro tuto práci bude v budoucích kapitolách nutná práce s následující větou, kterou zde i dokážeme po vzoru Dupač a Hušková (2013).

Věta 1 (**Čebyšev**). *Nechť* $\{X_i\}_{i=1}^n$ *je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin s konečným rozptylem, která splňuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{var}(X_i) = 0$$

pak tato posloupnost splňuje ***slabý zákon velkých čísel****.*

Důkaz této věty přímo vyplývá z vlastností Čebyševovy nerovnosti, která pojednává o tom, že pokud je rozptyl malý, pak pravděpodobnost, že je pozorování příliš vzdáleno od střední hodnoty, je malá. Dále je k důkazu také potřeba vlastnost rozptylu sumy, kterou zde, podobně jako Čebyševovu nerovnost, dokazovat nebudeme, ale která plyne přímo z definice rozptylu a vlastností střední hodnoty. Nechť tedy platí

1. Čebyševova nerovnost

$$P(|\mathbf{X} - E(\mathbf{X})| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbf{var(X)}}{\epsilon^2} \tag{1.3}$$

2. Rozptylová vlastnost

$$\mathbf{var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{var} X_i,$$

   kde X_i jsou nezávislé náhodné veličiny.

Důkaz. (Věty 1) Nyní už jen stačí použít Čebyševovu nerovnost a výše zmíněnou vlastnost rozptylu a dostaneme

$$P(|\overline{X}_n - E\overline{X}_n| > \epsilon) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{var} X_i}{n^2 \epsilon^2}$$

což jsme chtěli dokázat.

□

V další části uvádíme příklady posloupností, které, podobně jako u Čebyševa, splňují ZVČ, pouze tentokrát se jedná o silný zákon velkých čísel. Autory těchto vět jsou matematici moderní doby Andrej N. Kolmogorov a Nasrollah Etemadi. V dalších kapitolách této práce se pak budeme zabývat rozdíly v důkazech, způsobených odlišnými předpoklady.

Věta 2 (**Etemadiho**). *Každá posloupnost* $\{X_i\}_{i=1}^n$ *reálných, integrovatelných, stejně rozdělených a po dvou nezávislých náhodných veličin splňuje* ***silný zákon velkých čísel****.*

Lze si všimnout, že podmínku po dvou nezávislých veličin lze zesílit na celkovou nezávislost posloupnosti náhodných veličin, čímž se zeslabuje znění věty. Tato věta má podobu Kolmogorovova zákonu velkých čísel.

Věta 3 (**Kolmogorovův zákon velkých čísel**). *Každá posloupnost* $\{X_i\}_{i=1}^n$ *nezávislých, stejně rozdělených, integrovatelných reálných náhodných veličin splňuje* ***silný zákon velkých čísel****.*

2. Srovnání Etemadiho a Kolmogorovovy věty

V úvodu této práce jsme se zabývali rozdílem mezi Etemadiho a Kolmogorovovými podmínkami pro posloupnosti splňující zákon silných čísel. V této kapitole se budeme zabývat důkazem Kolmogorovovy věty a následným zkoumáním rozdílností mezi tímto důkazem a důkazem Etemadiho věty, která vyžaduje pouze nezávislost po dvou. Předmětem této kapitoly je, kromě porovnání těchto důkazů, zejména nalezení té části důkazu Kolmogorovovy věty, která vyžaduje celkovou nezávislost posloupnosti $\{X_n\}_n$ a podmínka pouhé nezávislosti po dvou by v tomto smyslu neobstála. V obou důkazech je velmi nezbytný Borelův-Cantelliův 0-1 zákon. Tento zákon pracuje s nezávislými jevy a ekvivalencí. Později byl ovšem doplněn Erdös a Rényi (1959), kteří jej jako první zformulovali pouze s předpokladem na nezávislost po dvou, hodící se později v důkazu Etamadiho věty, ovšem jejich zákon zaručuje pouze jednostrannou implikaci.

Lemma 4 (**Borelův-Cantelliův 0-1 zákon**). *Nechť $A_n \in \mathcal{A}$ jsou náhodné jevy, pak platí následující ekvivalence*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty \Leftrightarrow P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1,$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty \Leftrightarrow P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0,$$

kde

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k.$$

2.1 Důkaz Kolmogorovovy věty

Jak bylo zmíněno na konci předchozí kapitoly, při zesílení podmínek na celkovou nezávislost posloupnosti náhodných veličin $\{X_n\}_n$ dostáváme formulaci Kolmogorovova zákona velkých čísel. Ačkoliv bylo znění věty převzato z Bauer (1996), pro práci s důkazem budeme pracovat s knihou Teorie pravděpodobnosti Lachout (2022), který jej na rozdíl od Bauera uvádí. Znění z této knihy je následující:

Věta 5. *Pro posloupnost $\{X_n\}_n$ nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin je ekvivalentní*

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < +\infty\right) > 0 \Leftrightarrow X_1 \in \mathbb{L}_1 \ a\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} E(X_1).$$

Všimněme si ovšem mírně rozdílných předpokladů na posloupnost $\{X_n\}_n$ mezi Lachoutovou a Bauerovou formulací. Bauer ve své monografii již předpokládá integrovatelnost náhodných veličin $\{X_n\}_n$, tedy $X_i \in \mathbb{L}_1$. V důkazu se tedy budeme zabývat tou částí, kdy ověřujeme konvergenci výběrového průměru ke střední hodnotě. Důkaz k této větě bude mít strukturovanou podobu za použití pomocných lemmatů.

