

Posudek oponenta diplomové práce

Bc. Lenky Košárkové “Modelling of flow in the aortic root”

Jan Blechta
Matematický ústav UK

2. září 2024

Obsah práce

Předložená práce se zabývá prouděním v aortickém kořeni. Je studováno nestlačitelné proudění newtonovské tekutiny v idealizované oblasti s pevnými hranicemi. Důraz je kladen na geometrický popis cévní stěny a model ulpívání tekutiny na stěně. Je zkoumána domněnka, že hladkost geometrie stěny je zásadní pro charakter proudění v jistých režimech prokluzu tekutiny na stěně. Mechanika stěny naopak není uvažována, což dle citovaného zdroje nevádí.

V první a druhé kapitole je zkonstruováno slabé řešení standardními metodami převzatými z literatury.

Ve třetí části jsou poměrně detailně představeny dvě numerické metody — klasická metoda Hood–Taylor a $H(\text{div})$ -konformní metoda založená na vhodném páru Raviart–Thomas–Nédélec či Brezzi–Douglas–Marini — a metody diskretizace v čase, diskretizace okrajových podmínek (Nitscheho metoda), atp. Inf-sup stabilita příp. podmínky, za kterých je splněna, není diskutována. Práce stručně zmiňuje tlakovou nerobustnost klasické Hood–Taylor metody a sahá proto ke grad-div stabilizaci. U $H(\text{div})$ metod je naopak sáhnuto ke v textu práce blíže nespecifikované upwind stabilizaci. Ke konci kapitoly je stručně představen isoparametrický popis.

Čtvrtá část práce nejprve testuje shora uvedené metody na modelových problémech se známým řešením. Ústředním tématem je stanovení experimentálního řádu konvergence. Je pozorováno snížení řádu, je-li hranice oblasti popsána nedostatečně přesně. Následně je numericky zkoumáno proudění v zjednodušené geometrii reprezentující aortální kořen. Nátoková okrajová podmínka je volena jako parabolický profil, nezávisle na čase, což neodpovídá pulzatilnímu charakteru proudění krve. Je zkoumáno, zda lze nalézt stacionární řešení, asymptoticky periodické řešení, případně, zda je numerické řešení “chaotické”, v závislosti na přesnosti popisu hranice a modelu ulpívání tekutiny na stěně.

Počítačový kód sloužící k provedení výpočtů v práci je uveřejněn v Git repositáři na serveru `gitlab.karlin.mff.cuni.cz`. Nejde o permanentní a imutabilní archivaci.¹ Vskutku ve zmíněném Git repositáři probíhala značná aktivita i po odevzdání práce a není zřejmé, která verze software posloužila k výpočtům a jak konkrétně byla použita.

Dosažené výsledky a přínos autorky. Autorka pro uvedený model dokázala existenci slabého řešení. Byla použita knihovna Firedrake k implementaci shora uvedených metod, testovacích úloh a idealizovaného modelu proudění v aortálním kořeni. Autorka musela nastudovat širokou paletu časopiseckých výsledků ohledně metod existenční analýzy rovnic nestlačitelného proudění a metod numerického řešení.

Práce učinila přirozené kroky k lepšímu pochopení proudění v aortálním kořeni resp. k modelování proudění krve v příslušné komunitě obecně tím, že přikročila k použití tlakově robustní metody, a tím, že zvolila isoparametrický popis. Bylo ukázáno, že to může hrát zásadní roli pro validitu výsledků.

Hodnocení práce

Práce je obsahově velmi zdařilá. Práce se čte dobře a obsahuje malé množství překlepů, větší množství jazykových a stylistických nedostatků a velmi malé množství věcných chyb.

Doporučení. Předloženou práci jednoznačně doporučuji uznat jako diplomovou práci v oboru Matematické modelování.

Otázky

1. Čím je dáno, že chyby v objemovém toku stěnou v obr. 4.22 a 4.25 si navzájem neodpovídají?
2. Nastal případ zpětného toku do oblasti na výstupu, což má kompenzovat podtlak ve výstupní okrajové podmínce? Pokud ano, lze nějak (empiricky) charakterizovat takový režim?

¹Doporučil bych, aby jednak psané směrnice a postupy, tak i pedagogický kolektiv Matematického modelování vedl studentstvo k odevzdávání příslušných příloh (včetně softwaru) do vhodných repositářů.

3. Cílem práce zřejmě bylo, mimo jiné, charakterizovat kvalitativní chování (existence stacionárního stavu, apod.) v závislosti na zvolené numerické metodě. Zároveň byly použity dodatečné numerické stabilizace. Bylo vhodně ověřeno, že tyto stabilizace nemají vliv na obdržené závěry?
4. V práci je bez zdůvodnění či citace předpokládáno, že uvažovaná $H(\text{div})$ metoda je bezdivergetní i v isoparametrickém režimu. Proč by tomu tak mělo být?²

²Pro shape funkci \mathbf{V} máme příslušnou bázovou funkci

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\det J} J \mathbf{V} \circ F^{-1},$$

kde F je příslušná transformace referenčního elementu na fyzický element, $J = DF$ je gradient. Takže

$$\text{div } \mathbf{v} \circ F = \frac{1}{\det J} \text{Div } \mathbf{V},$$

kde Div je referenční divergence. Je-li fyzický element křivočarý, F není affíní a tedy inkluze $\text{div } \mathbf{X}_h \subset Q_h$ neplatí.