



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Kateřina Kodajková

# **Praktický přehled základních typů numerických metod pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic**

Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Kolář, Ph.D.

Studijní program: Fyzika se zaměřením na vzdělávání

Studijní obor: FMUP

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Touto formou děkuji svému vedoucímu práce RNDr. Petr Kolář, Ph.D. za cenné rady a připomínky při zpracování mé bakalářské práce.

Název práce: Praktický přehled základních typů numerických metod pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic

Autor: Kateřina Kodajková

Katedra: Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Kolář, Ph.D., Katedra didaktiky fyziky

Abstrakt: V této bakalářské práci jsou zpracovány numerické metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic - explicitní Eulerova metoda, implicitní Eulerova metoda, metoda Runge-Kutta 4. řádu. Metody jsou implementovány na fyzikální problémy - volný pád v tíhovém poli a tlumený harmonický oscilátor. Pro metodu Runge-Kutta 4. řádu jsou navíc zpracovány problémy matematické kyvadlo a pohyb Země a Merkuru kolem Slunce. Práce má sloužit jako stručný návod k implementaci numerických metod pro studenty budoucího předmětu Numerické metody ve výuce fyziky a pro žáky středních škol, kteří se o numerické metody zajímají.

Klíčová slova: numerické metody|obyčejné diferenciální rovnice|výuka fyziky

Title: Practical summary of numerical methods for solving ordinary differential equations

Author: Kateřina Kodajková

Department: Department of Physics Education

Supervisor: RNDr. Petr Kolář, Ph.D., Department of Physics Education

Abstract: This bachelor's thesis covers the numerical methods of solving ordinary differential equations - the explicit Euler's method, the implicit Euler's method, and the fourth-order Runge-Kutta's method. These methods are implemented onto physics problems - free fall in a gravitational field and the damped harmonic oscillator. Using the fourth-order Runge-Kutta method, the additional problems of the simple gravity pendulum and the movements of the Earth and Mercury around the Sun are inspected further. The thesis is intended to be used as a brief introduction and guide to implementing numerical methods for students of the future subject of Numerical methods in the subject of physics and for high school students who have taken an interest in them.

Keywords: numerical methods|ordinary differential equations|teaching physics

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Úvod do diferenciálních rovnic</b>	<b>3</b>
1.1 Typy diferenciálních rovnic . . . . .	3
1.2 Důležité derivace ve fyzice . . . . .	3
<b>2 Eulerova metoda</b>	<b>5</b>
2.1 Explicitní Eulerova metoda . . . . .	5
2.1.1 Volný pád v tíhovém poli . . . . .	7
2.1.2 Tlumený harmonický oscilátor . . . . .	9
2.2 Implicitní Eulerova metoda . . . . .	11
2.2.1 Volný pád v tíhovém poli . . . . .	12
2.2.2 Tlumený harmonický oscilátor . . . . .	13
2.3 Diskuze přesnosti . . . . .	15
<b>3 Metoda Runge-Kutta čtvrtého řádu</b>	<b>18</b>
3.1 Volný pád v tíhovém poli . . . . .	20
3.2 Tlumený harmonický oscilátor . . . . .	21
3.3 Matematické kyvadlo . . . . .	24
3.4 Pohyb planet . . . . .	27
<b>4 Stručný přehled zdrojů</b>	<b>31</b>
4.1 Knihy v anglickém jazyce . . . . .	31
4.2 Knihy v českém jazyce . . . . .	31
4.3 Bakalářské a diplomové práce . . . . .	31
4.4 Studijní materiály a online zdroje . . . . .	31
<b>Závěr</b>	<b>33</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>34</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>35</b>

# Úvod

Ve světě fyziky se neobejdeme bez řešení diferenciálních rovnic; od jednoduchých, které mají přesné analytické řešení, po ty, které nedokážeme vyřešit analyticky. Numerické metody pak slouží jako nástroj řešení pro situace, kdy selhávají analytické metody.

Tato bakalářská práce se zaměřuje na základní principy vybraných numerických metod řešení obyčejných diferenciálních rovnic na konkrétních příkladech z mechaniky. Budeme se zabývat situacemi, pro které známe analytické řešení, abychom mohli posoudit přesnost numerických metod a porovnat je.

Zaměříme se na implementaci numerických metod v programu Microsoft Excel, který je známý svou jednoduchostí a rozšířeností, ačkoliv jeho možnosti jsou omezené na jednodušší metody, je to dobrá platforma pro seznámení s numerickými metodami a pro jejich pochopení.

Pro otestování vlastností jednotlivých metod využijeme dva známé fyzikální problémy. Volný pád v tíhovém poli, tlumený harmonický oscilátor. Pro metodu Runge-Kutta 4. řádu si vyřešíme ještě dva příklady navíc - matematické kyvadlo a pohyb planet, což jsou nejčastější děje řešené pomocí základních numerických metod.

Je důležité poznamenat, že tato práce nenahrazuje přednášky z numerické matematiky; proto zde není obsažena kompletní teorie, ale pouze ta část, která je relevantní pro naše účely. Určena je pro studenty předmětu Numerické metody ve výuce fyziky, který by měl být v budoucích letech na katedře didaktiky fyziky otevřen. Na závěr práce uvedeme seznam doporučené literatury pro ty, kteří chtějí hlouběji studovat numerické metody.

# 1. Úvod do diferenciálních rovnic

Diferenciální rovnice se vyskytují napříč různými vědami, ať už to je biologie, chemie či fyzika. Udávají vztah mezi neznámou funkcí a jejími derivacemi.

## 1.1 Typy diferenciálních rovnic

Základní rozdělení diferenciálních rovnic:

- **Obyčejné diferenciální rovnice (ODR)** Neznámá funkce je funkcí jedné proměnné a rovnice obsahují jen obyčejné derivace.

Obyčejnou diferenciální rovnicí  $n$ -tého řádu funkce  $y = y(t)$  nazýváme rovnicí:

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

kde  $F$  je funkce  $(n + 2)$  reálných proměnných.

- **Parciální diferenciální rovnice (PDR)** Neznámá funkce je funkcí více proměnných a rovnice obsahuje parciální derivace.

Tento text se bude zabývat výhradně obyčejnými diferenciálními rovnicemi, proto dále budeme psát jen „diferenciální rovnice“.

Další rozdělení diferenciálních rovnic je podle **řádu**, tedy podle řádu nejvyšší derivace, která je v ní obsažena.

- Diferenciální rovnice prvního řádu

$$y' = t^3 + 2$$

- Diferenciální rovnice vyšších řádů

$$y'' + y = t^2 - 3$$

## 1.2 Důležité derivace ve fyzice

- **Okamžitá rychlost**

Zavedeme polohový vektor  $\vec{r} = (x, y, z)$ , jehož počátek je ve vztažném bodě, nejčastěji tento bod volíme jako počátek souřadnic, a konec v hmotném bodě. Potom okamžitá rychlost je časovou derivací polohového vektoru:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.1)$$

Jednotlivé složky rychlosti spočteme jako derivaci příslušné souřadnice podle času:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad (1.2)$$

analogicky pro rychlosti  $v_y$  a  $v_z$ .

- **Zrychlení**

Zrychlení definujeme jako změnu rychlosti za čas. Matematický zápis je:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (1.3)$$

pokud za okamžitou rychlost  $\vec{v}$  dosadíme vztah 1.1, dostáváme, že zrychlení je druhou časovou derivací polohy:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.4)$$

- **Příklad**

**Newtonova pohybová rovnice**

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (1.5)$$

Newtonova pohybová rovnice je diferenciální rovnice druhého řádu.



