MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Kupec

# Tečna a polára kuželosečky

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.

Studijní program: Fyzika se zaměřením na vzdělávání

Studijní obor: Fyzika se zaměřením na vzdělávání se sdruženým studiem Matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2024

Na tomto místě bych chtěl poděkovat panu Mgr. Zdeňku Halasovi, DiS., Ph.D., za inspiraci, trpělivost, podporu a ochotu při vedení práce.

Dále bych chtěl poděkovat celé svojí třídě a svému třídnímu učiteli z gymnázia, panu Mgr. Marku Tylemu, za podporu a za skvělý kolektiv.

Veliké díky také patří paní PhDr. Petře Hoffmannové, panu Mgr. Martinovi Marešovi, Ph.D. a paní Monice Opicové za ochotnou pomoc při odstranění závěrečných problémů s TeXem.

V neposlední řadě bych také chtěl poděkovat své rodině za podporu v průběhu celého mého studia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne Podpis autora

**Abstrakt**

Název práce: Tečna a polára kuželosečky

Autor: Michal Kupec

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.

Abstrakt: V českých středoškolských učebnicích je téma tečen kuželoseček pojímáno různě. Někde jsou uvedeny rovnice prakticky bez jakéhokoli odvození, jinde jsou odvození sice uvedena, ale liší se pro každou kuželosečku. Tvar rovnic nicméně vypovídá o existenci jednotného principu jejich popisu, a tato práce si klade za cíl jej prozkoumat.

Pokud do rovnice tečny kuželosečky dosadíme místo bodu kuželosečky bod libovolný (i takový, který na ní neleží), získáme rovnici poláry. Podíváme se, co k tomuto tématu uvádějí české učebnice, a porovnáme jejich přístup.

Tato práce je určena především pro učitele středních škol a má jim sloužit jako průvodce problematikou tečen a polár. Obsahuje jak odvození pomocí vysokoškolské matematiky, tak odvození přizpůsobená výuce matematiky na středních školách.

Klíčová slova: kuželosečky, homogenní souřadnice, tečna, polára, asymptota

**Abstract**

Title: Tangent to a conic and polar line to a point with respect to a conic

Author: Michal Kupec

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: In Czech high school level textbooks, the topic of tangents of conic sections is tackled in different manners. In some of the textbooks, the equations are stated with barely any derivations, in others, the derivations are mentioned, but they are different for each conic section. However, the form of the equations implies the existence of an unified principle to describe them, and this work aims to inspect it.

If we plug any point in the equation of the tangent (even such a point that doesn't lie on the conic), we get the equation of a polar line. We will inspect how this topic is covered in Czech textbooks and we will compare their approach.

This work is mainly intended for high school teachers and it is supposed to serve them as a guide to the topic of tangents and polar lines. It includes derivations using university-level mathematics, as well as derivations adapted to the education of mathematics at high schools.

Keywords: conics, homogeneous coordinates, tangent, polar line, asymptote

# Obsah

# Kapitola 1

# Úvod

## 1.1 Kuželosečky na středních školách

S problematikou kuželoseček se žák setkává už od samotných počátků svého studia. Již na prvním stupni základní školy se setkává s pojmem *bodu* a s pojmem *přímky*, *rovnoběžek* a *různoběžek*. Tyto pojmy jsou základní stavební pilíře jakéhokoli dalšího studia geometrie, a také jsou to čtyři speciální případy kuželoseček – jedná se o tzv. singulární kuželosečky. Dále se student setkává s pojmem *kružnice* – toto je také kuželosečka, kuželosečka regulární.

Žák se s dalšími kuželosečkami setká především ve fyzice – dozví se, že dle Keplerova zákona planety obíhají kolem Slunce po drahách ve tvaru elips, v jejichž společném ohnisku je Slunce, že trajektorií vrhu vodorovného je část paraboly nebo také, že grafem závislosti dráhy pohybu rovnoměrně zrychleného na čase je část paraboly. V matematice se s kuželosečkami setká při zkoumání lineární lomené funkce, dozví se, že grafem takové funkce je hyperbola. Nicméně se toho jinak o kuželosečkách příliš nedozví, protože se na velké části středních škol v ČR kuželosečky v hodinách matematiky vůbec neprobírají. O kuželosečkách se tak dozvídají především studenti gymnázií (nachází se v RVP pro gymnázia – viz [RVP], str. 25), jakožto i studenti mnohých technicky zaměřených středních škol, buď stejně jako studenti gymnázií v hodinách analytické geometrie, nebo dokonce mnohem dříve, během hodin deskriptivní geometrie (viz např. ŠVP technického lycea v Praze – [TLP], str. 75).

Ačkoli se v [RVP] **tečny** kuželoseček explicitně nenacházejí, jsou součástí úloh na analytické vyšetřování vzájemné polohy přímky a kružnice. Mohou být probírány vícero způsoby – buď lze učivo tečen kuželoseček pojmout jako manipulování se vzorci a rovnicemi a prakticky nic neodvozovat (tento přístup je využit např. v učebnici [DID]), nebo lze tyto rovnice odvozovat pomocí některých vlastností tečen. Například v učebnici [PRO] je uvedeno odvození pro tři druhy kuželoseček – pro kružnici, elipsu a parabolu. Tato odvození vždy využívají různých vlastností daných kuželoseček, nicméně podobnost rovnic tečen nás může snadno vést k domněnce, že tyto rovnice mají všechny stejný původ, že všechny vycházejí ze stejného, jednotného principu. Tento princip si mimo jiné klade za cíl představit tato práce.

Pokud do rovnice tečny dosadíme místo bodu kuželosečky bod libovolný[1], získáme rovnici přímky, která se nazývá **polára**. S touto přímkou se žáci na gymnáziích už tak často nesetkávají – jedná se spíše o doplňkové učivo. Tomu odpovídá minimální pokrytí látky v učebnicích [DID] a [PRO], ale také absence tohoto pojmu v Přehledu středoškolské matematiky od nakladatelství Prometheus [PSM], kde je shrnuto všechno důležité učivo, které se na českých středních školách vyučuje.

Tato práce si tedy také klade za cíl představit čtenáři náměty týkající se problematiky polár pro zařazení do hodin matematiky. Přidáme také několik zajímavostí, které mohou být zajímavým doplňkem pro výuku matematiky na střední škole. Nejprve ovšem pojďme zjistit, jaké zázemí nám poskytují středoškolské učebnice.

## 1.2 Tečny a poláry ve středoškolských učebnicích

V této práci se zaměříme především na analytické pojetí problematiky tečen a polár. A protože náš zájem je z velké části didaktický, zaměřme nejprve svou pozornost na některé běžně používané učebnice

[1] Nevyjímáme zde ani body kuželosečky – polárou bodu vzhledem ke kuželosečce pak bude samotná tečna vedená tímto bodem.

na středních školách, abychom zjistili, jaké náměty učiteli poskytují pro výuku tečen a polár. Uvedeme, jakým způsobem látku prezentují jednotlivé učebnice, a jejich přístupy porovnáme.

Podíváme se nyní na dvě běžně používané učebnice a porovnáme jejich přístup. Pouze dvě učebnice vybíráme jednak v rámci stručnosti, ale také kvůli tomu, že nám budou stačit pro porovnání dvou naprosto odlišných přístupů k látce. Jedná se o učebnici [DID] z řady od nakladatelství Didaktis a od nakladatelství Prometheus [PRO]. Jak se tyto přístupy odlišují, bude uvedeno v následujících bodech:

- V učebnici [DID] jsou samotné rovnice tečen kuželoseček výrazně odlišené od zbytku textu. Učebnice [PRO] rovnici tečny např. kružnice graficky neodlišuje od zbytku textu.
- Učebnice [PRO] klade značný důraz na odvození rovnic tečen kuželoseček, tyto rovnice jsou takřka vždy důsledkem různých vlastností jednotlivých kuželoseček:
    1) rovnice tečny kružnice je odvozena z kolmosti tečny na poloměr kružnice;
    2) rovnice tečny elipsy vychází z hledání přímky, která má s elipsou společný právě jeden bod;
    3) odvození rovnice tečny paraboly využívá toho, že vzdálenost každého bodu paraboly od ohniska je stejná jako jeho vzdálenost od řídící přímky.

  Výjimku tvoří rovnice tečny hyperboly, kde je rovnice jednoduše uvedena a je odkázáno na to, že by odvození bylo podobné jako u odvození rovnice tečny elipsy. Učebnice [DID] obsahuje pouze bod 1) výše, zbytek není uveden. Tento bod je uveden v sekci *Zamyslete se!*, čímž je naznačeno, že autoři učebnice považují toto odvození za nadstavbové učivo.
- V učebnici [PRO] je polára zmíněna v rámci jedné stránky, kde je diskutováno, co se stane, pokud dosadíme do rovnice tečny kružnice vnější bod místo bodu samotné kružnice. V případě učebnice [DID] je polára pro kružnici zmíněna opět v sekci *Zamyslete se!* společně s příkladem, který ukazuje využití vlastností poláry k nalezení rovnic tečen.

Shrneme-li tedy výše uvedené body, je v uvedených učebnicích polára diskutována jen málo, a rovnice tečny je v [DID] odvozena pouze pro kružnici a v [PRO] jsou tečny odvozeny příliš odlišnými způsoby. V následujících kapitolách bude čtenáři představen způsob, jak k této problematice přistoupit jednotně.

## 1.3 Středoškolská definice tečny kuželosečky

Nejprve je ale třeba si ujasnit, co budeme vlastně rozumět pojmem **kuželosečka** a pojmem **tečna kuželosečky**. Co se týče kuželoseček, zavedeme rovnou úmluvu, která vyloučí z našeho studia všechny singulární kuželosečky (body, přímky a dvojice přímek) neboť jejich zkoumání je věcí analytické geometrie lineárních útvarů. Není tedy třeba je zde diskutovat. Také vyloučíme všechny kuželosečky imaginární (např. imaginární kuželosečku $x^2 + y^2 = -1$), neboť se jedná o učivo obsažené až ve specializovaných předmětech na vysokých školách.

**Úmluva 1.** *Není-li řečeno jinak, pojmem* ***kuželosečka*** *budeme v celém tomto textu rozumět pouze reálnou regulární kuželosečku, tj. reálnou kružnici, elipsu, parabolu nebo hyperbolu.*

Pokud jde o definici tečny kuželosečky, v učebnici [PRO] je používána tato definice: [2]

**Definice 1.** *Nechť $k$ je kuželosečka. Potom její* ***tečnou*** *budeme rozumět takovou přímku $t$, která splňuje následující podmínky:*

I. *Přímka $t$ má s kuželosečkou $k$ společný právě jeden bod.*

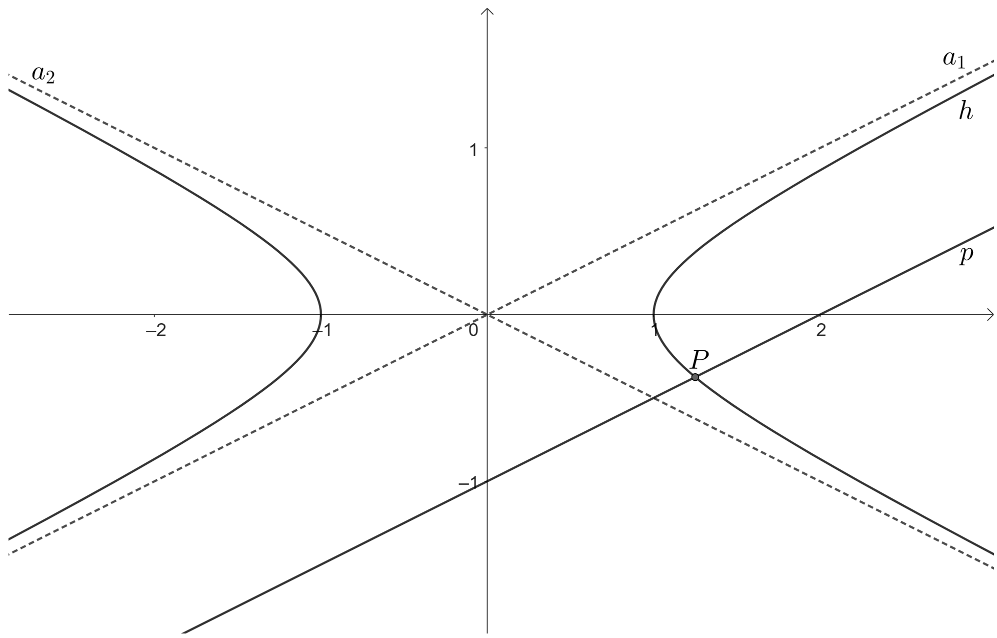
II. *Pokud je $k$ hyperbola, pak $t$ není rovnoběžná s žádnou z jejích asymptot.*

III. *Pokud je $k$ parabola, pak $t$ není rovnoběžná s její osou.*

Proč je v této definici nutné explicitně uvést body II. a III.? Z pohledu na obrázky 1 a 2 níže bude odpověď na tyto otázky zřejmá.

