Jan Lexa: **Banachovy-Tarského paradoxní dekompozice**

Posudek oponenta bakalářské práce

Hlavním tématem práce je známý Banachův-Tarského paradox a jeho důkaz. V kapitolách 1 a 2 autor začíná jednoduššími výsledky, které lze rovněž označit za paradoxní: Jde např. o existenci bijekce mezi množinami, z nichž jedna je podmnožinou druhé; existenci neměřitelných množin; Sierpińského-Mazurkiewiczův paradox; Hausdorffův paradox o zdvojení povrchu koule. V kapitole 3 jsou kromě Banachova-Tarského paradoxu zmíněny i některé jeho varianty.

Práce je kompilační, zvolené téma považuji z pohledu bakalářského studia za obtížné. Autor se musel seznámit s mnoha pojmy a výsledky, které nejsou součástí učitelského bakalářského studia.

V úvodu postrádám informaci o tom, jakým čtenářům je práce určena a jaké znalosti se od nich očekávají. Úvodní část kapitoly 1, kde se zkoumají mohutnosti číselných oborů, mi připadá poněkud zdlouhavá. Jde přitom o dobře známé poznatky, které v dalším textu nejsou vesměs zapotřebí. Témata v dalších částech práce považuji za zajímavá, ani zde však didaktické zpracování není ideální. V kapitole 2 je zaveden obecný pojem míry, ale v kapitole 3 se hovoří o Lebesgueově míře, aniž by bylo vysvětleno, o co se jedná. Na několika místech je zmíněno, že Banachův-Tarského paradox úzce souvisí s existencí neměřitelných množin, tato souvislost však není řádně vysvětlena. Důkazy v práci jsou poměrně náročné, čtenář se snadno ztratí v technických detailech a netuší, proč právě dokazujeme to či ono tvrzení. Uvítal bych dodatečné vysvětlující poznámky, které by umožnily získat nadhled a pochopit hlavní myšlenky důkazů.

Práce je vesměs pěkně vysázena a obsahuje vhodné doplňující obrázky. Formální stránku kazí poněkud vyšší počet překlepů (téměř na každé stránce se vyskytuje aspoň jeden), jednopísmenné předložky na koncích řádků, v seznamu literatury pak šest malých písmen na začátcích jmen matematiků.

Připojuji ještě některé konkrétnější připomínky:

- S. 5, definice 1: Symbol $\aleph_0$ se používá velmi formálně, bylo by lepší se mu vyhnout (stačí používat termín „spočetná množina“).
- S. 6–7: Ověřování, že zobrazení f mezi $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{N}$ je bijekce, je zbytečně zdlouhavé (tvrzení je zřejmé). V tabulce 1.2 jsou prvky $\mathbb{Q}^+$, nikoliv $\mathbb{Q}$. Popis tabulky 1.3 je nesrozumitelný. Nerozumím, proč je důkaz spočetnosti $\mathbb{Q}$ rozdělen na bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a dále bijekci mezi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}^+$; zdá se mi jednodušší spojit oba kroky do jednoho tak, jak je obvyklé.
- S. 8, část (d): Není pravda, že různé posloupnosti a_n určují různá čísla q. Např. konečné posloupnosti 1, 2 a 12 určují stejné $q = 0{,}12$.
- S. 9–10: Z čeho plyne existence bijekce mezi $\mathbb{C}$ a D uvedená na s. 10? Pravděpodobně ji lze nalézt pomocí funkcí f a ϕ, které byly zavedeny a zkoumány na s. 9, ale nebyly k ničemu využity.
- S. 12: Pojem „spočetná množina“ ve větě 3 nebyl nikde definován.
- S. 16 nahoře: Tato část důkazu je zbytečně zdlouhavá. Stačilo by uvést, že $X \sim Y$, pokud Y lze získat z X otočením kolem S o racionální počet radiánů. Tranzitivita $\sim$ je pak zřejmá.
- S. 16, řádky 20–21: Věta začínající „Nechť $\chi \in \mathbb{SO}_2$“ je zmatená; rovnost $\chi(x) = y$ jistě neplatí pro každou dvojici x, y. Věta měla být spíše zformulována jako implikace.
- S. 24: Definice lexikografického uspořádání se zdá být neúplná. Je uvedeno, jak porovnávat znaky, ale nikoliv řetězce.
- S. 29: Formulace věty 10 je nepřesná. Není jasné, zda za D lze volit libovolnou spočetnou množinu, nebo zda tvrzení říká, že existuje nějaká taková množina.
- S. 31, důkaz věty 11: Je množina $\mathcal{P}$ totožná s množinou D ve znění věty 10? Věta ve třetím odstavci důkazu nedává smysl.
- S. 36–37: Vyskytují se zde další nedefinované pojmy: amenabilní grupa, volná podgrupa.

Doporučuji uznat práci jako bakalářskou. Vzhledem k výše uvedeným nedostatkům navrhuji hodnocení *velmi dobře.*

V Praze dne 12. 8. 2024

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK