MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matouš Cimala

Laguerrovy mozaiky

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.
Studijní program: Obecná matematika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Děkuji svému vedoucímu práce, doc. Zbyňku Pawlasovi, za rady při jejím sepsání a za uvedení do tématu mozaik vůbec.

Název práce: Laguerrovy mozaiky

Autor: Matouš Cimala

Department: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Laguerrova mozaika je jedním ze zobecnění Voroného mozaiky a umožňuje popsat některé mozaiky pomocí relativně mála informace. Lze ukázat, že každá mozaika ve třech a více rozměrech splňující jisté snadno definovatelné vlastnosti je Laguerrova mozaika. Tato práce sleduje časopisecký důkaz, doplňuje chybějící kroky a místa, kde se původní mezikrok nepodařilo dokázat, obchází jinudy. Místo ortogonálního duálu, s nímž pracuje původní článek, pracuje práce s po částech lineární konvexní funkcí, což činí důkaz méně závislý na geometrické intuici.

Klíčová slova: mozaika, Laguerrova mozaika, po částech lineární konvexní funkce

Title: Laguerre tessellations

Author: Matouš Cimala

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Laguerre tessellation is a type of generalisation of the Voronoi diagram, enabling to describe some tessellations with relatively little information. It can be shown that any tessellation in three and more dimensions, complying with certain easily definable criteria, is a Laguerre tessellation. This thesis follows a journal proof, completes missing steps and bypasses places, which could not be proven. The thesis uses a convex piecewise-linear function instead of the orthogonal dual used in the original article, making the proof less demanding of geometrical intuition.

Keywords: tessellation, Laguerre tessellation, convex piecewise-linear function

Obsah

Úvod

Laguerrova mozaika je jedním ze zobecnění Voroného mozaiky. Její využití sahá od řešení kombinatorických problémů [1] až k modelování mikrostruktur materiálů [2], kde se využívá faktu, že každá nedegenerovaná jednoduchá regulární mozaika ve třech a více rozměrech je Laguerrova.

Důkaz tohoto tvrzení podal Davis [3] roku 1959 pomocí po částech lineární konvexní funkce, k této publikaci jsme bohužel neměli přístup. Alternativní důkaz podává Aurenhammer [4] roku 1987 pomocí ortogonálního duálu (a ukazuje laguerrovskost některých speciálních mozaik v $\mathbb{R}^2$). Jeho důkaz zobecňuje Lautensacková [2] roku 2007 i pro nekonečné mozaiky.

Základem této práce je Aurenhammerův článek, ale namísto ortogonálního duálu používáme po částech lineární konvexní funkci.

1 Základní definice

1.1 Mozaika

Definice 1. *Ať $\mathcal{C}$ je systém podmnožin množiny X. Symbolem $\pi\mathcal{C}$ budeme značit nejmenší systém podmnožin množiny X uzavřený na konečné průniky a obsahující $\mathcal{C}$.*

Definice 2. *Ať $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $m, \tilde{m} \in \{0, \dots, n\}$ a pro $l \in \{1, \dots, k\}$ je H_l nějaký uzavřený poloprostor prostoru $\mathbb{R}^n$. Dále ať dimenze průniku $H = \bigcap_{l=1}^k H_l$ je rovna m. Pak řekneme, že H je m-*mnohostěn*. Za zvláštní případ n-mnohostěnu budeme považovat i celý prostor $\mathbb{R}^n$*

Dále ať pro $l \in \{1, \dots, k\}$ je $\tilde{H}_l$ buďto H_l, nebo hranice ∂H_l a dimenze průniku $\tilde{H} = \bigcap_{l=1}^k \tilde{H}_l$ je rovna $\tilde{m}$. Pak řekneme, že $\tilde{H}$ je $\tilde{m}$-stěna mnohostěnu H.

Definice připouští i prázdné a neomezené mnohostěny. Protože v definici mozaiky chceme pokrýt $\mathbb{R}^n$ konečně mnoha mnohostěny, budou neomezené mnohostěny součástí každé mozaiky. Průnik dvou mnohostěnů je opět mnohostěn.

Definice 3. *Ať $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}$ je konečná množina mnohostěnů (libovolné dimenze) uzavřená na průniky a*

- $\bigcup_{P \in \mathcal{C}} P = \mathbb{R}^n$,
- *relativní vnitřky dvou různých mnohostěnů z $\mathcal{C}$ se neprotínají (přičemž relativním vnitřkem jednobodového 0-mnohostěnu rozumíme tentýž 0-mnohostěn).*

Pak řekneme, že $\mathcal{C}$ je mozaika v $\mathbb{R}^n$ *a je-li $P \in \mathcal{C}$ j-mnohostěn, řekneme, že P je* j-stěna *mozaiky $\mathcal{C}$. Speciálně 0-stěny budeme nazývat* vrcholy, *1-stěny* hrany *a n-stěny* buňky.

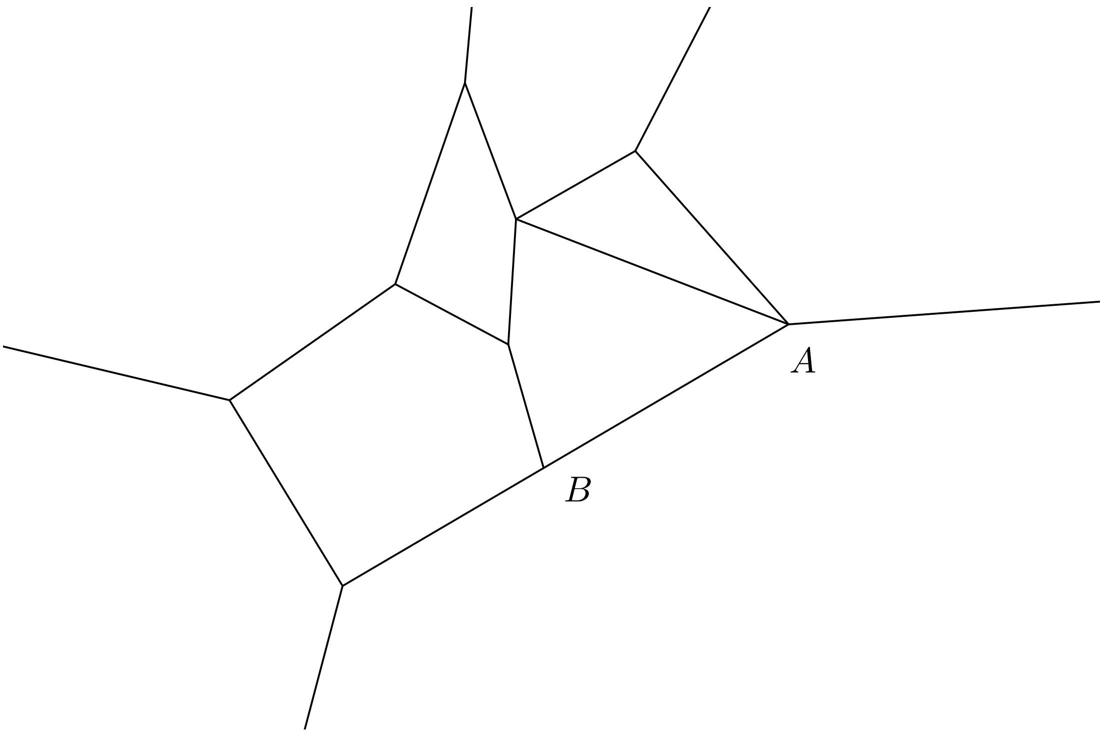
V literatuře ([5], str. 446) se obvykle mozaika definuje jako spočetná množina n-mnohostěnů pokrývající celý prostor $\mathbb{R}^n$, jejichž relativní vnitřky se vzájemně neprotínají. Spočetnými nekonečnými mozaikami se v této práci zabývat nebudeme a je-li $\tilde{\mathcal{C}}$ konečná mozaika podle obvyklé definice, $\mathcal{C} = \pi\tilde{\mathcal{C}}$ je mozaika podle definice 3 a $\tilde{\mathcal{C}} = \{P \in \mathcal{C} \mid P \text{ je } n\text{-mnohostěn}\}$.

Definice 4. *Ať $n \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{C}$ je mozaika v $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\mathcal{C}$ je:*

- regulární (face-to-face), *pokud pro dvě různé $P, P' \in \mathcal{C}$ s neprázdným průnikem je $P \cap P'$ stěnou P i P',*
- jednoduchá, *pokud pro $m < n$ je každá její m-stěna stěnou právě právě $n + 1 - m$ buněk. Speciálně každý její vrchol je vrcholem právě $n + 1$ buněk.*

Na obrázku 1.1 je mozaika, která není ani jednoduchá (kvůli vrcholu A), ani regulární (kvůli vrcholu B).