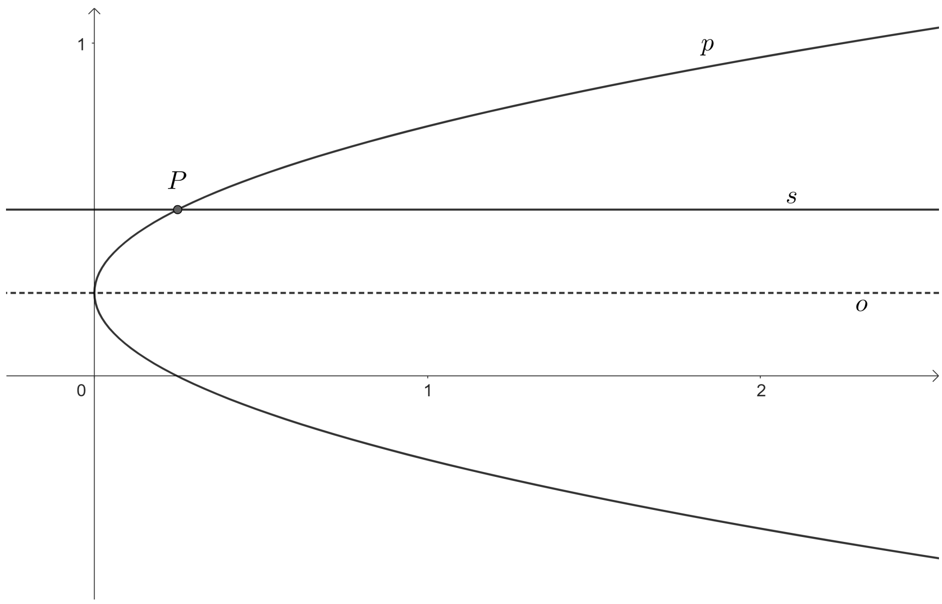
Na obrázku 1 je zakreslena hyperbola $h$ společně s asymptotami $a_1, a_2$. Přímka $p$ rovnoběžná s asymptotou $a_1$ protíná hyperbolu v jediném bodě. Je evidentní, že se nejedná o tečnu – přímka $p$ se hyperboly v bodě $P$ „nedotýká“, ale protíná ji.

[2] Nikde není přesně takto uvedena, nicméně je vždy uvedena pro každou z kuželoseček zvlášť.




**Obr. 1:** Hyperbola $h : x^2 - 4y^2 = 1$ a její asymptoty. Přímka $p$ rovnoběžná s asymptotou $a_1$ protíná hyperbolu $h$ v právě jednom bodě – v bodě $P$. Je evidentní, že se nejedná o její tečnu.

Na obrázku 2 je zakreslena parabola $p$ a její osa $o$. Přímka $s$ rovnoběžná s osou $o$ má s parabolou společný jediný bod, přesto je opět zřejmé, že tato přímka je sečnou hyperboly $h$.




**Obr. 2:** Parabola $p : x = 4(y - \frac{1}{4})^2$ a její osa $o$. Přímka $s$ rovnoběžná s $o$ protíná parabolu $p$ v právě jednom bodě. Stejně jako v případě hyperboly je zřejmé, že se o tečnu paraboly nejedná.

Body II. a III. definici 1 nicméně přidávají na složitosti. Budeme je tedy chtít odstranit a definici tečny sjednotit.

# Kapitola 2

# Homogenní souřadnice

V následujících kapitolách budeme pro ulehčení práce a pro lepší porozumění problematice používat některé prvky vysokoškolské matematiky, zejména pojmy z lineární algebry (matice, vektorové prostory, báze, apod.)[1]. Neočekáváme, že tyto pojmy budou známé žákům na střední škole. Použijeme je především proto, abychom postupovali efektivněji, a potom klíčové poznatky převedeme do podoby, která bude přístupná i žákům na středních školách.

V této a následující kapitole navíc budeme zavádět pojmy, které nebudou pro samotný výklad na střední škole potřebné, nicméně jsou důležité pro hlubší pochopení problematiky. Neočekáváme tedy, že budou předmětem výkladu na střední škole, proto zde transformace pro střední školu (s výjimkou nevlastního bodu) provádět nebudeme.

## 2.1 Nevlastní bod roviny

Již na střední škole se můžeme setkat s komentáři, že dvě rovnoběžky se protínají „v nekonečnu“. Co to však přesně znamená? Nejprve se zamysleme nad tím, proč vlastně budeme tento průsečík „v nekonečnu“ potřebovat. V předchozí kapitole jsme usoudili, že výjimky v definici tečny jsou pro nás nežádoucí a že bychom je chtěli odstranit. Hodilo by se nám tedy, kdyby se např. přímky rovnoběžné s asymptotou hyperboly protínaly v jednom bodě. Pokud by navíc tento bod ležel na dané hyperbole, výjimka je vyřazena – přímky rovnoběžné s asymptotou hyperboly by tuto hyperbolu protínaly ve dvou bodech.

Zajistíme tedy, aby každá dvojice přímek v rovině, které nejsou totožné, měla společný právě jeden bod. S průsečíkem různoběžných přímek se setkáváme už od základní školy, ten tedy není problém. Potíže budou se zavedením průsečíku rovnoběžných přímek. Jelikož jejich společný bod v $\mathbb{E}_2$ neexistuje, budeme ho muset definovat pomocí něčeho jiného, co mají dané rovnoběžky společné – je to jejich směr. Intuitivně definici směru chápeme, nicméně níže připomeňme[2] definici směru a směrového vektoru:

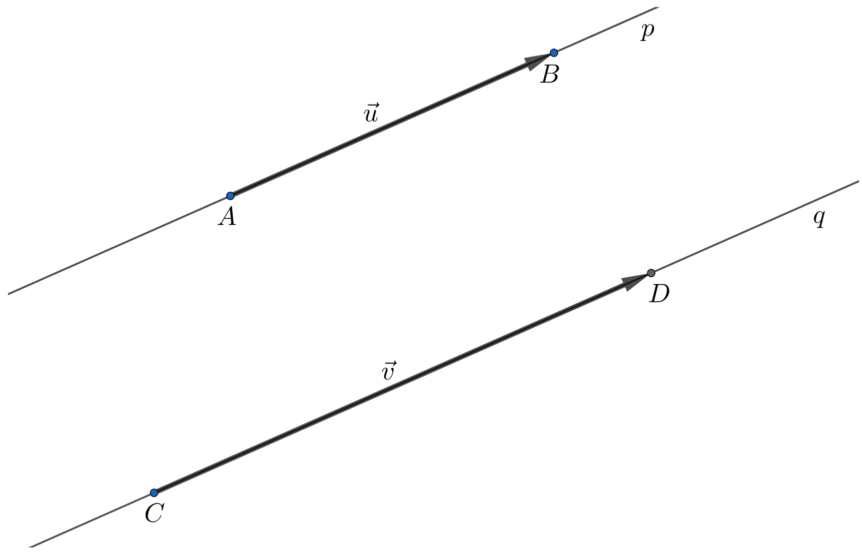
**Definice 2.** *Ať $X_0 \in \mathbb{E}_2, \vec{u} \in \mathbb{R}^2 - (0;0)^T$ a nechť $p$ je přímka parametricky vyjádřená rovnicí $X = X_0 + t \cdot \vec{u}, t \in \mathbb{R}$. **Směrem přímky** $p$ budeme rozumět vektorový prostor s bází $\{\vec{u}\}$ a budeme ho značit $\mathbb{S}_{\vec{u}}$. **Směrovým vektorem** přímky $p$ pak budeme rozumět jakýkoli nenulový prvek směru této přímky.*

Jednoduše řečeno, směrovým vektorem přímky $p$ může být nejen vektor $\vec{u}$, ale i kterýkoli jeho nenulový $k$-násobek. Se směrovými vektory se setkáváme už na střední škole při popisu přímky parametrickými rovnicemi. Už zde se žáci učí, že je-li směrovým vektorem dané přímky vektor $\vec{u}$, je jím také jakýkoli vektor ve tvaru $k \cdot \vec{u}$, kde $k \neq 0$. Směrem pak je množina všech takových vektorů, k níž přidáme ještě nulový vektor, tedy množina $\{k\vec{u}, k \in \mathbb{R}\}$.

Na obrázku 3 níže jsou dvě rovnoběžky $p$ a $q$. Přímka $p$ má směrový vektor $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, přímka $q$ má směrový vektor $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$. Je vidět, že ačkoli oba vektory $\vec{u}, \vec{v}$ mají různou velikost, směr, který určují, je stejný.

[1] Tyto pojmy jsou zavedeny např. v knize [BEČ].

[2] Tato definice je upravená pro naše potřeby – v rámci snížení náročnosti textu se snažíme vyhnout pojmům z afinní geometrie, pokud to bude možné. Přesnější definice je uvedena např. v [SEK].




**Obr. 3:** Rovnoběžné přímky $p, q$ a jejich směrové vektory $\vec{u}, \vec{v}$.

Pro každou takovou dvojici rovnoběžek pak pomocí jejich směru můžeme definovat jejich průsečík jako dříve zmíněný nevlastní bod. Inspirujeme se definicí v [CAS].

**Definice 3.** *Mějme eukleidovskou rovinu $\mathbb{E}_2$. Pro každé dvě různé rovnoběžky v $\mathbb{E}_2$ se směrem $\mathbb{S}_{\vec{u}}$ budeme jejich průsečíkem rozumět jejich směr $\mathbb{S}_{\vec{u}}$. Tento průsečík nazveme* ***nevlastním bodem*** *ve směru $\mathbb{S}_{\vec{u}}$ a budeme ho značit $B_{\vec{u}}$. Množinu všech nevlastních bodů budeme značit $\mathbb{B}_\infty$.*

Nyní budeme definovat tzv. projektivní rozšíření eukleidovské roviny jako sjednocení $\mathbb{E}_2$ a $\mathbb{B}_\infty$. Inspirujeme se opět definicí v [CAS].

**Definice 4.** *Uvažujme eukleidovskou rovinu $\mathbb{E}_2$ a ať je $\mathbb{B}_\infty$ množina všech nevlastních bodů této roviny.* ***Projektivním rozšířením eukleidovské roviny*** *budeme rozumět množinu $\mathbb{E}_2^\star = \mathbb{E}_2 \cup \mathbb{B}_\infty$.*

Nevlastní bod jako průsečík rovnoběžek lze jednoduše přiblížit i na střední škole. Není přitom třeba se opírat o tak složité definice, vystačíme si s intuitivní představou, co to směr je.

## 2.2 Zavedení homogenních souřadnic

Nyní budeme chtít analyticky popsat všechny body $\mathbb{E}_2^\star$. Nabízí se samozřejmě klasická kartézská soustava souřadnic, ale narážíme zde na zásadní potíže, které vznikají kvůli zavedení nevlastních bodů:

- Nevlastní body jsou určeny **směrem**, zatímco vlastní body jsou určeny **souřadnicemi**. Jinými slovy, nevlastní body jsou popsány vektorovým podprostorem, zatímco vlastní body jsou popsány uspořádanými dvojicemi reálných čísel.
- Pokud bychom zavedli souřadnice nevlastního bodu podobně jako souřadnice vlastního bodu, jak symbolicky rozlišíme mezi bodem se souřadnicemi $[2; 3]$ a nevlastním bodem ve směru, který obsahuje vektor $(2; 3)$?

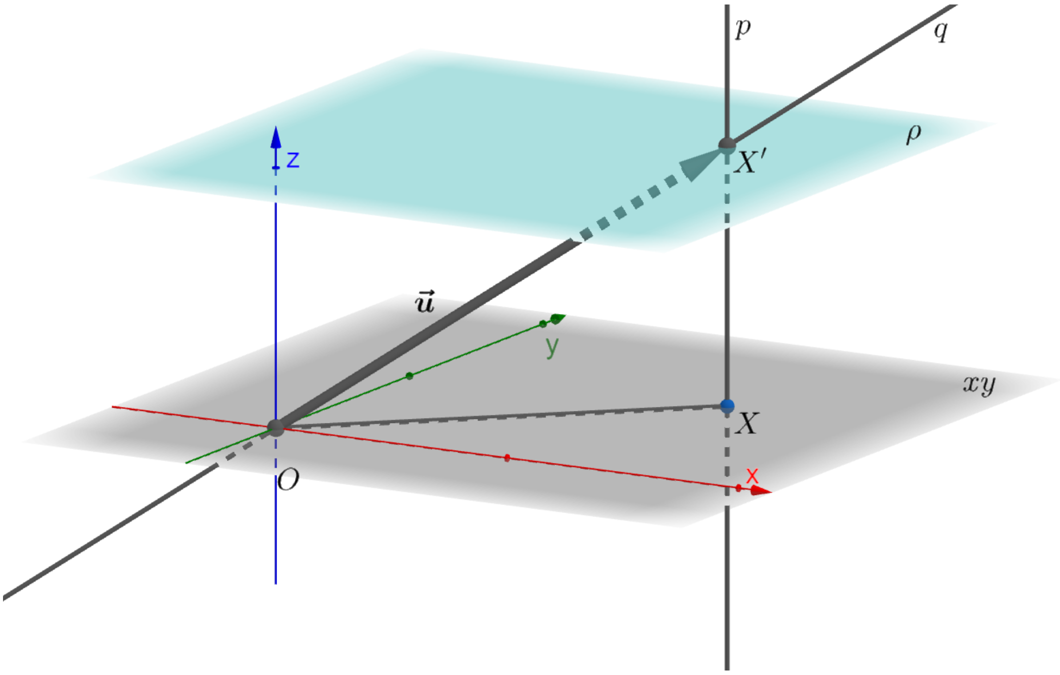
Je tedy potřeba, aby vlastní i nevlastní body byly vyjádřeny stejnorodým způsobem. Protože už tušíme, že nebude možné vyjádřit nevlastní bod pomocí kartézských souřadnic, co kdybychom se pokusili vyjádřit vlastní body pomocí směru?

Nevlastní body budou stále zavedeny pomocí směrů, v nichž se nachází. Jakýkoli směr nicméně pokryje nekonečně mnoho bodů v $\mathbb{E}_2$[3], pro vyjádření bodů $\mathbb{E}_2$ pomocí směrů budeme muset tedy tuto základní rovinu $\mathbb{E}_2$ opustit. Tuto rovinu dále budeme značit $xy$ – pro nás to bude rovina popsaná rovnicí $z = 0$.

