



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Lexa

**Banachovy-Tarského paradoxní
dekompozice**

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D.

Studijní program: Matematika se zaměřením na
vzdělávání

Studijní obor: MIUP

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Na první pohled se může zdát, že tato práce je výsledkem pouze jednoho studenta matematiky. Ovšem za jejím vznikem stojí také nespočet hodin práce a podpory od lidí, kteří mě po celou dobu studia neúnavně povzbuzovali. Rád bych poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce, RNDr. Martinu Rmoutilovi, Ph.D., za jeho trpělivost, odborné vedení a neocenitelné rady, které mě dovedly až sem, i když jsem s nimi často nesouhlasil. Děkuji mu, že si na mě vždy našel čas, klidně i v nekřesťanské hodiny nebo na dovolené.

Dále děkuji své rodině za jejich podporu a pevnou víru v mé znalosti. Mé přítelkyni vděčím za to, že se o mě starala, i když se mé pracovní návyky často podobaly spíše životnímu stylu netopýra než studenta.

Název práce: Banachovy-Tarského paradoxní dekompozice

Autor: Jan Lexa

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., katedra

Abstrakt: V této závěrečné práci se věnujeme různým paradoxům v celé jejich rozmanitosti. Na úvod čtenáře seznámíme s paradoxy týkajícími se nekonečna a jeho základní aritmetiky. Poté představíme několik geometrických a algebraických paradoxů, které vycházejí ze zdánlivě rozporuplných rozkladů. Práce hojně využívá pojem ekvirozložitelnosti a detailně zkoumá její vlastnosti. V závěru ji porovnáváme s nůžkovou kongruencí a objasňujeme rozdíly mezi nimi. Čtenář se dále dozví potřebné základní informace z teorie míry a algebry, což jsou klíčové oblasti pro nalezení podskupiny generující paradoxní dekompozice. Závěrečná část je věnována hlavnímu tématu práce, Banachovu-Tarskému paradoxu, kde je dokázáno několik tvrzení a stručně prozkoumáno fungování tohoto paradoxu v různých dimenzích.

Klíčová slova: paradoxní rozklad, Banach-Tarského paradox, konečně aditivní míra, kongruence množin, ekvirozložitelné množiny, volná grupa, neměřitelná množina, axiom výběru

Title: On Banach-Tarski paradoxical decompositions

Author: Jan Lexa

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., department

Abstract: In this thesis, we examine the various paradoxes in all their diversity. We begin by introducing the reader to paradoxes concerning infinity and its basic arithmetic. We then introduce several geometric and algebraic paradoxes that arise from seemingly contradictory decompositions. The paper makes extensive use of the notion of equidecomposability and examines its properties in detail. We conclude by comparing it with scissor congruence and clarifying the differences between them. The reader will also learn the necessary background information from measure theory and algebra, which are key areas for finding the subgroup generating paradoxical decompositions. The final section is devoted to the main topic of the paper, the Banach-Tarski paradox, where several propositions are proved and the operation of this paradox in various dimensions is briefly examined.

Keywords: paradoxical decomposition, Banach-Tarski paradox, finitely additive measure, congruence of sets, equidecomposable sets, free group, non-measurable set, axiom of choice

Obsah

Úvod	3
1 Práce s nekonečny	5
1.1 Hilbertův hotel	10
1.2 Axiom výběru	11
1.2.1 Historická vložka	12
2 Paradoxní konstrukce	13
2.1 Geometrické paradoxy	14
2.2 Sierpińského-Mazurkiewiczův paradox	17
2.3 Konstrukce Hyperwebster	19
2.4 Hausdorffův paradox	23
3 Banachův-Tarského paradox	31
3.1 Banachova-Tarského věta aneb jak z kapky udělat moře	31
3.2 Jak jsme na tom v rovině?	36
3.3 Jak jsme na tom v hypersvětě?	38
3.4 Banachův-Tarského spojitý rozklad sféry	39
Závěr	41
Seznam použité literatury	43
Seznam obrázků	45
Seznam tabulek	47

Úvod

Co je to paradox a jak se stane, že něco za paradox označíme? Na počátku je vždy pojem, který nebyl důkladně anebo správně formulován. Většinou se jedná o nekorektní definici, neplatný argument nebo lidové používání termínu. Krásným příkladem může být takzvaný Paradox hromady, který hojně využívají autoři kuchařek se svými špetkami, špičkami nože a šálky mouky.

„Řekneme, že jedno zrnko soli není špetka, pak tedy ani dvě zrnka nejsou špetka. Podobně pokud 2 zrnka nejsou špetka, potom ani 3 zrnka nejsou špetka . . . Jestliže 999 999 zrnok není špetka, potom ani 10^6 (1 milion) zrnok přeci nemůže být špetka anebo ano?“

Paradox z řeckého slova „*Paradoxos*“ je tvrzení, které dochází k seberozporným závěrům. Jde proti našemu přirozenému chápání a intuici. Například předkládá prvky, které se vzájemně vylučují, a tudíž spolu nemohou koexistovat. Nicméně v daném paradoxu spolu klidně jdou bok po boku na procházku.

Cílem této práce je zaujmout širší odbornou veřejnost, naučně popularizovat některé vybrané paradoxy a doplnit hutnou teorii o názorné příklady tak, aby je čtenáři mohli využít ve svých hodinách nebo přednáškách. Jednotlivé kapitoly se snaží posouvat hranice bourání naší intuice. V prvních kapitolách se budeme věnovat některým lehčím paradoxním problémům a později se propracujeme až k paradoxním dekompozicím. V úplném závěru se podíváme na zub slavnému matematickému problému. Banachův-Tarského paradox byl poprvé publikován až v roce 1924 (Banach a Tarski, 1924). Jedná se tedy o poměrně nedávno zkonstruovanou tezi, která se i v dnešní době rozvíjí.

A o čem tedy již výše zmíněný paradox je? Ke konkrétní a přesné formulaci se dostaneme později, ale nyní si povíme pověst ze života matematiků, který dobře ilustruje celou situaci.

„Matematik má v kapse tabulku čokolády. Jelikož chce čokolády dvě, pro sebe a svého kamaráda, tabulku vhodně rozdělí na konečný počet částí, které přeusposkládá a následně slepí. Výsledkem jsou čokolády dvě o stejné chuti, barvě a objemu.“

V tuto chvíli už není pochyb o tom, že nám nezbyvá nic jiného než se podívat pořádně na matematickou myšlenku za tím vším. Neboť každý matematik je zvědavý, a zvláště překvapivým věcem nevěří.

1. Práce s nekonečny

Ačkoliv se už od dob Archiméda ze Syrakus a Eukleida ví, že kolem pojmu *nekonečno* číhá spousta nesrovnalostí, pořádně se na to v dnešní výuce hledí až na vysokých školách. Nejprve si musíme říct, že nekonečno není číslo, ale jakési množství, které lze měřit a porovnávat. Vezměme množinu *přirozených čísel* \mathbb{N} a srovnáme ji s množinou *celých čísel* \mathbb{Z} . Na první pohled by se mohlo zdát, že tyto dvě množiny čísel jsou různě velké a sice, že množina \mathbb{Z} obsahuje více prvků než množina \mathbb{N} . Ovšem z matematického hlediska mají tyto dvě nekonečna stejnou *mohutnost*.

Definice 1 (Relace mohutnosti, Kardinalita). *Mohutností konečné množiny budeme rozumět počet jejích prvků a mohutností množiny přirozených čísel \mathbb{N} rozumíme $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$.*

Řekneme, že množiny A, B mají stejnou mohutnost, píšeme $A \cong B$, pokud existuje bijektivní zobrazení $f : A \rightarrow B$. Řekneme, že A má stejnou nebo menší mohutnost než B , píšeme $A \preceq B$, pokud existuje injektivní zobrazení $f : A \rightarrow B$. Řekneme, že A má menší mohutnost než B , píšeme $A \prec B$, pokud neplatí $A \cong B$ a zároveň existuje injektivní zobrazení $f : A \rightarrow B$.

Dále se nám bude hodit k důkazu věty O mohutnostech číselných oborů Cantorova-Bernsteinova věta, kterou uvedeme bez důkazu. Její znění s důkazem lze nálezt zde (Fuchs, 1999, str. 75–76).

Věta 1 (Cantorova-Bernsteinova věta). *Nechť A, B jsou libovolné množiny splňující $A \preceq B$ a $B \preceq A$, pak $A \cong B$.*

Na následujících stránkách se podíváme, jaké vztahy a jaké mohutnosti mají mezi sebou nejznámější číselné množiny.

Věta 2 (O mohutnostech číselných oborů).

- (a) *Mohutnost množiny všech přirozených čísel \mathbb{N} je \aleph_0 .*
- (b) *Mohutnost množiny všech celých čísel \mathbb{Z} je \aleph_0 .*
- (c) *Mohutnost množiny všech racionálních čísel \mathbb{Q} je \aleph_0 .*
- (d) *Mohutnost množiny všech konečných posloupností přirozených čísel je \aleph_0 .*
- (e) *Mohutnost množiny všech reálných čísel \mathbb{R} je větší než \aleph_0 .*
- (f) *Množina všech komplexních čísel \mathbb{C} má stejnou mohutnost jako \mathbb{R} .*

Důkaz. Důkaz si rozložíme na jednotlivé části, které budeme dokazovat samostatně.

- (a) Plyne z definice relace mohutnosti.
- (b) Stačí najít bijekci f mezi \mathbb{Z} a \mathbb{N} . Zvolme f tak, aby

$$\forall z \in \mathbb{Z} : f(z) = \begin{cases} 2z + 1, & \text{pro } z \geq 0, \\ -2z, & \text{pro } z < 0. \end{cases}$$

⋮		⋮
3	→	7
2	→	5
1	→	3
0	→	1
-1	→	2
-2	→	4
-3	→	6
⋮		⋮

Tabulka 1.1: Zobrazení f mezi \mathbb{Z} a \mathbb{N} .

Z tabulky 1.1 lze nahlédnout, že takto definované f zobrazí nezáporná celá čísla na kladná lichá čísla a záporná celá čísla na kladná sudá čísla.

Nejprve si dokážeme, že f je surjektivní zobrazení. Necht $p \in \mathbb{N}$ je libovolný prvek.

- Jestliže p je liché, pak existuje $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 2n + 1 = p$, což lze ekvivalentně zapsat jako $f(n) = 2n + 1 = p$ nebo,
- pokud p je sudé, pak opět existuje $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : -2n = p$, a tedy můžeme napsat $f(n) = -2n = p$.

Z toho speciálně dostáváme, že pro každé přirozené číslo n existuje celé číslo p tak, že $f(n) = p$.

Nyní nám zbývá ukázat, že f je injektivní zobrazení. Důkaz provedeme sporem. Mějme navzájem různá $a, b \in \mathbb{Z} : f(a) = f(b)$, pokud je

- a nezáporné a b kladné (nebo naopak), pak $f(a)$ musí být sudé a $f(b)$ liché. Čímž dostáváme spor s předpokladem, že $f(a) = f(b)$, nebo jsou
- a, b nezáporná, z čehož plynou rovnosti $f(a) = f(b)$, $2a + 1 = 2b + 1$ a nakonec $a = b$, kde docházíme opět ke sporu, nebo jsou
- a, b záporná, tedy platí $f(a) = f(b)$ neboli $-2a = -2b$ a $a = b$.

Dokázali jsme, že existuje bijekce f mezi \mathbb{Z} a \mathbb{N} . Z čehož plyne, že $\mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$ a $\text{card}(\mathbb{Z}) = \aleph_0$.

(c) Zřejmě $\forall n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{Q}$ neboli $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. Můžeme tedy vzít identitu coby prosté zobrazení z \mathbb{N} do \mathbb{Q} , z čehož plyne $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q}$. Dále víme, že $\forall q \in \mathbb{Q} \exists a \in \mathbb{Z} \exists b \in \mathbb{N} : q = \frac{a}{b}$.

Nyní najdeme vhodnou bijekci $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ a dokážeme, že množina $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$. Z toho už bude platit $\mathbb{N} \cong \mathbb{Q}$.

Jedna z možností jak najít bijekci $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je, že si prvky $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ seřadíme do seznamu za sebe. Každé dvojici čísel pak můžeme přiřadit její index, což bude naše zobrazení g .

Seřazení provedeme následovně $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = [(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), \dots]$ neboli si prvky postupně přidáváme po diagonálách podle obrázku 1.1.

Teď si sestavme tabulku $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, jejíž buňky budou dvojice čísel (a, b) reprezentující racionální číslo zapsané ve formě zlomku $\frac{a}{b}$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$	1	2	3	4	...
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	...
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	...
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	...
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

Obrázek 1.1: Diagonální seřazení prvků $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$\mathbb{Q} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$	1	2	3	4	...
1	$\frac{1}{1}$	$\rightarrow \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$...
		\downarrow	\uparrow		
2	$\frac{2}{1}$	$\leftarrow \frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$...
	\downarrow		\uparrow		
3	$\frac{3}{1}$	$\rightarrow \frac{3}{2}$	$\rightarrow \frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$...
4	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

Tabulka 1.2: Jedna z možností jak seřadit prvky \mathbb{Q} .

Jak lze nahlédnout, opět si prvky můžeme seřadit do seznamu, označme A , podle tabulky 1.2, který si číslujeme.

Všimněme si, že některé prvky mají stejnou hodnotu např. $\frac{1}{2} \cong \frac{2}{4}$, a proto do seznamu přidáme pouze ty prvky, jejichž hodnota zatím nebyla do seznamu přidána. Takto jsme dokázali seřadit a očíslovat prvky \mathbb{Q}^+ .

Podobnou tabulku a seřazení můžeme udělat i pro \mathbb{Q}^- , kde místo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bude tabulka $(-\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$. Příslušný seznam si označíme jako B .

Nyní si vytvoříme finální seznam 1.3, kam na první pozici vložíme 0 a následně „sléváme“ dohromady očíslované seznamy A a B . To znamená, že vezmeme první prvek seznamu A a vložíme ho na druhou pozici, potom vezmeme první prvek seznamu B a vložíme ho na třetí pozici. Tímto způsobem můžeme očíslovat celou množinu \mathbb{Q} .

\mathbb{N}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
\mathbb{Q}	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	-2	3	-3	$\frac{3}{2}$...

Tabulka 1.3: Uspořádaný seznam hodnot mezi \mathbb{N} a \mathbb{Q} .

Tím jsme dokázali najít hledanou bijekci f , a tedy platí následující $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$. Z toho plyne, že $\text{card}(\mathbb{Q}) = \text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$.

(d) Necht A je množina všech konečných posloupností přirozených čísel, pak platí následující $\mathbb{N} \preceq A$, protože pro každé přirozené číslo n jsme schopni najít více různých konečných posloupností začínajících tímto prvkem, a tedy existuje injektivní zobrazení z \mathbb{N} do A .

Nyní si dokážeme opačnou nerovnost, tedy chceme $A \preceq \mathbb{N}$. Vezměme si libovolnou posloupnost s členy $a_n \in A, n \in \mathbb{N}$. Každou takovou posloupnost dokážeme zobrazit na číslo $q = 0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$. Číslo q je tímto určeno jednoznačně, protože různé posloupnosti a_n určují různá čísla q . Víme, že a_n je vždy konečná, a proto má q vždy konečný desetinný rozvoj. Ovšem to znamená, že q je racionální, a tedy $A \preceq \mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$. Z tranzitivity relace \preceq získáme $A \preceq \mathbb{N}$.

Dohromady jsme dokázali, že platí $\mathbb{N} \preceq A$ a zároveň $A \preceq \mathbb{N}$. Nyní zbývá aplikovat Cantorovu-Bernsteinovu větu a dostáváme, že $A \cong \mathbb{N}$. Snadným důsledkem je, že kardinalita A je \aleph_0 neboli $\text{card}(A) = \aleph_0$.

(e) Ukážeme, že mohutnost \mathbb{N} je menší než mohutnost \mathbb{R} , kde $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Musíme najít injektivní zobrazení z \mathbb{N} do \mathbb{R} , což je jednoduché. Jelikož $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, stačí si vzít identitu jako injektivní zobrazení z \mathbb{N} do \mathbb{R} . Dále potřebujeme dokázat, že neplatí $\mathbb{N} \cong \mathbb{R}$ neboli stačí dokázat neexistenci bijekce mezi těmito množinami.

Definujme množinu

$$M = \{x \in (0, 1) \mid x \text{ mají v nekonečném dekadickém rozvoji pouze čísla } 1, 2, 3\}.$$

Nyní stačí dokázat, že množina \mathbb{N} má menší mohutnost než takto definovaná množina M , neboť $M \subseteq \mathbb{R}$, a tedy stačí triviálně vzít identické zobrazení z M do \mathbb{R} jako injektivní zobrazení, a tím dokázat $M \preceq \mathbb{R}$. Zbytek plyne z tranzitivity relace \preceq .

Pro spor předpokládejme, že $M \cong \mathbb{N}$, pak všechna čísla z M lze seřadit do posloupnosti r_n .

$$r_n \begin{cases} r_1 = 0, c_{11}c_{12}c_{13}c_{14} \dots \\ r_2 = 0, c_{21}c_{22}c_{23}c_{24} \dots \\ r_3 = 0, c_{31}c_{32}c_{33}c_{34} \dots \\ r_4 = 0, c_{41}c_{42}c_{43}c_{44} \dots \\ \vdots \end{cases}$$

Ovšem v dalším kroku najdeme číslo $a \in M$, které nelze najít v posloupnosti r_n , čímž dostaneme spor s předpokladem. Necht $i \in \mathbb{N}$, pak označme

$$a_i = \begin{cases} 2, & \text{pro } c_{ii} = 1, \\ 3, & \text{pro } c_{ii} = 2, \\ 1, & \text{pro } c_{ii} = 3. \end{cases}$$

Je zřejmé, že $a = a_1 a_2 a_3 \dots$ není v posloupnosti r_n , jelikož se od každého čísla v ní liší alespoň o jednu cifru, ale náleží M . Ovšem tím jsme dostali spor s předpokladem, neboť posloupnost r_n měla obsahovat všechny prvky M . Tímto jsme ukázali, že nelze najít bijekci mezi M a \mathbb{N} , a tedy množina přirozených čísel má menší mohutnost než množina M neboli $\mathbb{N} \prec M$. Dohromady jsme dokázali, že $\mathbb{N} \prec M \preceq \mathbb{R}$. Z tranzitivity obou relací plyne $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ neboli mohutnost přirozených čísel \aleph_0 je menší než mohutnost reálných čísel. Ekvivalentně řečeno mohutnost reálných čísel je větší než \aleph_0 .