## 2. Eulerova metoda

Principem numerických metod je hledání přibližných hodnot, nebudeme tudíž hledat přesný analytický předpis řešení.

**Numerické metody řešení diferenciálních rovnic prvního řádu dělíme na dvě skupiny:**

- **Jednokrokové**  
Pro výpočet nové hodnoty používáme informace z aktuálního stavu a žádné jiné.
- **Více krokové**  
Nové hodnoty zjišťujeme z více informací, například z předcházející hodnoty a hodnoty mezi nimi (např. se podíváme o polovinu kroku zpět).

Každou diferenciální rovnici vyššího řádu lze převést na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu.

Pro numerické metody je zásadní zavedení kroku, který se v mnoha literaturách značí  $h$ , ale pro naše potřeby bude lepší si krok označit  $dt$ , což ve fyzice značí malou změnu času. Numerické metody počítáme na omezeném intervalu  $[t_0; t_n]$  a to z důvodu, že nemůžeme nechat běžet výpočet na počítači nekonečně dlouho. Krok  $dt$  nám tento interval rozdělí tak, že  $t_0 < \dots < t_n$ ,  $t_n = t_0 + ndt$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , jednotlivé body tohoto rozdělení nazveme *uzlovými body*.

Základní princip si ukážeme na nejjednodušší jednokrokové numerické metodě řešení diferenciálních rovnic, kterou je Eulerova metoda.

### 2.1 Explicitní Eulerova metoda

*Explicitní Eulerova metoda* počítá nové hodnoty  $y(t_{i+1})$  z lineární aproximace v aktuálním bodě  $t_i$ . Využijeme znalosti derivace v tomto bodě.

Při odvození vzorce vyjdeme z přibližného vztahu pro derivaci:

$$y'(t_i) \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{dt} = f(t_i, y(t_i)), \quad (2.1)$$

kde krok  $dt = t_{i+1} - t_i$ . Upravením vztahu 2.1 dostaneme vzorec explicitní Eulerovy metody:

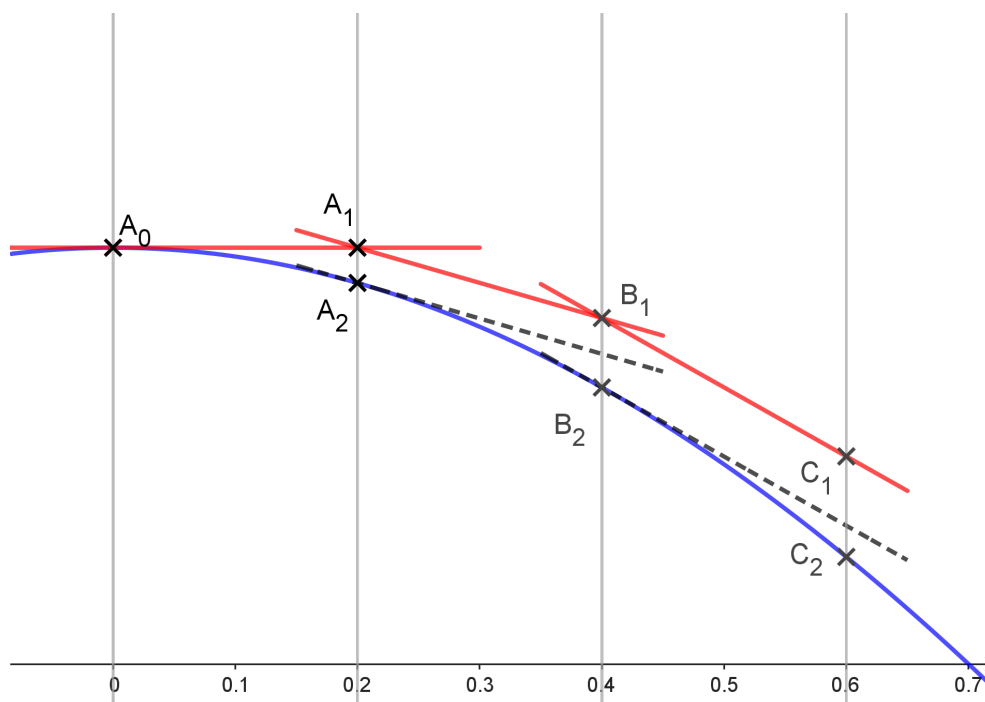
$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))dt. \quad (2.2)$$

Dále budeme značit  $y(t_i)$  jako  $y_i$ . Rovnice potom bude vypadat následovně

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)dt. \quad (2.3)$$

Tento vztah si můžeme přeložit tak, že pokud k hodnotě v aktuálním bodě  $y_i$  přičteme součin derivace v aktuálním bodě  $f(t_i, y_i)$  a délky zvoleného kroku  $dt$ , dostaneme novou hodnotu  $y_{i+1}$ .

Eulerova metoda aproximuje funkce pomocí lineární aproximace (na obrázku 2.1 je zobrazena červenými přímkami), jde o tečny, které mají rovnici  $y(t) = y(t_i) + (t - t_i)y'(t_i)$ . Na obrázku 2.1 je modře vyznačena funkce, kterou chceme aproximovat. Bod  $A_0$  je počáteční podmínka. Body s indexem 1 jsou body získané pomocí explicitní Eulerovy metody a body s indexem 2 jsou body křivky, v obrázku 2.1 jimi vedeme tečny ke křivce (čárkovaně).



Obrázek 2.1: Eulerova metoda

### Příklad - matematika

Pochopení Eulerovy metody je zásadní pro následující metody, proto si její princip ukážeme na jednoduchém matematickém příkladu, než se pustíme do fyzikálních dějů.

**Zkusme vyřešit diferenciální rovnici  $y'(t) = 3t + y(t)$  s počáteční podmínkou  $y(0) = 2$ .**

Ve vztahu 2.2 vystupuje funkce dvou proměnných  $t$  a  $y(t)$  tj. obecně  $f(t, y(t))$ . Máme předpis pro první derivaci hledané funkce, můžeme tedy použít Eulerovu metodu, resp. vztah 2.3.

$$f(t, y(t)) = 3t + y(t) \tag{2.4}$$

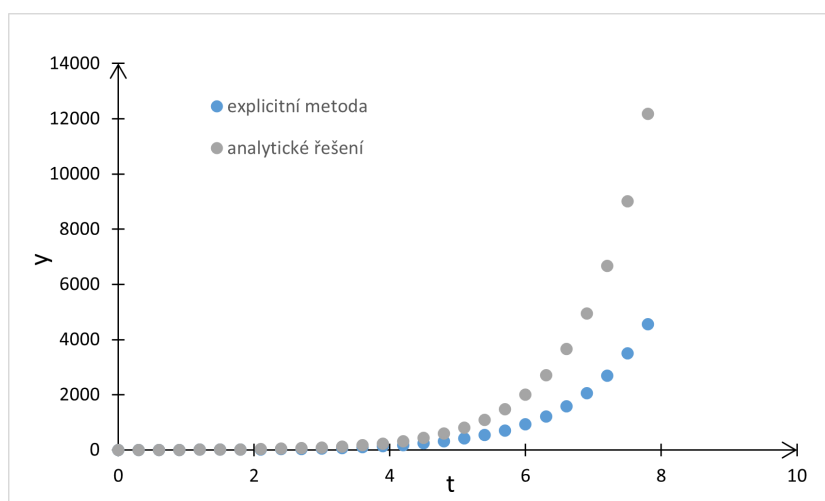
Zvolíme si délku kroku  $dt = 0,3$ . To znamená, že budeme dělat aproximaci v bodech:  $t_i \in \{0,3; 0,6; \dots\}$ .

$$\begin{aligned}
t_0 = 0 & \quad y_0 = 2 \dots \text{počáteční podmínka} \\
t_1 = 0,3 & \quad y_1 = y_0 + (3t_0 + y_0)dt = 2 + (3 \cdot 0 + 2) \cdot 0,3 = 2,6 \\
t_2 = 0,6 & \quad y_2 = y_1 + (3t_1 + y_1)dt = 2,6 + (3 \cdot 0,3 + 2,6) \cdot 0,3 = 3,65 \\
t_3 = 0,9 & \quad y_3 = y_2 + (3t_2 + y_2)dt = 3,65 + (3 \cdot 0,6 + 3,65) \cdot 0,3 = 5,285
\end{aligned}$$

A takto bychom mohli pokračovat dál pro další hodnoty  $t_i$ .