Nyní vyjádříme pomocí směrů i body vlastní[4]. Mějme bod $X \in \mathbb{E}_2$ a označme $O$ počátek soustavy souřadnic. Budeme chtít vyjádřit tento bod pomocí nějakého směru. Toto vyjádření musí být jednoznačné[5] a zároveň jej nemůžeme vyjádřit pomocí žádného ze směrů v základní rovině. Přejdeme tedy do

[3] Pokryje všechny body přímky procházející počátkem.
[4] Podobně jsou homogenní souřadnice zavedeny např. v [RIC].
[5] Chceme, aby každému bodu vždy odpovídal právě jeden směr a každému směru odpovídal právě jeden bod.

prostoru a bod $X$ promítneme rovnoběžně s osou $z$ do nějaké roviny $\rho$, která je rovnoběžná s rovinou $xy$ a zároveň pro ni platí $\rho \neq xy$. Pro jednoduchost budeme uvažovat, že rovina $\rho$ je popsána rovnicí[6] $\rho : z = 1$. Projekci bodu $X$ ve směru osy $z$ označme $X'$. Přímku $OX'$ označme $q$. Směrový vektor přímky $q$ je jistě vektor $\overrightarrow{OX'} = \vec{u}$, ale také kterýkoli jeho $k$-násobek. Množina všech směrových vektorů této přímky $q$ je pak směr $\mathbb{S}_{\vec{u}}$. Situace je znázorněna na obr. 4 níže.




**Obr. 4:** K zavedení homogenních souřadnic vlastního bodu.

Každá přímka procházející počátkem (resp. její směr) tedy bude jednoznačně popisovat jistý bod v rovině. Přímky rovnoběžné s rovinou $\rho$ budou popisovat nevlastní body, přímky s ní různoběžné popíší body vlastní. S touto představou můžeme formulovat definici:

**Definice 5.** *Ať $O, X \in \mathbb{E}_2^\star$, buď $\rho$ rovina popsaná rovnicí $\rho : z = 1$. Symbolem $\mathbb{H}(X)$ budeme značit zobrazení, pro které platí:*

- *Pokud $X \in \mathbb{E}_2$, pak $\mathbb{H}(X) = \mathbb{S}_{\overrightarrow{OX'}}$, kde $X'$ je kolmý průmět bodu $X$ do roviny $\rho$,*
- *Pokud $X \in \mathbb{B}_\infty$, pak $\mathbb{H}(X) = \mathbb{S}_{\vec{s}}$, kde $\mathbb{S}_{\vec{s}}$ je směr bodu $X$.*

***Homogenními souřadnicemi*** *bodu $X$ pak budeme rozumět kterýkoli nenulový prvek vektorového prostoru $\mathbb{H}(X)$ (vzhledem k rovině $\rho$).*

Definici bychom mohli samozřejmě sjednotit zavedením projektivního rozšíření eukleidovského prostoru, ovšem to není potřeba. Nyní si ovšem uvědomme, jaké jsou homogenní souřadnice vlastního a nevlastního bodu:

- Nevlastní bod ve směru $\mathbb{S}_{\vec{v}}$, kde $\vec{v} = (v_1, v_2)$, můžeme popsat pomocí jakéhokoli nenulového $k$-násobku vektoru $(v_1; v_2; 0)$.
- Vlastní bod $X = [x_1; x_2]$ můžeme popsat pomocí nenulového $k$-násobku vektoru $(x_1; x_2; 1)$. Jednička na $z$-ové souřadnici plyne přímo z volby roviny $\rho$ – proto volíme rovinu $\rho$ právě takto[7].

Pokud tedy homogenní souřadnice nějakého vlastního bodu $X$ budou $(x, y, z)$, jak najdeme bod $X$ v původní rovině $\mathbb{E}_2$? Protože třetí souřadnice základního tvaru homogenních souřadnic je vždy 1, stačí

[6] Můžeme uvažovat promítání i do jiné roviny ve tvaru $\rho' : z = z_0, z_0 \neq 0$ ale uvažováním právě této roviny předejdeme technickým komplikacím – viz poznámka pod čarou na další stránce.

[7] Kdybychom volili průměty do roviny $\rho' : z = z_0; z_0 \neq 0$, pak by se na $z$-ové souřadnici ocitlo $z_0$, vlastní bod $X = [x_1; x_2]$ bychom tedy popsali pomocí vektoru $(x_1; x_2; z_0)$ a jakéhokoli jeho $k$-násobku. $z_0 = 1$ tedy volíme především kvůli jednoduchosti zápisu, jakákoli jiná volba by nám zbytečně komplikovala další výpočty. Čtenář sám si může vyzkoušet, jak by bylo v takovém případě nepříjemné převádět homogenní souřadnice bodu na jeho souřadnice kartézské.

vydělit každou ze souřadnic bodu souřadnicí $z$ (za předpokladu $z \neq 0$). Získáme tak souřadnice bodu $X = [\frac{x}{z}; \frac{y}{z}]$.

Ještě uvedeme poslední poznámku: máme-li mít jiný bod $B$, jehož homogenní souřadnice jsou $(kx_0, ky_0, 1)$, kde $k \neq 0$, jeho kartézské souřadnice jsou $X = [kx_0; ky_0]$. Jak by se ovšem tyto souřadnice chovaly, kdyby se $k$ blížilo nekonečnu? Vydělíme-li každou ze souřadnic $k$, získáme vektor $(x_0, y_0, \frac{1}{k})$. Pakliže provedeme limitní proces $k \to \infty$, získáme vektor $(x_0, y_0, 0)$. Tak nám vzniká nevlastní bod.

Další zavedení homogenních souřadnic je uvedeno v [HAL], kde je ovšem zavedení homogenních souřadnic motivováno přímo rovnicí kuželosečky.

Po zavedení homogenních souřadnic se už můžeme vrátit zpět ke kuželosečkám a k jejich rovnicím.

# Kapitola 3

# Rovnice kuželosečky

## 3.1 Rovnice reálné kuželosečky

Než přejdeme k diskuzi o rovnicích tečen a polár, pojďme si nejdříve ujasnit, jak přesně můžeme obecnou kuželosečku v rovině popsat rovnicí. Již na střední škole se seznámíme s rovnicí elipsy

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,$$

rovnicí paraboly

$$(y-n)^2 = 2p(x-m), \qquad \text{popř.} \qquad (x-m)^2 = 2p(y-n),$$

a rovnicí hyperboly

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1, \qquad \text{popř.} \qquad \frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2}.$$

Z těchto rovnic se může zdát, že libovolnou kuželosečku jde popsat rovnicí

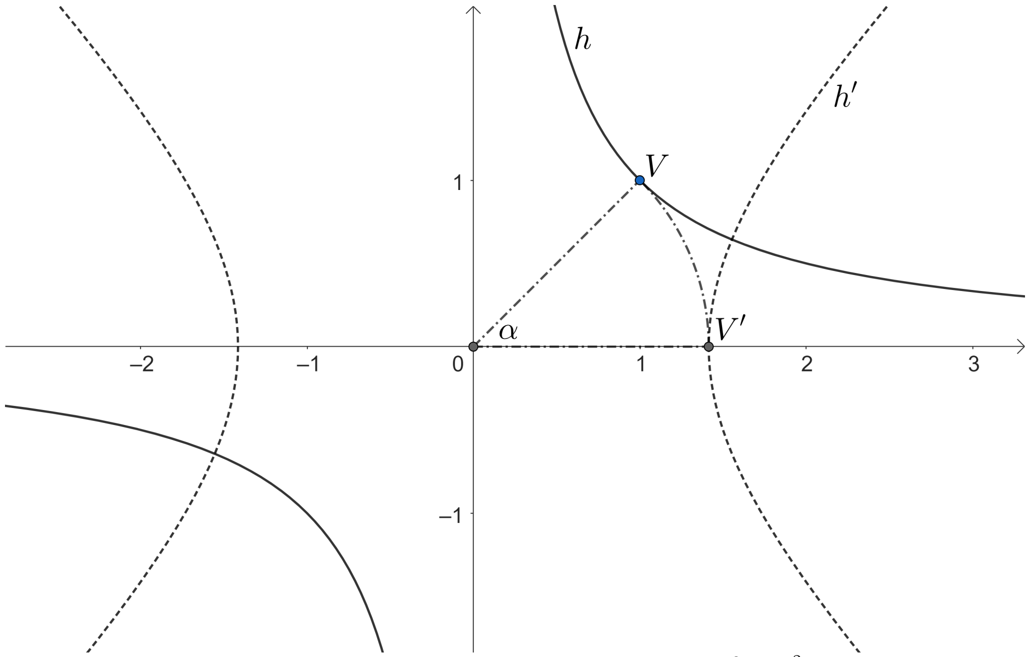
$$k : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Nicméně tomu tak není. Výše uvedené rovnice popisují pouze kuželosečky, jejichž osy jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Například hyperbolu $h : y = \frac{1}{x}$, kterou známe z učiva o lineárních lomených funkcích, takto popsat nelze. Zmíněnou rovnici ovšem lze přepsat ve tvaru

$$h : xy = 1.$$

Stále se nicméně jedná o hyperbolu. Pokud bychom ji otočili kolem počátku soustavy o orientovaný úhel $\alpha = -45°$ (viz. obr. 5 níže), získáme hyperbolu s rovnicí $h' : \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$. Důkaz tohoto tvrzení plyne z transformace rovnic kuželoseček při změně soustavy souřadnic, viz např. [HAL][1].

[1] Konkrétně z rotace systému souřadnic o úhel $\alpha$, která je popsaná rovnicemi $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$; $y' = y\sin\alpha + x\cos\alpha$.




**Obr. 5:** Hyperbola $h : xy = 1$ a hyperbola $h' : \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$.

Je tedy jasné, že chceme-li uvažovat i kuželosečky s osami, které nejsou rovnoběžné se souřadnicovými osami, musíme do rovnice přidat i smíšený člen. Tuto rovnici potom budeme považovat za rovnici kuželosečky v rovině[2].

**Definice 6.** *(Rovnice kuželosečky) Kuželosečkou budeme rozumět množinu všech bodů $X = [x; y]$ v rovině, které splňují podmínku:*

$$\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,} \qquad (1)$$

*kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro $i, j \in \{1, 2, 3\}; i \leq j$ a alespoň jeden z těchto koeficientů není roven nule.*

Klasifikaci kuželoseček pak lze najít např. v [JAN].

## 3.2 Maticové vyjádření rovnice kuželosečky

V předchozí kapitole jsme definovali pomocí rovnice (1) definovali kuželosečku. Tato rovnice je nicméně poměrně nepřehledná – výraz na levé straně se skládá z kvadratických, lineárních i absolutních členů. Chtěli bychom tento výraz sjednotit.

Kdybychom upustili od lineárních členů v naší rovnici kuželosečky, měli bychom rovnici

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0.$$

Na levé straně této rovnice se nachází kvadratická forma[3], kterou lze přepsat maticovou rovnicí

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Nebylo by možné podobný postup aplikovat na celou rovnici kuželosečky? Chtěli bychom, aby celý výraz na levé straně byl kvadratickou formu. Toto můžeme udělat poměrně jednoduše – vhodným způsobem do rovnice připíšeme jedničky. K lineárním členům na levé straně přidáme $z$, k absolutnímu členu přidáme $z^2$, přičemž pokládáme $z = 1$. Rovnici (1) tedy přepíšeme pomocí rovnice

$$k : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0.$$

[2] Zde uvažujeme i singulární kuželosečky včetně prázdné množiny, nicméně tyto kuželosečky musí být reálné. Jako příklad uveďme kuželosečku $x^2 + y^2 + 1 = 0$, která v $\mathbb{E}^2$ vyjadřuje prázdnou množinu. V komplexním rozšíření $\mathbb{E}^2$ by se nicméně jednalo o regulární kuželosečku – viz klasifikace v [JAN].

[3] Vlastnosti kvadratických forem jsou diskutovány např. v knize [BEČ].

Na levé straně se nachází kvadratická forma, a tak tuto rovnici můžeme přepsat pomocí rovnice

$$k:\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0. \qquad (2)$$

3×3 matice v této rovnici se nazývá matice kuželosečky $k$.

Budeme-li chtít se vrátit zpět k rovnici (1), položíme $z = 1$, a tedy rovnice (2) přepíšeme pomocí rovnice

$$k:\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0.$$

Obě strany této rovnice můžeme vynásobit $c^2$, kde $c \neq 0$, a získáme tak rovnici

$$k:\begin{pmatrix}cx & cy & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}cx\\ cy\\ c\end{pmatrix}=0.$$

V rovnici výše násobíme matici kuželosečky z obou stran vektorem $(cx; cy; c)$ (až na transpozici). Jaký je význam tohoto vektoru? To už víme z kapitoly o homogenních souřadnicích, jedná se o homogenní souřadnice bodu $X = [x; y]$. Získali jsme tedy geometrický význam přidání třetí souřadnice – způsobí, že se v rovnici místo kartézských souřadnic budou nacházet souřadnice homogenní[4]. Libovolnou kuželosečku $k$ lze tedy elegantně popsat jako množinu všech bodů $X$, které splňují maticovou rovnici

$$\boxed{\overline{X}^T K \overline{X} = 0,} \qquad (3)$$

kde $\overline{X}$ jsou homogenní souřadnice bodu $X$ a $K$ je matice kuželosečky. Pro jednoduchost zápisu budeme dále místo $\overline{X}$ psát $X$, bude vždy jasné, že se jedná o homogenní souřadnice.

[4] V homogenních souřadnicích budeme moci pohodlně vyjadřovat i nevlastní body kuželosečky, což nám umožní odvodit postup pro získání rovnic asymptot hyperboly – viz kapitola 4.6

# Kapitola 4

# Tečna kuželosečky

Nebude-li řečeno jinak, budeme v následujících kapitolách pracovat v $\mathbb{E}_2^\star$.