(f) Nalezneme vhodnou bijekci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, a tím dokážeme, že $\mathbb{R} \cong \mathbb{C}$. Víme, že platí $\mathbb{R} \preceq \mathbb{C}$, jelikož $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, a tedy stačí použít identitu z \mathbb{R} do \mathbb{C} jako injektivní zobrazení. Opačná subvalence bude těžší ukázat.

Každé komplexní číslo lze chápat jako dvojici čísel reálných. Například komplexní číslo v algebraickém tvaru $458 + 67i$ lze přepsat na dvojici souřadnic $[458; 67]$ ¹, speciálně $5i$ lze přepsat na $[0; 5]$. Zároveň víme, že každé komplexní číslo $c \in \mathbb{C}$ lze přepsat do exponenciálního tvaru (obecně $\forall c \in \mathbb{C} \exists r, \alpha \in \mathbb{R} : c = [r; \alpha] = re^{i\alpha}$), tedy $5i = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$. Všimněme si, že pokud bychom libovolné c reprezentovali pomocí kartézských souřadnic, taky by dané souřadnice mohly být záporné. Oproti tomu má exponenciální tvar tu výhodu, že c lze reprezentovat pomocí dvou čísel nezáporných. Přičemž $r \geq 0$ díky nezáporné vzdálenosti čísla c od středu Gaussovy roviny a číslo $\alpha \in [0, 2\pi)$, protože α je úhel otočení kolem středu Gaussovy roviny.

Dále si všimněme, že každé reálné číslo představuje ciferný rozvoj. Nyní zakážeme reprezentaci reálných čísel, které od nějaké cifry dál mají periodickou devítku. To můžeme udělat, protože každé takové číslo lze zapsat tak, že poslední nedevítkovou cifru zvětšíme o 1. Například číslo $1,679999\dots$ odpovídá číslu $1,68$.

Nyní si označme $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Chceme ukázat $\mathbb{C} \preceq D$, tudíž hledáme prostou funkci z \mathbb{C} do D . Definujme funkce $\phi(z) = \frac{z}{1-z}$ a

$$f(z) = \begin{cases} \phi(|z|) \cdot \frac{z}{|z|} = \frac{|z|}{1-|z|} \cdot \frac{z}{|z|} = \frac{z}{1-|z|}, & \text{pro } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{pro } z = 0. \end{cases}$$

Ukážeme sporem, že takto definovaná funkce ϕ je prostá na intervalu $[0, 1)$. Necht' jsou $z_1, z_2 \in [0, 1)$ různá, ale $\phi(z_1) = \phi(z_2)$, pak

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{1-z_1} &= \frac{z_2}{1-z_2} \\ z_1(1-z_2) &= z_2(1-z_1) \\ z_1 - z_1z_2 &= z_2 - z_2z_1 \\ z_1 &= z_2 \end{aligned}$$

Docházíme ke sporu s předpokladem z_1, z_2 různá.

Abychom dokázali prostotu funkce f , definujme $f^{-1}(y) = \phi^{-1}(|y|) \cdot \frac{y}{|y|}$. Tvrdíme, že funkce f^{-1} je inverzní k f . Dokažme, že $y = f(f^{-1}(y))$. Dále víme, že $\left|\frac{y}{|y|}\right| = 1$ a funkce ϕ je kladná na $[0, 1)$.

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(y)) &= \phi\left(\phi^{-1}(|y|) \cdot \frac{y}{|y|}\right) \cdot \frac{\phi^{-1}(|y|) \frac{y}{|y|}}{\left|\phi^{-1}(|y|) \frac{y}{|y|}\right|} = \phi\left(\phi^{-1}(|y|)\right) \cdot \frac{y}{|y|} \cdot \frac{\phi^{-1}(|y|) \frac{y}{|y|}}{\left|\phi^{-1}(|y|)\right| \left|\frac{y}{|y|}\right|} = \\ &= \phi\left(\phi^{-1}(|y|)\right) \cdot \frac{\phi^{-1}(|y|) \cdot \frac{y}{|y|}}{\left|\phi^{-1}(|y|)\right|} = \phi\left(\phi^{-1}(|y|)\right) \cdot \frac{\phi^{-1}(|y|) \cdot \frac{y}{|y|}}{\phi^{-1}(|y|)} = |y| \frac{y}{|y|} = y. \end{aligned}$$

Z existence inverzní funkce k f plyne prostota funkce f . Nyní ukážeme $D \preceq [0, 1) \times [0, 1)$. Definujme zobrazení $g : D \rightarrow [0, 1) \times [0, 1)$. Vezměme libovolné

¹Pro účely rozlišování budeme používat v této části důkazu místo čárky oddělující souřadnice středník.

souřadnice z $[0, 1) \times [0, 1)$ a označme si je $[r, \beta]$. Těmto souřadnicím přiřadíme komplexní číslo $re^{i\alpha}$, kde $\alpha = 2\pi\beta$. Toto číslo nutně leží v D , protože $r < 1$ a je unikátní, protože žádná dvě komplexní čísla nemají stejné polární souřadnice. Z toho, že existuje inverzní funkce $g^{-1} : [0, 1) \times [0, 1) \rightarrow D$, plyne prostota zobrazení g . Ukázali jsme $D \preceq [0, 1) \times [0, 1)$.

Nyní zobrazíme libovolné souřadnice z $[0, 1) \times [0, 1)$ do $[0, 1)$. Každá souřadnice je obyčejné desetinné číslo, které má svůj desetinný rozvoj. Tyto rozvoje můžeme navzájem prostřídát tak, že na liché pozice budeme dávat cifry z první souřadnice a na sudé pozice budeme dávat cifry z druhé souřadnice. Víme, že oba desetinné rozvoje začínají nulou, protože obě souřadnice jsou z intervalu $[0, 1)$. Pokud bychom označili první souřadnici jako $a = 0,a_1a_2a_3\dots$ a druhou souřadnici jako $b = 0,b_1b_2b_3\dots$, pak nově vzniklé číslo c by vypadalo takto $c = 00,a_1b_1a_2b_2\dots = 0,a_1b_1a_2b_2\dots$. Nově vzniklé číslo nemůže mít od nějakého indexu devítkovou periodu, protože jsme zakázali tuto reprezentaci výše. Každé takové číslo náleží do intervalu $[0, 1)$ a je unikátní, protože jsme vždy brali unikátní souřadnice, které mají unikátní desetinné rozvoje. Tím jsme našli prosté zobrazení z $[0, 1) \times [0, 1)$ do $[0, 1)$ a platí $[0, 1) \times [0, 1) \preceq [0, 1)$.

Nakonec $[0, 1) \preceq \mathbb{R}$, jelikož $[0, 1) \subset \mathbb{R}$. Ukázali jsme

$$\mathbb{R} \preceq \mathbb{C} \cong D \preceq [0, 1) \times [0, 1) \preceq [0, 1) \preceq \mathbb{R}.$$

Z tranzitivity subvalence a Cantorovy-Bernsteinovy věty plyne $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}$. Množina \mathbb{C} má stejnou mohutnost jako množina \mathbb{R} . □

Důkaz bodu (e) byl převzat z (Rmoutil, 2023). Zmíněná věta výše je pozoruhodná, protože dokazuje nejen existenci jiných mohutností než \aleph_0 , ale dokonce existenci různě velkých nekonečn.

1.1 Hilbertův hotel

V předchozí sekci jsme ukázali, že existují různě velká nekonečna. Nyní se v této sekci budeme věnovat operacím s nekonečny a ukážeme, jak hluboce neintuitivní jsou. K tomu využijeme myšlenkový experiment německého matematika Davida Hilberta [1862-1943] (O'Connor a Robertson, 2014), který se proslavil díky zformulování 23 matematických tehdy moderních problémů. Mnohé z těchto problémů byly postupně vyřešeny a dnes již přetrvávají pouze čtyři. Nejstarší z nevyřešených se nazývá *Goldbachova hypotéza*, která řeší otázku zdali každé sudé číslo větší než 2 lze vyjádřit jako součet dvou prvočísel.

Ovšem nyní už k samotnému experimentu známému jako *Hilbertův hotel*. Mějme hotel stojící uprostřed turisticky atraktivního města, který má tu vlastnost, že obsahuje nekonečně mnoho jednolůžkových pokojů. Jednoho dne při rušné šichtě mladého matematicky zdatného recepčního se hotel zcela zaplní. Ovšem na recepci se ozve zvonek s novým zákazníkem, který žádá o ubytování.

Recepčnímu nastane horká chvilka, ale po chvíli ho napadne geniální myšlenka. Co kdybychom přesunuli hosta z pokoje číslo 1 do pokoje s číslem 2 a hosta ze dvojky do trojky. Každého dalšího hosta z pokoje n přesuneme do pokoje s číslem $n + 1$. Náš hotel je přeci nekonečný, a tudíž neexistuje číslo pokoje

k takové, že neexistuje jeho soused $k + 1$. Ovšem tím se uvolní lůžko v prvním pokoji a recepční může ubytovat zákazníka čekajícího na recepci. Matematicky bylo ukázáno, že $\infty + 1 = \infty$.

Sotva se recepční pochválí, jak dobře situaci vyřešil, na zvonek zacinká řidič zájezdového autobusu plného lidí, že se ztratili a potřebují ubytování. Perná chvilka recepčního je už zase tady. Pokud jsme dokázali v hotelu najít místo pro jednoho zákazníka, určitě najdeme místo pro celý zájezd. Určíme, že počet všech účastníků zájezdu je k . Nyní každého hosta v hotelu musíme přesunout z pokoje číslo n do pokoje číslo $n + k$, neboli pokud $k = 35$, pak hosta z jedničky, přesuneme do šestatřicátého pokoje. To můžeme zase vždy udělat, protože hotel je nekonečný. Tím jsme ukázali, že $\infty + k = \infty$.

Ani neodbila půlnoc a recepčnímu opět zatéká do bot. Tentokrát je délka zájezdového autobusu v nedohlednu (je nekonečná) a lavina turistů zaplaví celou recepci. Kam s nimi, parafrázuje náš recepční Nerudu². Odpověď nalezneme ihned. Každého ubytovaného přesuneme z pokoje číslo n do pokoje z číslem 2^n , tedy například host z třetího pokoje se přesune do osmého pokoje. Jelikož náš hotel nemá žádné střešní apartmá, výčet nově volných pokojů je nekonečný. Můžeme tedy ubytovávat turisty z nekonečného autobusu do pokojů, jejichž číslo není mocnina dvojky. Tím jsme ukázali, že $\infty + \infty = \infty$.

Zbývá půl hodiny před koncem noční směny a na parkoviště před naším hotelem doráží nekonečně mnoho nekonečných autobusů. Ještě než začne cinkat první zvonění, recepční už spouští operaci kulový blesk³. Nyní hosty i nově příchozí znovu přemístíme tak, že každý z nich bude ubytován v pokoji s číslem $2^c 3^s$, kde c je číslo autobusu (již ubytovaní mají číslo autobusu 0) a s je číslo sedačky v daném autobusu. Tedy již ubytovaný host z pátého pokoje se přemístí do pokoje s číslem $2^0 3^5 = 243$ nebo například nově příchozí turista ze třetího autobusu a druhého sedadla se ubytuje v pokoji s číslem $2^3 3^2 = 72$. Žádný host se nemusí bát, že svůj pokoj bude muset sdílet, protože jinak by to znamenalo, že ve stejném autobusu na stejném sedadle sedělo více lidí, což je nekomfortní. Pokud by nastal tento případ a někdo sdílel s někým sedadlo, budeme uvažovat, že v takovém případě nebudou mít daní lidé problém sdílet pokoj. Nicméně vzhledem k tomu, že na sedadle sedí nejspíše konečné množství lidí, není problém pro recepčního přebytovat celý hotel tak, aby skutečně každý byl ubytovaný zvlášť. Tím jsme ukázali, že $\infty \cdot \infty = \infty$.

1.2 Axiom výběru

Axiom výběru (anglicky *Axiom of choice*, zkracováno na **(AC)**) je jeden z nejznámějších axiomů vůbec. Svou popularitu nabyl především díky své kontroverzi. V konečných množinách je **(AC)** poměrně snadno prokazatelný. Mějme tři regály hrníčků - zelené, modré a červené. Snadno si můžeme z každého regálu koupit právě jeden hrníček. Naproti tomu v nekonečných množinách už můžeme narazit na problémy (Pick, 2010, str. 197). Pokud například máme nekonečně párů bot, je lehké vybrat nejdříve levou a potom pravou. Nicméně pokud boty vyměníme

²Jan Neruda byl významný český spisovatel a novinář, který mimo jiné napsal slavný fejeton Kam s ním?.

³Kulový blesk je název slavné komedie od režisérů L. Smoljaka a Z. Podskalského, která vypráví o stěhování mezi dvanácti byty coby „největší akci v dějinách stěhování“.

za stejně vzorované ponožky, nebudeme vědět zdali vybíráme právě levou nebo pravou. Všechny totiž vypadají stejně. Jak bychom měli tedy ponožky vybírat a podle čeho? Více odborně, jak by měla vypadat výběrová funkce z ponožkové množiny?

V následujících kapitolách si ukážeme něco málo, co s tímto axiomem je možné páchat za zločiny proti lidskosti. Role axiomu výběru je totiž pro mnoho z nich naprosto esenciální. Dodnes existuje řada odborníků, kteří jsou spíše odpůrci (**AC**), kvůli jeho nekonstruktivnosti a vágnímu popisu výběrové funkce. Ovšem valná část matematiků již dnes (**AC**) uznává a bez ostychů používá.

Axiom výběru (AC) *Pro každé dvě neprázdné množiny A, B a binární relaci $R \subseteq A \times B$ takovou, že pro každé $\forall x \in A \exists y \in B : R(x, y)$, existuje funkce $f : A \rightarrow B$ taková, že pro všechny $x \in A : R(x, f(x))$.*

Dále si řekneme větu bez důkazu z teorie množin, kterou budeme implicitně používat v následujících kapitolách jako fakt. Nebudeme ji tedy dále explicitně zmiňovat.

Věta 3 (O sjednocení spočetných množin (**AC**)). *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetná množina.*

1.2.1 Historická vložka

Poprvé byl (**AC**) zformulován jedním ze zakladatelů teorie množin Ernstem Zermelem v roce 1904. Pokud tento axiom přidáme do axiomatické soustavy teorie množin mezi Zermelovy-Fraenkelovy axiomy, dostaneme tím rozšířenou Zermelovu-Fraenkelovu teorii množin, která se často značí (**ZFC**). Cílem této teorie bylo formalizovat teorii množin tak, aby byla dostatečně bohatá díky nespočetným množinám a zároveň neumožňovala existenci problematických paradoxů, jako byl například Russellův paradox.⁴ Do této teorie spadá i náš Banachův-Tarského paradox a mnoho dalšího.

⁴Čtenáři jistě znají jeho lidovou verzi, kde holič holí právě ty, kteří se neholí sami. Avšak kdo holí holiče? Pokud se sám neholí, tak se musí holit, protože holí ty, co se sami neholí. Holit se sám nemůže, protože holí jen ty, kteří se sami neholí.

2. Paradoxní konstrukce

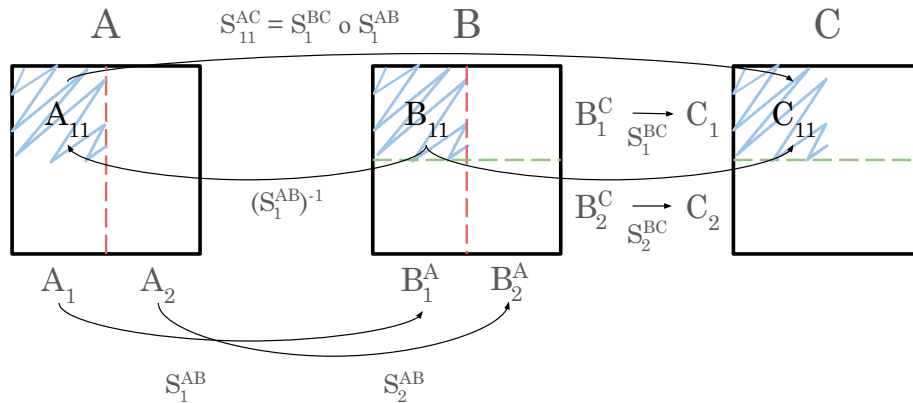
V této sekci si představíme typ paradoxu, který využívá vlastnost *equidecomposability* neboli *ekvirozložitelnosti*. Tato vlastnost bude pro nás velmi důležitá při konstrukci Banachova-Tarského paradoxu. Nejdříve si ale musíme zadefinovat, co to znamená rozložit množinu. Respektive najít její rozklad.

Definice 2 (Rozklad množiny). *Rozkladem množiny X zde rozumíme takovou množinu \mathcal{Y} podmnožin X , že sjednocením této množiny je množina X a každé dva prvky této množiny jsou disjunktní.*

Definice 3 (Ekvirozložitelnost). *Nechť A, B jsou dvě libovolné podmnožiny \mathbb{R}^n . Řekneme, že A, B jsou ekvirozložitelné ($A \approx B$), pokud je možné je rozložit na stejně konečný počet částí, které mohou být spárovány tak, že každé dvě odpovídající si části jsou přímo shodné¹.*

Nyní prozkoumáme tuto vlastnost coby relaci. Ekvirozložitelnost splňuje reflexivitu, protože množina je ekvirozložitelná sama se sebou. Stačí množinu nerozdělovat na více částí, pak existuje pouze jedna část, která může být spárována sama se sebou díky identickému zobrazení, které je přímo shodné.

Symetrii ukážeme obdobným způsobem. Nechť množina A je ekvirozložitelná s množinou B , pak existuje rozklad M množiny A a rozklad N množiny B tak, že jednotlivé části z M mohou být spárovány s částmi z N tak, že odpovídající si části jsou shodné. Jelikož přímá shodnost je symetrické relace, protože inverzní zobrazení k přímé shodnosti je přímá shodnost, pak jednoduše musí platit, že B je ekvirozložitelná s A .