Lemma 1. *Ať $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}$ je jednoduchá regulární mozaika v $\mathbb{R}^n$ a m je nejnižší číslo takové, že $\mathcal{C}$ obsahuje alespoň jednu m-stěnu. Pak pro $m' > m$ všechny m'-stěny $\mathcal{C}$ tvoří souvislou množinu a pro $m' \geq m$, $\tilde{m} > m'$ každá $\tilde{m}$-stěna obsahuje alespoň jednu m'-stěnu.*



Obrázek 1.1 Mozaika v $\mathbb{R}^2$, která není regulární ani jednoduchá.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že je-li P k-mnohostěn a má nějaké $(k-2)$-stěny, jeho $(k-1)$-stěny tvoří souvislou množinu. Budeme postupovat indukcí podle počtu l poloprostorů $H_1, \dots, H_l$ definujících mnohostěn P a předpokládáme, že žádný z těchto poloprostorů není podmnožinou jiného. Pro $l = 2$ je průnik $H_1 \cap H_2$ neprázdná množina – $(k-2)$-stěna. Pro $l = 3$ je hranice alespoň jednoho z poloprostorů různoběžná s hranicemi obou dalších, tedy tento poloprostor má s oběma dalšími neprázdné průniky – $(k-2)$-stěny a všechny $(k-1)$-stěny tvoří souvislou množinu. Pro $l > 3$ má $(k-1)$-stěna určená poloprostorem (bez újmy na obecnosti) H_l alespoň jednu $(k-2)$-stěnu, která je částí nějaké další $(k-1)$-stěny a podle indukčního předpokladu tvoří $(k-1)$ stěny mnohostěnu $H_1 \cap \ldots \cap H_{l-1}$ souvislou množinu, tvoří ji tedy i $(k-1)$-stěny mnohostěnu P.

Postupujeme indukcí podle m'. Pro $m' = n$ zřejmě tvrzení platí. Pokud tvrzení platí pro $m' + 1 \leq n$, dokážeme je i pro m'. Ať S_1, S_ω jsou nějaké dvě m'-stěny. Najdeme S'_1, S'_ω takové, že $S_1 \subset S'_1$, $S_\omega \subset S'_\omega$ a z indukčního předpokladu existuje posloupnost $(m'+1)$-stěn $S'_1, \dots, S'_k = S'_\omega$ taková, že pro $i = 1, \dots, k-1$ je průnik $S^1_i = S'_i \cap S'_{i+1}$ neprázdný (a díky jednoduchosti $\mathcal{C}$ m'-stěna). Protože pro každou $(m'+1)$-stěnu S' tvoří všechny její m'-stěny souvislou množinu, můžeme pro $i = 1, \dots, k-2$ najít posloupnost m'-stěn $S^1_i, \dots, S^{k_i}_i = S^1_{i+1}$. Tak v posloupnosti $S^1_1, \dots, S^{k_1}_1 = S^1_2, \dots, S^{k_{k-2}}_{k-2} = S^1_{k-1}$ mají každé dvě sousední stěny neprázdný průnik a množina všech m'-stěn je tak souvislá.

Druhá část tvrzení stačí dokázat pro $\tilde{m} = m' + 1$. Protože sjednocení všech $(m'+1)$-stěn je souvislá množina, najdeme $(m'+1)$-stěny S_0, S_1 takové, že S_0 má m'-stěnu a S_1 ne a že $S_0 \cap S_1 \neq \emptyset$. Pak ale $S_0 \cap S_1 \subset S_1$ je m'-stěna, což je spor. $\square$

Lemma 2. *Ať $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}$ je jednoduchá regulární mozaika v $\mathbb{R}^n$ a $\varrho \subset \mathbb{R}^n$ je $(n-1)$-rovina neobsahující žádnou stěnu mozaiky $\mathcal{C}$. Pak mozaika $\mathcal{D} = \varrho \cap \mathcal{C}$ je jednoduchá a regulární.*

Důkaz. Jednoduchost: Ať $m \leq n-1$ a S' je m-stěna mozaiky $\mathcal{D}$. Najdeme stěnu S mozaiky $\mathcal{C}$ takovou, že $S \cap \varrho = S'$. Stěna S je $(m+1)$-stěna: kdyby S byla m-stěna, musela by ležet v rovině ϱ, což je spor s předpokladem. Kdyby měla dimenzi vyšší, i její průnik s ϱ by měl vyšší dimenzi než m. Stěna S díky jednoduchosti $\mathcal{C}$ náleží právě $n-(m+1)+1 = n-m$ buňkám mozaiky $\mathcal{C}$, z nichž každá proniká rovinu ϱ jako buňka mozaiky $\mathcal{D}$ obsahující stěnu S'. Stěna S' tedy náleží $n-m = (n-1)-m+1$ buňkám mozaiky $\mathcal{D}$.

Regularita: Ať $S_1' \subset S_2'$ jsou stěny mozaiky $\mathcal{D}$. Najdeme stěny $\tilde{S}_1$, S_2 mozaiky $\mathcal{C}$ takové, že $S_1' = \tilde{S}_1 \cap \varrho$, $S_2' = S_2 \cap \varrho$. Stěna $S_1 = \tilde{S}_1 \cap S_2$ je díky regularitě $\mathcal{C}$ stěnou stěny S_2 a splňuje $S_1' = S_1 \cap \varrho$. Označíme $H_1, \ldots, H_k$ vhodně seřazené poloprostory určující stěnu S_2, najdeme $l \leq k$ takové, že $S_1 = H_1 \cap \ldots H_{l-1} \cap \partial H_l \cap \partial H_k$ a poloprostory $K_1 \cap K_2 = \varrho$. Pak $S_2' = H_1 \cap \ldots \cap H_k \cap K_1 \cap K_2$ a $S_1' = H_1 \cap \ldots \cap H_{l-1} \cap \partial H_l \cap \ldots \cap \partial H_k \cap K_1 \cap K_2$, tedy S_1' je stěnou S_2' a mozaika $\mathcal{D}$ je regulární. □

1.2 Laguerrova mozaika

Definice 5. *Ať $n \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{J}$ je konečná neprázdná množina bodů z $\mathbb{R}^n$. Pro $j \in \mathcal{J}$ definujeme $P_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j' \in \mathcal{J} \colon \|x-j\| \leq \|x-j'\|\}$. Řekneme, že $\mathcal{V}(\mathcal{J}) = \pi\{P_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ je* Voronéo mozaika generovaná $\mathcal{J}$*, body množiny $\mathcal{J}$ nazveme* jádry *mozaiky $\mathcal{V}(\mathcal{J})$.*

Příklad Voronéo mozaiky v $\mathbb{R}^2$ zobrazuje obrázek 1.2.

Pro $j, j' \in \mathcal{J}$, $j \neq j'$ je $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-j\| \leq \|x-j'\|\}$ uzavřený poloprostor, takže P_j je mnohostěn. Pro $x \in \mathbb{R}^n$ díky konečnosti $\mathcal{J}$ existuje $j \in \mathcal{J}$ takové, že $x \in P_j$, a tak každá Voronéo mozaika je mozaika podle definice 3.

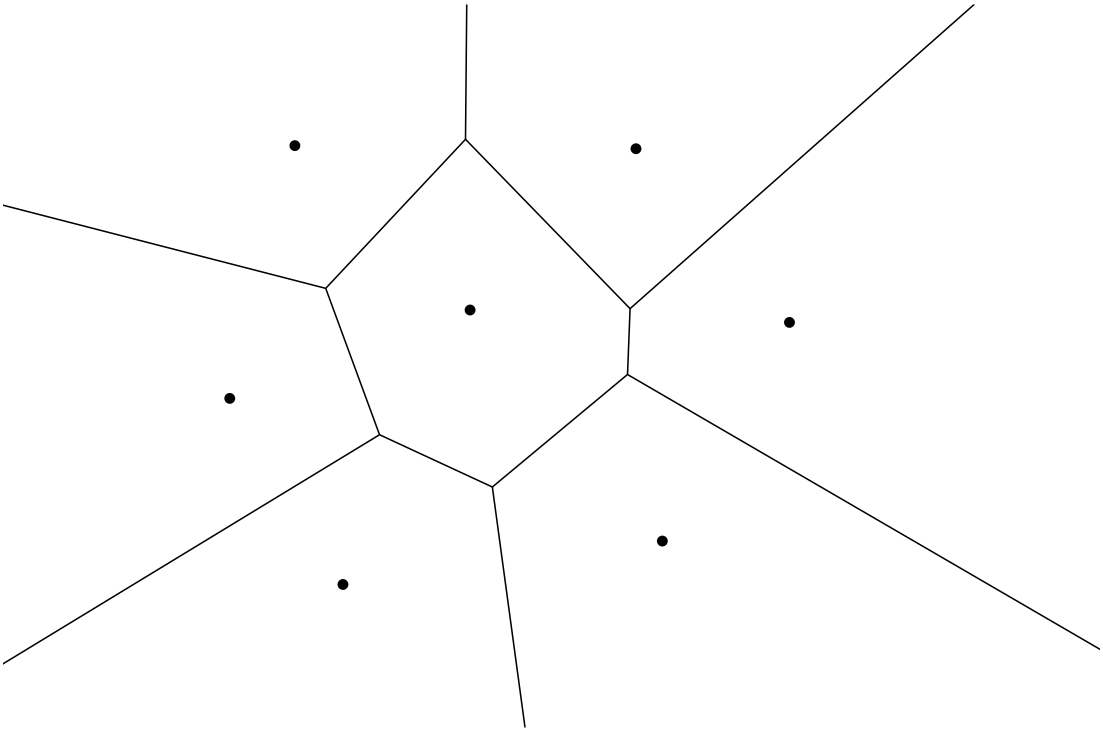
Voronéo mozaiku lze zobecnit nahrazením eukleidovské vzdálenosti jinou funkcí. Jedním z takových zobecnění je Laguerrova mozaika.