Důkaz. (Kolmogorovova ZVČ)

1. Náhodná veličina X_n je ořezána o vysoké hodnoty, v tomto případě jejich pominutím následující posloupností:

$$Y_n = \begin{cases} X_n, & \text{pokud } |X_n| < n,\ n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Touto transformací již obecně ztrácíme stejné rozdělení. Náhodné veličiny Y_n mají ale konečný rozptyl na rozdíl od původních X_n, které tuto vlastnost nemusí splňovat, jelikož rozdělení Y_n jest definováno funkcí

$$f_n(x) := \begin{cases} x, & \text{pokud } -n \leq x < n,\ n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Díky tomu, že $Y_n = f_n \circ X_n$, dostáváme

$$E(Y_n^2) = E(f_n^2 \circ X_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n^2(x)\ dF_x(x) = \int_{-n}^{n} x^2\ dF_x(x) \leq n^2 \int_{-\infty}^{\infty} dF_x(x) = n^2 < \infty. \tag{2.3}$$

2. Pro budoucí navrácení k původní náhodné veličině X_i je třeba dokázat, že součet pravděpodobností, kdy $X_n \neq Y_n$ konverguje, tedy že takových případů je konečně mnoho. Musíme tedy dokázat, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) < \infty. \tag{2.4}$$

To dokážeme lehce pomocí následujícího lemmatu.

Lemma 6. *Každá reálná náhodná veličina X splňuje*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) \leq E(|X|) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n);$$

což znamená, že X je integrovatelná, právě tehdy když řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n)$$

konverguje.

Vzhledem k tomu, že $X_n \neq Y_n \Leftrightarrow X_n \geq n$, pak musí platit, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \geq n),$$

což nám spolu s uvedeným lemmatem (6) dává,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \geq n) \leq E(|X_1|) \tag{2.5}$$

a to je dle předpokladů této věty konečné číslo. Dle Borellova-Cantelliho lemmatu tudíž platí

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} X_n \neq Y_n\right) = 0.$$

To říká, že jev, který obsahuje všechny $\omega \in \Omega$ pro která $X_n(\omega) \neq Y_n(\omega)$ nastává pouze pro konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, má pravděpodobnost 1. Kdyby tedy bylo možné odvodit konvergenci $\overline{Y_n}$ ke konstantě η skoro jistě, lze pak odvodit i skoro jistou konvergenci $\overline{X_n}$ k téže konstantě η. Toto jinými slovy říká, že po důkazu (2.4) stačí dokázat silný zákon velkých čísel pro posloupnost $\{Y_n\}_n$, protože platí

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - X_k) \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} 0.$$

Tuto konvergenci ověříme přes následující lemma.

Lemma 7. *Nechť $\{X_n\}_n$, $n \in \mathbb{N}$, je posloupnost nezávislých náhodných veličin s konečným rozptylem a existuje posloupnost b_n taková, že $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \to +\infty$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{b_n^2} < +\infty$, potom*

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k)) \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} 0.$$

3. Jako první krok tedy ověřme podmínky předešlého lemmatu. Všimněme si, že toto lemma klade jako předpoklad konečnost rozptylu, kterým sice původní náhodná veličina X_i nedisponuje, ale transformovaná veličina Y_i již ano, jak jsme ukázali dříve.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{var}(Y_n)}{n^2} &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(X_1^2\mathbf{I}_{(|X_1|>n)})}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}E(X_1^2\mathbf{I}_{(k-1<|X_1|\leq k)})\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2}E(X_1^2\mathbf{I}_{(k-1<|X_1|\leq k)})\\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)E(X_1^2\mathbf{I}_{(|X_1|\leq 1)}) + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\int_{k-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}\right)E(X_1^2\mathbf{I}_{(k-1<|X_1|\leq k)})\\
&\leq 2E(X_1^2\mathbf{I}_{(|X_1|\leq 1)}) + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-1}E(X_1^2\mathbf{I}_{(k-1<|X_1|\leq k)})\\
&\leq 2(E(X_1\mathbf{I}_{(|X_1|\leq 1)}) + \sum_{k=2}^{\infty}E(|X_1|\mathbf{I}_{(k-1<|X_1|\leq k)}))\\
&= 2E(|X_1|) < +\infty.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Tímto jsme dle lemmatu 7 potvrdili, že řada $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - E(Y_k)) \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} 0$. A protože

$$E(Y_n) = E(X_n\mathbb{I}_{(|X_n|\leq n)}) = E(X_1\mathbb{I}_{(|X_1|\leq n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} E(X_1),$$

můžeme tvrdit, že

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} E(X_1)$$

a tím pádem i

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} E(X_1)$$

$\square$

2.2 Nutná podmínka celkové nezávislosti v Kolmogorovově důkazu

V této kapitole si klademe především za cíl identifikovat tu část důkazu Kolmogorovovy věty, kde se skrývá takový výpočet, který nutně vyžaduje celkovou nezávislost a pouhá nezávislost po dvou by nestačila. Bude potom zřejmé, kde Etemadi musel tento výpočet obejít.