Obrázek 2.1: Ukázka důkazu tranzitivity pro množiny A , B a C s rozklady na dvě části.

Tranzitivitu ukážeme následovně. Mějme množiny A , B a C , u kterých platí, že A je ekvirozložitelná s B a B je ekvirozložitelná s C . Chceme ukázat, že A je ekvirozložitelná s C . Nalezneme rozklad $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ a rozklad $B = \bigcup_{i=1}^n B_i^A$, kde části A_i a B_i lze k sobě spárovat tak, že páry jsou navzájem přímo shodné.

¹Přímo shodné zobrazení je zobrazení zachovávající vzdálenosti libovolných dvou bodů a orientaci. Každé takové zobrazení lze vyjádřit skládáním rotací a translací.

Tyto shodnosti označme S_i^{AB} . Zároveň mějme příslušné rozklady $B = \bigcup_{j=1}^m B_j^C$ a $C = \bigcup_{j=1}^m C_j$ s příslušnými shodnostmi S_j^{BC} .

Nyní uvažujme množiny $B_{ij} = B_i^A \cap B_j^C$. Následně můžeme najít množiny $A_{ij} = (S_i^{AB})^{-1}(B_{ij})$ a $C_{ij} = S_j^{BC}(B_{ij})$. Snadno si můžeme rozmyslet, že $A_{ij} \subset A_i$ a $C_{ij} \subset C_j$. Z toho vyplývá, že A_{ij} lze zobrazit pomocí S_i^{AB} na B_{ij} a B_{ij} lze zobrazit pomocí S_j^{BC} na C_{ij} . Dohromady tedy platí, že A_{ij} lze zobrazit na C_{ij} složením shodností S_i^{AB} a S_j^{BC} . Označme $S_{ij}^{AC} = S_j^{BC} \circ S_i^{AB}$. Z toho nám plyne, že A je ekvirozložitelná s C . Relace ekvirozložitelnosti je tedy tranzitivní.

Celkově jsme ukázali, že ekvirozložitelnost je ekvivalence, protože to je relace reflexivní, symetrická a tranzitivní. Nyní víme, že existují její třídy ekvivalence, což se nám bude hodit později.

2.1 Geometrické paradoxy

Nyní si ukážeme klíčovou myšlenku, na které dále staví Banachův-Tarského paradox. Jedná se o koncept neměřitelné množiny. V této sekci ukážeme konstrukci takové množiny a uvedeme překvapivý výsledek paradoxního rozkladu.

Nejdříve bychom se měli zmínit o pojmu *měřitelná množina*. Lze říci, že měřitelná množina je taková množina, která má svou *míru*. Jako míru můžeme chápat funkci, která dané množině přiřadí nezáporné číslo.

Definice 4 (Míra, (Makarová, 2020)). *Nechť A je neprázdná množina, \mathcal{A} je její systém podmnožin takový, že*

- (1) $A \in \mathcal{A}$,
- (2) $B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$,
- (3) $A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$, pak

systém \mathcal{A} nazveme σ -algebrou. Dvojici (A, \mathcal{A}) nazveme měřitelnou množinou a funkci $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ nazveme mírou, pokud splňuje

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$
- (2) $A_n, n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní $\implies \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Mezi překvapivé výsledky v oblasti ekvirozložitelnosti patří Tarského kruhový-čtvercový problém, který Alfred Tarski [1901-1983] zformuloval už v roce 1925. Jedná se o otázku zdali jsou v \mathbb{R}^2 kruh a čtverec o stejném obsahu ekvirozložitelné. Kladnou odpověď přinesl až maďarský matematik Miklós Laczkovich v roce 1990 (Laczkovich, 1990) s použitím axiomu výběru. Dokázal, že kruh a čtverec jsou ekvirozložitelné dokonce pouze pomocí translací nikoliv rotací. Konstruktivní řešení (bez axiomu výběru) našli až pánové Łukasz Grabowski, András Máthé a Oleg Pikhurko v roce 2016 (Grabowski a kol., 2017). Ještě lepší konstruktivní řešení našli až pánové Andrew S. Marks a Spencer T. Unger v roce 2017 (Marks a Unger, 2017) pomocí borelovských množin.

Věta 4 (Tarského kruhový-čtvercový problém (Laczkovich, 1990) (**AC**)). *V \mathbb{R}^2 je kruh ekvirozložitelný se čtvercem o stejném obsahu².*

²Čtverec i kruh musí mít stejný obsah kvůli existenci Banachovy míry (Marks, Andrew S. and Unger, Spencer T., 2017).

O dva roky později Miklós Laczkovich přišel s obecnější větou, jejíž znění a důkaz jsou k nalezení v článku (Laczkovich, 1992, str. 62).

Klíčovým aspektem konstrukce Banachova-Tarského paradoxu je existence neměřitelných množin, a proto bychom si měli uvést sestrojení jedné takové množiny. Začneme větou o kružnici obsahující myšlenku zdvojování, která je dostupná zde (Tomkowicz a Wagon, 2016, str. 8).

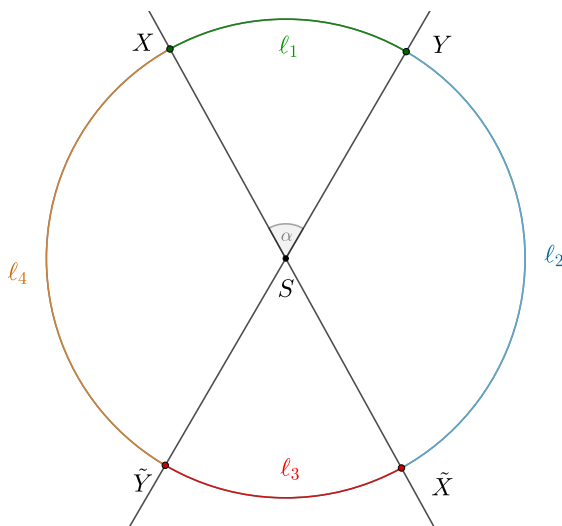
Věta 5 (Věta o kružnici). *Kružnici $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ lze rozložit na spočetně mnoho navzájem disjunktních částí $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots \subseteq \mathbb{S}^1$ tak, že existují rotace $\chi_1^A, \chi_2^A, \dots$ a $\chi_1^B, \chi_2^B, \dots : \mathbb{S}^1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \chi_i^A(A_i) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \chi_j^B(B_j)$.*

Důkaz. Nejdříve kružnici rozdělíme na množiny tříd bodů podle vlastnosti níže a následně tyto třídy budeme otáčet.

Mějme kružnici $k = \mathbb{S}^1$ se středem S . Zvolme si body $X, Y \in k$, pak píšeme $X \sim Y$ (X je v relaci s Y) právě tehdy, když velikost středového úhlu $|\sphericalangle XSY| = q \cdot 2\pi$, kde $q \in \mathbb{Q}$. Všimněme si, že vždy existují dva středové úhly $\sphericalangle XSY$. Avšak je jedno, který zvolíme, protože pokud je jeden racionálním násobkem 2π , potom i druhý musí být racionálním násobkem 2π . Bez újmy na obecnosti si vždy zvolíme ten menší z nich. Snadno z toho odvodíme, že $\sphericalangle XSY = \sphericalangle YSX$.

Nejdříve si ukážeme, že relace \sim je relací ekvivalence, a tudíž existují třídy této ekvivalence. Relace \sim je reflexivní, protože $X \sim X$ neboli existuje racionální číslo q tak, že $|\sphericalangle XSX| = q \cdot 2\pi$, a sice $q = 0$.

Relace \sim je symetrická, protože když $X \sim Y$, pak existuje $q \in \mathbb{Q} : |\sphericalangle XSY| = q \cdot 2\pi$. Ovšem z rovnosti $\sphericalangle XSY = \sphericalangle YSX$ platí i rovnost $|\sphericalangle YSX| = |\sphericalangle XSY|$, a tudíž $Y \sim X$.



Obrázek 2.2: Kružnice k rozdělená na oblouky l_1, l_2, l_3, l_4 .

Relace \sim je tranzitivní. Necht $Z \in k$, $X \sim Y$ a $Y \sim Z$, pak $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} : |\sphericalangle XSY| = q_1 \cdot 2\pi \wedge |\sphericalangle YSZ| = q_2 \cdot 2\pi$. Pokud by $X = Y$, pak by tranzitivita platila triviálně. Uvažme tedy případy, kdy $X \neq Y$. Kružnici k si rozdělíme na čtyři oblouky l_1, l_2, l_3, l_4 tak, že najdeme opačné polopřímky k ramenům úhlu $\sphericalangle XSY$. Vzniklé dva průsečíky označíme \tilde{X}, \tilde{Y} tak, aby $|\sphericalangle XS\tilde{X}| = \pi$. Oblouk l_1 bude odpovídat oblouku mezi X a Y , oblouk l_2 bude odpovídat oblouku mezi Y

a \tilde{X} , oblouk ℓ_3 bude odpovídat oblouku mezi \tilde{X} a \tilde{Y} a konečně oblouk ℓ_4 bude odpovídat oblouku mezi \tilde{X} a X . Názorněji to ukazuje obrázek 2.2.

Pro $Z \in \ell_1$: $|\langle XSZ \rangle| = |\langle XSY \rangle| - |\langle YSZ \rangle| \iff |\langle XSZ \rangle| = (q_1 - q_2) \cdot 2\pi$, kde $q_1 - q_2 \in \mathbb{Q}$.

Pro $Z \in \ell_2$: $|\langle XSZ \rangle| = |\langle XSY \rangle| + |\langle YSZ \rangle| \iff |\langle XSZ \rangle| = (q_1 + q_2) \cdot 2\pi$, kde $q_1 + q_2 \in \mathbb{Q}$.

Pro $Z \in \ell_3$: $|\langle XSZ \rangle| = 2\pi - |\langle XSY \rangle| - |\langle YSZ \rangle| \iff |\langle XSZ \rangle| = (1 - q_1 - q_2) \cdot 2\pi$, kde $1 - q_1 - q_2 \in \mathbb{Q}$.

Pro $Z \in \ell_4$: $|\langle XSZ \rangle| = |\langle YSZ \rangle| - |\langle XSY \rangle| \iff |\langle XSZ \rangle| = (q_2 - q_1) \cdot 2\pi$, kde $q_2 - q_1 \in \mathbb{Q}$.

Pro $Z = \tilde{X}$: $|\langle XSZ \rangle| = \pi \iff q = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$. Obdobně pro $Z = \tilde{Y}$: $|\langle XSZ \rangle| = \pi - |\langle XSY \rangle| \iff q = \frac{1}{2} - q_1 \in \mathbb{Q}$. Pro $Z = Y$: $|\langle XSZ \rangle| = |\langle XSY \rangle| = q_1 \cdot 2\pi$, analogicky pro $Z = X$. Dokázali jsme, že ve všech těchto případech je velikost $\langle XSZ \rangle$ rovna nějakému racionálnímu násobku 2π , a tudíž $X \sim Z$.

Nyní pro všechna $x \in \mathbb{S}^1$ označíme příslušnou třídu $[x] = \{y \in \mathbb{S}^1 : y \sim x\}$. Všimněme si, že $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{x \in \mathbb{S}^1} [x]$ a pro libovolné $y \in \mathbb{S}^1$ platí, že $y \in [x] \iff y \sim x \iff [y] = [x]$, a tudíž když $[y] \neq [x]$, pak musí platit $[y] \cap [x] = \emptyset$, což je známá vlastnost tříd ekvivalence.

Dále si označme grupu všech rotací na kružnici se středem v počátku symbolem \mathbb{SO}_2 . Necht $\chi \in \mathbb{SO}_2$ je libovolná rotace, pak pro libovolná $x, y \in \mathbb{S}^1$: $\chi(x) = y$ a zároveň $\chi([x]) = [y]$.

V dalším kroku s pomocí **(AC)** získáme výběrovou množinu M tak, že z každé třídy ekvivalence vezmeme právě jeden prvek. Pro množinu M platí následující $M \subseteq \mathbb{S}^1$ a také $\forall x \in \mathbb{S}^1 : |M \cap [x]| = 1$. Snadno nahlédneme, že množina M je nespočetná, protože jinak by platilo, že \mathbb{S}^1 by byla spočetná. Narozdíl od M jsou množiny tříd ekvivalence spočetné, protože máme jen spočetně mnoho racionálních násobků 2π čili racionálně mnoho prvků v každé třídě. Množinu všech rotací o racionální násobek 2π označme $\Xi = \{\chi_i : i \in \mathbb{N}\}$. Snadno vidíme, že $\Xi \subset \mathbb{SO}_2$. Dále si označme množinu $M_i = \chi_i(M)$ pro všechny rotace $\chi_i \in \Xi$.

Tvrdíme, že $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_i$. Inkluze $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_i \subseteq \mathbb{S}^1$ triviálně platí, protože M_i je tvořena body vybranými pouze z \mathbb{S}^1 . Opačnou inkluzi musíme dokázat. Chtěli bychom, aby pro libovolný prvek $x \in \mathbb{S}^1$ platilo, že $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} M_i$.

Mějme libovolný prvek $x \in \mathbb{S}^1$. Najdeme jeho třídu $[x]$. Víme, že průnik třídy $[x]$ s množinou M je jednobodový. Vezměme si tedy tento prvek a označme ho y . Určitě platí, že $y \sim x$, a tedy $\exists i_x \in \mathbb{N} : \chi_{i_x}(y) = x$. Zároveň prvek y patří do množiny M , pak tedy prvek x musí patřit do množiny M_{i_x} , protože $x = \chi_{i_x}(y) \in \chi_{i_x}(M) = M_{i_x}$. Jelikož bod x patří do množiny M_{i_x} , musí patřit i do sloučení všech těchto množin neboli $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} M_i$. Tím jsme dokázali, že libovolný prvek z \mathbb{S}^1 náleží do sjednocení množin M_i . Opačná inkluze je dokázána, a tedy nastává rovnost množin $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_i$.

V posledním kroku důkazu si vezmeme množiny M_i se sudým indexem a příslušné rotace a ukážeme, že tyto třídy tvoří celou množinu \mathbb{S}^1 . Mějme tedy $\bigcup_{i=1}^{\infty} \chi_i(\chi_{2i}^{-1}(M_{2i}))$. Víme, že platí $\chi_{2i}^{-1}(M_{2i}) = M$ a $\chi_i(\chi_{2i}^{-1}(M_{2i})) = M_i$. Položme $\chi_i^A = \chi_i \circ \chi_{2i}^{-1}$ a $A_i = M_{2i}$, pak platí $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \chi_i^A(M_{2i}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \chi_i^A(A_i)$.

Analogicky bychom postupovali pro množiny M_i s lichým indexem, z nichž bychom získali požadované $M_{2i-1} = B_j$. Dále bychom dostali z lichých rotací $\chi_j^B = \chi_i \circ \chi_{2i-1}^{-1}$. Celkem jsme dokázali větu a rovněž rozdvojili množinu \mathbb{S}^1 . \square

2.2 Sierpińského-Mazurkiewiczův paradox

Pokud bychom se rozhodovali, co zařadit mezi geometrické paradoxní dekompozice, rozhodně bychom neměli opomenout Sierpińského-Mazurkiewiczův paradox. Waclaw Sierpiński a jeho student Stefan Mazurkiewicz byli oba polští matematici v nelehkém období dvou světových válek. Přesto se dokázali věnovat rozvoji matematiky konkrétně v oblastech teorie množin, teorie čísel a topologie. Sierpiński pak světově proslul nalezením fraktálů jako Sierpińského trojúhelník (1915) nebo Sierpińského koberec (1916) (Wikipedia contributors, 2023).

V roce 1914 (Mazurkiewicz a Sierpiński, 1914) tito dva pánové přišli s existencí neprázdné množiny \mathbb{S} , kterou lze rozložit na dvě neprázdné různé části tak, že posunutím první části dostaneme celou množinu $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ a otočením druhé části obdržíme opět celou množinu \mathbb{S} .

Můžeme si například snadno rozmyslet, že když si za \mathbb{S} vezmeme první kvadrant kartézského systému souřadnic neboli $\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ a rozdělíme ho na část A obsahující proužek všech bodů mezi $0 \leq x < 1$, tedy $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1 \wedge y \geq 0\}$ a část $B = (\mathbb{S} \setminus A)$ jako množinový doplněk k A , pak když posuneme množinu B o jednu jednotku doleva, zjistíme, že množina B se stala původní množinou \mathbb{S} . Větu nalezneme zde (Tomkowicz a Wagon, 2016, str. 9–10).

Věta 6 (Sierpińského-Mazurkiewiczův paradox). *Existuje množina $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$, kterou lze rozdělit na dvě její neprázdné podmnožiny A, B splňující $A \cup B = \mathbb{S} \wedge A \cap B = \emptyset$ tak, že posunutím A o jednu jednotku doleva vznikne \mathbb{S} a rotací B v záporném směru o jeden radián dostaneme \mathbb{S} .*

Důkaz. Chceme dokázat existenci množiny \mathbb{S} , tedy stačí najít alespoň jednu množinu s odpovídajícími vlastnostmi. Vezměme si komplexní bod $z = e^i$, který lze ekvivalentně zapsat jako $z = \cos(1) + i \sin(1) \doteq 0,54 + 0,84i$.

Označme $\mathcal{P} = \{P : P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \forall i \in \mathbb{N}_0 : a_i \geq 0 \wedge a_i \in \mathbb{Z}\}$ množinu polynomů. Zobrazení $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ definujeme vzorcem $\varphi(P) = P(z)$. Komplexní bod může vypadat například $P(z) = 18z^{11} + 3z^2 + 5$. Dokažme, že zobrazení φ je prosté. Necht pro spor $\exists P_1, P_2 \in \mathcal{P}, P_1 \neq P_2 : \varphi(P_1) = \varphi(P_2)$, což je ekvivalentní $P_1(z) = P_2(z)$. Z toho plyne $(P_1 - P_2)(z) = 0$, tedy z je kořenem polynomu $P_1 - P_2$, ale $P_1 - P_2$ má koeficienty v \mathbb{Z} a z je transcendentní, tedy nemůže být kořenem polynomu $P_1 - P_2$. Tím docházíme ke sporu.