Definice 6. *Ať $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{J}$ je konečná neprázdná množina bodů z $\mathbb{R}^n$ a pro $j \in \mathcal{J}$ je v_j reálné číslo. Pak pro $j \in \mathcal{J}$ definujeme $P_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j' \in \mathcal{J} \colon \|x-j\|^2 + v_j \leq \|x-j'\|^2 + v_{j'}\}$. Řekneme, že $\mathcal{L}(\mathcal{J}) = \pi\{P_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ je* Laguerrova mozaika generovaná $\mathcal{J}$*. Body množiny $\mathcal{J}$ nazveme* jádry *mozaiky $\mathcal{L}(\mathcal{J})$, čísla v_j* koeficienty *příslušných jader.*

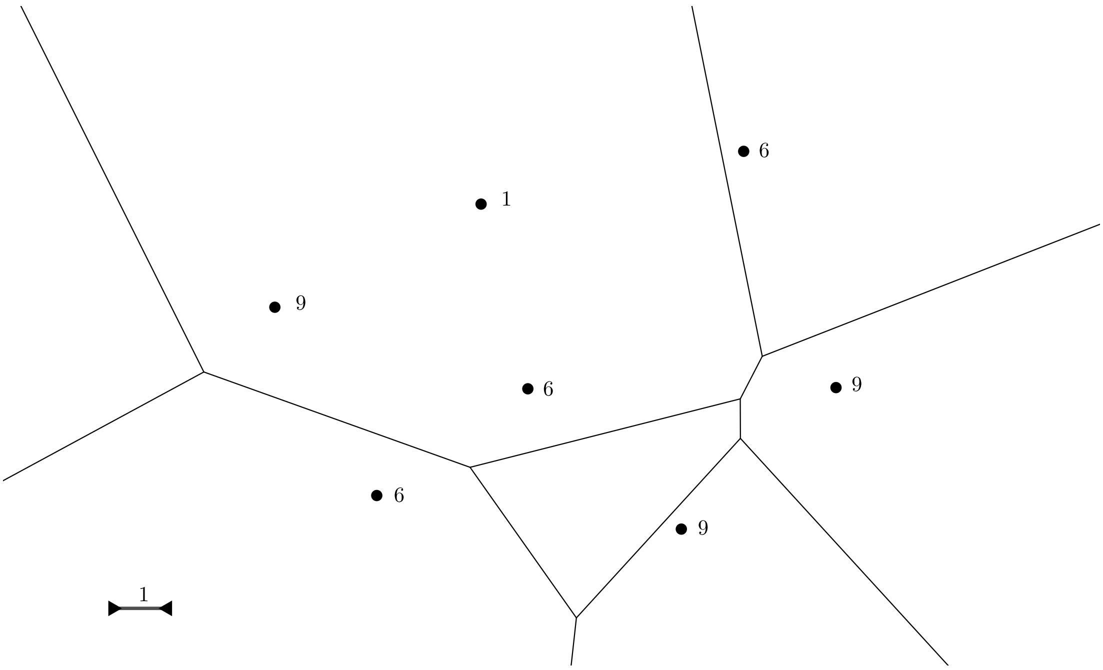
Příklad Laguerrovy mozaiky v $\mathbb{R}^2$ zobrazuje obrázek 1.3. Každé jádro je popsáno svým koeficientem, mozaika není invariantní na změnu měřítka. Všimneme si, že některé buňky neobsahují své jádro.

Pokud ke všem v_j přičteme pevně zvolené reálné číslo w, výsledná Laguerrova mozaika se nezmění. Díky konečnosti $\mathcal{J}$ můžeme zvolit w tak, aby pro všechna $j \in \mathcal{J}$ bylo $v_j + w$ kladné. Potom definujeme $\tilde{\mathcal{J}} = \{(j_1, \ldots, j_n, \sqrt{v_j + w})^T \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (j_1, \ldots, j_n) \in \mathcal{J}\}$. Laguerrova mozaika $\mathcal{L}(\mathcal{J})$ je průnikem Voronéo mozaiky $\mathcal{V}(\tilde{\mathcal{J}})$ s kanonickým vnořením $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^{n+1}$.

Protože $\mathbb{R}^n$ lze popsat jako průnik dvou uzavřených poloprostorů v $\mathbb{R}^{n+1}$, průnik mnohostěnu s $\mathbb{R}^n$ je opět mnohostěn a každá Laguerrova mozaika je mozaika podle definice 3.



Obrázek 1.2 Voroného mozaika.



Obrázek 1.3 Laguerrova mozaika.

2 Charakterizace Laguerrových mozaik

Pokusíme se odpovědět, za jakých podmínek můžeme najít množinu jader $\mathcal{J}$ s koeficienty $\{v_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ tak, že zadaná mozaika $\mathcal{C}$ je Laguerrova mozaika generovaná $\mathcal{J}$.

Definujeme *po částech lineární konvexní funkci*, která je nějakým způsobem ekvivalentní Laguerrově mozaice, a ukážeme, že každá nedegenerovaná regulární jednoduchá mozaika v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ je Laguerrova mozaika.

2.1 Po částech lineární konvexní funkce

Definice 7. *Ať $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}$ je mozaika v $\mathbb{R}^n$ a $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Řekneme, že f je* po částech lineární na mozaice $\mathcal{C}$*, pokud pro všechny $P \in \mathcal{C}$ je $f|_P$ lineární funkce.*

Příklad po částech lineární funkce na mozaice vyplňující nějaký uzavřený jednorozměrný interval najdeme na obrázku 2.1.

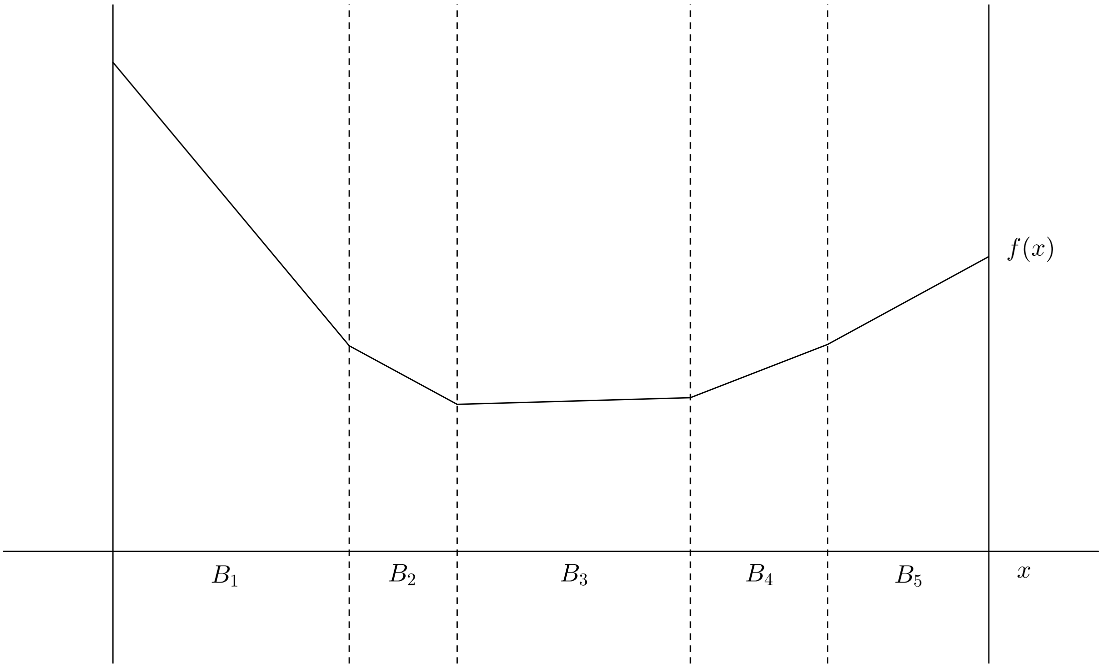
Po částech lineární *(ryze) konvexní* funkci můžeme chápat také jako konečnou množinu lineárních funkcí takovou, že na každé buňce mozaiky jedna funkce shora omezuje ostatní a na vnitřku té buňky ostatní omezuje *ostře*.

Často se nám povede na nějaké mozaice zkonstruovat po částech lineární funkci a budeme chtít dokázat, že je tato funkce konvexní. K tomu použijeme následující lemma.