## 4.1 Odstranění výjimek

Dříve než přistoupíme k odvození rovnice tečny, uveďme na dvou příkladech, jak se nám povedlo zavedením homogenních souřadnic zbavit výjimek II. a III. v definici 1.

Mějme například hyperbolu s rovnicí $h : x^2 - y^2 - 1 = 0$. Matice této hyperboly je

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Do rovnice kuželosečky (3) dosadíme nyní souřadnice nevlastního bodu ve směru $(1; 1)$, tj. ve směru jedné z asymptot. Jednoduchým výpočtem ověříme, že

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

tedy nevlastní bod ve směru $(1; 1)$, tj. průsečík všech přímek rovnoběžných s asymptotou $y = x$, je bodem hyperboly $h$. To znamená, že každá přímka rovnoběžná s touto asymptotou (kromě asymptoty samotné) má s hyperbolou $h$ společné právě dva body. Asymptota $y = x$ má s hyperbolou $h$ společný právě jeden bod, budeme tedy říkat, že asymptota $y = x$ je tečnou hyperboly $h$ v nevlastním bodě ve směru $(1, 1)$.

Obdobně lze postupovat pro parabolu: matice paraboly $p : x^2 = 2fy, f \in \mathbb{R} - \{0\}$, je zřejmě

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f \\ 0 & -f & 0 \end{pmatrix}.$$

Jednoduchým výpočtem opět ověříme, že pro nevlastní bod ve směru $(0, 1)$ platí

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f \\ 0 & -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Obdobně jako v předchozím příkladě jsme ověřili, že průsečík přímek rovnoběžných s osou paraboly $x = 0$ je bodem paraboly $p$. V projektivním rozšíření eukleidovské roviny $\mathbb{E}_2^\star$ má tedy každá přímka rovnoběžná s osou paraboly $p$ s parabolou samotnou společné dva body, zatímco v běžné eukleidovské rovině má společný pouze jeden.

V projektivním rozšíření eukleidovské roviny tedy neexistují žádné „výjimky“ a body II. a III. v definici 1 můžeme odstranit. Současně s tím můžeme i jednoduše zformulovat definici asymptoty – z pohledu projektivní geometrie se jedná pouze o tečnu v nevlastním bodě[1].

**Definice 7.** *Nechť je v $\mathbb{E}_2^\star$ dána kuželosečka $k$ a přímka $t$. Řekneme, že přímka $t$ je* ***tečnou*** *kuželosečky $k$, pokud přímka $t$ má s kuželosečkou $k$ společný právě jeden bod $T$. Pokud je navíc bod $T$ nevlastní, říkáme, že přímka $t$ je* ***asymptotou*** *kuželosečky $k$.*

[1] Vystačíme si s asymptotami hyperboly, nicméně existuje i asymptota paraboly – je to tzv. nevlastní přímka, přímka, na níž leží všechny nevlastní body $\mathbb{E}_2^\star$. Blíže k této problematice např. viz [CHO].

## 4.2 Výpočet bez použití matic

V této kapitole na konkrétním příkladu stručně naznačíme, jak lze najít rovnice tečen a asymptot kuželoseček. Pro nalezení rovnice tečny bodem kuželosečky a rovnic asymptot hyperboly použijeme diferenciální počet. Následně použijeme postup, který bude využívat definice 1 a bude fungovat pro jakýkoli bod v $\mathbb{E}_2$, třebaže na kuželosečce neleží. Tento postup nebude využívat metod diferenciálního počtu, nicméně bude výpočetně náročnější.

**Úloha 1.** *Buď dána hyperbola rovnicí* $h : 2x^2 - y^2 = 1$. *Najděte:*

*a) rovnici tečny jejím bodem* $T = [1; 1]$,

*b) rovnice jejích asymptot,*

*c) rovnice tečen procházející vnějším bodem* $X = [\frac{1}{2}; 0]$.

Úlohu a) budeme řešit pomocí derivace. „Horní“ část obou větví hyperboly můžeme popsat pomocí funkce

$$f : y = \sqrt{2x^2 - 1}.$$

Jelikož bod $T$ není vrcholem hyperboly[2], existuje v tomto bodě vlastní derivace $f'(1)$. Rovnici jakékoli přímky $p$, která není rovnoběžná s osou $y$, lze vyjádřit pomocí rovnice

$$p : y = kx + l; \qquad k, l \in \mathbb{R}.$$

Protože bod $T$ musí být bodem této přímky, musí platit, že

$$1 = k + l.$$

Odečtením obou rovnic získáme rovnici tečny

$$t : y - 1 = kx - k$$

Z matematické analýzy[3] víme, jaký je význam parametru $k$: jedná se o derivaci funkce $f$ v bodě dotyku. V libovolném bodě $x$ je tato derivace rovna

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - 1}},$$

z čehož jednoduše určíme, že $f'(1) = 2$. Rovnice tečny $t$ tedy je:

$$t : 2x - y - 1 = 0.$$

Úlohu b) vyřešíme pomocí limit. V okolí $\pm\infty$ lze hyperbolu v „horní“ části[4] opět popsat pomocí funkce $f : y = \sqrt{2x^2 - 1}$. Asympota se směrnicí je v [RMO] definovaná jako přímka ve tvaru $A(x) = ax + b$, která splňuje

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - A(x)) = 0,$$

což je v souladu s naší představou tečny v nevlastním bodě. Nyní odvodíme význam konstant $a, b$ – pro tyto konstanty tedy musí platit:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax - b) = 0. \qquad (\star)$$

Protože $b$ je konstanta, můžeme ji převést na druhou stranu:

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax).$$

Najdeme-li hodnotu konstanty $a$, hodnotu konstanty $b$ máme tedy určenou. Nyní tedy přistoupíme k určení konstantu $a$. V limitě v rovnosti $(\star)$ vytkneme $x$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} x \left( \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) = 0.$$

[2] Rovnice hyperboly je ve středovém tvaru, z něhož plyne, že oba vrcholy leží na ose $x$.

[3] Najdeme např. ve skriptech [RMO] nebo kterékoli učebnici matematické analýzy. Zde je dokonce tečna definována pomocí derivace.

[4] Bude nám stačit „horní“ část – asymptoty pro „dolní“ část budou s těmito asymptotami splývat.

Protože ovšem $\lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$, musí platit $\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}) = 0$, jinak rovnost výše nemůže být splněna[5]. Protože $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{b}{x} = 0$, dostáváme $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} - a = 0$, tj.

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Důkaz, že tyto koeficienty skutečně splňují podmínky kladené na asymptotu, lze nalézt např. v [RMO]. Pokud do těchto vzorců dosadíme naši funkci $f(x)$ a odpovídající limity vypočteme, zjistíme, že $a = \pm\sqrt{2}$ a $b = 0$, tj. že rovnice asymptot jsou $a_{1,2} : y = \pm\sqrt{2}x$.

Úlohu c) nebudeme řešit pomocí derivací, neboť bod $X$ neleží na hyperbole. Místo toho budeme uvažovat přímku se směrnicí, která prochází bodem $X = [\frac{1}{2}; 0]$. Ta má rovnici ve tvaru $y = k(x - \frac{1}{2})$, kde $k \in \mathbb{R}$[6]. Hledáme tedy taková $k$, pro která má soustava

$$2x^2 - y^2 = 1$$

$$y = k\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

právě jedno řešení. Metodou dosazovací získáme rovnici

$$(2 - k^2)x^2 + k^2 x - \frac{k^2}{4} - 1 = 0 \quad (\star\star)$$

Když je koeficient kvadratického členu roven nule, tedy pro $k = \pm\sqrt{2}$, má tato soustava právě jedno řešení. Toto jsou nicméně směrnice asymptot (viz úloha 2 výše), a tedy výsledné přímky by byly rovnoběžné s asymptotami. Podle definice 1 z podkapitoly 1.3 ovšem takové přímky tečnami nejsou.

Kvadratická rovnice výše má dále právě jedno řešení, pokud její diskriminant je roven nule, tedy pokud platí

$$D = k^4 + (k^2 + 4)(2 - k^2) = 0$$

neboli pokud platí

$$-2k^2 + 8 = 0,$$

z čehož plyne, že kvadratická rovnice $(\star\star)$ má právě jedno řešení, pokud $k = \pm 2$. Tyto hodnoty jsou skutečně směrnicemi tečen, a tedy rovnice obou tečen z bodu $X$ na kuželosečku $k$ jsou

$$t_{1,2} : y = \pm 2\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Shrňme naše postupy: v prvních dvou příkladech jsme použili nástroje diferenciálního počtu, abychom výpočet provedli. Tyto výpočty jsou poměrně jednoduché, nicméně ne vždy budou žáci s diferenciálním počtem seznámeni.

Postup u třetího příkladu je neelegantní a zdlouhavý. Jednak jsme byli na začátku nuceni ignorovat přímku $x = \frac{1}{2}$, ale z tohoto postupu jsme také získali přímky, které nebyly tečnami, museli jsme je tedy vyloučit. Tento výpočet navíc není jednoduchý – řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, z nichž jedna je kvadratická a druhá je lineární, ale obsahuje parametr. Z toho následně plyne postup hrubou silou, který je zdlouhavý a ještě k tomu velice náchylný na chyby z nepozornosti.

Z toho plyne otázka: Nešlo by příklady výše řešit bez použití diferenciálního počtu a bez složitých výpočtů? Ukazuje se, že šlo. Nicméně pro rozmyšlení korektnosti tohoto postupu musíme trochu nahlédnout do pokročilejší matematiky.

## 4.3 Odvození rovnice tečny

Inspirujme se nyní výpočtem v příkladu c) v předchozí kapitole a odvoďme pomocí matic rovnici tečny obecné kuželosečky $k$ s maticí $K$.

[5] Limita na levé straně by potom byla z věty o aritmetice limit nevlastní, takže by nemohla být rovná nule.

[6] Jakoukoli přímku procházející bodem $X$ (kromě přímky $x = \frac{1}{2}$) můžeme takto zapsat – ověříme jednoduše dosazením. Přímku $x = \frac{1}{2}$ pro tento příklad nemusíme uvažovat, tečnou evidentně není – hyperbolu vůbec neprotíná

Všechny body takové kuželosečky splňují rovnici $X^T K X = 0$. Označme bod dotyku $X_0$, každou přímku procházející takovým bodem lze parametricky vyjádřit rovnicí $X = X_0 + t\vec{u}, t \in \mathbb{R}$[7], kde $\vec{u}$ je směrový vektor takové přímky.

Vyjdeme z definice 7, kde definujeme tečnu jako přímku, která má s kuželosečkou $k$ společný právě jeden bod. Společné body najdeme řešením soustavy rovnic $X^T K X = 0$ a $X = X_0 + t\vec{u}$ a protože zjišťujeme, kdy má kuželosečka a přímka právě jeden společný bod, hledáme, pro jaká $k \in \mathbb{R}$ má rovnice

$$(X_0 + t\vec{u})^T K (X_0 + t\vec{u}) = 0$$

právě jedno řešení. Roznásobením závorek získáme rovnici

$$X_0^T K X_0 + t\vec{u}^T K X_0 + t X_0^T K \vec{u} + t^2 \vec{u}^T K \vec{u} = 0.$$

Bod $X_0$ je bodem kuželosečky $k$, tedy $X_0^T K X_0 = 0$. Dále, neboť matice $K$ je symetrická, platí $\vec{u}^T K X_0 = X_0^T K \vec{u}$. Využitím těchto poznatků se nám rovnice výše zjednoduší na tvar:

$$2t X_0^T K \vec{u} + t^2 \vec{u}^T K \vec{u} = 0,$$

neboli také jinak

$$t(2X_0^T K \vec{u} + t\vec{u}^T K \vec{u}) = 0.$$

Tato rovnice je kvadratická bez absolutního členu, tedy má právě jedno řešení právě tehdy, když buď $t = 0$, nebo koeficient lineárního členu je nulový, čili když

$$X_0^T K \vec{u} = 0.$$

Vrátíme-li se k obecně vyjádřené rovnici přímky procházející bodem $X_0$, ze které jsme vycházeli, tj. k rovnici $X = X_0 + t\vec{u}$ a vynásobíme-li její obě strany zleva maticí $X_0^T K$, získáme rovnost:

$$X_0^T K X = X_0^T K X_0 + t X_0^T K \vec{u}.$$

Jelikož $X_0 \in k$, platí $X_0^T K X_0 = 0$ a také z odvození výše víme, že $X_0^T K \vec{u} = 0$. Pokud toto dosadíme do rovnice výše, získáváme konečně rovnici tečny, která je:

$$\boxed{X_0^T K X = 0. \quad (T1)}$$

Tato rovnice skutečně charakterizuje tečnu kuželosečky – pro libovolnou regulární kuželosečku $k$ je každá přímka s rovnicí $X_0^T K X = 0$ tečnou kuželosečky $k$ a každá tečna kuželosečky $k$ má rovnici ve tvaru $X_0^T K X = 0$.