Nyní položme $\mathbb{S} = \{P(z) : P \in \mathcal{P}\}$. Tvrdíme, že takto definovaná množina \mathbb{S} splňuje zadané podmínky. Pojdme si je ověřit.

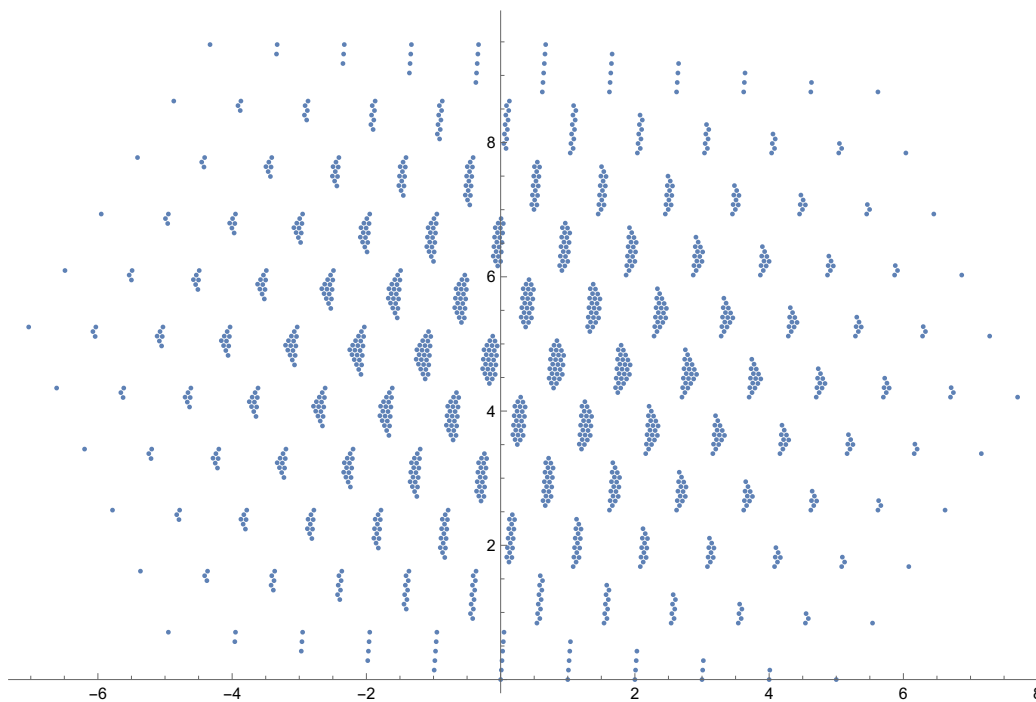
Zvolme si množinu $A = \{P(z) \in \mathbb{S} : P(0) \neq 0\}$. V A jsou tedy ty body, jejichž odpovídající polynomy nemají nulovou konstantní složku. Do A patří například body $2z + 1$ nebo $9z^3 + 8z + 5$. Množinu B zvolme takto $B = \mathbb{S} \setminus A$, tedy do B budou patřit prvky s nulovou konstantní složkou jako například 0 a $2z$.

Teď můžeme provést operaci se zvolenými podmnožinami \mathbb{S} . Nejdříve posuneme A o jednu jednotku doleva, což znamená odečíst od každého jejího prvku jedničku. Například $9z^3 + 8z + 1$ se zobrazí na $9z^3 + 8z$. Můžeme si ještě rozmyslet, že například vzorem k 0 je jednička a vzorem k samotnému z je $z + 1$.

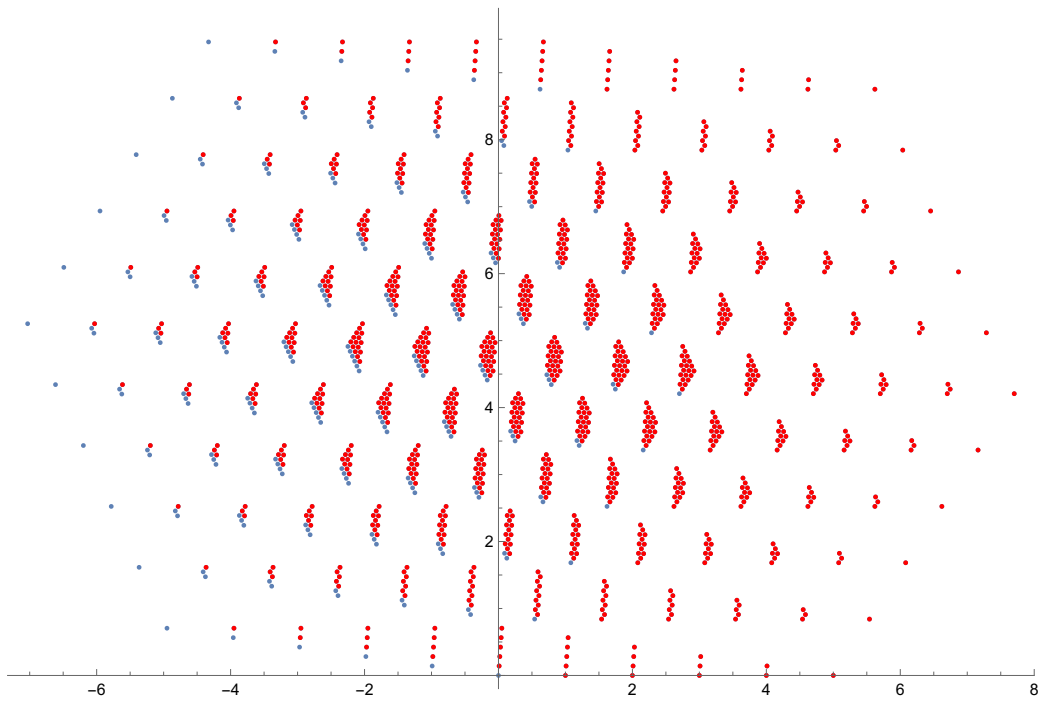
Chceme dokázat $A - 1 = S$. Každý prvek v A vznikl z polynomu s nenulovým konstantním členem, takže po odečtení jedničky má stále nezáporný konstantní člen, a je tedy stále prvkem S . Necht $x \in S$ je libovolný prvek, pak $y := x + 1 \in A$, protože x vznikl z polynomu s nezápornou konstantou, a tedy y vznikl z polynomu s kladnou konstantní složkou. Ovšem pak $x = y - 1 \in A - 1$.

V dalším kroku otočíme B v záporném směru o jeden radián, což znamená, že každý prvek z B vynásobíme $e^{-i} = z^{-1}$. Tím nám opět vznikla celá množina S , protože všechny prvky z B měly nulovou konstantu a alespoň jeden člen se z . Tedy je bylo možné násobit z^{-1} , aniž bychom dostali záporné mocniny z . Například obrazem k 0 je opět 0, ke $2z$ je 2 a k $6z^3 + 6z^2$ je $6z^2 + 6z$. Tím jsme dokázali vlastnosti vyhovující podmínkám ve větě a hledaná množina je S .

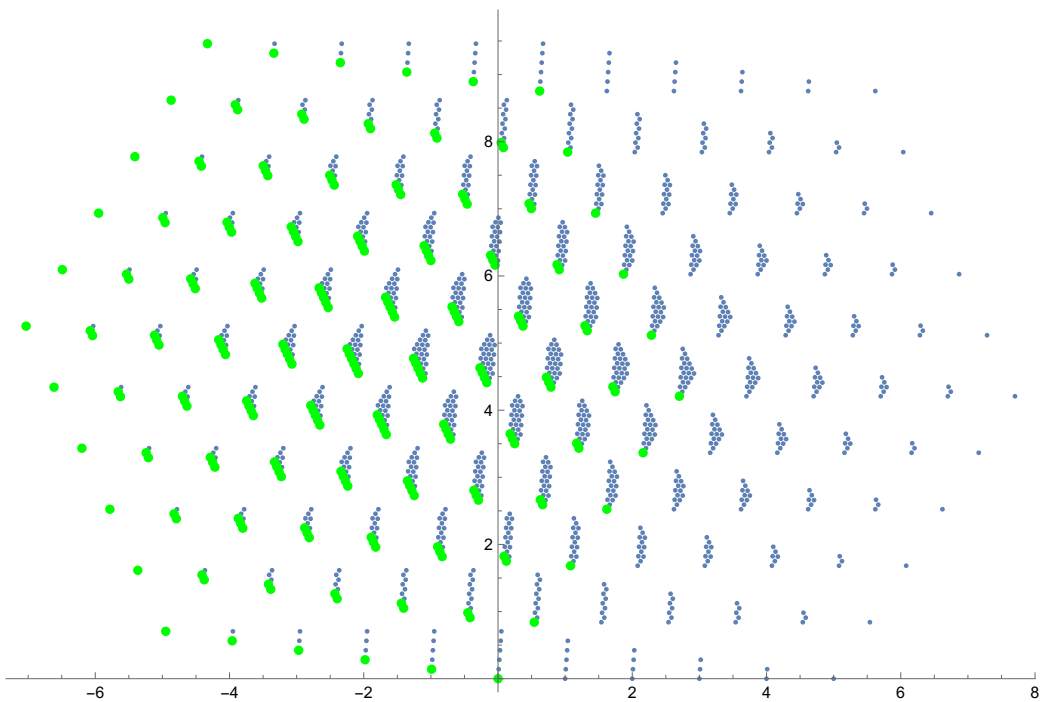
□



Obrázek 2.3: Množina $S_1 = \{P(z) : \deg P(z) \leq 3, P(z) \text{ má koeficienty z } \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$.



Obrázek 2.4: Množina \mathbb{S}_1 (modrá) a její příslušná podmnožina A_1 (červená).



Obrázek 2.5: Množina \mathbb{S}_1 (modrá) a její příslušná podmnožina B_1 (zelená).

2.3 Konstrukce Hyperwebster

Zajímavým příkladem paradoxu je koncept takzvaného *Hyperwebsteru*. Jedná se o enormní slovník obsahující všechna slova, přesněji řečeno konečné řetězce složené z písmen anglické abecedy (26 znaků), ať už dávají nebo nedávají smysl.

Jde o tak velký slovník řetězců, že pokud by se nějaké nakladatelství jej rozhodlo vydat, nestačil by papír. Samozřejmě můžeme argumentovat digitální verzí, ale i tento návrh selže, protože vám prozradím, že by nám nestačila ani všechna paměť křemíkového světa (ani křemíkového nebe).

Autorem Hyperwebsteru je britský matematik Ian Stewart [*1945], jenž jej poprvé pojmenoval v roce 1996 ve své knize *From Here to Infinity* (Stewart, 1996). Zajímavé na tomto paradoxním myšlenkovém experimentu je fakt, že nepotřebujeme axiom výběru, dokonce ani nějakou pokročilejší zběhlost v matematice. Stačí znát písmenka anglické abecedy a mít dobře vybudovaný pojem nekonečna, který zazní v následujících odstavcích hned několikrát. Pokud bychom tedy chtěli začít na společenské události vyprávět o Banachově-Tarského paradoxu, určitě bychom neměli tento zvláštní slovník opomenout zmínit.

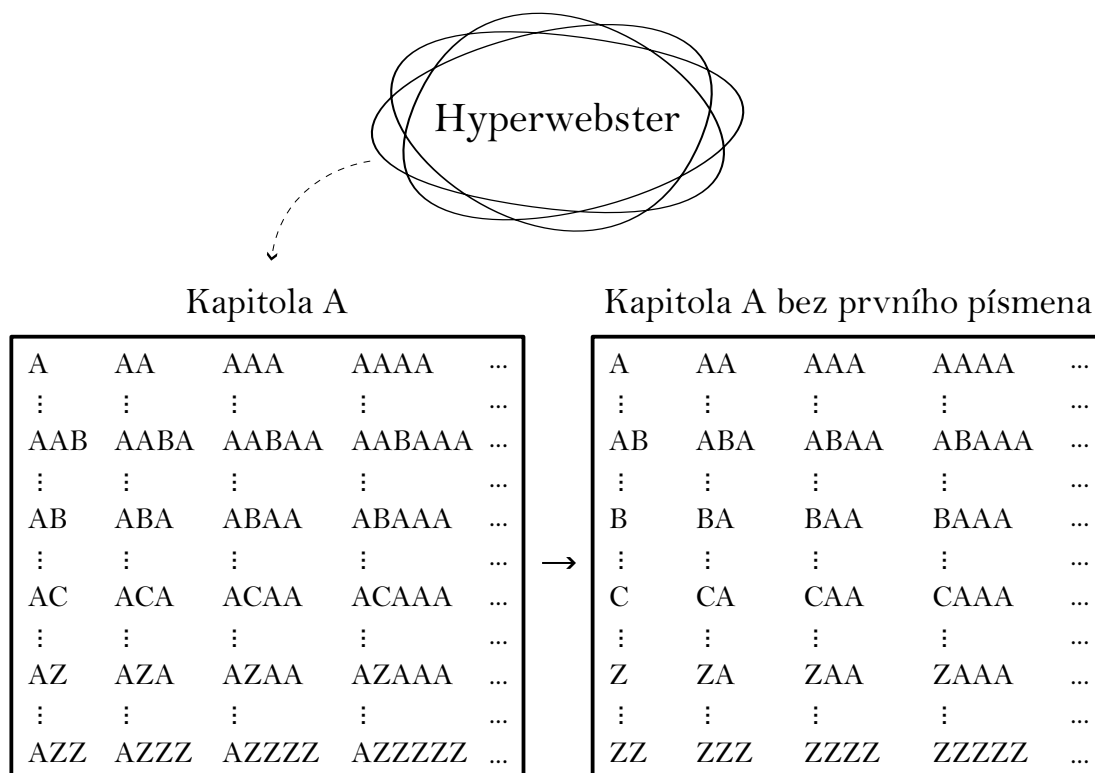
A	AA	AAA	AAAA	AAAAA	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
AAB	AABA	AABAA	AABAAA	AABAAAA	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
AB	ABA	ABAA	ABAAA	ABAAAA	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
AC	ACA	ACAA	ACAAA	ACAAAA	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
AZ	AZA	AZAA	AZAAA	AZAAAA	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
AZZ	AZZZ	AZZZZ	AZZZZZ	AZZZZZZ	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
B	BA	BAA	BAAA	BAAAA	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
BB	BBA	BBAA	BBAAA	BBAAAA	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
BZZ	BZZZ	BZZZZ	BZZZZZ	BZZZZZZ	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
C	CA	CAA	CAAA	CAAAA	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
CC	CCA	CCAA	CCAAA	CCAAAA	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
Z	ZA	ZAA	ZAAA	ZAAAA	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Obrázek 2.6: Hyperwebster

Obsah Hyperwebsteru lze rozdělit na 26 kapitol seřazené podle písmen anglické abecedy. První kapitola obsahuje všechny řetězce začínající znakem A. Písmenko A je také prvním řetězcem v kapitole. Dalšími jsou AA, AAA, AAAA ... , až někde v dále začíná další podsekcce AB, ABA, ABAA ... Zhruba někde za horizontem událostí najdeme AZ, AZA, AZAA ... Obdobně vypadají ostatní kapitoly, viz obrázek 2.6 .

Takto popsaný slovník obsahuje všechna slova, všechny myšlenky jako například „COBYCHSIDALDNESKOBEDU“, ba dokonce všechny sekvence nukleových bází. Všechny konverzace, které už proběhly, i ty, které teprve proběhnou, a taky ty, které nikdy neproběhly ani neproběhnou, budou v našem slovníku. Výčet všeho, co můžeme v našem Hyperwebsteru najít, by byl dlouhý, a tak uvedu alespoň pár příkladů pro lepší představu. V našem slovníku například najdeme hesla jako „RDVADDVA“, „ADENOSINTRIFOSFAT“ anebo „MATEMATIKA-JEJAZYKSVETA“.

Pokud jste koncept slovníku Hyperwebster dobře pochopili, neměl by vás zarážet ani fakt „PIJEPANPREZIDENTALKOHOLTOJEZAJIMAVAOATAZKAA-NATOVAMMAMODPOVEDETANONEBONENEBOCHCETEVEDETCO“.



Obrázek 2.7: Přeměna kapitoly A na celý Hyperwebster.

Nyní se vraťme k meritu věci. Představme si, že bychom se přeci jen přes všechna varování pokusili o tištěnou verzi Hyperwebsteru. Chtěli bychom si co nejvíce ušetřit práci, a tak bychom přišli s následující optimalizací. Co kdybychom vytiskli vždy na začátku nové kapitoly úvodní písmeno, kterým řetězce začínají a řekli o tom čtenářům, pak bychom mohli od každého řetězce v dané kapitole ubrat právě to úvodní písmeno. Čtenáři by věděli v jaké kapitole jsou a jaké písmeno mají při čtení přidat na začátek řetězce. Tím bychom si doslova ušetřili

nekonečně mnoho písmen, a tedy nekonečně mnoho práce.

Vezměme si například první kapitolu začínající písmenkem A, pak název kapely ABBA bude uveden ve slovníku řetězcem BBA a ACDC se změní na CDC. Pokud čtenářům také nevytiskneme znak C na čtvrté pozici v podkapitole, kde C je čtvrté písmeno v řetězci, tak ze slavné rockové kapely zbyde cédéčko. Všimněme si, že bychom si opět tímto krokem ušetřili nekonečně mnoho práce s tiskem, ale nebudeme to komplikovat a zůstaneme pouze u první úpravy.

Pokud odstraníme počáteční znak pro každé heslo v kapitole, pak dostaneme celý Hyperwebster. V první kapitole nalezneme všechny kombinace písmenek začínající na A, pokud toto odstraníme, musíme dostat všechny kombinace písmenek, včetně první kapitoly. Například řetězec AA bude nyní reprezentován řetězcem A. Jsme tedy svědky toho, že z jedné podmnožiny Hyperwebsteru jednoduchou operací odstranění počátečního písmene, dostaneme celou množinu. Názorněji to jde vidět na obrázku 2.7.