Nyní je důležité si uvědomit, že pro sestavení důkazu Kolmogorovovy ZVČ jsme potřebovali 3 pomocná tvrzení a sice Borelův-Canteliův 0-1 zákon 4, lemma 6 a lemma 7. Jako první se zaměřme na Borelův-Canteliův 0-1 zákon, se kterým se v důkazu pracuje a který vyžaduje celkovou nezávislost. Uvedeme jeho znění tak, jak jej uvedli Erdös a Rényi (1959), kteří nepracovali s celkovou nezávislostí, ale pouze s nezávislostí po dvou.

Lemma 8 (Borelův-Cantelliův 0-1 zákon). *Nechť $A_n \in \mathcal{A}$ jsou náhodné jevy, pak platí následující implikace*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty \Rightarrow P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1,$$

a pokud jsou náhodné jevy A_n alespoň po dvou nezávislé, tak

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty \Rightarrow P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0,$$

kde $\limsup_{n\to\infty} A_n$ *jako v lemma 4.*

S touto formulací později totiž pracuje i Etemadi ve svém důkazu a za předpokladu, že by u Kolmogorovova ZVČ stačila pouze tato implikace, bylo by jistě možné toto lemma pro celkově nezávislé náhodné veličiny nepovažovat za překážku k dokázání ZVČ pro po dvou nezávislé náhodné veličiny. A opravdu tomu tak je, neboť v sekci 2. důkazu Kolmogorovova ZVČ platí následující implikace

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \geq n) \leq \infty \Rightarrow P\left(\limsup_{n\to\infty} X_n \neq Y_n\right) = 0,$$

která celkovou nezávislost náhodných veličin na základě lemmatu 8 nevyžaduje a tedy nejedná se o bod, který by musel Etemadi v důkazu obejít.

Podobně se lze stavit k lemmatu 6, které neklade požadavek ani na nezávislost po dvou, je pouze nutné pracovat s reálnou náhodnou veličinou. Jediné, co nám zbývá zkoumat, je tedy lemma 7.

To totiž vyžaduje celkovou nezávislost náhodných veličin a konečný rozptyl. Všimněme si, že konečný rozptyl jsem zde získali transformací náhodné veličiny $\mathbf{X}$ na $\mathbf{Y}$ (2.1), pro kterou tento předpoklad platí. Pro účel této práce by bylo zbytečné uvádět celý důkaz. Co ovšem důležité je, že trik v důkazu spočívá ve skoro jisté sčitatelnosti řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_i - E(X_i)}{b_n}.$$

V tomto důkazu se nevyskytuje část, která by nutně vyžadovala nezávislost náhodné veličiny a tedy je nutné prozkoumat podmínku nezávislosti hlouběji a to ve větách, ze kterých sčitatelnost výše uvedené řady vychází.

Věta 9. *Pro posloupnost $\{X_n\}_n$, $n \in \mathbb{N}$ nekorelovaných reálných náhodných veličin s konečným rozptylem je ekvivalentní:*

$$\textit{Řada } \sum_{n=1}^{\infty}(X_n - E(X_n)) \textit{ je sčitatelná v } \mathbb{L}_2 \Leftrightarrow \textit{Řada } \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{var}(X_n) < +\infty$$

Věta 10. *Pro X_n, $n \in \mathbb{N}$ nezávislé reálné náhodné veličiny je ekvivalentní:*

$$\textit{Řada } \sum_{n=1}^{\infty} X_n \textit{ je sčitatelná s.j. } \Leftrightarrow \textit{Řada } \sum_{n=1}^{\infty} X_n \textit{ je sčitatelná v pravděpodobnosti}$$

Spojením těchto dvou vět totiž dostáváme tvrzení, že za předpokladu že posloupnost nezávislých náhodných veličin $\{X_n\}_n$ má konečný rozptyl a navíc platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{var}(X_n)$ konverguje, potom i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))$ je sčitatelná skoro jistě a také v $\mathbb{L}_2$.

Opět je třeba si povšimnout rozdílných předpokladů vět 9 a 10. Zatímco věta 9 vyžaduje nekorelovanost reálné náhodné veličiny a její konečný rozptyl, věta 10 již vyžaduje celkovou nezávislost. Je tedy jisté, že větu 9 lze dokázat pouze s nekorelovanými náhodnými veličinami a celková nezávislost již není podmínkou. Na druhou stranu celková nezávislost implikuje nekorelovanost a tedy pokud je v důkazu nějaké z těchto vět kladena podmínka nezávislosti, bez které by důkaz neobstál, musí to být nutně důkaz věty 10. Budeme se tedy zabývat, alespoň částečně, pouze touto větou a jejím důkazem.