Po vynásobení matic získáme pro obecnou kuželosečku $k$ a bod $X \in k$ rovnici

$$\boxed{a_{11} x x_0 + a_{12} x y_0 + a_{12} x_0 y + a_{22} y_0 y + a_{13} x_0 + a_{23} y_0 + a_{13} x + a_{23} y + a_{33} = 0. \quad (T2)}$$

## 4.4 Odvození rovnice tečny pro SŠ

Transformaci odvození z předchozí kapitoly pro střední školy ukážeme například pro parabolu ve tvaru $x^2 = 2py$, kde $p \in \mathbb{R} - \{0\}$. Použijeme odvození pomocí toho, že tečna má s kuželosečkou právě jeden společný bod. Tečnu $t$ lze parametricky popsat pomocí rovnic ($\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ jsou souřadnice směrového vektoru tečny)

$$x = x_0 + t \cdot u_1 \quad \wedge \quad y = y_0 + t \cdot u_2; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dosazením $x, y$ z parametrického vyjádření přímky do rovnice paraboly získáme rovnici

$$(x_0 + tu_1)^2 = 2p(y_0 + tu_2),$$

kterou za použití toho, že bod $X$ je bodem paraboly (tj. $x_0^2 = 2py_0$), upravíme na tvar

$$t(2x_0 u_1 - 2u_2 p + t u_1^2) = 0.$$

[7] Pracujeme s homogenními souřadnicemi, takže bod $X \in \mathbb{E}_2$ má souřadnice ve tvaru $X = (cx, cy, c)$, kde $c \in \mathbb{R} - \{0\}$, resp. $(cx, cy, 0)$, pakliže je nevlastní. Vektor $\vec{u}$ potom má souřadnice ve tvaru $(ku_1, ku_2, 0), k \in \mathbb{R}$. Tento tvar plyne z toho, že $\vec{u} = B - A$, kde $A, B$ jsou dva body.

Chceme, aby měla parabola s přímkou právě jeden společný bod, tedy chceme, aby tato rovnice měla právě jedno řešení. Rovnice je kvadratická bez lineárního členu, má tedy právě jedno řešení právě tehdy, když platí buď $t = 0$[8], nebo když koeficient $2x_0u_1 - 2u_2p$ lineárního členu je nulový, tj. když

$$\boxed{x_0u_1 - u_2p = 0.}$$

Tuto podmínku nyní využijeme. Vrátíme-li se k původní parametrizaci tečny, můžeme vynásobit první rovnici $x_0$ a druhou rovnici $-p$. Získáme tak soustavu rovnic

$$xx_0 = x_0^2 + t \cdot x_0u_1 \quad \wedge \quad -yp = -y_0p - t \cdot u_2p; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Rovnice sečteme a získáme tak rovnici

$$xx_0 - yp = x_0^2 - y_0p + t(x_0u_1 - u_2p).$$

Využitím podmínek $x_0u_1 - u_2p = 0$ a $x_0^2 = 2py_0$ získáme po úpravách rovnici

$$xx_0 = py + py_0,$$

což je rovnice hledané tečny. Podobný přístup můžeme aplikovat pro jakoukoli kuželosečku, princip bude stále stejný. Pokud bychom změnili souřadnice vrcholu (pro elipsu a hyperbolu souřadnice středu) na bod $V = [m; n]$; rovnice paraboly se změní na

$$(x - m)^2 = 2p(y - n)$$

a rovnice tečny v bodě $T_0 = [x_0; y_0]$ se pak změní na

$$\boxed{(x - m)(x_0 - m) = p(y - n) + p(y_0 - n).}$$

Dokázat by to nebylo složité, neboť se jedná o obyčejné posunutí počátku souřadnic do bodu $V$.

## 4.5 Výpočet tečny odhadem

V této kapitole uvedeme ještě jeden způsob, jak můžeme na rovnici tečny přijít. Tento způsob lze předvést přímo žákům na střední škole a je uveden např. v [HAL][9] pro elipsu. My ho zde aplikujeme na hyperbolu.

Mějme dánu hyperbolu $h$ rovnicí $h: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Jelikož rovnice této kuželosečky obsahuje kvadratické členy a rovnice jakékoli tečny vedené jejím bodem $T_0 = [x_0, y_0]$ obsahuje pouze členy lineární, můžeme uhádnout, že rovnice tečny bude:

$$t_? : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Jistě tato rovnice splňuje základní požadavek na rovnici tečny – totiž, že souřadnice bodu $T_0$ jí vyhovují, tj. bod $T_0$ na ní leží. Nyní dokážeme požadavek na to, že přímka s touto rovnicí „tečny“ má s kuželosečkou společný právě jeden bod. Ukážeme to sporem.

Pro spor tedy předpokládejme, že existuje ještě další bod $T_1 = [x_1, y_1]$, který je průsečíkem přímky $t_?$ a hyperboly $h$. V takovém případě musí být splněna trojice podmínek:

I. $T_0 \in h$,

II. $T_1 \in h$,

III. $T_1 \in t_?$.

Vyjádřeno rovnicemi, musí tedy platit, že:

I. $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$,

II. $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$,

[8] Tento parametr odpovídá přímce rovnoběžné s osou, takže ho vyloučíme.
[9] Je zde uveden i obecnější způsob pomocí matic, který zde uvádět nebudeme.

III. $\frac{x_0 x_1}{a^2} - \frac{y_0 y_1}{b^2} = 1.$

Odečtením rovnice III. od rovnice I. a odečtením rovnice II. od rovnice III. získáme soustavu rovnic

I.–III.: $\frac{x_0(x_0-x_1)}{a^2} - \frac{y_0(y_0-y_1)}{b^2} = 0$

III.–II.: $\frac{x_1(x_0-x_1)}{a^2} - \frac{y_1(y_0-y_1)}{b^2} = 0$

To ovšem znamená, že body $T_0$ a $T_1$ leží na přímce

$$\frac{x(x_0-x_1)}{a^2} - \frac{y(y_0-y_1)}{b^2} = 0.$$

Ovšem také leží na přímce $t_?$:

$$t_? : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Nyní musíme ještě ukázat, že tyto přímky jsou různé. Sečtením jejich rovnic získáme rovnici

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

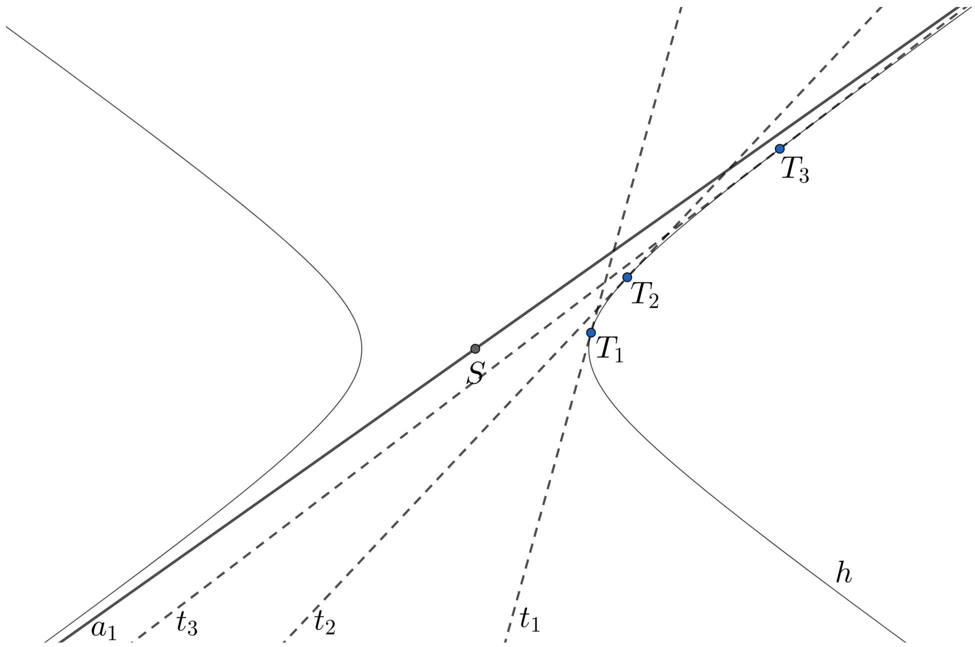
což je opět rovnice přímky. Tato přímka je totožná s přímkou $t_?$, pakliže $T_0 = T_1$. V tomto případě docházíme ke sporu, protože jsme předpokládali, že body $T_0$ a $T_1$ jsou různé. V opačném případě docházíme ke sporu, protože dva různé body nemohou ležet na dvou různých přímkách. Tím je důkaz hotov.

Protože se nacházíme v $\mathbb{E}_2$, měli bychom ještě dokázat, že rovnice tečny $t_?$ není rovnoběžná s žádnou z asymptot. To by bylo možné dokázat jednoduše – v následujících dvou kapitolách nalezneme rovnice asymptot, a tím ukážeme, že normálové vektory asymptot jsou $(\pm\frac{1}{a}; \frac{1}{b})$, což jsou vektory různé od normálového vektoru $\vec{n_t} = (\frac{x_0}{a^2}; \frac{-y_0}{b^2})$ právě nalezené tečny hyperboly v bodě $T_0 = [x_0, y_0]$.

## 4.6 Asymptoty hyperboly

Nyní přistoupíme ke studiu asymptot hyperboly; můžeme samozřejmě použít výše uvedený přístup z matematické analýzy pomocí limit, ale můžeme také využít přístup pomocí nevlastního bodu. Nejprve ovšem uveďme motivační úvahy k zavedení asymptoty hyperboly. Tuto motivaci lze jednoduše ukázat žákům na střední škole.

Na obrázku 6 je zakreslena hyperbola $h$ se středem $S$. Je zde také zakreslena přímka $a_1$, která středem $S$prochází. Volíme body $T_1, T_2$ a $T_3$, jimiž vedeme tečny hyperboly $h$. Vidíme, že čím „dále“ se na hyperbole $h$ bod dotyku nachází, tím více se blíží přímce $a_1$. Kdyby se bod dotyku $T$ nacházel „v nekonečnu“, tečna by splynula s přímkou $a_1$. Tuto přímku nazýváme asymptotou hyperboly $h$.




**Obr. 6:** K zavedení asymptoty.

Z našeho pohledu se jedná o tečnu v nevlastním bodě hyperboly $h$, který se nachází ve směru směrového vektoru přímky $a_1$. Souřadnice nevlastního bodu neznáme, ale umíme je jednoduše dopočítat.

Ať $H$ je tedy matice hyperboly $h$ a hledáme tedy její nevlastní bod $T_\infty = (x_0, y_0, 0)^T$. Následně budeme hledat asymptotu hyperboly – tečnu hyperboly procházející tímto nevlastním bodem. Protože $T_\infty \in h$, musí splňovat rovnici

$$T_\infty^T H T_\infty = 0,$$

po vynásobení matic získáme při použití běžného značení prvků matice kuželosečky:

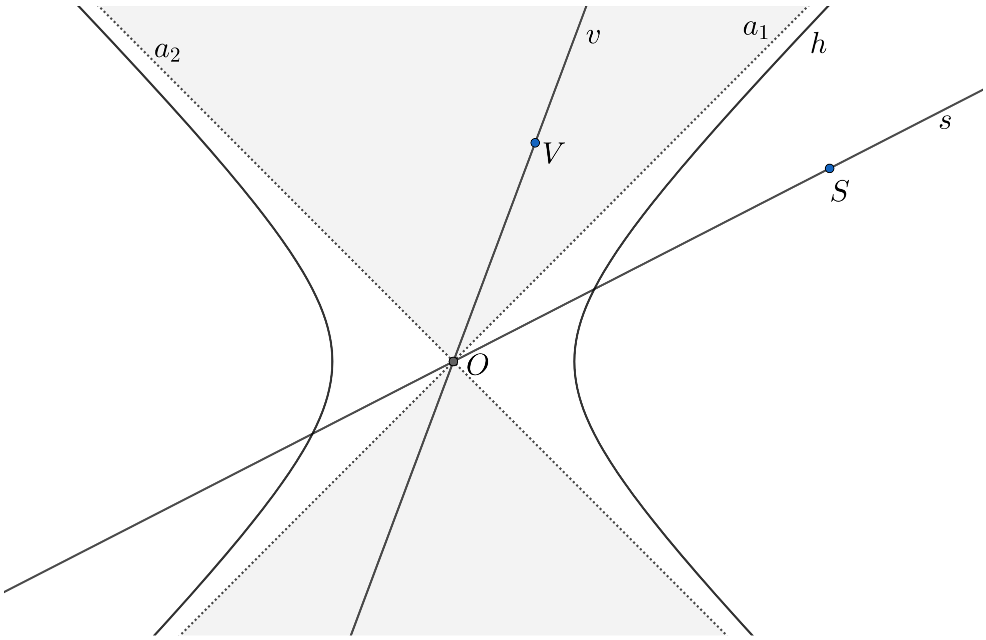
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

Z této rovnice spočítáme nevlastní body[10] kuželosečky a dosadíme je do rovnice tečny T1, kterou jsme odvodili v kapitole 4.3. Získáme tedy rovnici asymptoty

$$\boxed{T_\infty^T H X = 0.}$$

## 4.7 Odvození rovnice asymptoty pro SŠ

Odvození rovnice asymptoty lze jednoduše předvést studentům na SŠ bez použití matic. Budeme se inspirovat učebnicí [PRO], problematiku nicméně pojmeme hlouběji. Nejprve budeme diskutovat další geometrický význam asymptoty vhodný i pro SŠ. Tento význam je znázorněn na obrázku 7, kde je zakreslena hyperbola $h$ se středem $O$ a její asymptoty $a_1$, $a_2$. Budeme-li volit libovolný bod $V$ v šedé oblasti, vzniklá přímka $OV$ bude vnější přímkou hyperboly $h$ – nebude mít s hyperbolou $h$ žádný společný bod. Pokud ovšem budeme volit libovolný bod v bílé oblasti, třeba bod $S$, vzniklá přímka $OS$ bude hyperbolu $h$ protínat ve dvou různých bodech.




**Obr. 7:** Geometrický význam asymptoty.

Asymptoty jsou potom „hraniční přímky“, které dělí celou rovinu na „bílou“ a „šedou“ část. Tyto přímky nemají v $\mathbb{E}_2$ s hyperbolou $h$ žádný společný bod[11].