Lemma 3. *Ať $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\mathcal{C}$ je jednoduchá regulární mozaika v $\mathbb{R}^n$ a $m \leq n-2$ je nejnižší číslo takové, že $\mathcal{C}$ obsahuje alespoň jednu m-stěnu. Ať f je po částech lineární funkce na $\mathcal{C}$ a ať pro nějaké dvě sousedící buňky B_0, B_0' je f konvexní na $B_0 \cup B_0'$. Pak už je f konvexní na celé $\mathcal{C}$.*

Důkaz. Pro libovolnou buňku B označíme f_B lineární funkci shodnou s f na B. Nejprve sporem ukážeme, že pro každé dvě sousední buňky B_ω, B_ω' jest $f_{B_\omega} \geq f_{B_\omega'}$ na B_ω. Označíme $S_0 = B_0 \cap B_0'$, $S_\omega = B_\omega \cap B_\omega'$. Podle lemmatu 1 najdeme souvislou posloupnost $(n-1)$-stěn $S_0, S_1, \ldots, S_k = S_\omega$ a buňky, jejichž průnikem je S_i, označíme B_i a B_i'. Ukážeme, že $f_{B_1} \geq f_{B_1'}$ na B_1 a naopak. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $B_1' = B_0$. Vezměme nějakou afinní bázi $v_0, \ldots, v_{n-2}$ $(n-2)$-stěny $S_0 \cap S_1 = B_0 \cap B_0' \cap B_1$ a doplňme ji body v_{n-1}, v_n z $(n-1)$-stěn S_1, $B_1 \cap B_0'$ na afinní bázi celého prostoru $\mathbb{R}^n$. Pak každý bod $x \in B_1$ můžeme zapsat jako $v_0 + t_1(v_1 - v_0) + \ldots + t_n(v_n - v_0)$ kde $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_0^+$ a

$$
\begin{aligned}
f_{B_1}(x) =& f_{B_1}(v_0) + t_1(f_{B_1}(v_1) - f_{B_1}(v_0)) + \ldots \\
&\ldots + t_{n-1}(f_{B_1}(v_{n-1}) - f_{B_1}(v_0)) + t_n(f_{B_1}(v_n) - f_{B_1}(v_0)) = \\
=& f_{B_0}(v_0) + t_1(f_{B_0}(v_1) - f_{B_0}(v_0)) + \ldots \\
&\ldots + t_{n-1}(f_{B_0}(v_{n-1}) - f_{B_0}(v_0)) + t_n(f_{B_0'}(v_n) - f_{B_0}(v_0)) \geq \\
\geq& f_{B_0}(v_0) + t_1(f_{B_0}(v_1) - f_{B_0}(v_0)) + \ldots \\
&\ldots + t_{n-1}(f_{B_0}(v_{n-1}) - f_{B_0}(v_0)) + t_n(f_{B_0}(v_n) - f_{B_0}(v_0)) = f_{B_0}(x).
\end{aligned}
$$



Obrázek 2.1 Po částech lineární konvexní funkce v $\mathbb{R}$.

Indukcí podle posloupnosti $S_0, \ldots, S_k$ ukážeme, že $f_{B_\omega} \geq f_{B'_\omega}$ na B_ω.

Teď ať B, $\tilde{B}$ jsou jakékoli dvě buňky, $x, \tilde{x}$ nějaké jejich body a p je přímka spojující $x, \tilde{x}$. Podle předchozího je $f|_p$ lokálně konvexní funkce, tedy konvexní na celé p, $f_B(x) \geq f_{\tilde{B}}(x)$ a f je konvexní na celé $\mathcal{C}$. $\square$

Lemma 4. *Ať $n \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{C}$ je mozaika v $\mathbb{R}^n$. Pak $\mathcal{C}$ je Laguerrova mozaika, právě když existuje po částech lineární konvexní funkce f na $\mathcal{C}$.*

Důkaz. Ať $\mathcal{C}$ je Laguerrova mozaika generovaná množinou $\mathcal{J}$ s koeficienty $\{v_j \mid j \in \mathcal{J}\}$. Bod $x \in \mathbb{R}^n$ náleží do buňky P_j, právě když pro všechna $j' \in \mathcal{J}$

$$\|x - j\|^2 + v_j \leq \|x - j'\|^2 + v_{j'},$$

$$\langle x,x \rangle - 2\langle x,j \rangle + \langle j,j \rangle + v_j \leq \langle x,x \rangle - 2\langle x,j' \rangle + \langle j',j' \rangle + v_{j'},$$

$$2\langle x,j \rangle - \langle j,j \rangle - v_j \geq 2\langle x,j' \rangle - \langle j',j' \rangle - v_{j'}.$$

Podle poznámky za definicí 7 je $f = \max\{2\langle x,j \rangle - \|j\|^2 - v_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ po částech lineární konvexní funkce na $\mathcal{C}$.

Ať $\mathcal{C}$ je mozaika a $f = \max\{f_i \mid i \in \tilde{\mathcal{J}}\}$ po částech lineární konvexní funkce na $\mathcal{C}$ pro nějakou konečnou množinu $\tilde{\mathcal{J}}$ a lineární funkce f_i. Funkci f_i lze zapsat jako $f_i = 2\langle x,j_i \rangle + c_i$ pro nějaké $j_i \in \mathbb{R}^n$ a $c_i \in \mathbb{R}$. Pokud by pro i, $i' \in \tilde{\mathcal{J}}$, $i \neq i'$ platilo $j_i = j_{i'}$, jedna z funkcí f_i, $f_{i'}$ by měla nižší hodnoty na celém $\mathbb{R}^n$ než druhá a z konstrukce f bychom ji tak mohli zanedbat. Podle výpočtu výše množina $\mathcal{J} = \{j_i \mid i \in \tilde{\mathcal{J}}\}$ s koeficienty $v_{j_i} = -\|j_i\|^2 - c_i$ generuje Laguerrovu mozaiku $\mathcal{C}$. $\square$

Ekvivalentní lemma je dokázáno i v [4].

2.2 Situace v $\mathbb{R}^1$

Tvrzení 5. *Každá mozaika v $\mathbb{R}$ je Laguerrova.*

Důkaz. Každá mozaika v $\mathbb{R}$ je systém uzavřených intervalů a jejich hraničních bodů. Ať $\mathcal{C}$ je nějaká mozaika v $\mathbb{R}$ s vrcholy $p_1, \ldots, p_k$ a buňkami $P_0 = (-\infty, p_1]$, $P_1 = [p_1, p_2], \ldots, P_{k-1} = [p_{k-1}, p_k]$, $P_k = [p_k, \infty)$. Definujeme po částech lineární konvexní funkci f jako

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in P_0 \\ f(p_i) + i \cdot (x - p_i) & x \in P_i \end{cases}.$$

To je korektní definice a podle lemmatu 4 je $\mathcal{C}$ Laguerrova mozaika.

Funkci f můžeme přepsat jako

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in P_0 \\ ix - \sum_{l=1}^{i} p_l & x \in P_i \end{cases}$$

a odsud můžeme vyjádřit množinu $\mathcal{J}$ generující Laguerrovu mozaiku $\mathcal{C}$ jako $\mathcal{J} = \{j/2 \mid j = 0, \ldots, k\}$ s koeficienty $v_0 = 0$ a $v_j = \sum_{l=1}^{j} p_l - j^2/4$ pro $j = 1, \ldots, k$. $\square$

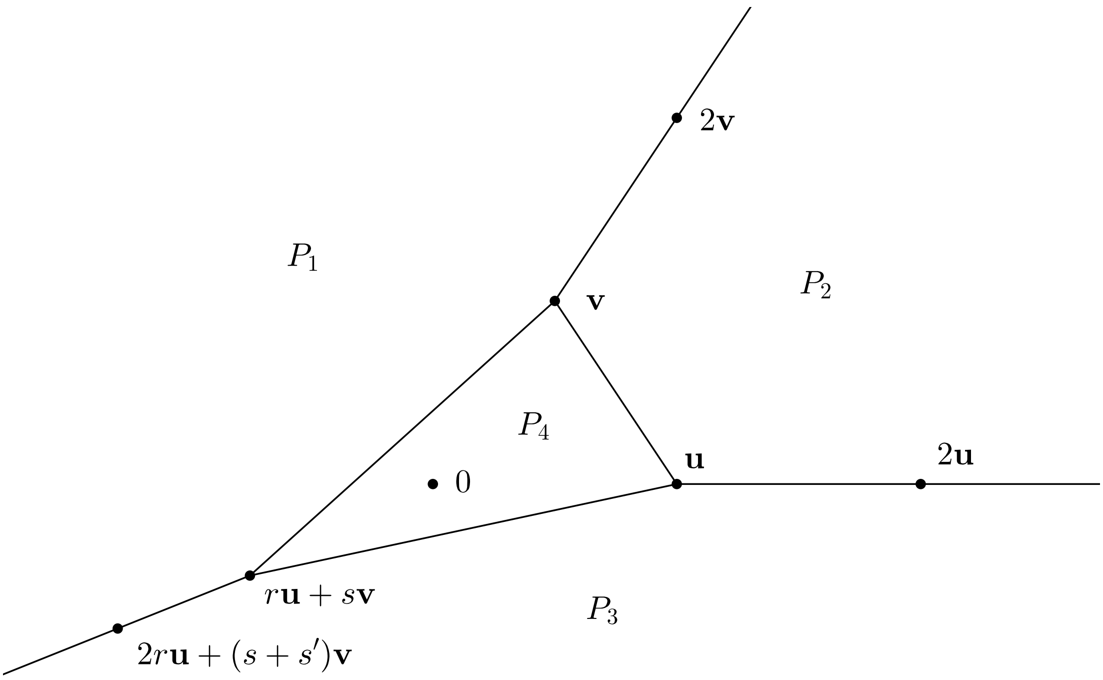
Při konstrukci funkce f záleží pouze na tom, aby derivace f' na buňce P_{i+1} byla větší než na buňce P_i. Po částech lineárních konvexních funkcí a tedy i množin jader generujících mozaiku $\mathcal{C}$ je nespočetně mnoho s $k + 1$ stupni volnosti.