2.4 Hausdorffův paradox

Od paradoxních konstrukcí pomocí křivek, řetězců a dalších množin se touto podkapitolou posouváme dál. Doteď jsme se zabývali rozporuplnými dekompozicemi maximálně v \mathbb{R}^2 , avšak Hausdorffův paradox tyto myšlenky posouvá na novou úroveň, doslova do další dimenze. Jedná se tedy pro nás o první paradox v \mathbb{R}^3 , kde budeme mít za úkol rozdvojit takřka celý povrch koule (značíme \mathbb{S}^2). Odtud už bude pouze krůček k dokázání Banachovy-Tarského věty.

Felix Hausdorff [1868-1942] byl německý matematik, který se věnoval topologii, funkcionální analýze a teorii míry. Svůj paradox o rozdvojování povrchu koule formuloval v roce 1914 (Hausdorff, 1914), čímž mimo jiné dokázal, že neexistuje žádná konečně aditivní míra pro všechny podmnožiny povrchu koule, která by byla invariantní vzhledem ke všem shodnostem.

Nejdříve si ukážeme větu a její důkaz převzatý z (Tomkowicz a Wagon, 2016, str. 29), která nám říká, že můžeme z \mathbb{S}^2 vynechat spočetně mnoho bodů a stejně bude takto nově ochuzený povrch koule ekvirozložitelný s původní \mathbb{S}^2 .

Věta 7 (Ekvirozložitelnost na povrchu koule). *Nechť D je spočetná podmnožina \mathbb{S}^2 , pak \mathbb{S}^2 a $\mathbb{S}^2 \setminus D$ jsou ekvirozložitelné pomocí dvou částí.*

Důkaz. Stačí najít rotaci ρ tak, aby každé dvě z těchto množin $D, \rho D, \rho^2 D, \dots$ byly vzájemně disjunktní. Kdybychom takovou rotaci našli, pak nutně $\mathbb{S}^2 = D' \cup (\mathbb{S}^2 \setminus D')$ je ekvirozložitelná s $\rho D' \cup (\mathbb{S}^2 \setminus D') = \mathbb{S}^2 \setminus D$, kde $D' = \bigcup \{\rho^n D : n \in \mathbb{N}_0\}$, protože $\forall i \neq j : \rho^i D, \rho^j D$ jsou navzájem disjunktní a odpovídající si části můžeme dostat pootočením o rotaci ρ .

Nechť ℓ je přímka procházející počátkem, která neprotíná množinu D . Tím zajistíme, aby žádný bod množiny D nebyl pólem k dané rotaci. Označme \mathcal{A} množinu všech úhlů θ , pro které existuje $n > 0$ a existuje bod $P \in D : \rho P \in D$. Nechť ρ je rotace kolem přímky ℓ o $n\theta$ radiánů. Jelikož je takto definovaná množina \mathcal{A} spočetná, můžeme si zvolit úhel θ_1 tak, aby $\theta_1 \notin \mathcal{A}$.

Zvolme ρ jako rotaci kolem přímky ℓ o úhel θ_1 , pak $\forall n > 0 : \rho^n D \cap D = \emptyset$. To ovšem znamená, že $\forall m : 0 \leq m < n : \rho^{n-m} D \cap D = \emptyset$. Pokud nyní aplikujeme rotaci ρ^m na obě strany, pak dostaneme $\rho^n D \cap \rho^m D = \emptyset$. Tím jsme dokázali, že ρ je naše hledaná rotace. □

Následně si dokážeme existenci vhodné algebraické struktury ke konstrukci paradoxu. K tomu budeme potřebovat tzv. Hausdorffovy rotace v \mathbb{R}^3 .

Definice 5 (Hausdorffovy rotace). *Hausdorffovými rotacemi budeme rozumět rotaci σ o 180° kolem přímky $z = x$ v rovině xz a rotaci τ o 120° kolem osy z . Dále definujeme grupu G jako nejmenší podgrupu $\mathbb{S}\mathbb{O}_3$ obsahující σ a τ (G je generována Hausdorffovými rotacemi).*

Snadno nahlédneme, že $\sigma^2 = e$ (identita) a stejně tak $\tau^3 = e$. Avšak rotace τ^2 , která vznikne složením dvou rotací τ , není identita. Hausdorffovy rotace můžeme navzájem skládat, a tím se dostávat z libovolného bodu na povrchu koule do jiných bodů. K tomu se nám bude hodit definovat následující termín.

Definice 6 (Redukovaný řetězec a jeho délka). *Řetězcem budeme rozumět konečnou posloupnost znaků σ a τ reprezentující rotaci vzniklou skládáním Hausdorffových rotací. Řetězec nazveme redukovaný, pokud je identitou e nebo neobsahuje identity ($\sigma^2 = \sigma\sigma$ a $\tau^3 = \tau\tau\tau$). Délkou redukovaného řetězce α , značíme $|\alpha|$, rozumíme počet po sobě jdoucích znaků σ, τ a $\tau^2 = \tau\tau$. Délku identity e definujeme jako 0.*

Redukovaný řetězec z původního řetězce získáme tak, že z něj odstraníme všechny identity neboli všechny dvojice po sobě jdoucích σ a trojice po sobě jdoucích τ . Někdy je potřeba identity odstranit několikrát po sobě, protože se nám může stát, že při redukování (odstraňování) vzniknou nové. Všimněme si, že redukovaný řetězec představuje stejnou rotaci jako jeho původní řetězec a zřetězení dvou redukovaných řetězců odpovídá složení odpovídajících rotací. Dále nahlédneme, že případné znaky σ a τ nebo σ a τ^2 se budou mezi sebou střídat. Znaky τ a τ^2 po sobě jít nemůžou, protože by tvořily identitu τ^3 , kterou v definici redukovaného řetězce nepřipouštíme. Podobně za sebou nemůžou být znaky $\sigma\sigma = \sigma^2$.

Následující lemma nám pomůže s tím, že nebudeme muset rozlišovat mezi redukovanými řetězci a jejich odpovídajícími rotacemi. Toto lemma uvedeme bez důkazu.

Lemma 8 (O jednoznačnosti redukovaných řetězců). *Libovolné dva různé redukované řetězce určují různé rotace.*

Definice 7 (Maximo-lexikografické uspořádání). *Relaci \leq_{LEX} budeme říkat lexikografické (slovníkové) uspořádání řetězců nad abecedou σ, τ a τ^2 , přičemž $\sigma \leq_{LEX} \tau \leq_{LEX} \tau^2$.*

Řekneme, že dva řetězce α, β jsou maximo-lexikograficky uspořádané, značíme $\alpha \leq_{MLEX} \beta$, pokud $|\alpha| < |\beta|$ nebo $|\alpha| = |\beta|$ a zároveň $\alpha \leq_{LEX} \beta$.

Poznamenejme, že zobrazení za sebe píšeme v opačném pořadí skládání neboli řetězce se vlastně čtou zprava doleva, tj. poslední aplikované zobrazení odpovídá prvnímu znaku řetězce. Pokud máme celou množinu rotací A , pak rotaci takové množiny budeme značit $\varphi A = \{\tau\rho : \rho \in A\}$, kde φ je libovolná rotace z $\mathbb{S}\mathbb{O}_3$.

Lemma 9 (Existence paradoxní grupy G). *Existuje rozklad G na tři disjunktní části G_1, G_2 a G_3 takový, že $\tau G_1 = G_2, \tau^2 G_1 = G_3$ a $\sigma G_1 = G_2 \cup G_3$.*

Důkaz. Potřebujeme dokázat dvě věci, a sice existenci množin G_1, G_2 a G_3 s požadovanými vlastnostmi a jejich vzájemnou disjunktnost. Poznamenejme, že napříč celým důkazem implicitně používáme lemma 8, které nám dovoluje nerozlišovat mezi redukovanými řetězci a jejich reprezentujícími rotacemi. Nebudeme se tedy na toto lemma dále odvolávat.

Zkusme položit G_1 jako množinu všech redukovaných řetězců jejichž poslední rotace byla σ . To znamená, že σ je znak nejvíce vlevo v daném řetězci. Obdobně položíme G_2 jako množinu všech redukovaných řetězců, jejichž poslední rotace byla τ a G_3 jako množinu redukovaných řetězců, jejichž poslední rotace byla τ^2 .

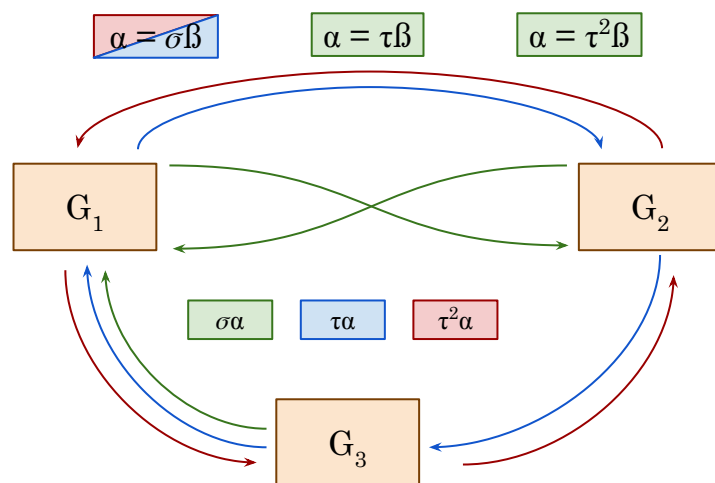
Vidíme, že skutečně $G_1 \dot{\cup} G_2 \dot{\cup} G_3 = G$, protože každý redukovaný řetězec končí jedním ze tří druhů znaků, a sice τ, τ^2 a σ a zároveň platí, že $\sigma G_1 = G_2 \cup G_3$, protože všechny prvky v G_1 začínají na rotaci σ a složením s další rotací σ vznikne

identita, tedy se $\sigma^2 = e$ zkrátí a musí vzniknout všechny rotace začínající na τ nebo τ^2 . Obdobně platí i další dvě požadované rovnosti. Avšak máme tu háček v podobě toho, že jsme nikam nezařadili identitu (značíme e), a tudíž neplatí, že $G_1 \cup G_2 \cup G_3$ je celé G . Musíme proto zvolit jiný přístup.

Zkusíme grupu G rozdělit pomocí rekurzivního algoritmu, a tím způsobem najít vhodný rozklad na G_1, G_2 a G_3 . Začneme tím, že všechny redukované řetězce seřadíme maximo-lexikograficky a vždy aplikujeme krok algoritmu na ten nejmenší z nich, který ještě nebyl použit.

První krok začneme tak, že samotnou identitu e dáme do G_1 , rotace σ, τ přidáme do G_2 a τ^2 do G_3 . Všechny další vzniklé redukované řetězce postupně podle maximo-lexikografického uspořádání rozhazujeme následujícím způsobem.

1. Pokud redukovaný řetězec α začíná zleva τ nebo τ^2 , pak řetězec $\sigma\alpha$ přidáme
 - (a) do G_2 , pokud $\alpha \in G_1$;
 - (b) do G_1 , pokud $\alpha \in G_2$;
 - (c) do G_1 , pokud $\alpha \in G_3$.
2. Pokud redukovaný řetězec α začíná zleva σ , pak řetězec $\tau\alpha$ přidáme
 - (a) do G_2 , pokud $\alpha \in G_1$;
 - (b) do G_3 , pokud $\alpha \in G_2$;
 - (c) do G_1 , pokud $\alpha \in G_3$.
3. Pokud redukovaný řetězec α začíná zleva σ , pak řetězec $\tau^2\alpha$ přidáme
 - (a) do G_3 , pokud $\alpha \in G_1$;
 - (b) do G_1 , pokud $\alpha \in G_2$;
 - (c) do G_2 , pokud $\alpha \in G_3$.



Obrázek 2.8: Algoritmus na rozdělení redukovaných řetězců do G_1, G_2 a G_3 .

Lépe to ilustruje diagram 2.8, na kterém je lépe vidět jádro algoritmu. Ukažme si funkčnost algoritmu na příkladě $\sigma\tau\sigma$. Tento redukovaný řetězec musí ležet v G_1 , protože σ leží v G_2 , následným přidáním τ dle algoritmu (modrá šipka) se posuneme do G_3 a posledním přidáním σ se rotace dostane (zelená šipka) do množiny G_1 .

Necháme-li uvedený algoritmus proběhnout až do nekonečna, dostaneme množiny G_1, G_2 a G_3 . Vzájemnou disjunktnost množin dokážeme rozborem případů. Současně s tím vyplynou i požadované vlastnosti. Nejdříve si ovšem ukážeme zdali to vůbec platí pro prvních pár členů v tabulce 2.1. Pokud bychom vzali G_1 a složili ji s rotací σ , dostali bychom čtvrtý sloupec, ve kterém můžeme najít všechny první prvky z G_2 a G_3 . Obdobně τG_1 (pátý sloupec) obsahuje všechny první prvky z G_2 a $\tau^2 G_1$ zase zahrnuje všechny první prvky z G_3 .

G_1	G_2	G_3	σG_1	τG_1	$\tau^2 G_1$
e	σ	τ^2	σ	τ	τ^2
$\tau^2\sigma$	τ	$\tau\sigma$	$\sigma\tau^2\sigma$	σ	$\tau\sigma$
$\sigma\tau$	$\sigma\tau^2\sigma$	$\tau^2\sigma\tau$	τ	$\tau\sigma\tau$	$\tau^2\sigma\tau$
$\sigma\tau^2$	$\tau\sigma\tau$	\vdots	τ^2	$\tau\sigma\tau^2$	$\tau^2\sigma\tau^2$
$\sigma\tau\sigma$	\vdots	\vdots	$\tau\sigma$	$\tau\sigma\tau\sigma$	$\tau^2\sigma\tau\sigma$

Tabulka 2.1: První prvky množin G_1, G_2 a G_3 .

Nyní učiníme pozorování, že v G_3 nejsou žádné prvky začínající na σ . To plyne z algoritmu, kde žádná zelená šipka nevede do G_3 , a tedy není žádná možnost, jak takový prvek do ní přidat. Navíc z toho plyne, že v G_1 nejsou prvky začínající na τ ³, protože to nastane jedině v případě, že jsme vyšli z G_3 po modré šipce, ale to by znamenalo, že prvek, ze kterého jsme vyšli, začínal na σ . To ale není možné z pozorování. Podobně z toho plyne, že v G_2 nejsou prvky začínající na τ^2 , protože takový prvek by musel být vytvořen opět z řetězce v G_3 začínajícího na σ , což dle pozorování není možné.⁴

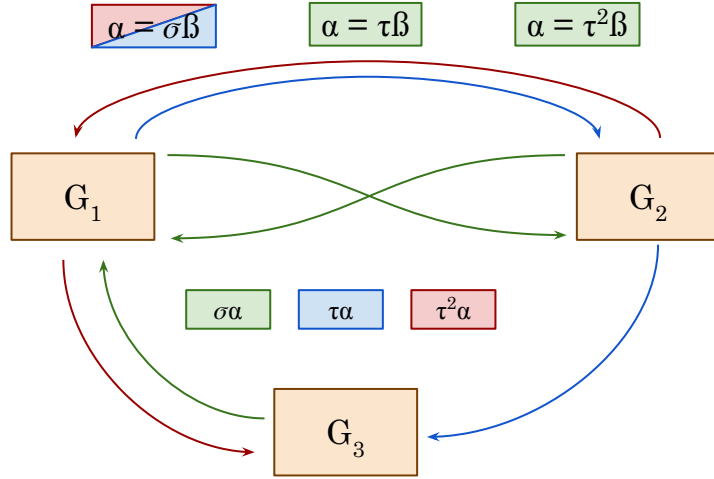
Dohromady jsme zjistili, že modrá šipka z G_3 a červená šipka do G_3 se nikdy nevyužijí, a proto je můžeme z diagramu 2.8 vynechat. Nový zjednodušený diagram bude vypadat následovně.

K samotnému důkazu disjunktnosti zmíněných množin pomocí matematické indukce si definujeme G_j^i , kde $j \in \{1, 2, 3\}$ a $i \in \mathbb{N}_0$, což bude j -tá množina v i -tém kroku algoritmu. Dále předpokládejme speciální množinu K^i , které budeme říkat kontejner. Jak už název napovídá, tam budeme přidávat v i -tém kroku prvek, ze kterého jsme podle algoritmu vytvořili další prvky. Jelikož z identity žádné další prvky nevznikají, definujeme $K^0 = \{e\}$.

Na začátku budeme mít $G_1^0 = \{e\}$, $G_2^0 = \{\tau, \sigma\}$ a $G_3^0 = \{\tau^2\}$, které jsou po dvou disjunktní. Mějme $G_1^n, G_2^n, G_3^n \subseteq G$, které jsou po dvou disjunktní.

³Prvky začínající na τ^2 nepovažujeme za prvky začínající na τ .

⁴Tyto pozorování jsou způsobeny zvolením počátečního stavu algoritmu. Kdybychom zvolili jiné vhodné rozložení prvků na začátku (např. $e \in G_1, \tau \in G_2, \sigma, \tau^2 \in G_3$), dostali bychom jiné množiny se stejnými vlastnostmi, viz (Tomkowicz a Wagon, 2016, str. 40) a algoritmus by se taktéž choval jinak.



Obrázek 2.9: Zjednodušené schéma algoritmu.

Nyní si vezměme maximo-lexikograficky nejmenší řetězec

$$\alpha = \min_{\text{MLEX}} \left[\bigcup_{j=1}^3 G_j^n \setminus K^n \right].$$

Položme $K^{n+1} = K^n \cup \{\alpha\}$. Víme, že z předpokladu α leží pouze v jedné z množin G_i^n . Prozkoumáme následující krok algoritmu, ve kterém mohou nastat tři případy, a sice

- (I) $\alpha = \sigma\delta$, kde δ je zbývající část řetězce α , nebo
- (II) $\alpha = \tau\delta$, nebo
- (III) $\alpha = \tau^2\delta$.

Probereme první případ, tedy $\alpha = \sigma\delta$.