Zadefinujme si nejdříve součet S_n, který bude potřebovat i později u důkazu Etemadiho věty. Součtem S_n myslíme součet

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{2.7}$$

Důkaz této věty vychází z předpokladu, že pokud $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} S$, potom $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} S$. Tento předpoklad plyne z Lachout (2022)[Věta 6.7]. Dále lze tvrdit, že posloupnost S_n je cauchyovská v pravděpodobnosti a je třeba ukázat, že je také cauchyovská s.j.

Pro $\epsilon > 0$ a $0 < \delta < 1$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $P(|S_n - S_{n_o}| > \epsilon) < \delta$ pro všechna $n_0 > n$. Dostáváme odhad

$$\begin{aligned} P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m,k\geq n} (|S_m - S_k| > 4\epsilon)) &\leq \cdots \leq P(\bigcup_{k\geq n_0} (|S_k - S_{n_0}| > 2\epsilon)) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=n_0}^{n} (|S_k - S_{n_0}| > 2\epsilon)) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{P(|S_n - S_{n_o}| > \epsilon)}{1-\delta} \qquad (2.8) \\ &\leq \frac{\delta}{1-\delta}. \qquad (2.9) \end{aligned}$$

Později v tomto důkazu je při vhodně položené množině A dokázáno, že pro každé $\omega \in A$ je posloupnost $S_n(\omega)$ cauchyovská. To je ovšem pro tuto práci nepodstatné. Podstatná je část (2.8) plynoucí ze Skorochodovy nerovnosti, jež tvoří poslední lemma, které v této kapitole bude třeba uvést.

Lemma 11 (**Skorochodova nerovnost**). *Nechť $\{X_n\}_n$ jsou nezávislé reálné náhodné veličiny a S_k součet ve smyslu* (2.7) *pro všechna $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Pokud pro $\epsilon > 0$ a $0 < \delta < 1$ platí*

$$P(|S_n - S_k| > \epsilon) \leq \delta, \forall k \in \{1,2,\ldots,n-1\},$$

potom

$$P(\max\{|S_k| : k \in \{1,2,\ldots,n\}\} > 2\epsilon) \leq \frac{P(|S_n| > \epsilon)}{1-\delta}.$$

Opět uvedeme pouze tu část důkazu, která je z hlediska práce podstatná. Mějme tedy

$$T = \begin{cases} \min\{1 \leq k \leq n\} : |S_k| > 2\epsilon\}, & \text{když } \max\{|S_k| : 1 \leq k \leq n\} > 2\epsilon \\ +\infty, & \text{jinak.} \end{cases}$$

potom

$$\begin{aligned} P(|S_n| > \epsilon) \geq P(|S_n| > \epsilon, T < +\infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(|S_n| > \epsilon, T = k) \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} P(|S_k| - |S_n - S_k| > \epsilon, T = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(|S_k| - \epsilon > |S_n - S_k|, T = k) \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} P(|S_n - S_k| \leq \epsilon, T = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(|S_n - S_k| \leq \epsilon) P(T = k). \qquad (2.10) \end{aligned}$$

Ze vztahu (2.10) tedy jasně vyplývá, že toto platí jen pro celkově nezávislé náhodné veličiny, ale nezávislost po dvou nám k této rovnosti nestačí, neboť rovnost

$$P(|S_n - S_k| \leq \epsilon, T = k) = P(|S_n - S_k| \leq \epsilon) P(T = k)$$

nastává pouze tehdy, když jsou náhodné veličiny T a $|S_n - S_k|$ nezávislé. Tím jsme se dopracovali až k té části důkazu, které nestačí nezávislost po dvou a Etemadi se tedy touto cestou vydat nemohl.

2.3 Důkaz Etemadiho věty

Jak jsme již diskutovali výše, pokud zmírníme požadavek z celkové nezávislosti posloupnosti $\{X_n\}_n$ v Kolmogorovově větě na pouhou nezávislost po dvou, získáváme tím formulaci této věty tak, jak ji uvedl v roce 1981 Nasrollah Etemadi. Tato věta má ale naprosto stejný výsledek, a tedy že i tato posloupnost splňuje ZVČ. Jak jsme zjistili v minulé kapitole, Etemadi nemohl jeho tvrzení dokázat za pomocí lemmatu 7, které vyžaduje celkovou nezávislost. Struktura důkazu Etemadiho věty se tedy minimálně od tohoto bodu musí nutně lišit. Naším cílem v této kapitole je nejen uvést důkaz této věty, ale i diskutovat jeho odlišný princip od Kolmogorovovy věty pro dokázání ZVČ pro po dvou nezávislé náhodné veličiny. Pro dokázání Etemadiho věty je nejednou zapotřebí Borellův Cantelliův 0-1 zákon. Na tomto místě zdůrazněme, že k tomuto zákonu 8 se nyní odkazujeme tak, jak jej uvedli Erdös a Rényi (1959), neboť nevyžaduje v této formulaci celkovou nezávislost.