Existuje mozaika v $\mathbb{R}$, která není Voroného. Stačí, aby mozaika $\mathcal{C}$ měla alespoň 5 buněk s vrcholy $p_1, \ldots, p_4$ a $p_2 - p_1, p_4 - p_3 < (p_3 - p_2)/2$. Protože ve Voroného mozaikách každé jádro leží v buňce jím generované, musí pro jádra $j_0, \ldots, j_4$ platit

$$\begin{aligned} j_2 - p_2 = p_2 - j_1 &< \frac{p_3 - p_2}{2} \\ p_3 - j_2 = j_3 - p_3 &< \frac{p_3 - p_2}{2} \\ p_3 - j_2 + j_2 - p_2 &< p_3 - p_2, \end{aligned}$$

což je spor.

Pokud má ale mozaika v $\mathbb{R}$ 4 nebo méně buněk, jedná se vždy o Voroného mozaiku. Ať $k \leq 3$ a $\mathcal{C}$ je mozaika s vrcholy $p_1, \ldots, p_k$ a buňkami $P_0, \ldots, P_k$ a pokud $k = 3$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $p_2 - p_1 \leq p_3 - p_2$. Pak zvolíme jádro j_1 libovolně v buňce P_1, $j_0 = 2p_1 - j_1$ a $j_2 = 2p_2 - j_1$, $j_3 = 2p_3 - j_2 = 2p_3 - 2p_2 + j_1$, pokud existují.



Obrázek 2.2 Jednoduchá regulární mozaika v $\mathbb{R}^2$, která není Laguerrova.

2.3 Situace v $\mathbb{R}^2$

Existuje regulární jednoduchá mozaika v $\mathbb{R}^2$, která není Laguerrova. Ať $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ je nějaká báze prostoru $\mathbb{R}^2$ a $r, s, s' \in (-\infty, -1]$, $\frac{s}{r-1} < \frac{s'}{r} < \frac{s-1}{r}$, $s \neq s'$. Pak mozaika $\mathcal{C}$ s hranami

$$\begin{array}{cc} t\mathbf{u} & t \in [1, \infty) \\ t\mathbf{v} & t \in [1, \infty) \\ t(r\mathbf{u} + s'\mathbf{v}) + r\mathbf{u} + s\mathbf{v} & t \in (-\infty, -1] \\ t(r\mathbf{u} + s\mathbf{v}) + (1-t)\mathbf{u} & t \in [0, 1] \\ t(r\mathbf{u} + s\mathbf{v}) + (1-t)\mathbf{v} & t \in [0, 1] \\ t\mathbf{u} + (1-t)\mathbf{v} & t \in [0, 1] \end{array}$$

a buňkami označenými jako na obrázku 2.2 není Laguerrova.

Hledáme konvexní funkci f po částech lineární na $\mathcal{C}$. Taková funkce bude mít tvar $f(x) = \langle \mathbf{w}_i, x \rangle + a_i$ pro $x \in P_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ a nějaké $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^2, a_i \in \mathbb{R}$. Pro body na hranách mozaiky se musí částečné lineární funkce sousedních buněk rovnat, a tak získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v} \rangle + a_1 &= \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{v} \rangle + a_2 \\ \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{u} \rangle + a_2 &= \langle \mathbf{w}_3, \mathbf{u} \rangle + a_3 \\ \langle \mathbf{w}_1, r\mathbf{u} + s\mathbf{v} \rangle + a_1 &= \langle \mathbf{w}_3, r\mathbf{u} + s\mathbf{v} \rangle + a_3 \\ \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v} \rangle + a_1 &= \langle \mathbf{w}_4, \mathbf{v} \rangle + a_4 \\ \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{u} \rangle + a_2 &= \langle \mathbf{w}_4, \mathbf{u} \rangle + a_4 \\ \langle \mathbf{w}_1, r\mathbf{u} + s\mathbf{v} \rangle + a_1 &= \langle \mathbf{w}_4, r\mathbf{u} + s\mathbf{v} \rangle + a_4 \\ \langle \mathbf{w}_1, 2\mathbf{v} \rangle + a_1 &= \langle \mathbf{w}_2, 2\mathbf{v} \rangle + a_2 \\ \langle \mathbf{w}_2, 2\mathbf{u} \rangle + a_2 &= \langle \mathbf{w}_3, 2\mathbf{u} \rangle + a_3 \\ \langle \mathbf{w}_1, 2r\mathbf{u} + (s + s')\mathbf{v} \rangle + a_1 &= \langle \mathbf{w}_2, 2r\mathbf{u} + (s + s')\mathbf{v} \rangle + a_2, \end{aligned}$$

která má řešení pouze ve tvaru $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_4$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, každá funkce po částech lineární na $\mathcal{C}$ je lineární na celém $\mathbb{R}^2$ a podle lemmatu 4 $\mathcal{C}$ není Laguerrova mozaika.

I ve dvourozměrném případě existuje Laguerrova mozaika, která není Voroného. K jejímu nalezení potřebujeme následující tvrzení o hledání jader Voroného mozaiky.

Věta 6. *Ať $\mathcal{C}$ je regulární jednoduchá Voroného mozaika v $\mathbb{R}^2$ a v je nějaký její vrchol. Ať α, β a γ jsou úhly svírané hranami obsahujícími vrchol v, P_α, P_β, P_γ jsou příslušné buňky a j_α, j_β, j_γ jsou jejich jádra. Pak polopřímka vj_α svírá s hranou $P_\alpha \cap P_\beta$ úhel* $180° - \gamma$.

Důkaz. Podle definice Voroného mozaiky platí pro každý bod $x \in P_\alpha \cap P_\beta$ $\|x - j_\alpha\| = \|x - j_\beta\|$. Speciálně to platí pro body v a $x_0 = \arg\min\{\|x - j_\alpha\| \mid x \in P_\alpha \cap P_\beta\}$. Pak na základě shodnosti trojúhelníhů $j_\alpha v x_0$ a $j_\beta v x_0$ jsou neorientované úhly $\angle x_0 v j_\alpha$ a $\angle x_0 v j_\beta$ stejné. Totéž platí pro úhly mezi polopřímkami vj_β, vj_γ a hranou $P_\beta \cap P_\gamma$, resp. vj_α, vj_γ a $P_\alpha \cap P_\gamma$.

Označíme-li $\varepsilon = \angle j_\alpha v x_0$, postupnou aplikací výše odvozených rovností dostaneme $\alpha = 2\varepsilon + \gamma - \beta$, což upravíme na $2\varepsilon + 2\gamma = \alpha + \beta + \gamma = 360°$.

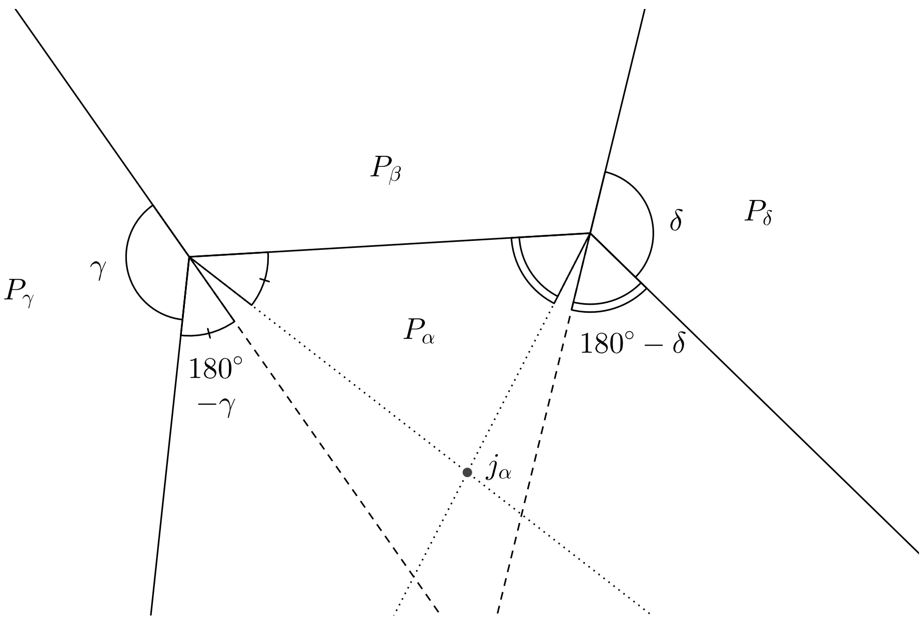
Nalezení jádra buňky, která má alespoň dva vrcholy, zachycuje obrázek 2.3. $\square$

Věta je dokázána v [6], str. 66.