Uvažujme nyní hyperbolu $h$, která je zadána rovnicí

$$h : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Odvodíme nyní rovnice jejích asymptot. Střed $O$ hyperboly $h$ je zřejmě počátek soustavy, jakákoli přímka $p$[12], která bodem $O$ prochází, má rovnici ve tvaru $p : y = kx, k \in \mathbb{R} \quad (PO)$.

[10] Řešení dané rovnice je nekonečně mnoho, nicméně se vždy jedná o pouhé $k$-násobky směrových vektorů dvou asymptot – takže se jedná o tentýž směr, lze tedy uvažovat, že řešení jsou pouze dvě – dva směry asymptot.

[11] V $\mathbb{E}_2^\star$ ovšem ano – je to nevlastní bod hyperboly.

[12] Kromě souřadnicové osy $y$. Tu ale není třeba uvažovat, je zřejmé, že asymptotou není.

Konstantu $k$, která odpovídá směrnici asymptot, najdeme jednoduše – hledáme vlastně průsečíky přímky $p$ a hyperboly $h$. Dosadíme tedy $y$ z rovnice přímky $p$ do rovnice asymptoty a získáme tak rovnici:

$$h : \frac{x^2}{a^2} - \frac{(kx)^2}{b^2} = 1.$$

Vyjádříme $x$-ovou souřadnici průsečíku v závislosti na $k$:

$$x^2 = \frac{1}{\frac{b^2 - k^2 a^2}{a^2 b^2}},$$

přičemž jistě platí $a \neq 0$ a $b \neq 0$, protože se jedná o délky poloos hyperboly $h$.

Hledáme, pro jaké $k \in \mathbb{R}$ dochází k přechodu z „šedé“ oblasti, kde přímka ve tvaru (PO) má s hyperbolou $h$ společné dva body, do „bílé“ oblasti, kde přímka ve tvaru (PO) nemá s hyperbolou $h$ společný žádný bod. K tomu dochází, když výraz na pravé straně nemá smysl, a smysl tento výraz nedavá pro $k = \pm\frac{b}{a}$.

Dosazením $k$ do rovnice přímky $p$ získáme rovnice obou asymptot

$$a_{1,2} : y = \pm\frac{b}{a}x.$$

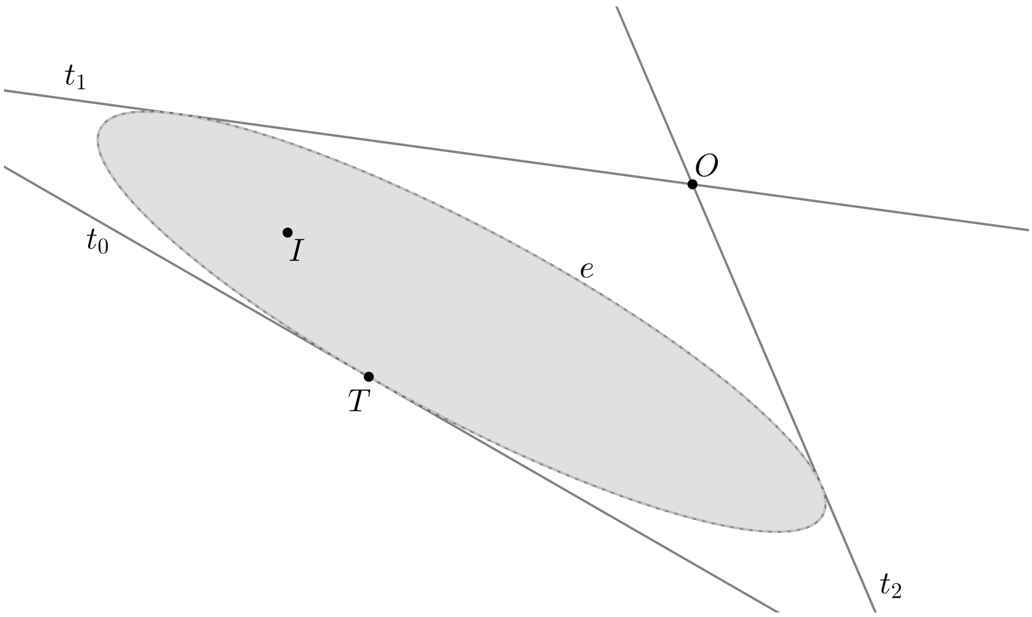
Budeme-li uvažovat obecně střed hyperboly obecně v bodě $S = [m; n]$, rovnice asymptot budou[13]

$$\boxed{y - n = \pm\frac{b}{a}(x - m).}$$

S tímto výsledkem se seznámíme i v učebnici [PRO].

## 4.8 Vnější a vnitřní body kuželosečky

V následující kapitole budeme studovat poláry kuželosečky. K našim výpočtům se nám bude hodit zavést pojmy vnitřního bodu a vnějšího bodu kuželosečky. Podívejme se na obrázek níže.




**Obr. 8:** K definici vnějších a vnitřních bodů.

Intuitivně je zcela jasné, že bod $I$ na obrázku výše je vnitřním bodem kuželosečky $e$ a bod $O$ je vnějším bodem kuželosečky. Jenže jak je možné je rozlišit? Jednak je samozřejmě možné je popsat pomocí určitých nerovnic (což se vyskytuje třeba i v učebnici [DID], ale my budeme potřebovat jinou vlastnost, kterou lze popsat čistě planimetricky, bez použití jakýchkoli rovnic. A tato vlastnost bude souviset právě s tečnami.

[13] Rovnice opět vzniknou posunutím souřadnicového systému.

Z bodu $T$ kuželosečky $e$ lze k této kuželosečce vést právě jednu tečnu, tečnu $t_0$. Kolik tečen je možné vést z bodu $I$, onoho vnitřního bodu kuželosečky? Není možné vést žádnou takovou tečnu, to vidíme i na obrázku. Ať zvolíme bod $I$ jakkoli, dokud bude „uvnitř“ elipsy, nebude možné z něj vést žádnou tečnu – každá přímka vedená tímto bodem má s kuželosečkou $e$ právě dva společné body[14]. Pokud se bodu $O$ týče, lze z něj vést právě dvě tečny na kuželosečku $k$. Jak bychom ovšem mohli vyvodit, že více jich být nemůže? Libovolnou kuželosečku lze popsat jistou kvadratickou rovnicí, libovolnou přímku lze popsat rovnicí lineární. Náš problém bychom řešili jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, jedna by byla kvadratická a druhá lineární s parametrem. Diskutovali bychom, pro jaké hodnoty parametru by soustava mohla mít více než dvě řešení. Takové bychom (až na speciální případy, které jsme vyloučili hned při definici tečny) nikdy nenašli. Jedná se o poměrně nezajímavý algebraický výpočet, a proto jeho detaily vynecháme.

[14] Tuto argumentaci lze v pořádku vést pro elipsu, pro hyperbolu a parabolu musíme dát pozor na „výjimky“ v definici 1. Abychom se těmto „výjimkám“ vyhli, volíme jako kritérium počet tečen, které lze z daného bodu na danou kuželosečku vést.

# Kapitola 5

# Polára

V následujících dvou kapitolách uvedeme dvě motivační úlohy pro zavedení poláry. V dalších dvou její vlastnosti dokážeme a v posledních dvou uvedeme několik zajímavostí, které jsou s polárou spjaty.

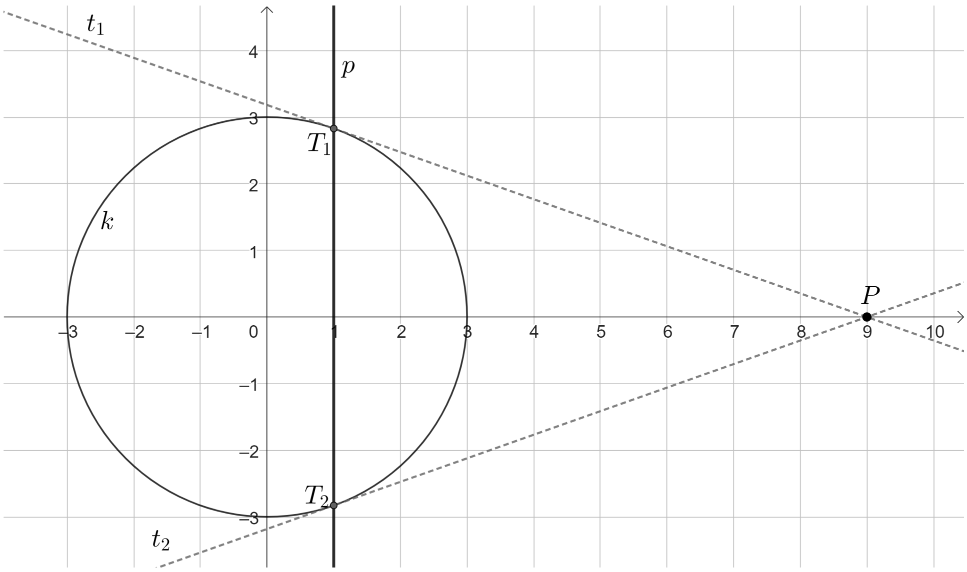
## 5.1 Tečny kružnice vnějším bodem

Co se stane, když dosadíme do rovnice tečny kuželosečky (T2) místo souřadnic bodu kuželosečky souřadnice nějakého obecného bodu $P$? Zkusíme to na konkrétním, jednoduchém příkladě.

Uvažujme kružnici $k : x^2 + y^2 = R^2$ a vnější bod $P = [x_0; 0]$, kde $x_0 > R$. Dosadíme-li bod $P$ do rovnice a získáme přímku

$$p : x_0 x - R^2 = 0,$$

jinak zapsáno $p : x = \frac{R^2}{x_0}$. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že průsečíky této přímky s kružnicí $k$ jsou body $T_{1,2} = \left[\frac{R^2}{x_0}; \pm R\sqrt{1 - (\frac{R}{x_0})^2}\right]$. Co jsou body $T_1, T_2$? Zkusíme dosadit určité hodnoty a obrázek sestrojit. Položme třeba $R = 3$ a $x_0 = 9$ – výpočet bude díky tomu poměrně jednoduchý. Naše přímka bude mít pro tento případ rovnici $p : x = 1$, body $T_1, T_2$ mají v takovém případě souřadnice $T_{1,2} = [1; \pm 2\sqrt{2}]$. Zkusíme tuto situaci sestrojit v GeoGebře a následně zkusíme spojit body $T_1$, $T_2$ přímkou. Uvidíme, co nám vyjde.




**Obr. 9:** Kružnice $k$, přímka $p$ a přímky $T_1P$ a $T_2P$. Zdá se, že přímky $T_1P$ a $T_2P$ jsou tečnami kružnice $k$.

Z obrázku výše se zdá, že přímky $T_1P$ a $T_2P$ jsou tečnami kružnice $k$. Tuto naši hypotézu musíme buď dokázat, nebo vyvrátit. První zmíněné nyní uděláme.

Pokud je naše hypotéza správná, musí být body $T_1$, $T_2$ body dotyku tečen z bodu $P$ na kružnici $k$. Správnost naší hypotézy můžeme jednoduše ověřit: tečny na kružnici jsou vždy kolmé na jejich poloměr, tj. nám stačí ověřit, že vektory $\overrightarrow{OT_1}$ a $\overrightarrow{T_1P}$ jsou na sebe kolmé (analogicky pro bod

$T_2$). To ověříme jednoduše: spočítáme skalární součin těchto vektorů a pokud bude nulový máme vyhráno – skalární součin kolmých vektorů je nulový. Snadno zjistíme, že $\overrightarrow{OT_1} = \left(\frac{R^2}{X}; R\sqrt{1-\left(\frac{R}{X}\right)^2}\right)$ a $\overrightarrow{PT_1} = \left(\frac{R^2-X^2}{X}; R\sqrt{1-\left(\frac{R}{X}\right)^2}\right)$. Spočítáme skalární součin těchto vektorů:

$$\vec{PT_1}\cdot\vec{OT_1} = \frac{R^2-X^2}{X}\cdot\frac{R^2}{X} + R^2\left(1-\left(\frac{R}{X}\right)^2\right) = \frac{R^4}{X^2} - R^2 + R^2 - \frac{R^4}{X^2} = 0$$

Naše hypotéza pro kružnici tedy byla ověřena. Přímku $T_1T_2$ nazveme **polárou** bodu $P$ vzhledem ke kružnici $k$. Bod $P$ nazveme **pólem**.