Analytické řešení je  $y(t) = 5e^t - 3t - 3$ .

Na obrázku 2.2 je graf s vynesným analytickým řešením a explicitní Eulerovou metodou.



Obrázek 2.2: Graf řešení diferenciální rovnice - explicitní Eulerova metoda

## 2.1.1 Volný pád v tíhovém poli

Hmotný bod o hmotnosti  $m = 1$  kg se pohybuje volným pádem v tíhovém poli Země, kde působí vzduch odporovou silou. Koeficient odporu vzduchu je  $k = 0,5$  kg/s a gravitační zrychlení  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>. V čase  $t = 0$  s měl bod nulovou rychlost.

Nejdříve si potřebujeme určit diferenciální rovnici, vyjdeme z Newtonovy pohybové rovnice, kde celková síla je rovna rozdílu gravitační síly a odporové síly vzduchu.

$$m\dot{v} = mg - kv \quad (2.5)$$

$$\dot{v} = g - \frac{k}{m}v \quad (2.6)$$

Dostali jsme diferenciální rovnici prvního řádu. Připomenutí: zrychlení  $a = \dot{v}$ .

K řešení tohoto příkladu využijeme Microsoft Excel. Vytvoříme si tabulku, do které zapíšeme všechny konstanty a velikost kroku  $dt = 0,7$ , který budeme používat. Na tuto tabulku se při výpočtech budeme odkazovat.

Samotný výpočet probíhá analogicky jako v předchozím příkladu. Derivace rychlosti je funkcí dvou proměnných času a rychlosti, můžeme tedy místo  $f(t_i, y_i)$  psát  $f(t_i, v_i) = \dot{v}_i = g - \frac{k}{m}v_i$  (závislost na čase se skrývá v rychlosti).

Na obrázku 2.3 je tabulka, ve které vidíme vzorce, které zadáváme do Excelu. Zrychlení si vypočítáme z diferenciální rovnice a rychlosti získáme Eulerovou metodou.

Analytické řešení této rovnice je  $v = \frac{m}{k}g(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$ .

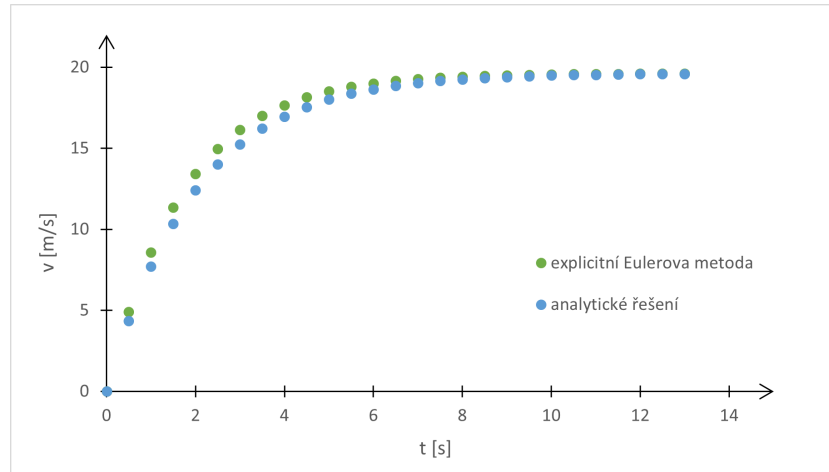
	A	B	C	D	E	F	G
	<b>Volný pád v homogenním gravitačním poli s odporovou silou</b>						
1							
2	Konstanty				Explicitní metoda		
3	k	0,5	kg/s		t [s]	v [m/s]	a [m/s <sup>2</sup> ]
4	m	1	kg	=0	0	=B55-(B53/B54)*F4	
5	g	9,81	m/s <sup>2</sup>	=E4+B56	=F4+G4*B56	=B55-(B53/B54)*F5	
6	dt	0,7	s	=E5+B56	=F5+G5*B56	=B55-(B53/B54)*F6	
7				=E6+B56	=F6+G6*B56	=B55-(B53/B54)*F7	
8				=E7+B56	=F7+G7*B56	=B55-(B53/B54)*F8	
9				=E8+B56	=F8+G8*B56	=B55-(B53/B54)*F9	
10				=E9+B56	=F9+G9*B56	=B55-(B53/B54)*F10	

Obrázek 2.3: Tabulka řešení volný pád - explicitní Eulerova metoda - vzorce

Přesné řešení a přibližné řešení z Eulerovy metody (viz obrázek 2.4) si zaneseme do grafu (viz obrázek 2.5).

Explicitní metoda			Analytické řešení	
t [s]	v [m/s]	a [m/s <sup>2</sup> ]	t [s]	v [m/s]
0,0	0,00	9,81	0,0	0,00
0,7	6,87	6,38	0,7	5,79
1,4	11,33	4,14	1,4	9,88
2,1	14,23	2,69	2,1	12,75
2,8	16,12	1,75	2,8	14,78
3,5	17,34	1,14	3,5	16,21
4,2	18,14	0,74	4,2	17,22
4,9	18,66	0,48	4,9	17,93

Obrázek 2.4: Tabulka řešení volný pád - explicitní Eulerova metoda - hodnoty



Obrázek 2.5: Graf řešení volný pád - explicitní Eulerova metoda

Chybu metody a jak ji ovlivnit, budeme diskutovat později.

## 2.1.2 Tlumený harmonický oscilátor

Složitější příklad z klasické mechaniky je například **tlumený harmonický oscilátor** (THO).

Mějme pružinu s tuhostí  $k = 50 \text{ N/m}$ , na které je zavěšené závaží o hmotnosti  $m = 1 \text{ kg}$ . Pružinu vychýlíme o  $x_0 = 1 \text{ m}$  z rovnovážné polohy a její počáteční rychlost bude  $v_0 = 0 \text{ m/s}$ . Zároveň působí tlumící síla úměrná rychlosti:  $F_{od} = -bv_x$ , kde  $b = 4$ . Budeme sledovat, jak se bude poloha závaží měnit s časem.

Pro tlumený harmonický oscilátor známe pohybovou rovnici:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2.7)$$

Máme-li diferenciální rovnici vyššího řádu, musíme ji upravit na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu. Využijeme znalosti 1.2, i toto je diferenciální rovnice, ze které dopočítáme polohu. Využijeme značení:

$$v_x = \dot{x}, \dot{v}_x = \ddot{x} \quad (2.8)$$

a pohybovou rovnici si přepíšeme s novým značením:

$$\dot{v}_x = -\frac{b}{m}v_x - \frac{k}{m}x. \quad (2.9)$$

Dostáváme diferenciální rovnici prvního řádu, z níž vypočítáme rychlost.