Důkaz. (Etemadiho věty) Stejně jako v důkazu Kolmogorovovy věty se zde snažíme dokázat, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n = \eta \quad s.j.,$$

kde S_n jest součet jako v (2.7) a η střední hodnota náhodné veličiny $\mathbf{X}$. Vzhledem ke stejnému rozdělení posloupnosti náhodných veličin $\{X_n\}_n$ také tvrdíme, že

$$E(X_i) = E(X_1)$$

Transformujme nyní posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_n$ v posloupnost $\{Y_n\}_n$ stejnou transformací, jako jsme to udělali v důkazu Kolmogorovovy věty (2.1), tedy

$$Y_i = X_i \mathbf{I}_{(|X_n| < n)},$$

čímž opět získáváme konečný rozptyl. Definujme si proto součet $S_n^{'}$ pro posloupnost náhodných veličin $\{Y_n\}_n$ následovně

$$S_n^{'} := \sum_{i=1}^{n} (Y_i - E(Y_i)),\ \mathit{pro\ všechna}\ n \in\ \mathbb{N}.$$

Pokud by se nám tedy podařilo dokázat, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n^{'} = 0 \tag{2.11}$$

a poté bychom dokázali efektivně přejít od $\{Y_n\}_n$ zpět k $\{X_n\}_n$, byl by důkaz hotov. Naším cílem tedy bude dokázat, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\frac{1}{n} S_n^{'}| > \epsilon),\ \epsilon > 0$$

konverguje, protože potom jistě platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\frac{1}{n}S_n^{'}| > \epsilon,\ \text{pro nekonečně mnoho n}) = 0,\ \text{pro libovolné } \epsilon > 0,$$

což jinými slovy znamená, že platí (2.11).

V Kolmogorovově větě jsme (2.11) dokázali velmi jednoduše, neboť na základě lemmatu 7 stačí, aby $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(Y_n)}{n^2} < +\infty$. To nám zde ovšem nepomůže, protože toto lemma také vyžaduje celkovou nezávislost. Proto si zde pomůžeme Čebyševovou nerovností (1.3), která neklade na nezávislost žádné požadavky, pouze vyžaduje konečný rozptyl, což $\{Y_n\}_n$ splňuje. Mějme tedy

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n^{'}\right| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbf{var}\left(\frac{1}{n}S_n^{'}\right) = \frac{1}{\epsilon^2 n^2}\mathbf{var}(S_n^{'}) = \frac{1}{\epsilon^2 n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{var}(Y_i).$$

A protože $\mathbf{var}(Y_n) = E(Y_i^2) - E(Y_i)^2 \leq E(Y_i)^2$, dostáváme

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n^{'}\right| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2 n^2}\sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2)$$

Etemadi zde musel přejít od posloupnosti $1, \ldots, n$ k posloupnosti k_n, kterou definujeme pro libovolné $\alpha > 1$ jako

$$k_n := [\alpha^n],$$

kde $[\alpha^n]$ je největší přirozené číslo které není větší než α^n. Význam přechodu od n ke k_n budeme vysvětlovat v následujících řádcích. Pro $k_n = [\alpha^n]$ tedy platí

$$P\left(\left|\frac{1}{k_n}S_{k_n}^{'}\right| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2 k_n^2}\sum_{i=1}^{k_n} E(Y_i^2),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Závěrem z těchto úprav nám tedy plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{1}{k_n}S_{k_n}^{'}\right| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n}\frac{1}{k_n^2}E(Y_i^2). \tag{2.12}$$

Na pravé straně je suma přes veškeré řádkové součty nekonečné matice, jejíž prvky jsou nenulové a lze tedy součet získat i sumou sloupců, tedy prohodit sumy, čímž dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\frac{1}{k_n}S_{k_n}^{'}| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{j=1}^{\infty} t_j E(Y_j^2),$$

kde

$$t_j := \sum_{n=n_j}^{\infty}\frac{1}{k_n^2}$$

a n_j je nejmenší přirozené číslo n, pro které $k_n \geq j$. V této části se jedná o krok, kvůli kterému jsme definovali $k_n := [\alpha^n]$. Pokud bychom měli pouze lineárně rostoucí posloupnost $n \to \infty$, nikdy bychom nemohli sečíst řadu

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}\frac{1}{n^2} \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty.$$

Jenže díky exponenciálnímu růstu k_n, resp. klesání $\frac{1}{k_n}$, pak řada (2.12) konverguje. Je to elegantní způsob řešení této slepé uličky, které si ovšem bere svou daň a později v tomto důkazu je třeba dokázat, že vše platí i pro lineární posloupnost $n \to \infty$. Z definice k_n evidentně platí, že

$$k_n \leq \alpha^n < k_n + 1 \tag{2.13}$$

a tedy existuje číslo $c_\alpha \in (0{,}1)$ takové, že

$$k_n > \alpha^n - 1 \geq c_\alpha \alpha^n \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Následující odhad t_j lze odvodit z (2.14):

$$t_j \leq c_\alpha^{-2} \sum_{n=n_j}^{\infty} \alpha^{-2n} = c_\alpha^{-2} \alpha^{-2n_j} \frac{1}{1-\alpha^{-2}} = C_\alpha \alpha^{-2n_j},$$

kde konstanta $C_n := c_\alpha^{-2}(1-\alpha^{-2})^{-1} > 0$ opět závisí jen na parametru α. Z toho plyne vztah

$$t_j \leq C_\alpha j^{-2},$$

protože $a^{n_j} \geq k_{nj} \geq j$, což vyplývá ze zadefinování n_j. Za použití této majoranty t_j a výrazu (2.3) pro $E(Y_j^2)$, dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\frac{1}{k_n} S_{k_n}^{'}| > \epsilon) \leq \epsilon^{-2} C_\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \sum_{k=1}^{j} \int_{[k-1,k)} x^2 (dx).$$