## 5.2 Ohnisko a řídicí přímka paraboly

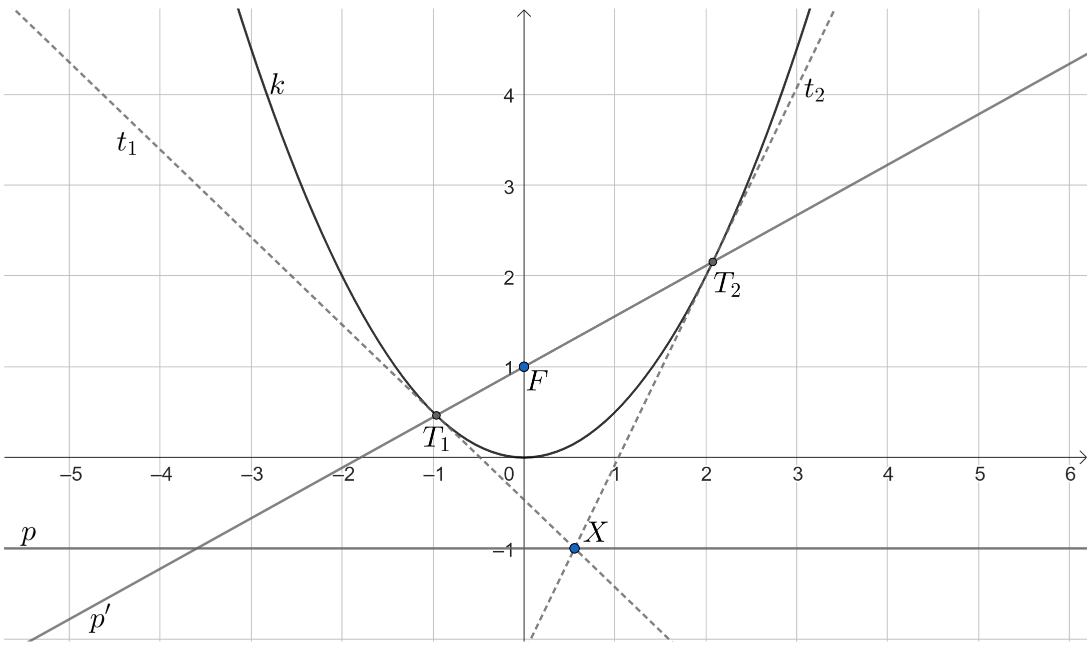
Uvažujme nyní parabolu ve tvaru $k: x^2 = 2fy$, kde $f \in \mathbb{R}$. Co se stane, pokud do rovnice tečny paraboly dosadíme souřadnice ohniska, tedy souřadnice bodu $F = [0; f]$? Dosazením bodu $F$ do rovnice tečny $t: xx_0 = f(y+y_0)$ takové paraboly dostaneme přímku s rovnicí $p: -f^2 - fy = 0$. Jelikož $f \neq 0$ (ohnisko není totožné s vrcholem paraboly), můžeme parametrem $f$ vydělit a získáme rovnici

$$p: y = -f.$$

Tuto přímku známe už ze střední školy – jedná se o řídicí přímku paraboly. Ovšem jaký je její význam? Najděme nyní „poláru“ libovolného bodu $X \in p$ vzhledem k parabole $k$. Jsou-li souřadnice takového bodu $X = [X_0; -f]$, dosazením do rovnice tečny získáme přímku

$$p': xX_0 = f(y-f)$$

Zjevně $F \in p'$, situace je znázorněna na obrázku níže.




**Obr. 10:** Parabola $k$ a řídicí přímka $p$. Polára $p'$ protíná parabolu $k$ skutečně v bodech dotyku tečen $t_1, t_2$. Opět, zdá se, že přímky $XT_1$ a $XT_2$ jsou tečnami paraboly $k$.

Nyní máme hypotézu: polára vnitřního bodu $P$ vzhledem ke kuželosečce $k$ je množina všech bodů $X$, pro něž platí, že polára bodu $X$ vzhledem ke kuželosečce $k$ prochází bodem $P$. Toto dokážeme v jedné z následujících kapitol.

## 5.3 Polára vnějšího bodu

V kapitole 5.1 jsme odvodili, co bude rovnice $X^T K X_0 = 0$ vyjadřovat, když uvažovaná kuželosečka bude kružnice a bod $X_0$ bude vnější. Byla to přímka, kterou jsme nazvali **polárou** a bod, ze kterého jsme tečny vedli, jsme nazvali **pólem**. Dokázali jsme, že tečny vedené z tohoto pólu na danou kružnici se dotýkají této kružnice v bodech, které jsou průsečíky poláry a kružnice. Očekáváme, že toto bude platit pro libovolnou kuželosečku $k$. A v této kapitole to dokážeme.

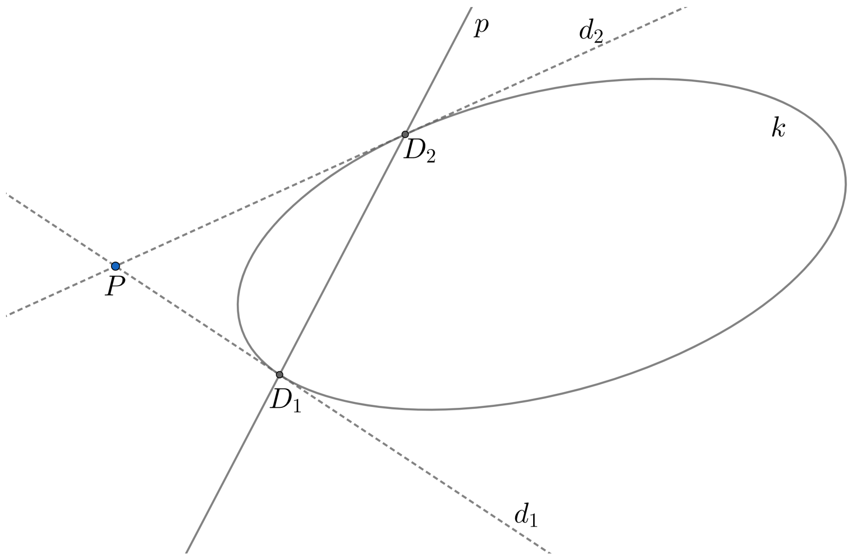
Nejdříve ovšem uveďme definici poláry, se kterou budeme pracovat:

**Definice 8.** *Buď dána kuželosečka $k \in \mathbb{E}_2$ s maticí $K$ a mějme dán bod $P$, který nazvěme pólem. Pak přímku, která je popsaná rovnicí*

$$\boxed{X^T K P = 0,}$$

*nazveme polárou pólu $P$ vzhledem ke kuželosečce $k$.*

Nyní tedy mějme kuželosečku $k$ s maticí $K$ a bod $P$, který je vnějším bodem kuželosečky $k$. Veďme nyní bodem $P$ tečnu $d_1$. Označíme $D_1$ bod dotyku. Rovnice tečny musí být $d : X^T K D_1 = 0$. Ovšem $P \in d_1$, a tak musí zároveň platit $P^T K D_1 = 0$. Obdobně bychom postupovali i pro druhou tečnu $d_2$ z bodu $P$ na kuželosečku $k$. Je jasné, kam tímto míříme – ze symetričnosti matice kuželosečky pak plyne, že na poláře $p : P^T K X = 0$ musí ležet oba body dotyku tečen z pólu $P$ na kuželosečku $k$.




**Obr. 11:** K odvození poláry vnějšího bodu.

Toto není těžké předvést studentům na středních školách: kružnici $k$ máme popsanou rovnicí $x^2+y^2 = 1$. Rovnice tečny libovolným jejím bodem $X_0 = [x_0; y_0]$ pak z dřívějšího jistě bude $t : xx_0 + yy_0 = 1$. Místo bodu kuželosečky dosadíme nějaký vnější bod $X_1 = [x_1; y_1]$. Tedy naše polára bude mít rovnici $p : xx_1+yy_1 = 1$. Pokud bod $X_1$ je bodem tečny procházející bodem $X_0$, musí platit rovnice $x_1x_0+y_1y_0 = 1$. Pak už jistě ale musí bod $X_0$ ležet na „poláře“ bodu $T_1$ vzhledem ke kuželosečce $k$ – z platnosti této rovnice okamžitě plyne $X_0 \in p$. Ze symetrie problému bude přímka $p$ muset procházet i bodem dotyku druhé tečny z bodu $X_1$ na kružnici $k$.

Analogický postup bude fungovat pro jakoukoli kuželosečku. Toto je tedy klíčová vlastnost poláry vnějšího bodu vzhledem ke kuželosečce – prochází oběma body dotyku tečen ze zmíněného vnějšího bodu. Ještě dodáme, že v knize [PRO] je polára definovaná právě pomocí její rovnice, nikoli pomocí její vlastnosti, kterou jsme právě odvodili. Poláru lze totiž zavést i pro vnitřní bod kuželosečky, ale její význam je zde jiný. To ovšem uvedeme v další kapitole.

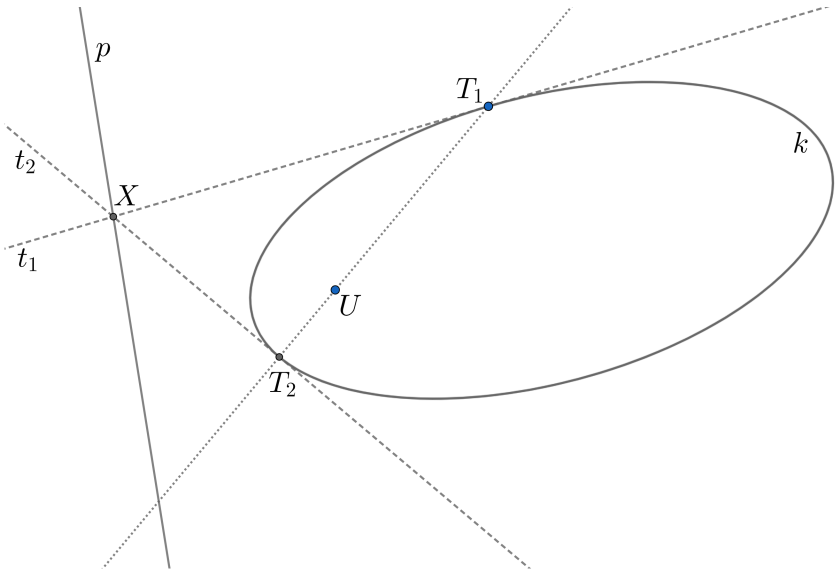
## 5.4 Polára vnitřního bodu kuželosečky

U příkladu o parabole a řídící přímce v kapitole 5.2 jsme formulovali hypotézu, jaký je význam poláry vnitřního bodu. Nejprve ji zopakujeme, a potom ji dokážeme.

**Věta 1.** *Ať $k$ je kuželosečka a $U$ je její vnitřní bod. Dále volme libovolný bod $T_1$ na kuželosečce $k$ a označme $T_2$ další průsečík přímky $T_1U$ a kuželosečky $k$. Nyní veďme tečny $t_1$, $t_2$ na kuželosečku $k$ body $T_1$ a $T_2$. Označme $X$ průsečík tečen $t_1$, $t_2$. Množinou všech takto zkonstruovatelných bodů $X$ (příslušících bodu $U$) je polára bodu $U$ vzhledem ke kuželosečce $k$, tj. přímka*

$$U^T K X = 0,$$

*kde $K$ je matice kuželosečky $k$.*[1]




**Obr. 12:** K větě výše. Chceme dokázat, že množina všech bodů $X$ popsaných ve větě 1 je přímka $p$.

*Důkaz.* Mějme tedy kuželosečku $k$, jejíchž matice je

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Volme vnitřní bod $U = (u_1, u_2, 1)^T$. Vektor $T_1 - U$ označme $\vec{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$, je tedy $T_1 = U + \lambda$. Druhý průsečík bude tím pádem muset mít tvar $T_2 = U + k\Lambda$, kde $k \neq 0$ a $k \neq 1$ (pro $k = 0$ by to byl bod $U$, pro $k = 1$ by to byl bod $T_2$ – tyto možnosti vyloučíme.) Rovnice tečen body $T_1$ a $T_2$ musí splňovat rovnice:

$$\begin{pmatrix} u_1 + \lambda_1 & u_2 + \lambda_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} u_1 + k\lambda_1 & u_2 + k\lambda_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Druhou rovnici vydělíme $-k$ a následným sečtením obou rovnic se zbavíme pomocného vektoru $\Lambda$ a získáme

$$\begin{pmatrix} u_1(1 - \frac{1}{k}) & u_2(1 - \frac{1}{k}) & 1 - \frac{1}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Vydělíme $1 - \frac{1}{k}$ (můžeme, $k \neq 0$ a $k \neq 1$) a máme rovnici

$$U^T K X = 0$$

To je námi hledaná rovnice poláry. Máme dokázáno. □

[1] V celé větě předpokládáme, že zmíněné body a tečny existují.

Transformace do středoškolské matematiky není nijak složitá, v podstatě jenom bez použití matic zopakujeme výše uvedený důkaz pro libovolnou regulární kuželosečku, ukážeme si to na příkladě hyperboly ve tvaru $h : x^2 - y^2 = c^2, c \in \mathbb{R} - \{0\}$. Pro přehlednost provedeme pouze důkaz pro tuto hyperbolu, pro jakoukoli jinou kuželosečku by se důkaz provedl analogicky.

Obdobně jako u důkazu výše, dán buď vnitřní bod kuželosečky $U = [u_1, u_2]$, tímto bodem veďme sečnu hyperboly $h$. Sečna hyperbolu $h$ protne v bodech $T_1, T_2$ se souřadnicemi $T_1 = [u_1 + \lambda_1, u_2 + \lambda_2]$ a $T_2 = [u_1 + k\lambda_1, u_2 + k\lambda_2]$, kde $k, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dosadíme-li tyto body do rovnice tečny pro hyperbolu $h$, získáme soustavu rovnic

$$x(u_1 + \lambda_1) - y(u_2 + \lambda_2) = c^2,$$

$$x(u_1 + k\lambda_1) - y(u_2 + k\lambda_2) = c^2.$$

Budeme chtít popsat body na hledané přímce nezávisle na voleném vektoru $\Lambda = (\lambda_1; \lambda_2)$. Těchto členů rovnic se tedy budeme chtít zbavit. Po roznásobení závorek a vydělení druhé rovnice $-k^2$ získáme soustavu

$$xu_1 + x\lambda_1 - yu_2 - y\lambda_2 = c^2,$$

$$-\frac{1}{k}xu_1 - x\lambda_1 + \frac{1}{k}yu_2 + y\lambda_2 = -\frac{1}{k}c^2.$$

Sečtením těchto rovnic získáme rovnici

$$(1 - \frac{1}{k})xu_1 - (1 - \frac{1}{k})yu_2 = (1 - \frac{1}{k})c^2$$

Vydělením $1 - \frac{1}{k}$[3] získáme rovnici

$$xu_1 - yu_2 = c^2,$$

což je rovnice poláry.