Diferenciální rovnici druhého řádu jsme převedli na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu:

$$\dot{x} = v_x \quad (2.10)$$

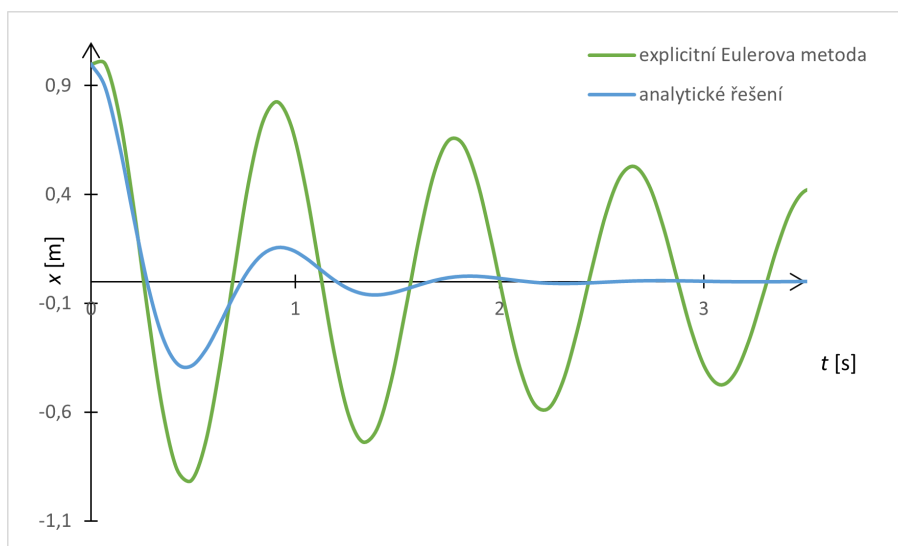
$$\dot{v}_x = -\frac{b}{m}v_x - \frac{k}{m}x \quad (2.11)$$

Pojďme se podívat, jak to zadat do tabulek. Stejně jako v minulém příkladu si vytvoříme tabulku s konstantami. Zvolíme si časový krok  $dt = 0,07$  s. Do nové tabulky budeme zapisovat veličiny čas  $t$ , polohu na ose  $x$ , rychlost  $v_x$  a zrychlení  $a_x$ . První řádek tabulky obsahuje počáteční hodnoty a zrychlení  $a_0 = -\frac{b}{m}v_0 - \frac{k}{m}x_0$  získané ze vztahu 2.9. Další řádek už budeme počítat pomocí **explicitní Eulerovy metody**. Nejprve si určíme polohu  $x_1 = x_0 + v_0dt$ , rychlost určíme analogicky  $v_1 = v_0 + a_0dt$ . Stejným způsobem určíme další řádky.

Tlumený harmonický oscilátor												
Počáteční podmínky				t [s]	x[m]	v <sub>x</sub> [m/s]	a <sub>x</sub> [m/s <sup>2</sup> ]					
Výchylka	x <sub>0</sub>	1	m	0	=C5	=C6	=-\$D\$10/\$D\$11*16-\$D\$9/\$D\$11*H6					
Rychlost	v <sub>0</sub>	0	m/s		=G6+\$D\$13	=H6+I6*\$D\$13	=I6+J6*\$D\$13	=-\$D\$10/\$D\$11*17-\$D\$9/\$D\$11*H7				
Parametry					=G7+\$D\$13	=H7+I7*\$D\$13	=I7+J7*\$D\$13	=-\$D\$10/\$D\$11*18-\$D\$9/\$D\$11*H8				
Tuhost pružiny	k	50	N/m		=G8+\$D\$13	=H8+I8*\$D\$13	=I8+J8*\$D\$13	=-\$D\$10/\$D\$11*19-\$D\$9/\$D\$11*H9				
Konstanta úměrnosti	b	4			=G9+\$D\$13	=H9+I9*\$D\$13	=I9+J9*\$D\$13	=-\$D\$10/\$D\$11*10-\$D\$9/\$D\$11*H10				
Závaží	m	1	kg		=G10+\$D\$13	=H10+I10*\$D\$13	=I10+J10*\$D\$13	=-\$D\$10/\$D\$11*11-\$D\$9/\$D\$11*H11				
					=G11+\$D\$13	=H11+I11*\$D\$13	=I11+J11*\$D\$13	=-\$D\$10/\$D\$11*12-\$D\$9/\$D\$11*H12				
Časový krok	dt	0,07	s		=G12+\$D\$13	=H12+I12*\$D\$13	=I12+J12*\$D\$13	=-\$D\$10/\$D\$11*13-\$D\$9/\$D\$11*H13				

Obrázek 2.6: Tabulka řešení THO - explicitní Eulerova metoda.

Známe analytické řešení:  $x = e^{-2t}(\cos(\sqrt{46}t) + \frac{1}{\sqrt{11.5}} \sin(\sqrt{46}t))$ , vytvoříme si tedy graf (viz obrázek 2.7).



Obrázek 2.7: Graf řešení THO - explicitní Eulerova metoda

Proč se hodnoty tak moc liší? Zvolili jsme moc velký krok, vliv velikosti kroku na řešení budeme diskutovat na konci kapitoly, zkuste krok zmenšit a sledujte, co se stane.

## 2.2 Implicitní Eulerova metoda

*Implicitní Eulerova metoda* se naruší od explicitní dává na derivaci v uzlovém bodě  $t_{i+1}$ , ptá se jak vypadá lineární aproximace v tomto čase. Odvození probíhá analogicky, vyjdeme z přibližného vztahu pro derivaci:

$$y'_{i+1} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{dt} = f(t_{i+1}, y_{i+1}), \quad (2.12)$$

Vyjádřením  $y_{i+1}$  dostaneme vzorec pro implicitní Eulerovu metodu:

$$y_{i+1} = y_i + f(t_{i+1}, y_{i+1})dt. \quad (2.13)$$

K pochopení základního principu implicitní Eulerovi metody nám poslouží stejné příklady, které jsme zpracovali pro explicitní Eulerovu metodu. Zároveň nám to umožní ukázat si rozdíl mezi implicitní a explicitní metodou.

### Příklad - matematika

Zkusme vyřešit diferenciální rovnici  $y'(t) = 3t + y(t)$  s počáteční podmínkou  $y(0) = 2$ .

Zásadní rozdíl nastane v dosazení za derivaci. U explicitní metody jsme dosazovali derivaci v minulém bodě, který jsme znali. U implicitní metody budeme dosazovat derivaci v aktuálním bodě. Tato metoda vyžaduje i nějaké úpravy navíc, právě díky dosazování aktuálního bodu, který neznáme.

V této práci si ukážeme jen příklady, které lze upravit pomocí jednoduchých matematických operací, ale můžete se dostat do situace, kdy to nepůjde tak snadno. V takovém případě musíte využít některé z metod řešení nelineárních rovnic, například Newtonovu metodu pro výpočet kořenů. Více si o těchto metodách můžete přečíst zde Jagoš (2011).

