

Posudek vedoucího na bakalářskou práci

Autor: Jan Lexa

Název práce: *Banachovy-Tarského paradoxní dekompozice*

Bakalářská práce studenta Jana Lexy si klade za cíl podrobně vysvětlit známý Banachův-Tarského paradox a zasadit jej do kontextu dalších známých výsledků paradoxního charakteru, které k němu vedou. Autor se rozhodl k tématu přistoupit ze široka, a i když nevysvětluje veškerou teorii potřebnou k plnému pochopení tématu (to by bylo zcela mimo rozsahový rámec BP), řadu souvisejících konceptů vykládá podrobněji, než je v textech věnujících se tomuto tématu zvykem. Práce je tak rozdělena do několika kapitol; v té první se autor věnuje některým základním věcem z teorie množin a vlastní sekci má axiom výběru, který je ke konstrukci paradoxu nezbytný. Další kapitola se zabývá několika „paradoxmi“, které se dají chápat jako různé manifestace paradoxů nekonečna, jak je chápeme už od dob Bolzana a (později) Cantora. Primitivním příkladem je tzv. Hilbertův hotel (který je vyložen už v první kapitole), příklady se složitější (algebraickou) strukturou jsou pak např. Sierpińského-Mazurkiewiczův paradox, Hyperwebster (nekonečný slovník obsahující všechna konečná slova nad danou abecedou má paradoxní vlastnosti) a Hausdorffův paradox (hlavní ingredience pro konstrukci Banachova-Tarského paradoxu). Poslední kapitola je věnována samotnému Banachovu-Tarského paradoxu a různým souvislostem (například také Laczkovichův výsledek o ekvirozložitelnosti čtverce a kruhu v rovině), zmíněna jsou i některá vylepšení (například verze paradoxu se „spojitým pohybem částí“).

Práce je psána srozumitelně a má dobrou štabní kulturu, vynikající sazbu v L^AT_EXu s množstvím obrázků a schémat; také citace jsou v pořádku, zahrnují přitom i (velmi staré) původní zdroje.

Pan Lexa textu věnoval opravdu hodně práce a samostatné snahy o studium, pravidelně a vydatně také konzultoval se mnou. Osobitý charakter celého textu tyto skutečnosti dokládá. Některé důkazy (zejména v první kapitole) by bylo možné zjednodušit, čehož si byl autor vědom, ovšem zdálo se smysluplné v práci zachytit také výsledky autorových samostatných myšlenkových pochodů: leccos si totiž s mojí nápovědou dokazoval sám. Lze říci, že práce pana Lexy byla příkladná v tom ohledu, že skutečně samostatně studoval a zároveň hojně vyhledával rady vedoucího, které navíc nepřijímal bezvýhradně, nýbrž vysoce kriticky (přesvědčit se nechal jedině důkazem).

Je potřeba říci, že zvolené téma je pro bakalářskou práci patrně příliš náročné, čehož jsme si nyní oba vědomi. Když jsme spolu vybírali (z nemalé nabídky téma), autorovi se téma Banachova-Tarského paradoxu natolik zalíbilo, že na něm trval i po mém (o dva týdny) pozdějším upozornění, že by snad bylo vhodnější pro práci diplomovou. I nadále si myslím, že by bylo lépe téma zpracovat do DP, časový rámec pro bakalářku byl jistě omezující, s čímž souvisí i moje hlavní výhrada: ve vymezeném čase se totiž do práce nepodařilo zařadit jednu z ingrediencí pro úplný důkaz paradoxu, totiž „nezávislost“ tzv. Hausdorffových rotací. V celkovém obrázku jde ovšem spíše o drobnost, už proto, že existuje řada dalších způsobů jak vhodné rotace zvolit, a tedy to nepovažuji za velkou vadu.

Co se týče přínosu práce, už jsem se zmiňoval o vysoké míře pracovitosti a přemýšlivosti autora, které vyústily v osobité pojetí práce. Autor se řídil vždy především vlastní hlavou a na všechno se snažil přijít sám a opravdu důkladně to pochopit. Díky tomuto

přístupu se podařilo některé věci vysvětlit jasněji (a také podrobněji), než tomu je ve standardních materiálech dostupných k tomuto tématu. Zejména mám na mysli algoritmus, který elementy grupy generované Hausdorffovými rotacemi rekurzivně přiřazuje do tří disjunktních množin, tuto grupu pokrývajících. Tato klíčová část důkazu je například v kanonické knize *G. Tomkowicz a S. Wagon: The Banach-Tarski paradox* pouze naznačena, resp. z větší části ponechána jako „cvičení“, které ovšem vůbec není snadné. Vůbec je potřeba říci, že těžko hledat zdroj, který by studovaný paradox vysvětloval současně přístupně (pro neprofesionální matematiky) a úplně (zmíněná kniha nečiní ani jedno). Přínos předkládané práce je tedy zřejmý.

Závěr: Práce pana Lexy je podle mého názoru celkově vysoce nadstandardní. Vzhledem ke složitosti i rozsahové náročnosti tématu se dost možná nepodařilo včas odstranit všechny drobné nedostatky, to však výborný dojem práce kazí jen málo. Práce dalece přesahuje požadavky kladené na BP, a navrhuji pro ni hodnocení *výborně*.

Vedoucí
Martin Rmoutil