## 5.5 Dodatky k poláře

Níže uvedeme několik zajímavostí. Některých si už čtenář mohl všimnout, přesto je stojí za to explicitně uvést. Jednou je, co je polárou bodu kuželosečky vzhledem k této kuželosečce. Výsledek nás nepřekvapí:

**Poznámka 1.** *Je zřejmé, že dosadíme-li do rovnice poláry bod kuželosečky $k$, dostaneme rovnici její tečny. Polárou bodu $X_0 \in k$ vzhledem ke kuželosečce $k$ je tedy tečna kuželosečky, která prochází bodem $X_0$,*

Co je dále polárou středu hyperboly (popř. kružnice)? Tečny ze středu se hyperboly dotýkají v nevlastních bodech, jaká je tedy přímka, která oběma těmito body prochází? Je to přímka, které říkáme nevlastní přímka[4].

**Poznámka 2.** *Polárou středu libovolné středové kuželosečky vzhledem k této kuželosečce je přímka, na níž leží všechny nevlastní body. Této přímce říkáme **nevlastní přímka**.*

Další je tato zajímavá vlastnost, která plyne přímo z rovnic kuželoseček a je překvapivě jednoduché ji dokázat.

**Věta 2.** *Ať $k$ je kuželosečka, $X_1$ $X_2$ jsou dva libovolné body v rovině. Polára bodu $X_1$ vzhledem ke $k$ prochází bodem $X_2$ právě tehdy, když polára bodu $X_2$ vzhledem ke $k$ prochází bodem $X_1$.*

*Důkaz.* Dokážeme pouze jednu implikaci, druhá se dokáže analogicky. Nechť $X_1$ je tedy bod, polára $p_1$ tohoto bodu vzhledem ke kuželosečce $k$ má rovnici $p_1 : X^T K X_1 = 0$. Polára $p_1$ dle předpokladu prochází bodem $X_2$, tedy zjevně platí $X_2^T K X_1 = 0$. Polára bodu $X_2$ vzhledem k bodu $X_2$ má rovnici $p_2 : X^T K X_2 = 0$, která je ekvivalentní s rovnicí $p_2 : X_2^T K X = 0$. Je nyní zřejmé, že bod $X_1$ musí ležet na poláře $p_2$, jinak by rovnice výše nebyla naplněna. Máme dokázáno. ☐

[2] Nemusíme uvažovat $k = 0$, pokud by totiž $k = 0$, bylo by $T_2 = U$. To z předpokladu, že bod $U$ je vnitřní, ovšem není možné.

[3] Tento výraz nemůže být roven nule, jinak by bylo $k = 1$ a tím pádem by byly body $T_1$ a $T_2$ totožné.

[4] Blíže k problematice nevlastních elementů např. v [HAV] a [CAS].

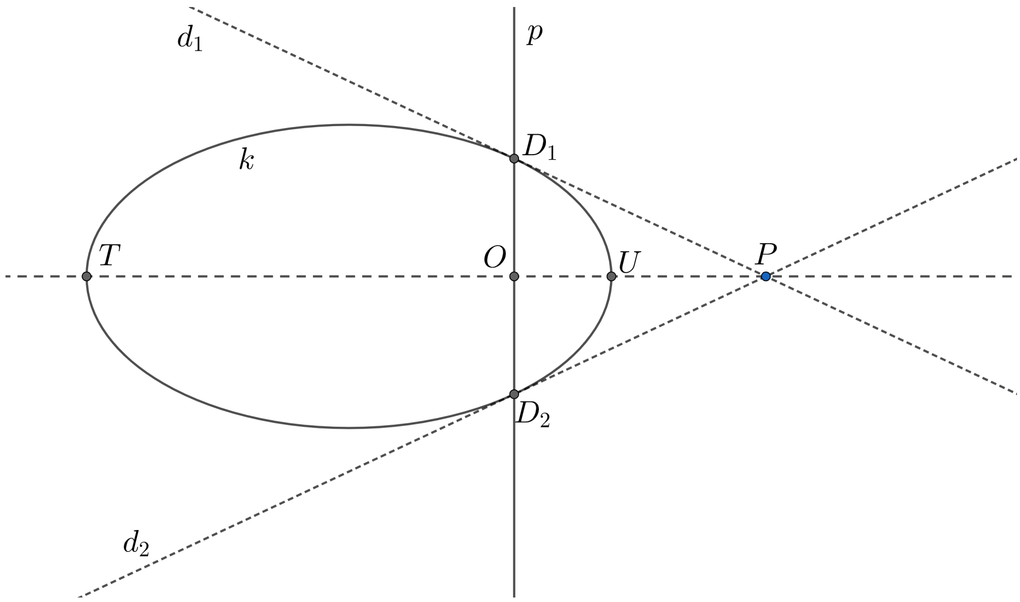
## 5.6 Dvojpoměr a polára

Nakonec uvedeme jednu zajímavou vlastnost a jeden její přímý důsledek, která by čtenáře mohla inspirovat k dalšímu studiu projektivní geometrie. Nejprve budeme muset ale zavést definici dvojpoměru. Pro nás bude stačit definice dvojpoměru čtyř různých bodů inspirovaná definicí v [HAV]:

**Definice 9.** *(Dvojpoměr.) Nechť $A, B, C, D$ jsou čtyři kolineární body. Pak jejich dvojpoměrem $\Lambda$ (značíme $(ABCD) = \Lambda$) budeme rozumět poměr dělicích poměrů $\lambda_C = (ABC)$ a $\lambda_D = (ABD)$, tj. $\Lambda = \frac{\lambda_C}{\lambda_D} = \frac{(ABC)}{(ABD)}$. Připomínáme, že dělicí poměr $\lambda_C$ bodů $A, B$ vzhledem k bodu $C$ je číslo $\lambda_C \in \mathbb{R}$ takové, které splňuje $\overrightarrow{AC} = \lambda_c \cdot \overrightarrow{BC}$.*

V knize [HAV] je pak uvedena zajímavá věta, ze které vyvodíme důsledek, který lze prezentovat i na středních školách:

**Věta 3.** *Ať $k$ je kuželosečka, $s$ je její sečna, ať $T, U$ jsou průsečíky sečny $s$ a kuželosečky $k$, ať $P$ je bod a $p$ je polára bodu $P$ vzhledem ke kuželosečce $k$. Označme $O$ průsečík poláry $p$ a sečny $s$. Pak body $T, U, P, O$ tvoří tzv. harmonickou čtveřici, tj. platí $(TUPO) = -1$.*




**Obr. 13:** Kuželosečka a harmonická čtveřice bodů $T, U, P, O$. Tečny $d_1, d_2$ vedené z bodu se kuželosečky $k$ dotýkají v bodech $D_1$ a $D_2$; těmito body prochází polára $p$.

Situace je znázorněná na obrázku výše. Důkaz uvádět nebudeme, je nad rámec této práce. Nicméně z této věty dokážeme odvodit zajímavý výsledek, který je možné prezentovat i studentům na středních školách.

Označme $(TUP) = \lambda_P$ a $(TUO) = \lambda_O$. Z definice dvojpoměru a věty výše přímo plyne, že musí platit $\lambda_P = -\lambda_O$. Vynásobíme-li obě strany vektorem $\overrightarrow{UO}$, dostaneme rovnici

$$\lambda_P \cdot \overrightarrow{UO} = -\overrightarrow{TO},$$

kde pravá strana rovnice výše plyne z definice dělicího poměru $(TUO)$. Skalárně vynásobíme obě strany rovnice vektorem $\overrightarrow{UP}$ a z definice dělicího poměru $(TUP)$ nám vyplyne rovnice:

$$\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{UO} = -\overrightarrow{TO} \cdot \overrightarrow{UP}$$

, z čehož okamžitě vyplyne (protože všechny vektory ve výše uvedené rovnici jsou rovnoběžné):

$$|\overrightarrow{TP}| \cdot |\overrightarrow{UO}| = |\vec{TO}| \cdot |\overrightarrow{UP}|,$$

nebo také

$$\frac{|TP|}{|UP|} = \frac{|TO|}{|UO|},$$

nebo-li také: poměr vzdáleností bodu $P$ od bodů $T$ a $U$ je stejný jako poměr vzdáleností bodu $O$ od těch samých bodů[5].

[5] Vidíme zde tedy dvojpoměr vyjádřený pomocí vzdáleností bodů, nicméně jsme ztratili informaci o orientaci vektorů.

# Kapitola 6

# Závěr

V první kapitole jsme diskutovali pokrytí látky o kuželosečkách na českých středních školách, zejména jsme se zajímali o pokrytí problematiky tečen a polár v učebnicích [PRO] a [DID]. Také jsme diskutovali problémy u středoškolské definice tečny kuželosečky související s potřebou vyloučit přímky rovnoběžné s asymptotami hyperboly a s osou paraboly – definice potom působila nejednotně.

V druhé kapitole jsme pro účely jednodušší definice tečny zavedli nevlastní body. Ve třetí kapitole jsme poté definovali homogenní souřadnice, které nám umožnily přiřadit souřadnice i nevlastním bodům a umožnily jednodušší zápis dalších výpočtů.

Ve čtvrté kapitole jsme diskutovali tečny kuželoseček. Tuto problematiku jsme pojali několika různými způsoby. Nejprve jsme diskutovali použití ideově jednoduchého, výpočetně ovšem náročného postupu. Také jsme diskutovali použití metod matematické analýzy pro nalezení rovnice tečny kuželosečky. Využili jsme definice tečny k odvození její rovnice. Ukázali jsme také, jak je možné rovnice tečen kuželoseček odhadnout a následně jsme dokázali, že takové rovnice splňují podmínky kladené na tečnu kuželosečky.

Dále jsme využili homogenních souřadnic nevlastního bodu pro jednoduché a elegantní odvození postupu pro výpočet asymptot hyperboly a následně jsme provedli poměrně jednoduché středoškolské odvození, které vychází z toho, že asymptoty jsou hranicemi dvou oblastí splňujících podmínky uvedené v této podkapitole. Nakonec jsme pro potřeby další kapitoly zavedli vnější a vnitřní body kuželosečky, kde jsme jako kritérium použili počet tečen, které lze vést z vnějšího, resp. vnitřního bodu.

V páté kapitole jsme diskutovali, co se stane, pokud do rovnice tečny dosadíme libovolný bod, ne nutně pouze bod kuželosečky. Zjistili jsme, že se jedná o přímku, kterou jsme nazvali polárou, a která má pěkné vlastnosti, pomocí kterých se dají opět hledat rovnice tečny. Zmínili jsme vlastnosti poláry spojené s dvojpoměrem.

Odvození ve čtvrté a páté kapitole jsme transformovali na úroveň středoškolské matematiky. Netvrdíme, že by tato odvození měla být nutně na středních školách prováděna, nicméně soudíme, že v případě dostatku času by mohlo jít o zajímavé doplňky k běžně probírané středoškolské látce, které by vedly k hlubšímu porozumnění matematice ze strany žáků.

Na závěr bychom chtěli ještě jednou zdůraznit, že se nám podařilo najít poměrně jednoduché postupy přímo použitelné na střední škole, zejména jednotné odvození její rovnice, a také jsme prozkoumali základní vlastnosti polár. Vždy jsme se snažili postupovat tak, aby se nezdálo, že pojmy a rovnice "padají z nebe".

# Seznam použité literatury

K vysázení textu byl použit TEXLive a editor TEXstudio. Obrázky byly vytvořeny v programu GeoGebra.


[BEČ] Bečvář, J.: *Lineární algebra. Matfyzpress, Praha 2005*

[CAS] Casse, R.: *Projective geometry: An introduction. Oxford University Press, New York, 2006*

[CHO] Chodorová, M.: *Projektivní geometrie. [cit. 11.7.2024]. Dostupné z: https://kag.upol.cz/homepage_chodorova/projektivni-geometrie/*

[DID] Vondra, J.: *Matematika pro střední školy 7. díl A. Analytická geometrie v rovině - učebnice. 1. vyd. Nakladatelství Didaktis, s.r.o., Brno, 2016*

[HAL] Halas Z., Hromadová J. *Kuželosečky. [cit. 7.7.2024]. Dostupné z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/∼halas/Geometrie/kuzelosecky.pdf*

[HAV] Havlíček, K.: *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček. Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1956*

[JAN] Janyška, J., Sekaninová, A.: *Analytická teorie kuželoseček a kvadrik. [cit. 10.7.2024]. Dostupné z: https://www.math.muni.cz/∼vondra/ums/kuakv/skripta.pdf*

[PRO] Kočandrle, M., Boček, L.: *Matematika pro gymnázia. Analytická geometrie. 1. vyd. Prometheus, Praha, 1995.*

[PSM] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky. 10. vyd. Prometheus, 2015*

[RIC] Richter-Gebert, J.: *Perspectives on Projective Geometry: A Guided Tour Through Real and Complex Geometry. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011.*

[RMO] Rmoutil, M.: *Matematická analýza I. [cit. 8.7.2024]. Dostupné z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/∼rmoutil/NMTM101/MA1.pdf*

[RVP] MŠMT: *RVP pro gymnázia. [cit. 6.6.2024 a 5.7.2024]. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy-pro-gymnazia-rvp-g/*

[SEK] Sekanina M., Boček L., Kočandrle M., Šedivý J.: *Geometrie I. Státní pedagogické nakladatelství Praha, 1986*

[TLP] Smíchovská SPŠ: *ŠVP pro obor vzdělávání TECHNICKÉ LYCEUM. [cit. 6.6.2024]. Dostupné z: https://www.ssps.cz/wp-content/uploads/2020/12/SVP-TECHNICKE-LYCEUM-2009-SSPS.pdf*