Pro první bod  $y_1$  vyjádříme vztah 2.14 s dosazenou derivací.

$$y_1 = y_0 + (3t_1 + y_1)dt. \quad (2.14)$$

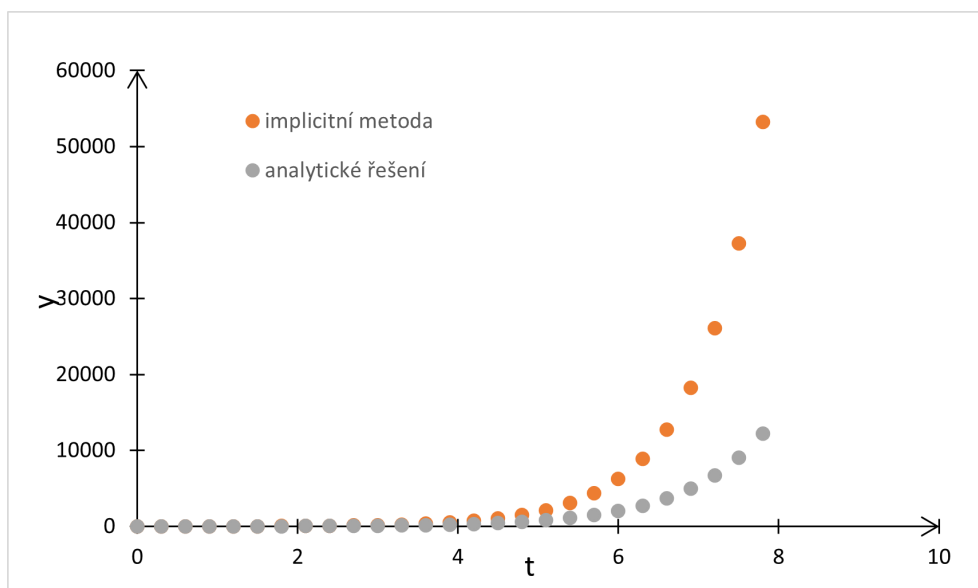
Nový bod  $y_1$  se vyskytuje i v dosazené derivaci. Pomocí matematických úprav si nový bod vyjádříme.

$$y_1 = \frac{y_0 + 3t_1 dt}{1 - dt} \quad (2.15)$$

Délku kroku zvolíme  $dt = 0,3$ .

$$\begin{aligned} t_0 = 0 & \quad y_0(0) = 2 \dots \text{počáteční podmínka} \\ t_1 = 0,3 & \quad y_1(0,3) = \frac{y_0 + 3t_1 dt}{1 - dt} = \frac{2 + 3 \cdot 0,3 \cdot 0,3}{1 - 0,3} = 3,243 \\ t_2 = 0,6 & \quad y_2(0,6) = \frac{y_1 + 3t_2 dt}{1 - dt} = \frac{3,243 + 3 \cdot 0,6 \cdot 0,3}{1 - 0,3} = 5,404 \\ t_3 = 0,9 & \quad y_3(0,9) = \frac{y_2 + 3t_3 dt}{1 - dt} = \frac{5,404 + 3 \cdot 0,9 \cdot 0,3}{1 - 0,3} = 8,877 \end{aligned}$$

Analytické řešení  $y(t) = 5e^t - 3t - 3$  a hodnoty získané z implicitní metody zaneseme do grafu 2.8



Obrázek 2.8: Graf řešení diferenciální rovnice - implicitní Eulerova metoda

## 2.2.1 Volný pád v tíhovém poli

Hmotný bod o hmotnosti  $m = 1$  kg se pohybuje volným pádem v tíhovém poli Země, kde působí vzduch odporovou silou. Koeficient odporu vzduchu je  $k = 0,5$  kg/s a gravitační zrychlení  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>. V čase  $t = 0$  s měl bod nulovou rychlost.

Protože počítáme stejnou úlohu jako v podkapitole 2.1.1 využijeme znalosti diferenciální rovnice 2.6:

$$\dot{v} = g - \frac{k}{m}v \quad (2.16)$$

Stejně jako to bylo v matematickém příkladu, musíme po dosazení do vztahu pro implicitní Eulerovu metodu vyjádřit hledanou hodnotu matematickými úpravami. Doporučuji si vyjádřit celý výpočet pro první bod, lépe se v tom zorientujete.

$$v_1 = v_0 + \left(g - \frac{k}{m}v_1\right)dt \quad (2.17)$$

$$v_1 = \frac{v_0 + gdt}{1 + \frac{k}{m}dt} \quad (2.18)$$

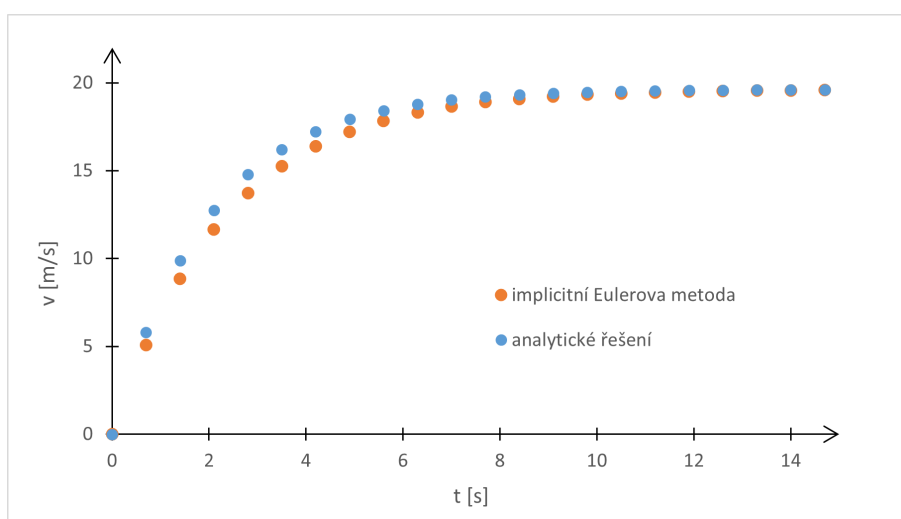
Opět si výpočet ukážeme v programu Microsoft Excel. Sestavíme si tabulku, ve které si zavedeme konstanty a pro výpočet jednotlivých bodů využijeme rovnost 2.18 (viz obrázek 2.9).

Řešení získané implicitní Eulerovou metodou a analytické řešení  $v = \frac{m}{k}g(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$  se k sobě velmi blíží (viz obrázek 2.10).



Konstanty			Implicitní metoda		
			t [s]	v [m/s]	a [m/s <sup>2</sup> ]
k	0,5	kg/s	=0	0	=B5-(B3/B4)*H4
m	1	kg	=E4+B56	=(H4+B55*B56)/(1+(B3/B4)*B56)	=B5-(B3/B4)*H5
g	9,81	m/s <sup>2</sup>	=E5+B56	=(H5+B55*B56)/(1+(B3/B4)*B56)	=B5-(B3/B4)*H6
dt	0,7	s	=E6+B56	=(H6+B55*B56)/(1+(B3/B4)*B56)	=B5-(B3/B4)*H7
			=E7+B56	=(H7+B55*B56)/(1+(B3/B4)*B56)	=B5-(B3/B4)*H8
			=E8+B56	=(H8+B55*B56)/(1+(B3/B4)*B56)	=B5-(B3/B4)*H9

Obrázek 2.9: Tabulka řešení volný pád - implicitní Eulerova metoda.



Obrázek 2.10: Graf řešení volný pád - implicitní Eulerova metoda.

## 2.2.2 Tlumený harmonický oscilátor

Mějme pružinu s tuhostí  $k = 50$  N/m, na které je zavěšené závaží o hmotnosti  $m = 1$  kg. Pružinu vychýlíme o  $x_0 = 1$  m z rovnovážné polohy a její počáteční rychlost bude  $v_0 = 0$  m/s. Zároveň působí tlumící síla úměrná rychlosti:  $F_{od} = -bv_x$ , kde  $b = 4$ . Budeme sledovat, jak se bude poloha závaží měnit s časem.