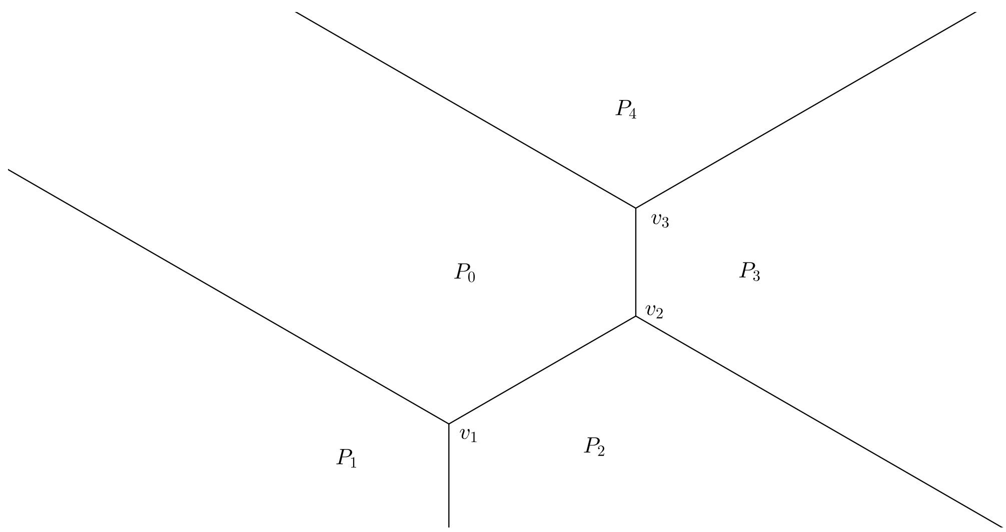
Příklad Laguerrovy mozaiky $\mathcal{C}$, která není Voroného, sestává z pěti neomezených buněk $P_0, \ldots, P_4$, kde P_0 má společnou hranu s každou z ostatních buněk jako na obrázku 2.4. Mozaika $\mathcal{C}$ má dvě omezené hrany různých délek a tři vrcholy v_1, v_2, v_3. Úhly svírané hranami u každého vrcholu jsou vždy 120°.

Podle věty 6 leží jádro buňky P_0 na průsečíku přímek určených hranami neobsaženými v P_0. Díky volbě různých délek omezených hran ale tento průsečík neexistuje a $\mathcal{C}$ tak není Voroného mozaika.

Zkonstruujeme konvexní po částech lineární funkci $f = \max\{f_0, \ldots, f_4\}$ na $\mathcal{C}$. Na buňce P_0 bude f_0 konstantně rovna 0, na ostatních buňkách pro $i = 1, \ldots, 4$ položíme $f_i(x) = \operatorname{dist}(x, h_i)$, kde h_i je přímka obsahující hranu $P_0 \cap P_i$. To je korektní definice, neboť pro $x \in P_i \cap P_{i+1}$, $v = P_0 \cap P_i \cap P_{i+1}$ a x_i, x_{i+1} průměty bodu x na h_i, h_{i+1} jsou trojúhelníky vx_ix a $vx_{i+1}x$ shodné a $\operatorname{dist}(x, h_i) = \operatorname{dist}(x, h_{i+1})$. Také konvexita funkce f je splněna.



Obrázek 2.3 Hledání jader Voroného mozaiky.



Obrázek 2.4 Laguerrova mozaika, která není Voroného.

2.4 Situace v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$

Regulární jednoduchou mozaiku $\mathcal{C}$ v $\mathbb{R}^2$, která není Laguerrova, lze snadno upravit na regulární jednoduchou mozaiku $\tilde{\mathcal{C}} = \{P + \mathbb{R}^{2\perp} \mid P \in \mathcal{C}\}$, kde $\mathbb{R}^{2\perp}$ je ortogonální doplněk kanonického vnoření $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^n$. Ani $\tilde{\mathcal{C}}$ není Laguerrova, protože každá po částech lineární konvexní funkce na $\tilde{\mathcal{C}}$ je po částech lineární konvexní i na $\mathcal{C}$. Kromě takovýchto degenerovaných případů je ale každá regulární jednoduchá mozaika v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ Laguerrova.

Věta 7. *Ať $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ a $\mathcal{C}$ je regulární jednoduchá mozaika v $\mathbb{R}^n$ obsahující alespoň jednu $(n-3)$-stěnu. Pak je $\mathcal{C}$ Laguerrova mozaika.*

Důkaz provedeme konstrukcí po částech lineární konvexní funkce, a to postupně na jistých podmnožinách $\mathbb{R}^n$, které se neshodují se sjednocením žádné množiny buněk $\mathcal{C}$. K důkazu budeme potřebovat několik pomocných tvrzení a jednu definici.

Definice 8. *Ať $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}$ je jednoduchá regulární mozaika v $\mathbb{R}^n$ a M je nějaká množina buněk mozaiky $\mathcal{C}$. Řekneme, že vrchol v mozaiky $\mathcal{C}$ je* skoro vnitřní *vzhledem k M, pokud je vrcholem právě n buněk množiny M.*

Tato definice je zkratkou za výrok, že k M lze přidat jednu buňku B tak, aby vrchol v byl vnitřní vzhledem ke sjednocení všech buněk z M a buňky B.

Můžeme předpokládat, že $\mathcal{C}$ obsahuje alespoň jeden vrchol, jinak problém vyřešíme v nižší dimenzi.

Lemma 8. *Ať $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}$ je regulární jednoduchá mozaika v $\mathbb{R}^n$ a $m \in \mathbb{N}$ je nejmenší číslo takové, že $\mathcal{C}$ obsahuje m-stěnu. Pak existuje afinní podprostor $X \subset \mathbb{R}^n$ dimenze $n - m$ takový, že pokud je mozaika $X \cap \mathcal{C}$ Laguerrova, pak je Laguerrova i mozaika $\mathcal{C}$. Mozaika $X \cap \mathcal{C}$ má alespoň jeden vrchol.*

Důkaz. Ať $P \in \mathcal{C}$ je m-stěna. Podle předpokladu P nemá žádné vlastní stěny, protože by měly dimenzi nižší než m. Tak můžeme zapsat $P = p + L$, kde $p \in \mathbb{R}^n$ je bod a $L \subset \mathbb{R}^n$ je lineární prostor.

Ať B je buňka obsahující stěnu P, taková buňka existuje díky regularitě $\mathcal{C}$. Pro každý bod $b \in B$ platí $b + L \in B$. Kdyby ne, jeden z poloprostorů definujících B by musel mít hranici protínající se s P a P by tak měla stěnu. Podobně i všechny buňky dotýkající se B musí být uzavřeny na přičtení L a postupným aplikováním tohoto principu je každá buňka mozaiky $\mathcal{C}$ uzavřena na přičtení L.

Za X ze znění lemmatu vezmeme ortogonální doplněk $L^\perp$. Mozaika $L^\perp \cap \mathcal{C}$ má alespoň jeden vrchol, $L^\perp \cap P$.

Ať f je po částech lineární konvexní funkce na $L^\perp \cap \mathcal{C}$ a $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow L^\perp$ je ortogonální projekce. Funkce $f \circ F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je konvexní po částech lineární funkce na $\mathcal{C}$. □

V důkazu několikrát využijeme faktu, že je-li po částech lineární funkce f definována na nějaké množině buněk $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, B je s alespoň jedním vrcholem skoro vnitřním vzhledem k $\mathcal{B}$ a všechny vrcholy buňky B skoro vnitřní vzhledem k $\mathcal{B}$ tvoří souvislý graf, pak lze f jednoznačně rozšířit na B se zachováním částečné linearity. Takové tvrzení je jednoduchým důsledkem následujícího lemmatu.

Lemma 9. *Ať $n \geq 3$, $\mathcal{C}$ je jednoduchá regulární mozaika v $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ je množina jejích buněk, na nichž je definována po částech lineární funkce f, B je její buňka a v, w jsou vrcholy buňky B skoro vnitřní vzhledem k $\mathcal{B}$ a v, w sdílí společnou hranu. Pak lze definovat lineární funkce g, h takové, že $f = g, h$ na všech stěnách buňky B obsahujících vrchol v, resp. w, a $g = h$.*

Důkaz. Vrchol v leží na $n + 1$ hranách, z toho n hran je hranami buňky B. Označme $v_1, \ldots, v_n$ ostatní vrcholy těchto hran. Vektory $v_1 - v, \ldots, v_n - v$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^n$, a tak $g(x) = f(v) + (f(v_1) - f(v))\, x_1 + \ldots + (f(v_n) - f(v))\, x_n$ pro $x = x_1(v_1 - v) + \ldots + x_n(v_n - v)$ je dobře definovaná lineární funkce shodná s f na stěnách buňky B obsahujících v. Podobně zkonstruujeme funkci h.