Opět jsou všechny prvky nezáporné a lze tedy opět zaměnit sumy, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \sum_{k=1}^{j} \int_{[k-1,k)} x^2 \mu(dx) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{j^2}) \int_{[k-1,k)} x^2 \mu(dx) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \int_{[k-1,k)} x^2 \mu(dx), \end{aligned} \tag{2.15}$$

z čehož nerovnost je dána teleskopičností, danou takto

$$\sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \frac{1}{k^2} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{(j-1)j} = \frac{1}{k^2} + \sum_{j=k+1}^{\infty} (\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}) = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} \leq \frac{2}{k}$$

Naše suma pravděpodobností je nyní majorizována

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(|\frac{1}{k_n} S_{k_n}^{'}| > \epsilon) \leq 2\epsilon^{-2} C_\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[k-1,k)} \frac{x}{k} x \mu(dx) \leq \\ 2\epsilon^{-2} C_\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[k-1,k)} x \mu(dx) = 2\epsilon^{-2} C_\alpha E(X_1) < \infty. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Dokázali jsme tedy, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\frac{1}{k_n} S_{k_n}^{'}| > \epsilon)$$

konverguje a tím pádem i zde můžeme použít Borellovo Cantelliho zákon, ze kterého plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{1}{k_n} S_{k_n}^{'}\right| > \epsilon\right) < \infty \Rightarrow P\left(\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{k_n} S_{k_n}^{'}\right| > \epsilon\right) = 0$$

A tím pádem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} S_{k_n}^{'} = 0 \tag{2.17}$$

Tento postup nám zatím způsobil 2 problémy, které je nutné vyřešit. Za prvé, přešli jsme od náhodné veličiny $\mathbf{X}$ k náhodné veličině $\mathbf{Y}$ a za druhé, pro zajištění konvergence střední hodnoty k průměru této náhodné veličiny jsme museli využít exponenciální posloupnosti k_n. Rovnici (2.17) lze rozšířit na

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} S_{k_n}^{'} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} (Y_i - E(Y_i)) = 0$$

Z definice náhodné veličiny Y_n tím pádem platí, že se zvyšujícím se n (nebo v tomto případě k_n) se stále více chová jako náhodná veličina X_n a tedy v limitě a díky stejnému rozdělení náhodné veličiny $\mathbf{X}$ jistě platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Y_i = E(X_1).$$

Nyní by bylo vhodné přejít zpět k náhodné veličině $\mathbf{X}$. Etemadi toto dělá totožně jako Kolmogorov a tedy stejně, jako jsme to dělali v předešlém důkazu. Stačí tedy pouze dokázat, že počet případů, kdy $X_n \neq Y_n$ je pro $n \to \infty$ spočitatelně mnoho a tedy že platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) < \infty.$$

Tento vztah ale evidentně platí, viz. (2.5). A tím pádem lze jistě tvrdit, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} X_i = E(X_1).$$

Následující a závěrečná část důkazu vyžaduje práci s nezápornými náhodnými veličinami X_n. V předpokladech Etemadiho věty nezápornost sice není, ale lze ji jednoduše vyřešit. Rozdělme posloupnost $\{X_n\}_n$ na $\{X_n^+\}_n$ kladnou a $\{X_n^-\}_n$ zápornou část. X_n^+ a X_n^- jsou také po dvou nezávislé a protože platí $X_n = X_n^+ - X_n^-$, ZVČ platí pro X_n tehdy, pokud platí pro X_n^+ a X_n^-. Tím pádem můžeme nyní BÚNO předpokládat, že X_n je nezáporná.

Díky zvolenému $\alpha > 1$ je také dáno k_1. Pro každé přirozené $m > k_1$ existuje právě jedno $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí $k_n < m \leq k_{n+1}$. Nyní díky této nerovnosti a výše zmíněné nezápornosti, bez které by následující nerovnost nemusela platit, lze tvrdit

$$S_{k_n} \leq S_m \leq S_{k_{n+1}}$$

Pokud tuto nerovnost vydělíme nezáporným m a pravou a levou stranu vynásobíme chytrou jedničkou, dostáváme

$$\frac{S_{k_n}}{k_n} \times \frac{k_n}{m} \leq \frac{S_m}{m} \leq \frac{S_{k_{n+1}}}{k_{n+1}} \times \frac{k_{n+1}}{m}. \tag{2.18}$$

Kde uprostřed těchto nerovností je výběrový průměr, který je závislý na m, resp. n, a který je z levé i z pravé strany omezen průměry s exponenciální posloupností k_n resp. k_{n+1} a posloupnostmi $\frac{k_n}{m}$, resp. $\frac{k_{n+1}}{m}$. Pokud by se nám povedlo tyto posloupnosti omezit zdola, reps. zhora, měli bychom vyhráno. K tomu ale již všechny potřebné nástroje máme.

