

## Posudek oponenta na bakalářskou práci Antonína Hejného Typical martingales on the Cantor space

Bakalářská práce Antonína Hejného je věnována studiu limitního chování martingalů na Cantorově diskontinuu a navazuje zejména na práci [1]. Práce sestává ze tří kapitol. V první kapitole je podán přehled základních pojmů a výsledků o Cantorově diskontinuu, martingalech a pórovitých množinách. Ve druhé kapitole jsou uvedeny výsledky práce a ve třetí pak jejich důkazy.

V práci jsou studovány martingaly v jejich nejjednodušší verzi, tj. martingal je každé zobrazení  $f$  z prostoru  $2^{<\omega}$  do  $\mathbb{R}$ , které splňuje  $f(s) = \frac{1}{2}(f(s^{\wedge}0) + f(s^{\wedge}1))$  pro každé  $s \in 2^{<\omega}$ . (Symbol  $2^{<\omega}$  značí množinu všech konečných posloupností 0 a 1.) Slavná Doobova věta říká, že za jistých podmínek na martingal  $f$  existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\sigma|n)$  pro skoro všechna  $\sigma \in 2^\omega$ , přičemž na  $2^\omega$  uvažujeme obvyklou míru a symbol  $\sigma|n$  označuje počáteční segment délky  $n$  nekonečné posloupnosti  $\sigma$ .

Na prostoru martingalů je možné zavést metriku a pak lze dokazovat (nebo vyvracet) výsledky typu *Každý martingal vyjma martingalů z malé množiny má toto limitní chování*. V práci pana Hejného jsou pro zachycení pojmu malosti použity pojmy pórovitosti a  $\sigma$ -pórovitosti. Jde o metrické pojmy, které jsou více restriktivní než pojmy řídká množina, respektive množina první kategorie a které jsou využívány v reálné analýze a geometrii Banachových prostorů.

Předložená bakalářská práce obsahuje nové výsledky. Důkazy jsou netriviální a na bakalářskou práci technicky náročné. Práce ukazuje, že pan Hejný dobře porozuměl studované problematice. Jeho práce rozsahem, hloubkou a vlastním přínosem výrazně převyšuje běžný standard bakalářských prací. Text by mohl posloužit jako základ pro publikaci výsledků. Dobrý dojem kazí překlepy a nepřesnosti, které komplikují četbu práce. Konkrétní připomínky a otázky uvádím níže.

- 8<sub>1</sub>: Vzorec není dobře definovaný, pokud  $\eta = \nu$ .
- 9<sup>2</sup>: Pokud se  $P$  zavádí jako Haarova míra, měla by se zmínit grupová struktura na Cantorově diskontinuu.
- 9<sup>4</sup>: Definice není kompatibilní s Definicí 4.
- 10: Pro množinu přirozených čísel se používá dvou symbolů  $\mathbb{N}$  a  $\omega$ . Je 0 uvažována jako přirozené číslo?
- 11: Indukce by měla být lépe zapsána: není explicitně proveden první krok a v závěru důkazu se používá další matematická indukce opět podle  $n$ , které však bylo dříve zvoleno pevně.
- \*15<sub>1</sub>: Definice restringovaného martingalu je nejasná. Jak je martingal definován pro  $u \in 2^{<n}$ ?
- 16<sup>2</sup>: Mělo by být zdůrazněno, že jde o bodovou limitu.
- 16<sup>6</sup>: Co když je na pravé straně definičního vztahu nedefinovaný výraz?
- 16<sub>6</sub>: Domnívám se, že důkaz nelze provést pouze pomocí trojúhelníkové nerovnosti, ale je třeba pracovat i s definicí  $\limsup$  a  $\liminf$ .
- 19<sup>13</sup>: Má být  $2^{-k(n-1)}$ .
- 19<sup>15</sup>: Ve druhém členu chybí  $\setminus F$ .
- 22<sup>4</sup>: Má být "Although".
- 23<sup>18</sup>: Doobova věta má své předpoklady na uvažované martingaly. Tyto by se měly objevit ve znění věty.
- 22<sub>10</sub>: Má být  $\liminf f_n(\nu)$ .
- 23<sup>6</sup>: Má být  $(f_n(\eta))$ .
- 24<sup>14</sup>: Má být  $g_l(\eta)$ .
- 25<sup>12</sup>: Podmínka na  $\nu$  není srozumitelná.
- 26<sup>4</sup>: Jak je definována konvergence konečných posloupností k nekonečné?

- 28<sup>12</sup>: Jak je definována hodnota  $\rho(u, u)$ ?
- 28<sup>14</sup>: V Lemmatu 43 je zbytečné pracovat s dvojicí martingalů, stačí výsledek odvodit pro jeden martingal. Podobně je tomu v Lemmatu 46.
- 30<sup>5</sup>: Má být  $m_n + p$ .
- 31<sup>7</sup>, 31<sup>14</sup>: Má patrně být  $-k/p + 1$ . Pokud tomu tak je, pak by se tato technická změna projevila i na dalších místech.
- 34<sup>4</sup>: V rovnosti (3.27) může být i rovnost, a proto má být druhý člen s uzávěrem.
- 34<sup>16</sup>: Má být  $f^n - h^n$ .
- 39<sup>12,13</sup>: Místo " $\notin A_j$ " má být " $\cap A_j = \emptyset$ ".
- \*39<sup>14</sup>: Co je  $B_{l_i}$ ? Z kterého je systému?
- \*40<sup>18</sup>: Má být "is dense", podobně na straně 24.
- 43<sup>9</sup>: Co je  $\mathcal{B}_n$ ? Patrně jde o překlep.
- 45<sup>7</sup>: Překlep.

Ve výše uvedeném výčtu jsou některé připomínky jen okrajové nebo jde o zjevný překlep. Na připomínky označené \* by však měl pan Hejný reagovat během obhajoby.

Práce splňuje požadavky kladené na bakalářskou práci.

#### REFERENCE

- [1] Ondřej F. K. Kalenda and Jiří Spurný. Typical martingale diverges at a typical point. *J. Theoret. Probab.*, 29(1):180–205, 2016.

doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.