Ať w' je nějaký vrchol buňky B sousedící s w. Ukážeme, že $g(w') = h(w')$. Najdeme 2-stěnu S buňky B obsahující vrcholy v, w, w'. Protože vrcholy v i w jsou skoro vnitřní vzhledem k $\mathcal{B}$, musí být S stěnou nějaké buňky $B' \in \mathcal{B}$, $B' \neq B$. Navíc S obsahuje i nějaký vrchol $v' \neq w$ sousedící s v. Na B' a tedy i na S jsou f, g i h lineární funkce a $g = f$, $h = f$ na celé stěně S. Proto i $g = h$ na celé stěně S, speciálně $g(w') = h(w')$. Tímto způsobem ukážeme, že $g = h$ ve všech bodech, pomocí kterých jsme definovali funkci h. Z toho již plyne, že $g = h$. $\square$

Obdoba tohoto lemmatu, která ale místo po částech lineární konvexní funkce rozšiřuje ortogonální duál, je dokázána v článku [4].

Lemma 10. *Ať $\mathcal{C}$ je regulární jednoduchá mozaika v $\mathbb{R}^2$ a $k \in \mathbb{N}$ je počet buněk mozaiky $\mathcal{C}$. Pak existuje seřazení $B_1, B_2, \ldots, B_k$ buněk mozaiky $\mathcal{C}$ takové, že*

- *buňky B_1, B_2, B_3 sdílejí jeden společný vrchol,*
- *pro $l > 3$ má buňka B_l alespoň jeden vrchol skoro vnitřní vzhledem ke množině $\{B_i\}_{i=1}^{l-1}$,*
- *pro $l > 3$ množina hran ležících v $B_l \cap \bigcup_{i=1}^{l-1} B_i$ je souvislá.*

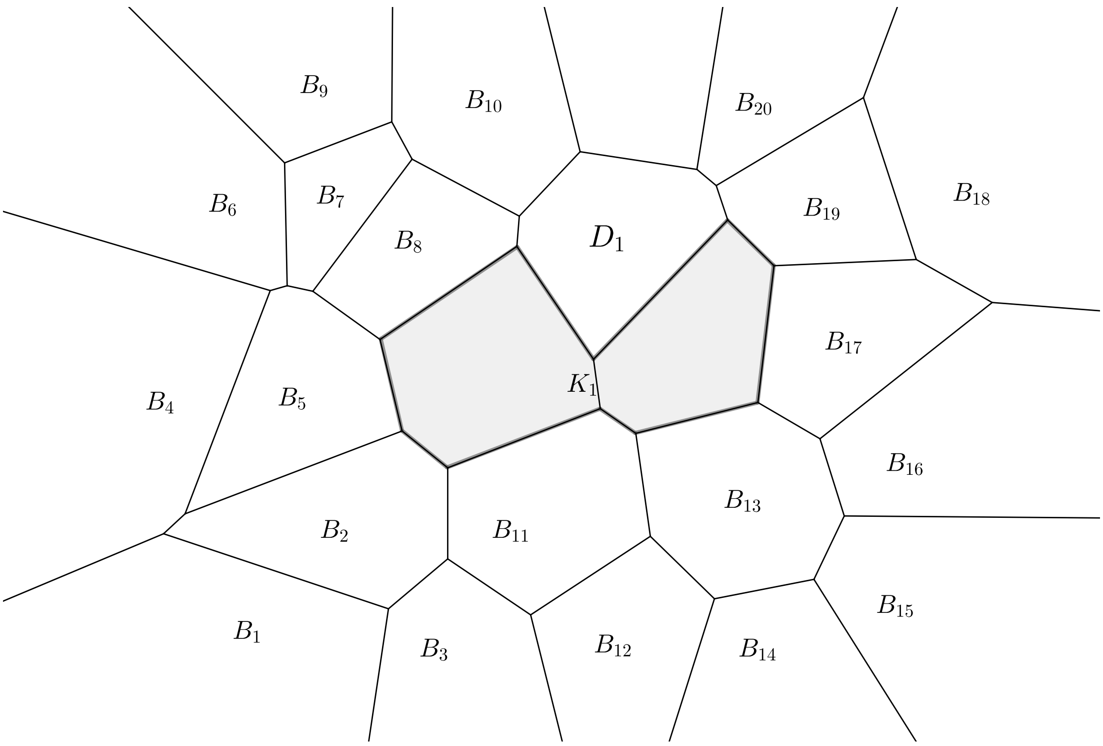
Důkaz. Ať $\mathcal{C}$ je jednoduchá regulární mozaika v $\mathbb{R}^2$ obsahující alespoň jeden vrchol. Za buňky B_1, B_2, B_3 zvolíme buňky obsahující nějaký zvolený vrchol. Pro $l > 3$ vybereme buňku B_l následovně:

Ať $S_1 = B_1 \cap B_2$ a S_ω je nějaká hrana přiléhající k nějaké dosud nevybrané buňce. Podle lemmatu 1 existuje souvislá posloupnost hran $S_1, \ldots, S_\omega$ a v této posloupnosti lze najít nějakou hranu S_i takovou, že $S_i \cap S_{i+1}$ je obsažen v právě dvou buňkách z $B_1, \ldots, B_{l-1}$. Třetí buňka obsahující tento vrchol pak splňuje druhý požadavek lemmatu.

Zkonstruujeme posloupnost množin buněk $K_0, K_1, \ldots$ takto:
$K_0 = \mathcal{C} \setminus \{B_1, \ldots, B_{l-1}\}$ a máme-li nalezenou množinu K_i, najdeme nějakou buňku $D_{i+1} \in K_i$ splňující druhý požadavek lemmatu. Pokud D_{i+1} splňuje i třetí požadavek, jsme hotovi, pokud ne, dělí D_{i+1} množinu K_i na dvě komponenty souvislosti, z nichž jedna neobsahuje buňku D_i. Tuto komponentu zvolíme za K_{i+1}. Hledání K_1 v nějaké mozaice zobrazuje obrázek 2.5.

Množina K_{i+1} má méně buněk než K_i, proto v nějakém konečném kroku musí D_i splňovat druhý i třetí požadavek lemmatu a zvolíme ji za B_l. $\square$

Toto lemma je použito ve článku [4].



Obrázek 2.5 Hledání seřazení podle lemmatu 10.

Větu 7 přeformulujeme způsobem, který umožní důkaz indukcí. Tvrzení věty 7 dostaneme z následující věty, pokud zvolíme $m = n$ a aplikujeme lemma 4. Tvrzení věty 7 pro mozaiky bez vrcholů získáme aplikací lemmatu 8.

Věta 11. *Ať $n \geq 3$, $2 \leq m \leq n$ a $\mathcal{C}$ je jednoduchá regulární mozaika v $\mathbb{R}^n$ obsahující alespoň jeden vrchol. Ať ϱ je nějaká m-rovina v $\mathbb{R}^n$, která neobsahuje žádnou stěnu $\mathcal{C}$, $\mathcal{D} = \varrho \cap \mathcal{C}$ je jednoduchá regulární mozaika a $D = \{S \in \mathcal{C} \mid S \cap \varrho \neq \emptyset\}$ je množina všech stěn $\mathcal{C}$ protínajících se s rovinou ϱ. Pak existuje po částech lineární konvexní funkce na D.*

Důkaz. Postupujeme indukcí podle m. Mozaika $\mathcal{D}$ je podle předpokladu jednoduchá regulární.

Pro $m = 2$ seřadíme buňky mozaiky $\mathcal{D}$ pomocí lemmatu 10 jako $P_1, \dots, P_k$ a zvolíme buňky $B_1, \dots, B_k$ mozaiky $\mathcal{D}$ tak, aby pro $l = 1, \dots, k$ platilo $P_l = B_l \cap \varrho$, B_l měla alespoň jednu $(n-2)$-stěnu společnou s nějakými dvěma buňkami z $B_1, \dots, B_{l-1}$ a aby $(n-1)$-stěny společné buňce B_l a buňkám $B_1, \dots, B_{l-1}$ tvořily souvislou množinu.

Zvolíme funkci f po částech lineární konvexní na buňkách B_1, B_2, B_3 a induktivně ji budeme rozšiřovat na další buňky posloupnosti.

Pro $l > 3$ najdeme $i, j < l$ tak, že $h = B_l \cap B_i \cap B_j \neq \emptyset$. Stěna h je $(n-2)$-stěna a tedy má afinní bázi $a_0, \dots, a_{n-2}$. Vybereme ještě nějaké dva body $a_{B_i} \in B_l \cap B_i \setminus h$, $a_{B_j} \in B_l \cap B_j \setminus h$. Body $a_0, \dots, a_{n-2}, a_{B_i}, a_{B_j}$ tvoří afinní bázi celého $\mathbb{R}^n$ a jelikož známe hodnoty f v těchto bodech, můžeme jednoznačně rozšířit f na B_l. Protože $a_0, \dots, a_{n-2}, a_{B_i}$, resp. $a_0, \dots, a_{n-2}, a_{B_j}$ tvoří afinní bázi stěny $B_i \cap B_l$, resp. $B_j \cap B_l$, je f na těchto stěnách dobře definovaná.

Musíme ověřit, že pro každé dvě různé volby i, j, i', j' v předchozí konstrukci bude rozšíření f na B_l stejné. Díky vlastnostem seřazení stačí ověřit pro $i = i'$.