Z (2.13) evidentně platí, že $k_n > \alpha^n - 1$ a zároveň pro m jistě platí, že $m < \alpha^{n+1}$, z čehož dostáváme, že

$$\frac{k_n}{m} > \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^{n+1}}$$

a pokud navíc volíme dostatečně velké n, pak jistě

$$\frac{\alpha^n - 1}{\alpha^{n+1}} > \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^{n+1}} = \alpha^{-2} \Rightarrow \frac{k_n}{m} > \alpha^{-2}.$$

Tím dostáváme dolní odhad

$$\frac{E(\mathbf{X})}{\alpha^{-2}} < \frac{S_{k_n}}{k_n} \times \frac{k_n}{m} \leq \frac{S_m}{m}.$$

Podobně lze také odhadnout

$$\frac{k_{n+1}}{m} < \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n} = \alpha \Rightarrow \frac{S_m}{m} < \frac{S_{k_{n+1}}}{k_{n+1}} \times \alpha = E(\mathbf{X}) \times \alpha, \text{ pro } n \to \infty$$

Tyto odhady dohromady tvoří

$$\frac{E(\mathbf{X})}{\alpha^{-2}} \leq \frac{S_m}{m} \leq E(\mathbf{X}) \times \alpha$$

a pokud $a \to 1_+$ a $n \to \infty$, resp. $m \to \infty$, poté jistě dolní i horní odhad konverguje ke střední hodnotě E($\mathbf{X}$) a podle věty o dvou policajtech i $\frac{S_m}{m}$ konverguje ke střední hodnotě E($\mathbf{X}$) a tedy platí

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} S_m = E(X_1).$$

Což je přesně to, co tvrdí Etamadiho věta.

□

3. Demonstrace Etemadiho věty

V této kapitole uvádíme příklad posloupnosti stejně rozdělených náhodných veličin, které jsou po dvou nezávislé, ale nejsou celkově nezávislé. Příklad pochází z knihy Probability Essentials a uvedeme ho tak, jak jej uvedli Jacod a Protter (2003)[kap. 3]. Nejdříve příklad zformulujeme, prokážeme nezávislost po dvou a vyvrátíme celkovou nezávislost. Dále si data nasimulujeme a zvizualizujeme ZVČ.

3.1 Příklad

Nechť $\Omega = \{1,2,3,4\}$ a $\mathcal{A} = 2^\Omega$. Dále nechť $P(i) = \frac{1}{4}$, kde $i \in \{1,2,3,4\}$. Položme $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{2,3\}$, $A_3 = \{3,1\}$ náhodné jevy a X_1, X_2, X_3 náhodné veličiny, které jsou jedničkovými indikátory těchto jevů. Tím pádem $E(X_k) = 1/2$. Poté platí, že X_1, X_2, X_3 jsou nezávislé po dvou ale nikoliv celkově nezávislé. Nezávislost po dvou evidentně platí, neboť

$$P(X_j = 1, X_k = 1) = \frac{1}{4} = P(X_j = 1)P(X_k = 1),\ \forall j,k \in\ \{1,2,3\}\ a\ j \neq k$$

a zároveň, protože

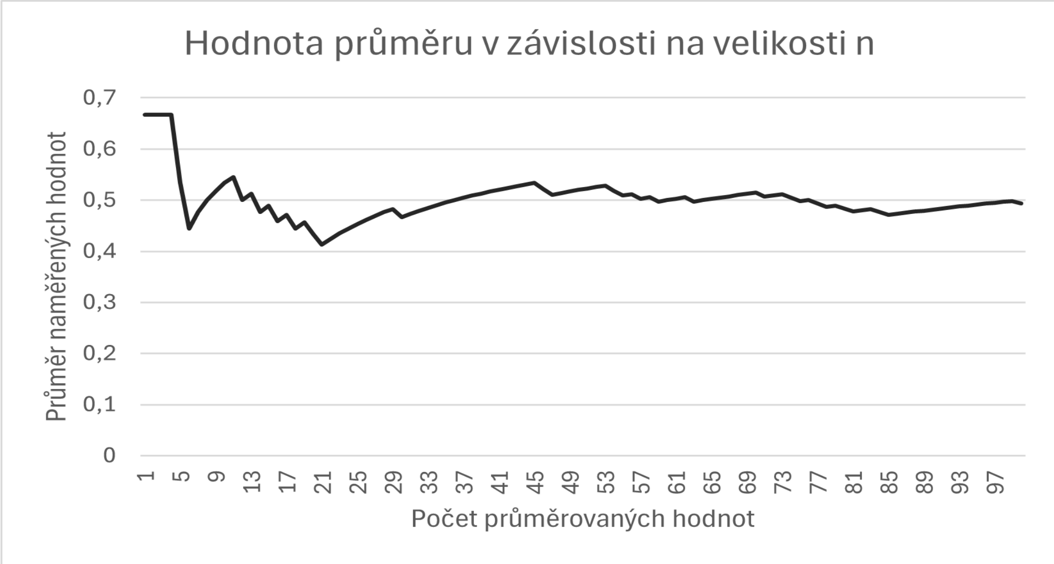
$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = 0 \neq P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1) = \frac{1}{8},$$

lze tvrdit, že celková nezávislost neplatí.