1. Pokud $\alpha \in G_1^n$, pak podle algoritmu definujeme $G_1^{n+1} = G_1^n$, $G_2^{n+1} = G_2^n \cup \{\tau\alpha\}$ a $G_3^{n+1} = G_3^n \cup \{\tau^2\alpha\}$. Chceme ukázat disjunktnost množin, a tedy $\tau\alpha \notin G_1^n \cup G_3^n$ a $\tau^2\alpha \notin G_1^n \cup G_2^n$.
 - (a) Kdyby rotace $\tau\alpha$ ležela v G_1^n , pak $\tau\alpha = \tau\sigma\delta$ a podle algoritmu $\alpha = \sigma\delta \in G_3^n$. Ovšem to je spor s předpokladem, že $\alpha \in G_1^n$ a s indukčním předpokladem, že G_1^n, G_2^n a G_3^n jsou po dvou disjunktní.
 - (b) Kdyby rotace $\tau\alpha$ ležela v G_3^n , pak $\tau\alpha = \tau\sigma\delta$ a podle algoritmu $\alpha = \sigma\delta \in G_2^n$. Ovšem to je spor s předpokladem, že $\alpha \in G_1^n$ a s indukčním předpokladem, že G_1^n, G_2^n a G_3^n jsou po dvou disjunktní.

Nyní to samé ukážeme o rotaci $\tau^2\alpha$.

- (a) Kdyby rotace $\tau^2\alpha$ ležela v G_1^n , pak $\tau^2\alpha = \tau^2\sigma\delta$, tedy podle algoritmu $\alpha = \sigma\delta \in G_2^n$. Ovšem to je spor s indukčním předpokladem.

(b) Kdyby rotace $\tau^2\alpha$ ležela v G_2^n , pak $\tau\alpha = \tau\sigma\delta$, tedy podle algoritmu $\alpha = \sigma\delta \in G_3^n$. Ovšem to je spor s indukčním předpokladem.

2. Pokud $\alpha \in G_2^n$, pak podle algoritmu definujeme $G_1^{m+1} = G_1^m \cup \{\tau^2\alpha\}$, $G_2^{m+1} = G_2^m$ a $G_3^{m+1} = G_3^m \cup \{\tau\alpha\}$.

Opět ukážeme, že $\tau^2\alpha \notin G_2^n \cup G_3^n$. Kdyby $\tau^2\alpha \in G_2^n$, pak $\alpha \in G_3^n$, což je spor s indukčním předpokladem. Kdyby $\tau^2\alpha \in G_3^n$, pak $\alpha \in G_1^n$, což je opět spor s indukčním předpokladem. Analogicky by se ukázalo, že $\tau\alpha \notin G_1^n \cup G_2^n$.

3. Třetí případ $\alpha = \sigma\delta \in G_3^n$ nemůže z pozorování nastat.

Probereme druhou možnost (II), kde $\alpha = \tau\delta$. V tomto případě vzniká pouze jediný prvek $\sigma\alpha$ v dalším kroku algoritmu.

1. První případ $\alpha \in G_1^n$ nemůže díky pozorování nastat.

2. Pokud $\alpha \in G_2^n$, pak podle algoritmu definujeme $G_1^{m+1} = G_1^m \cup \{\sigma\alpha\}$, $G_2^{m+1} = G_2^m$ a $G_3^{m+1} = G_3^m$. Chceme, aby $\sigma\alpha \notin G_2^n \cup G_3^n$. Kdyby $\sigma\alpha \in G_2^n$, pak $\alpha \in G_1^n$, což je spor. Příklad $\sigma\alpha \in G_3^n$ není dle pozorování možný.

3. Pokud $\alpha \in G_3^n$, opět přidáme jediný prvek $\sigma\alpha$ do G_1^{m+1} , což je analogický případ předchozímu.

Zbývá vyšetřit poslední případ (III) v podobě $\alpha = \tau^2\delta$, kde opět přidáváme jediný prvek $\sigma\alpha$. Disjunktnost bychom v těchto případech vyšetřili analogicky k případům výše.

1. Pokud $\alpha \in G_1^n$, pak $\sigma\alpha \in G_2^{m+1}$.

2. Příklad $\alpha \in G_2^n$ nemůže nastat z pozorování.

3. Pokud $\alpha \in G_3^n$, pak $\sigma\alpha \in G_1^{m+1}$.

Víme, že $G_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_1^n$, $G_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_2^n$ a $G_3 = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_3^n$. Rozborem případů jsme pomocí indukce dokázali, že množiny G_1, G_2 a G_3 jsou disjunktní.

Zbývá ověřit požadované vlastnosti. Zkusme se podívat na rovnost $\tau G_1 = G_2$. Inkluze $\tau G_1 \subseteq G_2$ se ukáže snadno. Stačí si uvědomit, že pro libovolný prvek $\alpha \in G_1$ chceme, aby $\tau\alpha \in G_2$. Rozeberme si případy.

1. Pokud $\alpha = \sigma\beta$, pak podle algoritmu skutečně $\tau\alpha \in G_2$.

2. Pokud $\alpha = \tau^2\beta$, pak $\tau\alpha = \beta = \sigma\epsilon$ podle algoritmu a β začínající na σ nemůže dle pozorování být v G_3 , tak platí $\beta \in G_2$.

3. Příklad $\alpha = \tau\beta$ nemůže podle pozorování nastat.

Opačnou inkluzi $G_2 \subseteq \tau G_1$ dokážeme tím, že kdykoliv jsme něco přidali v průběhu algoritmu do G_2 , tak to bylo tvaru $\tau\delta$, kde δ byl prvek z G_1 . Tím dokážeme, že libovolný prvek z G_2 je v τG_1 .

První případ je triviální, neboť jsme přidávali řetězec $\tau\alpha$, kde $\alpha = \sigma\beta \in G_1$. Stačí tedy položit $\delta = \alpha$ a máme hotovo. Druhým případem bylo přidání $\sigma\alpha$ v případě $\alpha = \tau^2\beta \in G_1$. Řešíme rovnici $\tau\delta = \sigma\alpha$. Zde položíme $\delta = \tau^2\sigma\alpha$, které je

řešením rovnice ležícím skutečně v G_1 , protože $\sigma\alpha \in G_2$, a tedy podle algoritmu musí $\tau^2\sigma\alpha \in G_1$. Tím jsme probrali všechny případy a dokázali chtěnou vlastnost.

Analogicky se ukáže $\tau^2G_1 = G_3$. Podívejme se na vlastnost $\sigma G_1 = G_2 \cup G_3$, kde dochází k paradoxu. Důkaz opět rozdělíme na dvě části podle inkluzí. Inkluzi $\sigma G_1 \subseteq G_2 \cup G_3$ opět ukážeme rozбором případů. Stačí si uvědomit, že pro libovolný prvek $\alpha \in G_1$ chceme, aby $\sigma\alpha \in G_2$ nebo $\sigma\alpha \in G_3$.

1. Pokud $\alpha = \sigma\beta$, pak $\sigma\alpha = \sigma^2\beta = \beta$ musel podle algoritmu ležet v jedné z požadovaných množin (zelené šipky).
2. Příklad $\alpha = \tau\beta$ nemůže podle pozorování nastat.
3. Pokud $\alpha = \tau^2\beta$, pak $\sigma\alpha$ leží podle algoritmu v G_2 .

Opačná inkluze $G_2 \cup G_3 \subseteq \sigma G_1$ bude těžší ukázat. Dokážeme to opět tím, že kdykoliv jsme něco přidali v průběhu algoritmu do $G_2 \cup G_3$, tak to bylo tvaru $\sigma\delta$, kde δ byl prvek z G_1 . Tím dokážeme, že libovolný prvek z $G_2 \cup G_3$ je v σG_1 . Vždy budeme řešit rovnici $\sigma\delta = \text{prvek}$ se rovná přidanému řetězci.

1. Pokud jsme přidali $\tau\alpha$ do G_2 , pak hledané řešení rovnice $\sigma\delta = \tau\alpha$ je $\delta = \sigma\tau\alpha$, kde $\delta \in G_1$, protože $\tau\alpha$ je v G_2 , a tedy přidáním σ se dostaneme podle algoritmu do G_1 .
2. Pokud jsme přidali $\sigma\alpha$ do G_2 , pak hledané řešení rovnice $\sigma\delta = \sigma\alpha$ je $\delta = \alpha$, které triviálně leží v G_1 .
3. Pokud jsme přidali $\tau\alpha$ do G_3 , pak hledané řešení rovnice $\sigma\delta = \tau\alpha$ je $\delta = \sigma\tau\alpha$ ležící opět v G_1 , protože $\tau\alpha \in G_3$, a tedy přidáním σ se dostaneme podle algoritmu do G_1 .
4. Pokud jsme přidali $\tau^2\alpha$ do G_3 , pak hledané řešení rovnice $\sigma\delta = \tau^2\alpha$ je $\delta = \sigma\tau^2\alpha$ ležící opět v G_1 , protože $\tau^2\alpha \in G_3$, a tedy přidáním σ se dostaneme podle algoritmu do G_1 .

Tím jsme probrali všechny případy v opačné inkluzi, a tedy dokázali $\sigma G_1 = G_2 \cup G_3$. Dohromady jsme dokázali vše co jsme vyžadovali - existenci paradoxních vlastností jednotlivých množin G_1, G_2 a G_3 a jejich vzájemnou disjunktnost. □

Algoritmus z lemmatu 9 byl převzat z (Pick, 2010). Další část důkazu byla převzata z (Tomkowicz a Wagon, 2016, str. 40). Nyní máme vše připraveno k důkazu Hausdorffova paradoxu, který opět převezmeme z (Tomkowicz a Wagon, 2016, str. 40).

Věta 10 (Hausdorffův paradox (**AC**)). *Na množině $\mathbb{S}^2 \setminus D$, kde D je spočetná množina, existuje rozklad na tři navzájem disjunktní části A, B, C takový, že $\tau A = B$, $\tau^2 A = C$ a $\sigma A = B \cup C$.*

Důkaz. Vezměme si opět naši paradoxní grupu G s operací redukce. Z lemmatu O jednoznačnosti redukovaných řetězců nám opět plyne, že můžeme v průběhu důkazu používat redukované řetězce místo rotací a obráceně.

Víme, že $\forall \rho \in G \exists p_1^\rho, p_2^\rho \in \mathbb{S}, p_1^\rho \neq p_2^\rho : \rho(p_1^\rho) = p_1^\rho \wedge \rho(p_2^\rho) = p_2^\rho$. Tyto dva body nazveme póly rotace ρ . Označme si D množinu všech těchto pólů ($D = \bigcup_{\rho \in G} \{p_1^\rho, p_2^\rho\}$). Definovaná množina D je spočetná, protože G je tvořena spočetnou množinou.

Nyní zvolme bod $x \in \mathbb{S}^2 \setminus D$. Pokud aplikujeme grupu rotací G na bod x , dostaneme třídu $Gx = \{\rho(x) : \rho \in G\}$, kterou nazveme orbitou bodu x . Pro libovolný bod y na sféře splňující $y \notin Gx$ platí $Gx \cap Gy = \emptyset$, protože kdyby $y \in Gx$, pak $Gx = Gy$. Což musí platit, protože pokud $y \in Gx$, pak musí existovat rotace $\rho \in G$ taková, že $\rho(x) = y$ neboli $\rho^{-1}(y) = x$. Dále pro libovolné $z \in Gx$ musí existovat rotace $\psi \in G : \psi(z) = x$. Z čehož plyne, že $z = \psi^{-1}(x) = \psi^{-1}\rho^{-1}(y)$, takže $z \in Gy$. Odtud vyplývá inkluze $Gx \subseteq Gy$. Opačná inkluze se dokáže analogicky, a tedy $Gy \subseteq Gx$. Tím jsme dokázali $Gx = Gy$.

Už víme, že různé orbity jsou navzájem disjunktní. Ovšem potřebujeme ještě dokázat, že žádná z orbit bodů z $\mathbb{S}^2 \setminus D$ nezasahuje do množiny D . (Pak by tyto orbity netvořily disjunktní rozklad, ale pouze disjunktní pokrytí.)

Pro spor tedy předpokládejme, že $x \in \mathbb{S}^2 \setminus D$ a $\rho \in G$ jsou takové, že $\rho(x) \in D$ neboli $\rho(x)$ je pól některé rotace z G a tu si označíme ψ . Platí, že $\psi(\rho(x)) = \rho(x)$, odkud $\rho^{-1}(\psi(\rho(x))) = x$, tedy x je pevný bod (a tedy pól) rotace $\rho^{-1}\psi\rho$. Ovšem G je grupa, takže tato posledně jmenovaná rotace je v G . Tedy $x \in D$, což je spor s volbou x mimo množinu pólů D .

Z předchozího víme, že orbity bodů z $\mathbb{S}^2 \setminus D$ tvoří disjunktní rozklad množiny $\mathbb{S}^2 \setminus D$. Nyní označme $\mathcal{O} = \{Gx : x \in \mathbb{S}^2 \setminus D\}$. Tato množina je nespočetná, protože každá orbita Gx je pouze spočetná.

Dále můžeme zkonstruovat výběrovou množinu $M \subseteq \mathbb{S}^2 \setminus D$ pomocí axiomu výběru. Výběrová množina bude splňovat $M = \{x : \forall O \in \mathcal{O} : |M \cap O| = 1\}$. Množina M obsahuje z každé orbity právě jeden prvek (bod).

Nyní aplikujme grupu G na množinu M , pak $GM = \{\rho(x) : \rho \in G, x \in M\} = \mathbb{S}^2 \setminus D$. Z lemmatu 9 víme, že grupu G můžeme rozdělit na navzájem disjunktní části G_1, G_2, G_3 tak, aby $\tau G_1 = G_2, \tau^2 G_1 = G_3$ a $\sigma G_1 = G_2 \cup G_3$. Nyní položme $A = G_1 M, B = G_2 M$ a $C = G_3 M$.

Nutně platí, že A, B i $C \subseteq \mathbb{S}^2 \setminus D$. Konstatujeme, že A, B, C tvoří disjunktní rozklad $\mathbb{S}^2 \setminus D$, což je z výše uvedeného snadno vidět. Nyní už zbývá poslední krok, a to aplikovat dané rotace na množiny A, B a C .

1. $\tau A = \tau(G_1 M) = (\tau G_1) M = G_2 M = B$
2. $\tau^2 A = \tau^2(G_1 M) = (\tau^2 G_1) M = G_3 M = C$
3. $\sigma A = \sigma(G_1 M) = (\sigma G_1) M = (G_2 \cup G_3) M = G_2 M \cup G_3 M = B \cup C$

Těmito třemi kroky jsme dokázali požadované vlastnosti hledaného rozkladu, a tudíž jsme dokázali větu. □

3. Banachův-Tarského paradox

3.1 Banachova-Tarského věta aneb jak z kapky udělat moře

„Můžeme s tím nesouhlasit,
můžeme se dokonce i rozčítovat,
ale to je asi tak všechno, co s tím
můžeme dělat.“

Jára Cimrman

V matematice existuje mnoho překvapení. Některá z nich jsou příjemná a některá vyloženě obtěžují. Ovšem existují pikantnosti takového rozměru, že vás zvednou ze židle. Mezi ně rozhodně patří Banachův-Tarského paradox někdy také zvaný jako Paradox hrášku a Slunce. Vzít v roce 1924 plnou kouli, rozložit ji a poskládat z ní dvě stejné kopie té původní, je opravdu na prahu geniality a vstupenky do pečovatelského domu. V této kapitole si podrobně představíme již zmíněný paradox, dokážeme si o něm pár tvrzení a v závěru se pokusíme o spojitý rozklad.

Ukážeme si, že nemusíme pracovat jen s jednotkovými koulemi v \mathbb{R}^3 , ale i s jinými objekty. Bez nadsázky můžeme tvrdit, že umíme udělat z komára velblouda nebo z kapky moře.

Ovšem abychom čtenáře alespoň trochu uklidnili, můžeme s klidnou myslí říci, že daný paradox zatím v reálném světě nemá praktického využití. Je to způsobeno odlišnostmi abstraktního matematického světa s tím naším okolo nás. Zatímco objekty v reálném světě jsou tvořeny částicemi, jako jsou atomy, kterých je konečné, byť velké množství, v abstraktním světě matematiky uvažujeme nekonečné množiny s nekonečně mnoha prvky, a těch je skutečně více než libovolný počet atomů na této planetě.

Věta 11 (Banachův-Tarského paradox (AC) (Pick, 2010)). *Jednotková trojrozměrná koule $B^3 = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ je ekvirozložitelná se dvěma kopiemi sama sebe.*

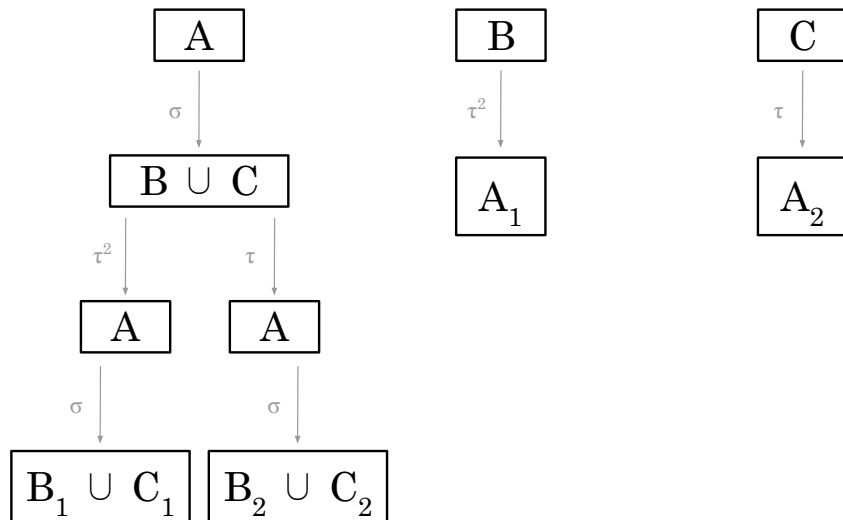
Důkaz. Opět si vezmeme naši paradoxní grupu G a její rozklad s příslušnými vlastnostmi ($\tau G_1 = G_2, \tau^2 G_1 = G_3, \sigma G_1 = G_2 \cup G_3$).

Dále víme, že každá rotace na sféře má dva póly, pro naše potřeby jim budeme říkat jižní a severní, i když ne každý jižní pól nalezneme na „jihu“ koule. Bod nazveme pólem rotace α , pokud při rotaci α nezmění svou polohu. Množinu všech pólů si označíme \mathcal{P} . Víme, že \mathcal{P} je spočetná, protože máme spočetně mnoho rotací spolu se spočetně mnoha póly.

