

POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Název: Zákon velkých čísel pro závislé náhodné veličiny

Autor: Michal Šlachta

SHRNUTÍ OBSAHU PRÁCE

Práce je pojednání o zákonech velkých čísel (ZVČ) pro posloupnosti stejně rozdělených náhodných veličin. První část práce obsahuje formulace (a důkaz) Čebyševova slabého ZVČ a následně formulace Etemadiho a Kolmogorovova silného ZVČ. Druhá část práce obsahuje důkazy výše zmíněných silných ZVČ s tím, že důraz je kladen na diskuzi předpokladu nezávislosti. Třetí část práce obsahuje praktickou demonstraci zmíněných zákonů.

CELKOVÉ HODNOCENÍ PRÁCE

Téma práce. Téma práce je dle mého názoru pro bakalářskou práci vhodné.

Vlastní příspěvek a matematická úroveň. Vlastní příspěvek v práci spočívá v detailním rozpracování důkazů Kolmogorovova a Etemadiho ZVČ a objasnění, kde je ve standardním důkazu Kolmogorovova ZVČ zapotřebí nezávislost veličin $\{X_n\}_n$ a jakým způsobem lze tento předpoklad oslabit. Domnívám se ale, že vzhledem k chybějícím důkazům (nebo alespoň citacím) pomocných tvrzení, které jsou potřebné k důkazu Kolmogorovova ZVČ, a překlepům a neúplnostem, které se nachází v důkazu Etemadiho ZVČ, se čtenář neobejde bez nahlížení do obou primárních zdrojů práce (viz níže).

Práce se zdroji. Práce vychází primárně ze dvou zdrojů (ref. Bauer (1996) a Lachout (2022)), kterých se relativně těsně drží, a tento fakt je v práci uveden. Na druhou stranu, práce obsahuje relativně velké množství tvrzení, která nejsou ani citovaná, ani nemají uvedený důkaz (např. lemma 6, lemma 7, věta 9, věta 10, lemma 11). Tato tvrzení lze po jistém úsilí ve zmíněných monografiích nalézt, neuvedení odkazů ale snižuje čitelnost textu.

Formální úprava. Po formální stránce je předložená práce průměrná. Struktura práce je dobře zvolená a text je, až na některá místa, čitelný. Práce obsahuje relativně nadprůměrně velké množství jazykových neduh (chybějící interpunkce, gramatické chyby, apod.) a také velké množství překlepů a neduh v matematice (např. neostrá nerovnost v (2.2) a v lemmatu 6, chybějící absolutní hodnota na straně 6 dole, chybějící závorky u jevů, neostrá nerovnost ve vzorci na str. 8, ř. 9 zdola, index i ve vzorci na str. 9, ř. 3, horní index sum v (2.10), atd.). Některé značení není příliš vhodně zvolené (např. X_n namísto $\{X_n\}_n$ pro posloupnost) a některé objekty nejsou definované (např. $F_x(x)$ v (2.3) nebo μ v (2.15)). Proměnné, na které se autor odkazuje v textu, často nejsou kurzívou.

DALŠÍ PŘIPOMÍNKY A OTÁZKY

Mimo větší množství menších připomínek mám následující zásadnější připomínky:

1. Předpokládáme-li ve větě 1, že náhodné veličiny $\{X_n\}_n$ mají stejné rozdělení, pak je podmínka ve znění věty splněna automaticky a není třeba ji uvádět. Z důkazu je také zřejmé, že není potřeba nezávislost, ale stačí pouze nekorelovanost.

2. Borel-Cantelliho zákon, jak je formulovaný v lemmatu 4, neplatí.
3. Závěr důkazu Etemadiho věty na str. 14 a 15 je spíše nejasný. Proč platí nerovnost $\frac{E(\mathbf{X})}{\alpha^{-2}} < \frac{S_{k_n}}{k_n} \cdot \frac{k_n}{m}$? Využívá se nějak konvergence na str. 14, ř. 15 zdola? A podobně, proč platí rovnost v nerovnosti $\frac{S_m}{m} < \frac{S_{k_{n+1}}}{k_{n+1}} = E(\mathbf{X})\alpha$? Navíc, pokud by tyto dvě nerovnosti platily tak, jak jsou uvedeny, dostáváme ostré rovnosti ve výrazu

$$\frac{E(\mathbf{X})}{\alpha^{-2}} < \frac{S_m}{m} < E(\mathbf{X})\alpha.$$

To přinejmenším znamená, že zde nelze uvažovat případ, kdy $\mathbf{X} = 0$, a tento případ se musí ošetřit zvlášť. Za předpokladu $E(\mathbf{X}) > 0$ by to také znamenalo, že α musí náležet do intervalu $(0, 1)$, v důkazu se ale volí $\alpha > 1$.

4. V sekci 3.2 je naprosto nejasné, jak přesně byla simulace provedena. Domnívám se, že cílem bylo simulovat náhodnou posloupnost $\{X_n\}_n$ stejně rozdělených, po dvou nezávislých, ale ne nezávislých, náhodných veličin a ukázat, že i tato posloupnost splňuje silný ZVČ (což by podle Etemadiho ZVČ měla). Autor se zde odkazuje na příklad v sekci 3.1, ale je zcela nejasné, jaká je přesně souvislost v tomto příkladu konstruovaného náhodného vektoru (X_1, X_2, X_3) a simulované posloupnosti $\{X_n\}_n$. Co tedy bylo přesně simulováno? Co je, např., X_{100} ?

ZÁVĚR

I přes zmíněné nedostatky se domnívám, že předložená práce splňuje požadavky kladené na bakalářskou práci.

15. srpna 2024

Petr Čoupek
KPMS MFF UK