3.2 Simulace Etemadiho věty na příkladu 3.1

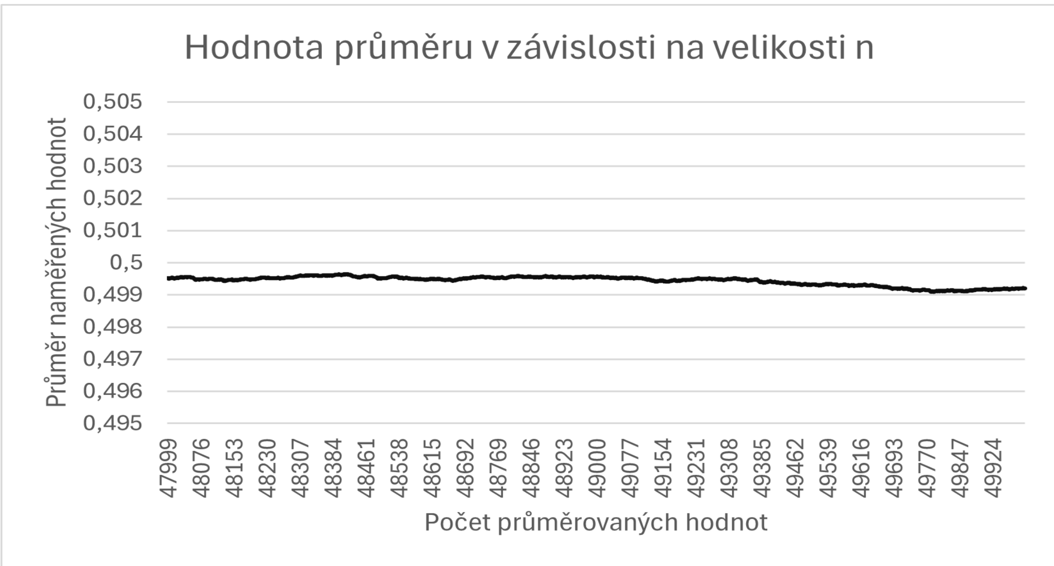
Pro simulaci Etemadiho věty jsem zvolil software Microsoft Excel, ve kterém jsem si rovnoměrně náhodně vygeneroval hodnoty $\{1,2,3,4\} = \Omega$, pro které platí $P(i) = \frac{1}{4}$, kde $i \in \Omega$. Zaveďme dále jednotkové identifikátory X_1, X_2, X_3 jevů $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{2,3\}$, $A_3 = \{3,1\}$ tak, jako jsme je definovali výše, tedy $X_i = \mathbb{I}_{\{A_j = A_i\}}$, $\forall j,i \in\ \{1,2,3\}$. Pomocí softwaru spočítáme průměry $\overline{X_n}$ pro jednotlivá $n \in \{1,\ldots,50000\}$. Grafy níže vyobrazují konvergenci výběrového průměru v závislosti na velikosti výběru a to pro $1 \leq n \leq 50000$. Pokud Etemadiho věta platí, pak v tomto příkladě $\overline{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} 1/2$.

Na grafu (3.1) si lze všimnou již velmi malých odchylek od 1/2 počínaje $n \approx 50$.



Obrázek 3.1: Hodnota průměru $\overline{X_n}$ podle počtu průměrovaných veličin n

Na grafu (3.2) ukazujeme hodnoty pro $48000 \leq n \leq 50000$. Ačkoliv se vizuálně zdá, že jsou hodnoty $\overline{X_n}$ střední hodnotě 1/2 vzdálené, je nutné brát v potaz změněnou škálu na ose y.



Obrázek 3.2: Hodnota průměru $\overline{X_n}$ podle počtu průměrovaných veličin n

Z grafů tedy jasně vyplývá, že

$$\overline{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Seznam použité literatury

Bauer, H. (1996). *Probability theory*, volume 23 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, german edition. ISBN 3-11-013935-9. doi: 10.1515/9783110814668. URL https://doi.org/10.1515/9783110814668.

Dupač, V. a Hušková, M. (2013). *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Učební texty Univerzity Karlovy v Praze. Karolinum, Praha, 2., upravené vydání edition. ISBN 978-80-246-2208-8.

Erdös, P. a Rényi, A. (1959). *On Cantor's series with convergent* $\sum \frac{1}{q_n}$. Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Budapest. URL https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=cbcd4e52fbd1cf2ef10af834e9d6eed666c066dd.

Ibe, O. C. (2014). *Chapter 6 - Functions of Random Variables*. Academic Press, Boston, second edition edition. ISBN 978-0-12-800852-2. doi: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-800852-2.00006-7. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128008522000067.

Jacod, J. a Protter, P. E. (2003). *Probability essentials*. Universitext. Springer, Berlin, 2nd ed. edition. ISBN 3-540-43871-8.

Lachout, P. (2022). *Teorie pravděpodobnosti*. Učební texty Univerzity Karlovy. Karolinum. ISBN 9788024653990. URL https://books.google.cz/books?id=z7CpEAAAQBAJ.

Seznam obrázků