Jak jsme si řekli již u explicitní Eulerovy metody, musíme diferenciální rovnici druhého řádu rozložit na soustavu rovnic prvního řádu.

Původní diferenciální rovnice je  $\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ .

Soustava diferenciálních rovnic, kterou budeme řešit, je

$$\dot{x} = v_x, \quad (2.19)$$

$$\dot{v}_x = -\frac{b}{m}v_x - \frac{k}{m}x. \quad (2.20)$$

I u tohoto příkladu nastává problém s dosazením derivace v aktuálním bodě. Vyjádříme-li si rychlost  $v_1$ , tak zjistíme, že pro výpočet potřebujeme znát polohu  $x_1$ .

$$v_1 = v_0 + \left(-\frac{b}{m}v_1 - \frac{k}{m}x_1\right)dt. \quad (2.21)$$

Jak si s tím poradit? Využijeme znalosti druhé diferenciální rovnice 2.19 a stejně jako rychlost  $v_1$  si určíme polohu  $x_1$ .

$$x_1 = x_0 + v_1dt \quad (2.22)$$

Teď si stačí vybrat, co chceme počítat jako první. My si nejdříve vypočítáme rychlost.

Do 2.21 dosadíme 2.22 a vyjádříme si rychlost  $v_1$ .

$$v_1 = \frac{v_0 - \frac{k}{l}x_0dt}{1 + \frac{b}{m}dt + \frac{k}{m}(dt)^2} \quad (2.23)$$

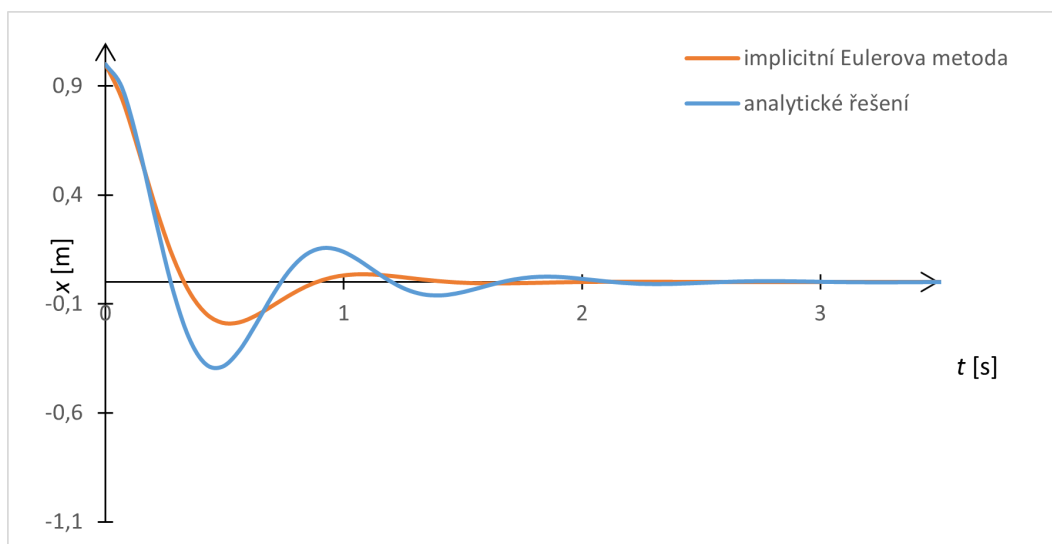
Vidíme, že jsme se zbavili závislosti na  $x_1$  a počítáme jen s konstantami a předchozími hodnotami. S takto vyjádřenou rychlostí můžeme vypočítat polohu ze vztahu 2.22, protože  $v_1$  již budeme znát.

Na obrázku 2.11 je zobrazena tabulka s několika prvními hodnotami, kdybychom stejně jako v předchozích příkladech uvedli tabulku se vzorci, byla by velmi nepřehledná. V tabulce je také uvedeno analytické řešení, můžete tedy porovnat, jak se liší námi vypočtené hodnoty od hodnot získaných z analytického řešení.

	A	B	C	D	E	F	K	L	M	N	O	P
1												
2												
3		<b>Tlumený harmonický oscilátor</b>										
4		Počáteční podmínky					Implicitní				Analytické řešení	
5		Výchylka	$x_0$	1	m		t [s]	x[m]	$v_1$ [m/s]	$a_1$ [m/s <sup>2</sup> ]	t [s]	x[m]
6		Rychlost	$v_0$	0	m/s		0,00	1,00	0,00	-50,00	0	1
7							0,07	0,84	-2,30	-32,79	0,07	0,89
8		Parametry					0,14	0,60	-3,43	-16,23	0,14	0,62
9		Tuhost pružiny	k	50	N/m		0,21	0,35	-3,63	-2,77	0,21	0,29
10		Konstanta úměrnosti	b	4			0,28	0,12	-3,17	6,50	0,28	-0,02
11		Závaží	m	1	kg		0,35	-0,04	-2,36	11,54	0,35	-0,26
12							0,42	-0,14	-1,45	12,99	0,42	-0,38
13		Časový krok	dt	0,07	s		0,49	-0,19	-0,62	11,85	0,49	-0,39
14							0,56	-0,19	0,02	9,20	0,56	-0,32

Obrázek 2.11: Tabulka řešení THO - implicitní Eulerova metoda

Hodnoty také porovnáme v grafu (viz obrázek 2.12). Opět doporučuji zkusit měnit velikost kroku  $dt$  a sledovat, co se bude s hodnotami dít.



Obrázek 2.12: Graf řešení THO - implicitní Eulerova metoda.

## 2.3 Diskuze přesnosti

Na začátku kapitoly jsme si ukázali odvození vztahu pro explicitní Eulerovu metodu pomocí přibližného vztahu pro derivaci. Toto odvození nám neříká nic o tom, jak velké chyby se dopouštíme, proto si předvedme odvození z Taylorova rozvoje funkce  $y(x)$ .

$$y(x_1) = y(x_0) + y'(x_0)dt + O(dt^2) \quad (2.24)$$

Použijeme značení  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ .

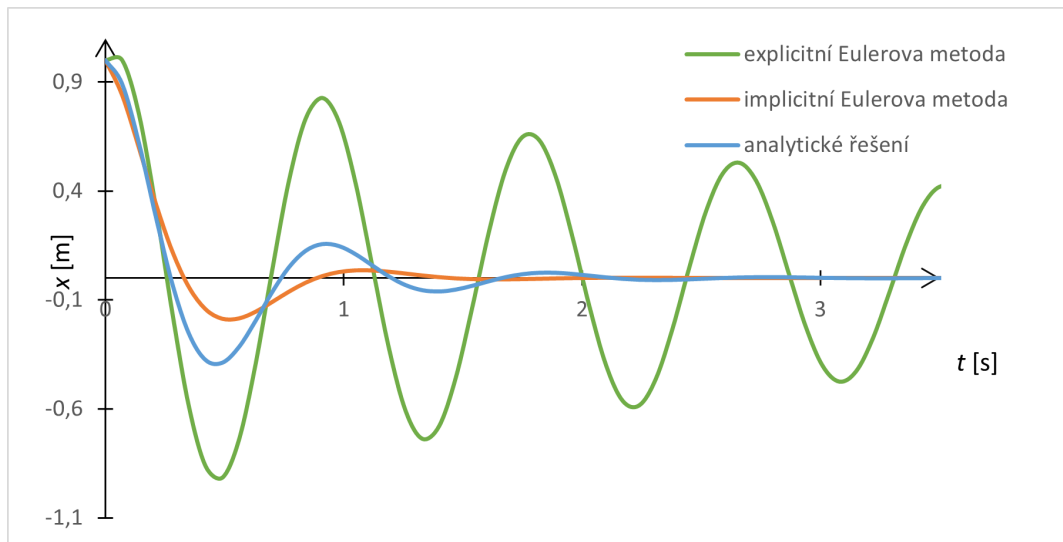
$$y(x_1) = y(x_0) + f(x_0, y_0)dt + O(dt^2) \quad (2.25)$$

Zanedbáním posledního členu dostáváme vztah pro první člen explicitní Eulerovy metody. V tomto členu se dopouštíme chyby, která je úměrná  $dt^2$ . Musíme si ale uvědomit, že každý další krok už vychází z hodnoty, která je nepřesná. Lze tedy říct, že se chyba s počtem kroků zvětšuje. Chyba pro  $n$  členů je úměrná velikosti kroku  $dt$ .