Z Hausdorffova paradoxu dále víme, že množina $S^2 \setminus \mathcal{P}$ lze rozložit na tři disjunktní části A, B a C takové, že aplikací částí grupy G na tyto množiny budou splňovat požadované vlastnosti $\tau A = B, \tau^2 A = C$ a $\sigma A = B \cup C$.

Dohromady tedy máme rozdělený povrch koule $S^2 \setminus \mathcal{P}$ na tři navzájem disjunktní množiny bodů A, B a C . Nyní aplikujme vlastnost $\sigma A = B \cup C$. Na vzniklé množiny B a C aplikujme vlastnosti $\tau^2 A = C \iff A = \tau C$ a

$\tau A = B \iff \tau^2 B = A$. Z těchto vzniklých dvou množin A opět za pomoci vlastnosti $\sigma A = B \cup C$, sestrojíme množiny B_1, C_1 a B_2, C_2 . Z původních množin B a C , můžeme opět aplikací τ a τ^2 získat nové dvě množiny A_1 a A_2 . Názorněji to lze vidět na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Postup zduplikování množin A, B a C .

Celkově máme rozdvojenou množinu $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{P} = A_1 \dot{\cup} B_1 \dot{\cup} C_1 = A_2 \dot{\cup} B_2 \dot{\cup} C_2$. Ovšem z věty o ekvirozložitelnosti na povrchu koule víme, že \mathbb{S}^2 a $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{P}$ jsou taktéž ekvirozložitelné, a tedy můžeme rozdvojit celý povrch koule.

V dalším kroku přiřadíme každému bodu na sféře \mathbb{S}^2 polouzavřenou úsečku délky 1 od počátku (ten neobsahuje) k danému bodu (ten obsahuje). Tímto krokem dostaneme z \mathbb{S}^2 kouli B^3 bez středu (počátku), který si označme s . Abychom dostali kouli se středem, musíme ukázat, že množiny B^3 a $B^3 \setminus \{s\}$ jsou ekvirozložitelné.

Vezměme si malou kružnici obsaženou v kouli B^3 tak, aby procházela počátkem (tj. středem B^3). Vezměme si libovolnou rotaci ρ , která otáčí body na kružnici o iracionální násobek π . Tím zajistíme, že se nikdy nevrátíme do stejného bodu neboli $\rho^n(s)$, $n = 1, 2, \dots$ je prostá posloupnost bodů kružnice. Zkonstruujme množinu \mathcal{P} , do které dáme počátek koule a všechny body, které dostaneme otočením bodu s o rotaci ρ . Když nyní otočíme množinu $\mathcal{P} = \{s, \rho(s), \rho^2(s), \dots\}$ znovu o rotaci ρ , dostaneme novou množinu $\rho\mathcal{P} = \{\rho(s), \rho^2(s), \rho^3(s), \dots\}$, která je téměř identická s \mathcal{P} až na chybějící počátek. Tím jsme ukázali, že B^3 a $B^3 \setminus \{s\}$ jsou ekvirozložitelné na dvě části - množinu \mathcal{P} a její doplněk do B^3 .

Celkově se nám podařilo rozdvojit povrch koule, z povrchu vytvořit kouli bez středu a dokázat ekvirozložitelnost B^3 a $B^3 \setminus \{s\}$. Nyní už můžeme z pohodlí domova říci, že jednotková koule v \mathbb{R}^3 je ekvirozložitelná se dvěma kopiemi sama sebe.

□

Důkaz byl převzat z (Tomkowicz a Wagon, 2016, str. 30) a doplněn. Po zformulování a dokázání Banachova-Tarského paradoxu se strhla vlna nevole a kontroverze na jeho autory, ale ani to je nezastavilo v práci, a proto následně zformulovali silnější verzi paradoxu, která je dokonce ještě více překvapivá. Teze dokazuje, že

paradox platí například pro libovolná tělesa v \mathbb{R}^3 a mnohem víc. Větu a její důkaz lze nálezt zde (Tomkowicz a Wagon, 2016, str. 31). Zároveň se začalo zkoumat jaký je nejmenší počet částí potřebný na provedení paradoxu. To prozkoumal Abraham Robinson a v roce 1947 dokázal, že hledaný nejmenší počet částí na zdvojení B^3 je 5, z nichž je dokonce jedna pouze jednobodová.

Abychom dokázali silnější verzi paradoxu, budeme potřebovat zavést následující termín, a sice relaci \preceq_P .

Definice 8. Řekneme, že $A \preceq_P B$, pokud $\exists n \in \mathbb{N} \exists B_1, \dots, B_n \subseteq B$ po dvou disjunktní $\exists f_1, \dots, f_n : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ izometrie : $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n f_i(B_i)$.

Danou relaci lze i definovat jinak. Ukážeme, že obě definice jsou ekvivalentní.

Definice 9. Řekneme, že $A \preceq_E B$, pokud A je ekvirozložitelná s podmnožinou B .

Lemma 12 (O ekvivalenci relací \preceq_P a \preceq_E). *Necht $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ jsou množiny, pak $A \preceq_P B$ právě tehdy, když $A \preceq_E B$.*

Důkaz. (\implies) Máme $A \preceq_P B$. Z toho plyne, že $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n f_i(B_i)$, kde f_i jsou příslušné izometrie a B_i jsou disjunktní podmnožiny B . Označme $C_i = f_i(B_i)$. Nyní zavedeme množiny A_1, \dots, A_n následovně:

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 \cap A \\ A_2 &= (C_2 \setminus C_1) \cap A \\ A_3 &= (C_3 \setminus (C_1 \cup C_2)) \cap A \\ &\vdots \\ A_i &= (C_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j) \cap A \\ &\vdots \\ A_n &= (C_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} C_j) \cap A \end{aligned} \tag{3.1}$$

Množiny A_i jsou neprázdné, po dvou disjunktní (plyne z definice A_i) a představují části množiny A . Snadno vidíme, že A je disjunktní sjednocení A_i .

Nyní zbývá pouze označit $D_i = f_i^{-1}(A_i) \subseteq B_i$, protože z toho vyplývá, že $D_i \subseteq B_i \subseteq B$ neboli $\bigcup_{i=1}^n D_i \subseteq B$. Zároveň víme, že D_i jsou po dvou disjunktní, protože D_i jsou podmnožiny B_i , které jsou disjunktní. Z toho ovšem plyne relace $A \preceq_E B$, neboť množina A je ekvirozložitelná $\bigcup_{i=1}^n D_i$, což je podmnožina B .

(\impliedby) V této části důkazu víme, že množina A je ekvirozložitelná s podmnožinou B . Z relace ekvirozložitelnosti tedy plyne, že existují podmnožiny A_1, \dots, A_n po dvou disjunktní takové, že jejich sjednocení je množina A , a existují $g_1, \dots, g_n : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ izometrie takové, že $\bigcup g_i(A_i) \subseteq B$. Nyní stačí položit $B_i = g_i(A_i)$ a $f_i = g_i^{-1}$, a tím jsme dokázali druhou implikaci, protože $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n f_i(B_i)$.

Dohromady tedy máme, že $A \preceq_P B$ právě tehdy, když $A \preceq_E B$. □

Jako poslední krok k důkazu silnější Banachovy-Tarského věty budeme potřebovat Banachovu-Schröderovu-Bernsteinovu větu o ekvirozložitelnosti, která

je analogií ke klasické množinové Cantorově-Bernsteinově větě o mohutnostech množin.

Věta 13 (Banachova-Schröderova-Bernsteinova věta). *Nechť $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$. Pokud $A \preceq_E B$ a $B \preceq_E A$, pak A je ekvirozložitelná s B .*

Důkaz. Začneme tím, že uvedeme dvě vlastnosti, které budeme v důkazu využívat, a dokážeme, že tyto vlastnosti má přesně ekvirozložitelnost. Mějme dvě pomocné množiny $M, N \subseteq \mathbb{R}^3 : M \approx N$.

- (a) Pokud $M \approx N$, pak $\exists h : M \rightarrow N$ bijekce taková, že $\forall M' \subseteq M : M' \approx h(M') \subseteq N$.
- (b) Pokud pro $M', M'' \subseteq M$ disjunktní a pro $N', N'' \subseteq N$ disjunktní platí, že $M' \approx N'$ a $M'' \approx N''$, pak $M' \cup M'' \approx N' \cup N''$.

K důkazu (a) si stačí uvědomit, že každá taková podmnožina je buď obsažená v jednom z dílků ekvirozložitelnosti anebo přesahuje klidně do několika z nich. První případ je triviální. V případě druhé varianty lze danou podmnožinu rozkouskovat podle hranic dílků ekvirozložitelnosti původní množiny a tyto části samostatně zobrazit. Sloučením obrazů těchto dílků, dostaneme obraz naší podmnožiny, čímž jsme dokázali její ekvirozložitelnost. Žádaná bijekce $h : M \rightarrow N$ se tedy definuje pomocí přímých shodností, které máme z definice ekvirozložitelnosti těchto dvou množin.

U vlastnosti (b) víme, že existují nějaké přímé shodnosti h_1^1, \dots, h_n^1 zobrazující M' na N' a zároveň existují nějaké přímé shodnosti h_1^2, \dots, h_n^2 zobrazující M'' na N'' . Vzhledem k disjunktnosti obou dvojic podmnožin stačí k nalezení obrazu $M' \cup M''$ použít všechny tyto přímé shodnosti, čímž dostaneme $N' \cup N''$. Nic nebude chybět ani přebývat, protože původní podmnožiny byly ekvirozložitelné.

Z předpokladů věty víme, že $A \preceq_E B$, což znamená, že existuje podmnožina B ekvirozložitelná s celým A . Tuto podmnožinu označme B' . Obdobně najdeme A' z předpokladu $B \preceq_E A$.

Najdeme vhodnou bijekci $f : A \rightarrow B'$ s vlastností (a), která určitě existuje díky $A \approx B'$. Stejným způsobem najdeme bijekci $\varphi : B \rightarrow A'$ opět s vlastností (a). Jelikož se jedná o bijekci, určitě existuje $g = \varphi^{-1} : A' \rightarrow B$. Vlastnost (a) se zachová, protože je symetrická.

Nechť $C_0 = A \setminus A'$. Tuto množinu zobrazíme nejdříve pomocí bijekce f do B' a následně zpět bijekcí φ z B do A' . Vzniklý obraz v A' si označíme jako C_1 , který je disjunktní s C_0 , protože celý leží A' zatímco C_0 je přesně doplněk A' . Nyní stejným způsobem můžeme zkonstruovat množinu $C_2 = \varphi(f(C_1))$, která je disjunktní s $C_0 \cup C_1$, protože $f(C_1)$ je disjunktní s $f(C_0)$ a následné zobrazení zpět pomocí φ se zobrazí zase na disjunktní část A' , což plyne zase z ekvirozložitelnosti. Tímto způsobem můžeme najít libovolné $C_{n+1} = \varphi(f(C_n))$. Sjednocení těchto množin označíme jako

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Nyní ověříme, že platí $g(A \setminus C) = B \setminus f(C)$. Množina $A \setminus C$ je určitě podmnožinou A' , protože C_0 je doplněk k A' , a tedy $A \setminus C \subseteq A'$. Dále z $C_{n+1} = \varphi(f(C_n))$ plyne, že $g(C_{n+1}) = f(C_n)$.

$$\begin{aligned}
g(A \setminus C) &= B \setminus f(C) = B \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} f(C_n) = B \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} g(C_{n+1}) = B \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} g(C_k) = \\
&= B \setminus g\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) = B \setminus g(C \setminus C_0) = B \setminus g(C \setminus (A \setminus A')) = B \setminus g(C \cap A') = \\
&\quad [C = C \cap A'; B = g(A')] \\
&= g(A') \setminus g(C) = g(A' \setminus C) = g(A \setminus C)
\end{aligned}$$

K poslednímu kroku dodáme, že odečítáme vše co je v A , protože množina $C_0 = A \setminus A' \subseteq C$.

Nyní zbývá spojit vše, co víme, a sice $A \setminus C \subseteq A'$ a $g(A \setminus C) = B \setminus f(C)$ neboli $A \setminus C = \varphi(B \setminus f(C))$. Ovšem φ je bijekce s vlastností (a), a tedy platí $A \setminus C \approx B \setminus f(C)$. Dále víme, že $C \subseteq A$ a f je také bijekce s vlastností (a), a tedy i $C \approx f(C)$.

Ovšem nyní máme splněny předpoklady pro využití vlastnosti (b). Množiny $A \setminus C$ a C jsou disjunktní a stejně tak i $B \setminus f(C)$ a $f(C)$ a zároveň víme $A \setminus C \approx B \setminus f(C)$ a $C \approx f(C)$. Musí tedy platit, že $A \setminus C \cup C \approx B \setminus f(C) \cup f(C)$ neboli $A \approx B$. □

Věta 14 (Obecná Banachova-Tarského věta (**AC**)). *Nechť $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ jsou omezené s neprázdným vnitřkem, pak A, B jsou ekvirozložitelné.*

Důkaz. Nejdříve ukážeme, že $A \preceq_E B$. Mějme tedy dvě omezené množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ s neprázdným vnitřkem. Jelikož jsou A, B omezené, můžeme najít koule Θ_A, θ_B tak, aby $A \subseteq \Theta_A \wedge \theta_B \subseteq B$. Dále označme $\nu \in \mathbb{N}$ jako dostatečně velké číslo takové, aby koule Θ_A byla obsažena v ν izometrických kopiích koule θ_B .

Nejprve kouli θ_B nakopírujeme pomocí Banachova-Tarského paradoxu na ν disjunktních kopií $\theta_{B_i}^i, i = 1, \dots, \nu$. Tyto kopie následně přesuneme vhodnými posunutími f_1, \dots, f_ν tak, aby pokryly celou kouli Θ_A , kde klidně povolujeme přesahování. Tuto množinu kopií označme \mathcal{S} . Zjednodušenou situaci ilustrujeme na obrázku 3.2

Tím dostaneme, že

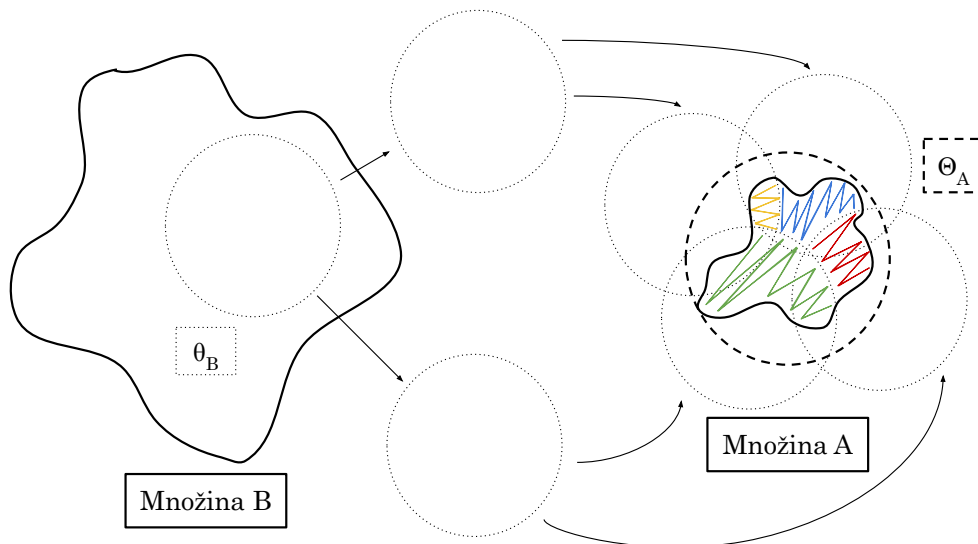
$$A \preceq_P \Theta_A \preceq_P \bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{\nu} f_i(\theta_{B_i}).$$

Ovšem z definice 8 plyne

$$\bigcup_{i=1}^{\nu} f_i(\theta_{B_i}) \preceq_P \bigcup_{i=1}^{\nu} \theta_{B_i} \approx \theta_B \preceq_P B.$$

Relace \preceq_P je ekvivalentní s relací \preceq_E z lemmatu 12, která je tranzitivní, což plyne z vlastností relace ekvirozložitelnosti. Čili relace \preceq_P je rovněž tranzitivní, a proto dostáváme, že $A \preceq_P B$ neboli $A \preceq_E B$. Analogicky by se dokazovala opačná relace ($B \preceq_E A$).

Nyní už zbývá aplikovat Banachovu-Schröderovu-Bernsteinovu větu, a tím dostaneme, že A je ekvirozložitelná s B . Věta je dokázána. □



Obrázek 3.2: Ilustrace důkazu věty 14 se čtyřmi kopiemi θ_B .

3.2 Jak jsme na tom v rovině?

Snad každého čtenáře po přijetí Banachova-Tarského paradoxu napadne otázka jak jsme na tom jiných dimenzích. Jak jsme na tom například v rovině? Odpověď je jasná, ačkoliv těžko dokazatelná. Banachův-Tarského paradox zde neplatí, a dokonce ani v dimenzi jedna. V následujícím odstavci se pokusíme nastínit proč. Důvodů je hned několik.

Zprvce máme o jeden rozměr méně, z toho plyne, že máme méně možností jak využít rotace a translace. Zadruhé platí, že každá omezená množina v rovině s nenulovým obsahem může být rozložena na měřitelné podmnožiny. To plyne z existence Banachovy míry¹, která je vlastně rozšířením Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^2 v eukleidovských prostorech.

Celkově lze ukázat, že Lebesgueova míra je rozšiřitelná na všechny podmnožiny \mathbb{R}^n pro $n \leq 2$. Naopak v trojrozměrném prostoru to nelze udělat kvůli axiomu výběru, který umožňuje vytvoření neměřitelných množin, což je klíčové pro Banachův-Tarského paradox.

V neposlední řadě mají množiny v rovině, například kružnice a kruhy, souvislou a kompaktní strukturu, která brání rozdělení do částí nutných pro paradox. Klíčovým krokem v paradoxu je totiž nalezení v grupě $\mathbb{S}\mathbb{O}_3$ volnou podgrupu² o dvou generátorech (Hausdorffovy rotace). Avšak amenabilní grupy tuto volnou podgrupu neobsahují. Stefan Banach dokázal najít právě takovou grupu v \mathbb{R}^2 .