Zkonstruujeme nějakou po částech lineární funkci g na buňkách sousedících s B_i takto: zvolíme nějaký vrchol $v_0 \in B_j \cap B_i$ a vektor $\mathbf{e}$ tak, aby pro každé dva vrcholy v, v' buňky B_i platilo $\langle v,\mathbf{e}\rangle \neq \langle v', \mathbf{e}\rangle$ a $\langle v_0,\mathbf{e}\rangle \leq \langle v, \mathbf{e}\rangle$. Označíme $t_0, \dots, t_r$ seřazené hodnoty $\langle v_s,\mathbf{e}\rangle$ pro jednotlivé vrcholy v_s a pro $s = 1, \dots, r$ označíme $K_s = \{x \in \partial B_i \mid \langle x,\mathbf{e}\rangle < t_s\}$, $\mathcal{K}_s = \{h_{v_{s-1}}\} \cup \{S \in \mathcal{C} \mid \exists u = 1, \dots, s-1 \colon h_{v_u} \subset S\}$. Funkci g budeme konstruovat po krocích, v s-tém kroku najdeme hodnoty g na $\mathcal{K}_s$.

Stanovíme $g = f$ na B_i. Pro každý vrchol v buňky B_i označíme h_v tu hranu obsahující vrchol v, která není hranou buňky B_i. V prvním kroku položíme $g = f$ na h_{v_0} a pro každou další stěnu $S \in \mathcal{K}_1$ najdeme afinní bázi stěny $S \cap B_i$, která se doplněním o nějaký bod z h_{v_0} stane afinní bází celé S a můžeme rozšířit g na S.

Ať $s = 2, \dots, r$. Nejdřív stanovíme hodnotu g na hraně h_{v_s}. Hrana h_{v_s} je totiž hranou nějaké stěny $S \in \mathcal{K}_{s-1}$ a můžeme rozšířit g z S na h_{v_s}. Kdyby dvě takové stěny S_1, S_2 dávaly různá rozšíření, najdeme stěnu $S_3 \supset S_1 \cup S_2$ takovou, že $S_3 \in \mathcal{K}_{i-1}$ a rozšíříme g na h_{v_s} z S_3. Rozšíření z S_1, S_2 se musí s rozšířením z S_3 shodovat. Existuje právě jedna buňka $B_s \in K_s \setminus K_{s-1}$, ta má právě jednu hranu $h_{v_{s-1}}$, na které je známa funkce g. Tak můžeme právě jedním způsobem rozšířit g na B_s. Funkce g je díky lemmatu 3 konvexní.

Ukážeme, že $f = g$ na $\{B_s\}_{s=1}^{l-1}$. Buňka P_i mozaiky $\mathcal{D}$ je 2-stěna, takže můžeme najít buňky $P_j = P_{j_1}, \dots, P_{j_z} = P_{j'}$ různé od P_l tak, že pro $s = 1, \dots, z-1$ je průnik $P_s \cap P_{s+1}$ neprázdný. Tak existuje nejvýše jedna po částech lineární funkce shodná s f na B_i, B_j, takže $f = g$ na $B_{j'}$ a lze rozšířit f na B_l.

Pro $m > 2$ zvolíme vektor $\mathbf{e}$ rovnoběžný s ϱ splňující pro každé dva různé body $x, x' \in \varrho$ $\langle x,\mathbf{e}\rangle \neq \langle x', \mathbf{e}\rangle$ a $(m-1)$-rovinu $\varrho_0 \subset \varrho$ kolmou na $\mathbf{e}$ takovou, že všechny vrcholy mozaiky $\mathcal{D}$ leží v jedné polorovině roviny ϱ určené podrovinou ϱ_0. Podle lemmatu 2 je mozaika $\mathcal{D}_0 = \varrho_0 \cap \mathcal{D}$ jednoduchá regulární, průnikem nějaké hrany mozaiky $\mathcal{D}$ s rovinou ϱ_0 je nějaký vrchol mozaiky $\mathcal{D}_0$, a podle indukčního předpokladu existuje po částech lineární konvexní funkce f na $D_0 = \{B \in \mathcal{C} \mid B \cap \varrho_0 \neq \emptyset\}$.

Vhodným způsobem uspořádáme vrcholy mozaiky $\mathcal{D}$ jako $v_1, \dots, v_r$, tak aby pro $i < j$ a $t_i = \langle v_i,\mathbf{e}\rangle$ bylo $t_i < t_j$. Pro $i \leq r$ označíme $K_i = \{x \in \varrho \mid \langle x,\mathbf{e}\rangle < t_i\}$ a $\mathcal{K}_i = \{S \in D \mid S \cap K_i \neq \emptyset\}$, $\mathcal{K}_0 = D_0$.

Funkci f hledáme po krocích, v i-tém kroku určíme její hodnoty na K_i a $\mathcal{K}_i$. Nejdřív hledáme hodnoty f na hranách mozaiky $\mathcal{D}$ z K_i, každá hrana h, která není již v K_{i-1} obsahuje vrchol v_{i-1} díky regularitě $\mathcal{D}$ náleží v_{i-1} nějaké hraně $h_{i-1} \subset K_{i-1}$. Tak 2-stěna S mozaiky $\mathcal{D}$ obsahující hrany h, h_{i-1} má neprázdný dvourozměrný průnik s K_{i-1} a lze rozšířit f z S na h. Buďte h_{i-1}, h'_{i-1} dvě hrany obsahující vrchol v_{i-1} a náležící K_{i-1}. Ukážeme, že rozšíření f na h pomocí obou těchto hran je stejné. 3-stěna S' mozaiky $\mathcal{D}$ obsahující hrany h, h_{i-1}, h'_{i-1} má trojrozměrný průnik s K_{i-1}, a tedy z ní lze jednoznačně rozšířit f na h.

Poté najdeme hodnoty f na celém K_i: na stěnách majících průnik s K_{i-1} můžeme rozšířit funkci z těchto průniků. Pokud S je stěna mozaiky $\mathcal{D}$ s neprázdným průnikem s K_i a prázdným průnikem s K_{i-1}, má S právě jeden vrchol v K_i, totiž v_{i-1} a zároveň známe hodnoty f na všech hranách S obsahujících vrchol v_{i-1} – můžeme tedy jednoznačně rozšířit f na S.

Nakonec najdeme hodnoty f na $\mathcal{K}_i$. Ať $B \in \mathcal{K}_i \setminus K_{i-1}$ je buňka. B má právě jednu $(n-m)$-stěnu V takovou, že je-li S stěna buněk B, B' a $B' \in \mathcal{K}_{i-1}$, pak $V \subset B'$ – totiž takovou, pro kterou $V \cap \varrho = v_{i-1}$. Existuje tak právě jedno rozšíření f na B.

Takto zkonstruovaná po částech lineární funkce je konvexní díky konvexitě f na D_0 a lemmatu 3. $\square$

Závěr

V práci jsme dokázali, že každá nedegenerovaná jednoduchá regulární mozaika v alespoň třech rozměrech je Laguerrova. Důkaz věty 11 je původní. Lemma 10 o seřazení buněk jsme dokázali pouze pro $\mathbb{R}^2$, přičemž důkaz pro obecné $\mathbb{R}^n$ by další důkaz hlavní věty značně zjednodušilo.

K důkazu jsme používali po částech lineární konvexní funkci, na rozdíl od ortogonálního duálu (množiny bodů reprezentujících jednotlivé buňky, která splňuje jisté vlastnosti), který používá [4]. Dokázat ekvivalent věty 11 pro ortogonální duál jsme se nepokoušeli.

Lautensacková [2] podává důkaz i pro mozaiky s nekonečně mnoha buňkami, a to opět za použití obecné podoby lemmatu 10. Důkaz věty 11 nelze přímo rozšířit na nekonečné mozaiky, protože vzdálenosti jednotlivých vrcholů od zadané roviny nemusí tvořit dobře uspořádanou množinu.

Literatura

1. Aurenhammer, F. Power Diagrams: Properties, Algorithms and Applications. *SIAM Journal on Computing*. 1987, roč. 16, č. 1, s. 78–96. issn 1095-7111.
2. Lautensack, Claudia. *Random Laguerre Tessellations*. 2007. Dis. pr. Fakultät für Mathematik der Universität Karlsruhe.
3. Davis, Chandler. The Set of Nonlinearity of a Convex Piecewise-Linear Function. *Scripta Mathematica*. 1959, roč. 24, s. 219–228.
4. Aurenhammer, Franz. A Criterion for the Affine Equivalence of Cell Complexes in $\mathbb{R}^d$ and Convex Polyhedra in $\mathbb{R}^{d+1}$. *Discrete & Computational Geometry*. 1987, roč. 2, s. 49–64.
5. Schneider, Rolf; Weil, Wolfgang. *Stochastic and Integral Geometry*. Springer-Verlag, 2008. isbn 978-3-540-78858-4.
6. Okabe, Atsuyuki; Boots, Barry; Sugihara, Kokichi; Chiu, Sung Nok; Kendall, D. G. *Spatial Tessellations*. John Wiley & Sons, Inc., 2000. isbn 9780471986355.

Seznam obrázků