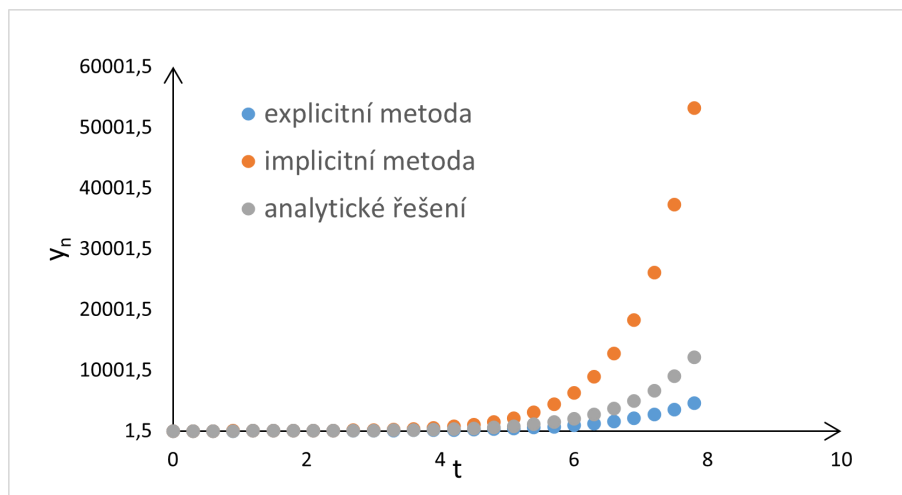
Chyba implicitní Eulerovy metody je úměrná  $dt$  stejně jako explicitní Eulerova metoda. Obě tyto metody vycházejí z Taylorova rozvoje se stejným zanedbáním.

I přesto, že obě metody mají chybu stejného řádu, nemusí nám vždy dát stejně přesné výsledky. Například v úloze pro tlumený harmonický oscilátor je pro stejný krok implicitní metoda přesnější (viz obrázek 2.13).

Explicitní metoda naopak lépe vychází pro matematický příklad (viz obrázek 2.14).



Obrázek 2.13: Graf řešení THO - porovnání metod

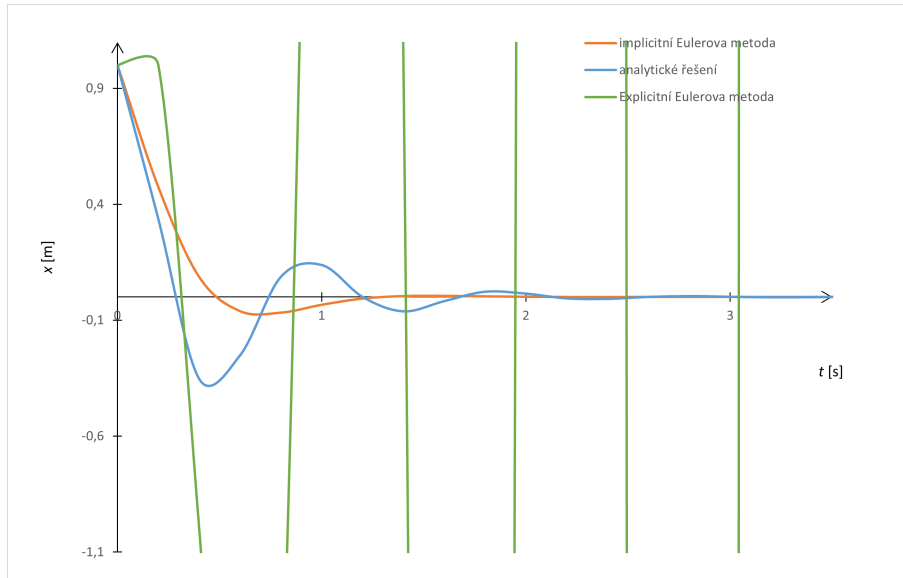


Obrázek 2.14: Graf řešení diferenciální rovnice  $y'(t) = 3t + y(t)$  - porovnání metod

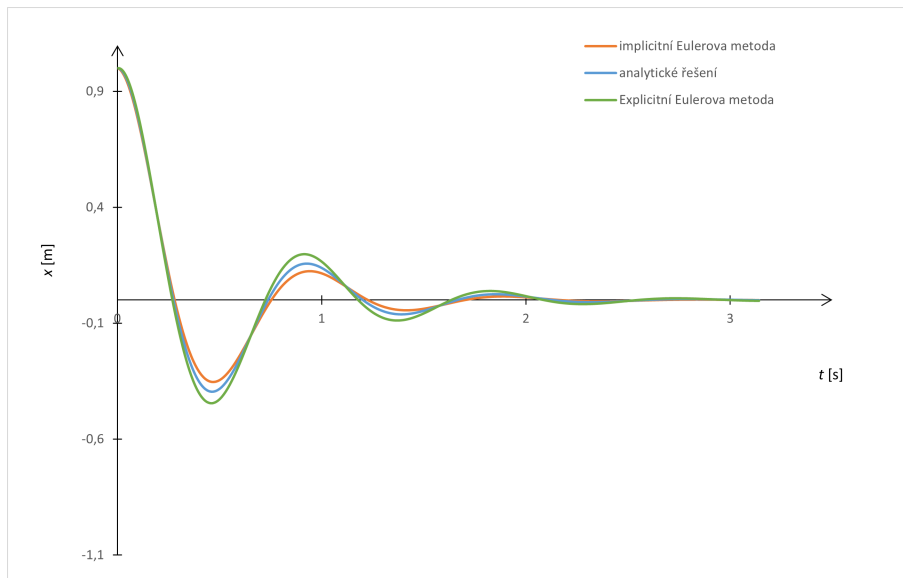
Obecně platí, že implicitní metoda poskytuje oproti explicitní metodě větší stabilitu řešení.

Velikost chyby lze ovlivnit volbou velikosti kroku. Čím větší krok zvolíme, tím větší chyby se dopouštíme. V našem textu jsme volili krok  $dt = 0,07$ , na následujících obrázcích 2.15 a 2.16 je zobrazený graf tlumeného harmonického oscilátoru pro krok  $dt = 0,2$  a  $dt = 0,01$ . Lze na nich hezky porovnat, že chyba opravdu záleží na velikosti kroku.

Rozkmitání u explicitní Eulerovy metody je díky nestabilitě, implicitní Eulerova metoda je obecně více stabilní. Více o stabilitě metod se můžete dozvědět v bakalářské práci Vaňková (2023).