Abychom docílili nějakých paradoxů v rovině, museli bychom grupu izometrií rozšířit o plochu zachovávající afinní zobrazení. Tato grupa na množině reálných čísel se označuje jako $\mathbb{S}\mathbb{A}_2$ a obsahuje volnou podgrupu vedoucí na paradoxy. Zná-

¹Banachova míra není míra tak, jak ji máme v této práci definovanou, protože není σ -aditivní. Avšak je σ -aditivní na Lebesgueovsky měřitelných množinách. Dále je konečně aditivní a invariantní vzhledem k izometriím (míra množiny se nezmění, když na ni aplikujeme jakoukoliv izometrii)

²Grupu nazveme volnou, jestliže obsahuje konečný počet generátorů a všech jejich kombinací. V našem případě to byly všechny možné složené rotace pomocí τ a σ .

mým případem může být Von Neumannův paradox, který pouze zformulujeme. Plné znění s důkazem lze najít (Tomkowicz a Wagon, 2016, str. 119–120). K tomu si potřebujeme označit speciální lineární grupu jako grupu \mathbb{SL}_2 všech matic 2×2 , jejichž determinant se rovná jedné.

Věta 15 (Von Neumannův paradox). *Nechť G je volná podgrupa \mathbb{SA}_2 generovaná dvěma nezávislými prvky ψ a φ z grupy \mathbb{SL}_2 a všemi translacemi, pak polootevřený jenotkový čtverec $[0, 1) \times [0, 1)$ je G -ekvirozložitelný (používáme zobrazení z G) se dvěma kopiemi sama sebe. Navíc libovolné dvě omezené množiny s neprázdným vnitřkem v \mathbb{R}^2 jsou ekvirozložitelné.*

Problémy ohledně rozdělování různých obrazců a jejich následného přeskládání zajímaly lidstvo dávno před naším letopočtem. Některé záznamy a prameny pochází ze starého řeckého a arabského světa. Příkladem může být spis Stomachion, jehož autorem byl pravděpodobně Archimédés ze Syrakus (250 př.n.l). V něm se mimo jiné řeší, jak ze čtverce rozděleného na 14 částí vytvořit různé jiné obrazce například slona, meč nebo strom.

Matematika v této době nebyla rozvinuta tak jako dnes, a tak při daném rozdělování (můžeme říkat stříhání) docházelo k nepřesnostem v podobě ignorování hranic v daném předělu (stříhu). Avšak pokud bychom vzali čistý papír a rostříhli ho nůžkami na půl podél úhlopříčky, kam patří body přesně na hranici stříhu? Pokud z těchto dvou částí následně složíme například trojúhelník, dané body zde máme dvakrát. Kvůli ignorování bodů na hranicích stříhu museli matematikové přijít s novým termínem, a to s *nůžkovou kongruencí*.

Tato relace je podobná naší ekvirozložitelnosti, avšak narozdíl od ní neřeší body na hranicích. Ekvirozložitelnost na druhou stranu je mnohem přesnější pojem, který se zabývá veškerými body včetně těch hraničních. Dodejme ještě, že relace nůžkové kongruence je také relací ekvivalence.

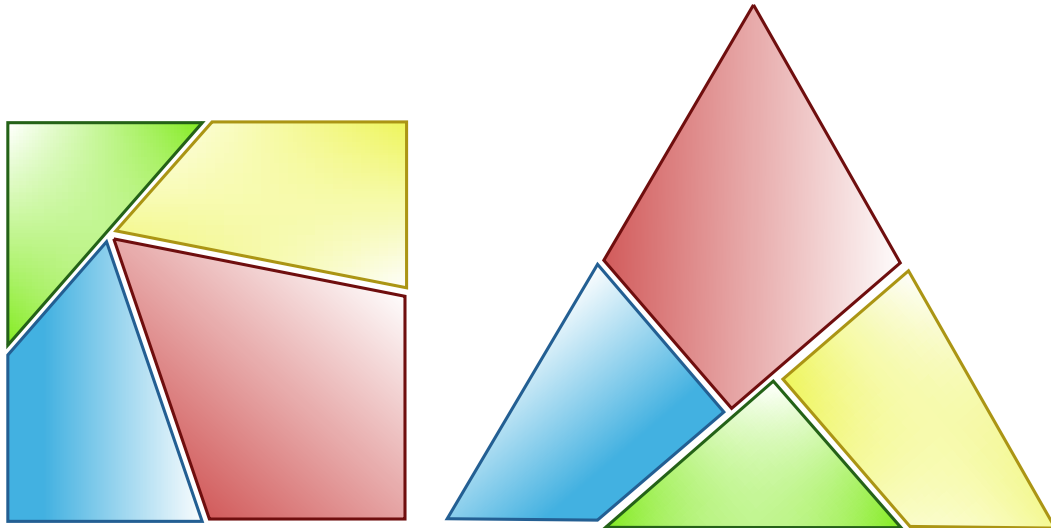
Definice 10 (Nůžková kongruence). *Dva mnohoúhelníky M a N jsou nůžkově kongruentní, píšeme $M \sim N$, pokud M může být rozložen na konečný počet mnohoúhelníkových částí tak, aby se jejich přeskládáním pomocí izometrií zformoval mnohoúhelník N .*

V souvislosti s nůžkovou kongruencí nesmíme opomenout zmínit pozoruhodnou větu, na kterou přišli samostatně pánové William Wallace v roce 1807, Farkas Bolyai (1833) a Paul Gerwien (1835). Zmíněná věta nese všechna jejich jména a její znění s důkazem lze najít v (Tomkowicz a Wagon, 2016, str. 23–24). Avšak v této práci ji dokazovat nebudeme.

Věta 16 (Wallacovo-Bolyaiovo-Gerwienovo kritérium). *Dva mnohoúhelníky jsou nůžkově kongruentní právě tehdy, když mají stejný obsah.*

Abychom dali více do kontrastu nůžkovou kongruenci a ekvirozložitelnost, zformulujeme následující větu bez důkazu. Všimněme si, že věta je ve formě implikace nikoliv ekvivalence. Její znění a důkaz můžeme opět nálezt v (Tomkowicz a Wagon, 2016, str. 28–29).

Věta 17 (Vztah nůžkové kongruence a ekvirozložitelnosti). *Pokud jsou dva mnohoúhelníky nůžkově kongruentní, pak jsou ekvirozložitelné.*



Obrázek 3.3: Příklad nůžkové kongruence.

Důsledek. Jestliže mají dva mnohoúhelníky stejný obsah, pak jsou ekvirozložitelné.

Důkaz. Z Wallacova-Bolyaiova-Gerwienova kritéria víme, že dva mnohoúhelníky mají stejný obsah právě tehdy, když jsou nůžkově kongruentní. Zároveň z věty o vztahu nůžkové kongruence a ekvirozložitelnosti plyne, že pokud jsou dva mnohoúhelníky nůžkově kongruentní, pak jsou ekvirozložitelné. Kombinací obou vět dostáváme, že dva mnohoúhelníky jsou ekvirozložitelné, pokud mají stejný obsah.

□

3.3 Jak jsme na tom v hypersvětě?

Pokud bychom se ptali zdali je možné zkonstruovat Banachův-Tarského paradox ve vyšších dimenzích, pak bychom dostali kladnou odpověď. Skutečně platí, že pro $n \in \mathbb{N} : n \geq 3$ jsme schopni paradox zreplikovat. Musíme si uvědomit, že samotná existence paradoxu v \mathbb{R}^3 dokazuje, že nelze přiřadit Lebesgueovu míru všem podmnožinám v \mathbb{R}^3 neboli existují Lebesgueovsky neměřitelné množiny.

Zformulujeme si dvě věty bez důkazu, jejichž plné znění a důkazy jsou k dispozici zde (Tomkowicz a Wagon, 2016, str. 78–79).

Věta 18 (Banachův-Tarského paradox v \mathbb{R}^n (**AC**)). *Nechť $n \in \mathbb{N} : n \geq 3$, pak každá koule v \mathbb{R}^n je ekvirozložitelná se dvěma kopiemi sama sebe.*

Věta 19 (Obecná Banachova-Tarského věta v \mathbb{R}^n (**AC**)). *Nechť $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N} : n \geq 3$, jsou omezené s neprázdným vnitřkem, pak A, B jsou ekvirozložitelné.*

3.4 Banachův-Tarského spojitý rozklad sféry

Doteď jsme používali standardní verzi Banachova-Tarského paradoxu, která je založena na rozkladu objektů pomocí diskretních pohybů a následných poskládání do nových tvarů. Tento klasický přístup, ač fascinující, často vyvolával otázky ohledně fyzikální realizovatelnosti a tvaru trajektorie. Budou se například jednotlivé části z naší ekvirozložitelnosti navzájem srážet nebo se vyhnou. V roce 2005 Trevor Wilson ve svém článku představil inovativní přístup k tomuto paradoxu prostřednictvím konceptu spojitě ekvirozložitelnosti (Wilson, 2005, str. 946–947), který přinesl kladnou odpověď k variantě plynulých pohybů se vzájemným vyhnutím se. To znamená, že existují disjunktní trajektorie složené z přímých shodností pro každý pár odpovídajících si částí z klasické ekvirozložitelnosti. To je mimo jiné také odpovědí na de Grootův problém, který se ptá, zda je možné realizovat Banachův-Tarského paradox s plynulými pohyby.

Definice 11 (Spojitá ekvirozložitelnost). *Nechť A, B jsou dvě libovolné podmnožiny \mathbb{R}^n . Řekneme, že A, B jsou spojitě ekvirozložitelné, budeme značit $A \approx_C B$, pokud existují jejich rozklady na konečný počet částí A_1, \dots, A_n a B_1, \dots, B_n , kde $n \in \mathbb{N}$ a existuje množina spojitých cest z grupy přímých shodností $M = \{\varphi_t^0, \dots, \varphi_t^n\}$ pro $t \in [0, 1]$ taková, že $\varphi_0 = e$, $\varphi_t^1(A_1) = B_1, \dots, \varphi_t^n(A_n) = B_n$ a pro libovolná různá $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a pro libovolné $t \in [0, 1]$ platí $\varphi_t^i(A_i) \cap \varphi_t^j(A_j) = \emptyset$.*

Podobně jako u klasické ekvirozložitelnosti lze snadno dokázat, že spojitá ekvirozložitelnost je také relací ekvivalence. Nyní uvedeme poslední asi nejsilnější znění Banachova-Tarského paradoxu se spojitou ekvirozložitelností (Tomkowicz a Wagon, 2016, str. 174).

Věta 20 (Obecná Banachova-Tarského věta v \mathbb{R}^n se spojitou ekvirozložitelností). *Každé dvě $A, B \subset \mathbb{R}^n$ omezené s neprázdným vnitřkem, kde $n \in \mathbb{N} : n \geq 3$, jsou spojitě ekvirozložitelné.*

Dalším zajímavým výsledkem spojitě ekvirozložitelnosti je silnější verze Tarského kruhového-čtvercového problému, jehož znění a důkaz naleznete v (Wilson, 2005, str. 950).

Věta 21 (Silnější Tarského kruhový-čtvercový problém). *Kruh je spojitě ekvirozložitelný pomocí translací se čtvercem o stejném obsahu.*

Jak lze vidět spojitá ekvirozložitelnost nejenže poskytuje nový pohled na klasický paradox, ale také přináší řadu zajímavých výsledků a postřehů. Díky tomu jsme zase o něco blíže k případnému praktickému využití paradoxu.

Závěr

Matematický svět je vskutku podivné místo, a tedy není překvapením, že i v této práci jsme dosáhli poměrně kontroverzních výsledků. V první kapitole jsme se věnovali naprostým základům a ukázali si koncept nekonečna a jeho vlastnosti. Dále byl zformulován axiom výběru, který byl důležitou součástí práce.

Druhá kapitola je věnována překvapivým výsledkům z oblasti geometrie a algebry. Podařilo se nám zkonstruovat neměřitelnou množinu a dokázat zajímavý Sierpińského-Mazurkiewiczův paradox. V další části jsme úspěšně našli paradoxní rozklad grupy Hausdorffových rotací a tento výsledek aplikovat v důkazu Hausdorffova paradoxu. Odtud byl už jen malý krok k meritu věci, a sice k Banachovu-Tarskému paradoxu.

Zmíněnému paradoxu je věnována celá třetí kapitola, kde jsme dokázali jeho základní verzi a zformulovali několik jeho silnějších variant. Řekli jsme si něco málo o rozdílech abstraktního světa matematiky a běžného světa. Dále jsme vedli polemiku nad existencí paradoxu v různých dimezích, kde byly řečeny důvody proč nelze paradox vytvořit v \mathbb{R}^2 . Za zmínku stojí i kontrast relace nůžkové kongruence zanedbávající hranice částí objektu a relace ekvirozložitelnosti. V úplném závěru práce byl představen nový koncept spojitě ekvirozložitelnosti, který celou záležitost posunul zase o krok výše.

Seznam použité literatury

- BANACH, S. a TARSKI, A. (1924). Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fundamenta Mathematicae*, **34**(6), 244–277.
- FUCHS, E. (1999). *Teorie množin pro učitele*. Masarykova Univerzita, Brno. ISBN 80-210-2201-99.
- GRABOWSKI, L. U., MÁTHÉ, A. a PIKHURKO, O. (2017). Measurable circle squaring. *Ann. of Math. (2)*, **185**(2), 671–710. ISSN 0003-486X,1939-8980. doi: 10.4007/annals.2017.185.2.6. URL <https://doi.org/10.4007/annals.2017.185.2.6>.
- HAUSDORFF, F. (1914). Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen. *Math. Ann.*, **75**(3), 428–433. ISSN 0025-5831,1432-1807. doi: 10.1007/BF01563735. URL <https://doi.org/10.1007/BF01563735>.
- LACZKOVICH, M. (1990). Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem. *J. Reine Angew. Math.*, **404**, 77–117. ISSN 0075-4102,1435-5345. doi: 10.1515/crll.1990.404.77. URL <https://doi.org/10.1515/crll.1990.404.77>.
- LACZKOVICH, M. (1992). Decomposition of sets with small boundary. *J. London Math. Soc. (2)*, **46**(1), 60–62. ISSN 0024-6107,1469-7750. doi: 10.1112/jlms/s2-46.1.58. URL <https://doi.org/10.1112/jlms/s2-46.1.58>.
- MAKAROVÁ, M. (2020). Teorie míry. URL https://is.muni.cz/th/z9xph/BP_01.pdf. [Online; 29-March-2024].
- MARKS, A. S. a UNGER, S. T. (2017). Borel circle squaring. *Ann. of Math. (2)*, **186**(2), 581–605. ISSN 0003-486X,1939-8980. doi: 10.4007/annals.2017.186.2.4. URL <https://doi.org/10.4007/annals.2017.186.2.4>.
- MARKS, ANDREW S. AND UNGER, SPENCER T. (2017). A constructive solution to tarski's circle squaring problem. URL https://www.math.ucla.edu/~marks/talks/circle_squaring_talk.pdf. [Online; 15-April-2024].
- MAZURKIEWICZ, S. a SIERPIŃSKI, W. (1914). Sur un ensemble superposable avec chacune de ses deux parties. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, **158**, 618–619.
- O'CONNOR, J. J. a ROBERTSON, E. F. (2014). Hilbert, david. *School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews*. [Online] Dostupné zde: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert/>.
- PICK, L. (2010). Hrášek a sluníčko. o matematickém paradoxu stefana banacha a alfreda tarského. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, **55**(3), 191–214. URL <http://eudml.org/doc/246336>.
- RMOUTIL, M. (2023). Logika a teorie množin. [Online] Dostupné zde: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~rmoutil/NMTM503/TM.pdf>.

STEWART, I. (1996). *From Here to Infinity*. Oxford University Press. ISBN 9780192832023. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:117814754>.

TOMKOWICZ, G. a WAGON, S. (2016). *The Banach-Tarski paradox*, volume 163 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, New York, second edition. ISBN 978-1-107-04259-9. With a foreword by Jan Mycielski.

WIKIPEDIA CONTRIBUTORS (2023). Fractal — Wikipedia, the free encyclopedia. [Online] Dostupné zde: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fractal&oldid=1179358863> (version: 1179358863).

WILSON, T. M. (2005). A continuous movement version of the Banach-Tarski paradox: a solution to de Groot's problem. *J. Symbolic Logic*, **70**(3), 946–952. ISSN 0022-4812,1943-5886. doi: 10.2178/jsl/1122038921. URL <https://doi.org/10.2178/jsl/1122038921>.

Seznam obrázků

1.1	Diagonální seřazení prvků $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	7
2.1	Ukázka důkazu tranzitivity pro množiny A , B a C s rozklady na dvě části.	13
2.2	Kružnice k rozdělená na oblouky $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$	15
2.3	Množina $\mathbb{S}_1 = \{P(z) : \deg P(z) \leq 3, P(z) \text{ má koeficienty z } \{0,1,2,3,4,5\}\}$	18
2.4	Množina \mathbb{S}_1 (modrá) a její příslušná podmnožina A_1 (červená). . .	19
2.5	Množina \mathbb{S}_1 (modrá) a její příslušná podmnožina B_1 (zelená). . .	19
2.6	Hyperwebster	20
2.7	Přeměna kapitoly A na celý Hyperwebster.	21
2.8	Algoritmus na rozdělení redukovaných řetězců do G_1, G_2 a G_3 . . .	25
2.9	Zjednodušené schéma algoritmu.	27
3.1	Postup zduplikování množin A, B a C	32
3.2	Ilustrace důkazu věty 14 se čtyřmi kopiemi θ_B	36
3.3	Příklad nůžkové kongruence.	38

Seznam tabulek

1.1	Zobrazení f mezi \mathbb{Z} a \mathbb{N}	6
1.2	Jedna z možností jak seřadit prvky \mathbb{Q}	7
1.3	Uspořádaný seznam hodnot mezi \mathbb{N} a \mathbb{Q}	7
2.1	První prvky množin G_1 , G_2 a G_3	26