Obrázek 2.15: Graf řešení THO - Eulerova metoda krok 0,2



Obrázek 2.16: Graf řešení THO - Eulerova metoda krok 0,01

# 3. Metoda Runge-Kutta čtvrtého řádu

Runge-Kutta čtvrtého řádu (zkráceně RK4) je numerická metoda řešení obyčejných diferenciálních rovnic, která je známa svou přesností a stabilitou. Narozdíl od Eulerovy metody počítá RK4 se čtyřmi mezikroky, které následně kombinuje do váženého průměru k určení konečného výsledku pro daný krok.

Numerická metoda RK4 k odhadu hodnoty  $y_{i+1}$  využívá následující rekurentní vzorce:

$$k_1 = f(t_i, y_i) \tag{3.1}$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{dt}{2}, y_i + k_1 \frac{dt}{2}\right) \tag{3.2}$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{dt}{2}, y_i + k_2 \frac{dt}{2}\right) \tag{3.3}$$

$$k_4 = f(t_i + dt, y_i + k_3 dt) \tag{3.4}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dt}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{3.5}$$

kde  $dt$  je zvolený krok a  $k_1, k_2, k_3$  a  $k_4$  jsou mezikroky. Funkci  $f(t_i, y_i) = y'(t_i)$  jsme zaváděli už u Eulerovy metody.

Mezikroky nám ukazují, jak se funkce chová v dané části kroku,  $k_1$  je odhad sklonu na začátku kroku,  $k_2$  a  $k_3$  je odhad sklonu uprostřed kroku a  $k_4$  je odhad sklonu na konci kroku.

Chceme-li ovlivnit přesnost metody, musíme zvolit vhodný krok, čím menší krok zvolíme, tím přesnější hodnoty dostaneme. Podobně tomu je i u Eulerovy metody, ta ale vyžaduje mnohem menší krok než RK4.

## Příklad - matematika

Vzorce pro RK4 vypadají složitě, ale my si na matematické úloze ukážeme, že to není tak složité, jen narozdíl od Eulerovy metody RK4 vyžaduje více mezikroků.

**Zkusme vyřešit diferenciální rovnici  $y'(t) = 3t + y(t)$  s počáteční podmínkou  $y(0) = 2$ .**

Připomeňme si, co znamená  $f(t_i, y_i)$ . Pro tento příklad je  $f(t_i, y_i) = 3t_i + y_i$ . Zvolme krok délky  $dt = 0,3$ .

Vztah pro  $k_1$  nám říká, že máme do zadané diferenciální rovnice zadat hodnoty  $t$  a  $y$  z minulého kroku.

Pro  $y_1$  musíme zadávat počáteční podmínky,  $k_1$  bude vypadat takto:

$$k_1 = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

Ve výpočtu  $k_2$  bude  $t = t_i + \frac{dt}{2}$  a  $y(t) = y_i + k_1 \frac{dt}{2}$ .

$$k_2 = (3 \cdot (0 + \frac{0,3}{2}) + (2 + 2 \cdot \frac{0,3}{2})) = 2,75$$

Další hodnoty dopočítáme analogicky.

$$k_3 = (3 \cdot (0 + \frac{0,3}{2}) + (2 + 4,75 \cdot \frac{0,3}{2})) = 2,86$$

$$k_4 = (3 \cdot (0 + \frac{0,3}{2}) + (2 + 5,4375 \cdot 0,3)) = 3,76$$

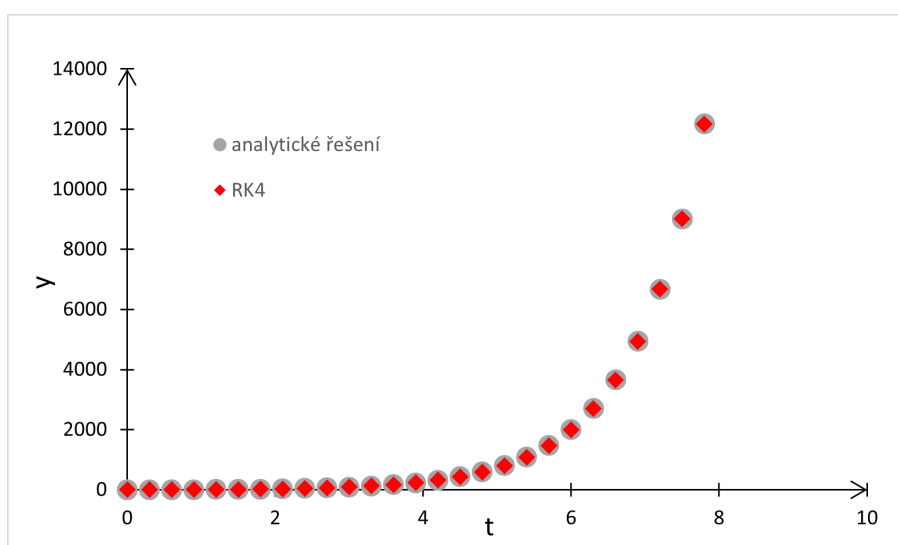
$$y_1 = 2 + \frac{0,3}{6}(2 + 2 \cdot 2,75 + 2 \cdot 2,86 + 3,76) = 2,85$$

Protože by bylo zdlouhavé vypisovat více výpočtů, uvedeme prvních sedm hodnot na obrázku 3.1.

RK4 matematická úloha					
t	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	y
0	x	x	x	x	2
0,3	2,00	2,75	2,86	3,76	2,85
0,6	3,75	4,76	4,91	6,12	4,31
0,9	6,11	7,48	7,68	9,31	6,60
1,2	9,30	11,14	11,42	13,62	10,00
1,5	13,60	16,09	16,46	19,44	14,91
1,8	19,41	22,77	23,27	27,29	21,85

Obrázek 3.1: Tabulka řešení diferenciální rovnice - RK4

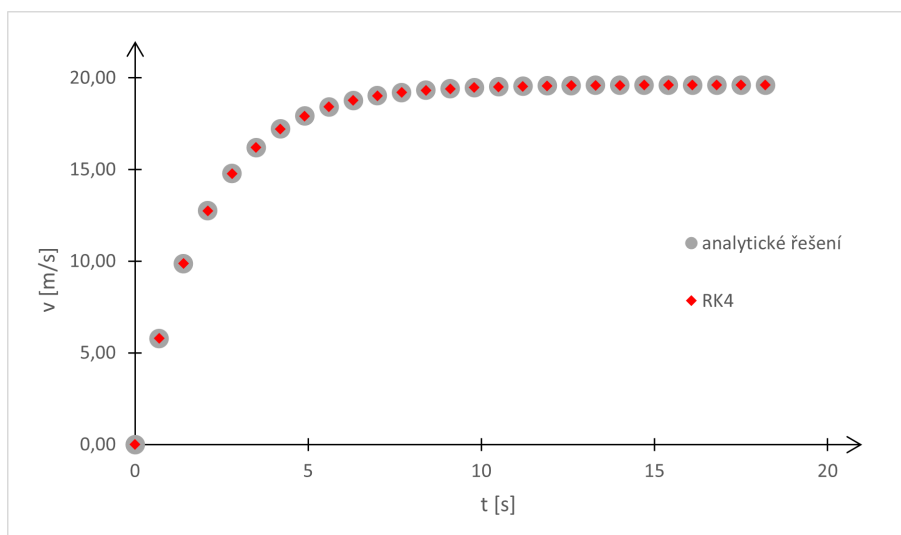
Na obrázku 3.2 je graf porovnávající námi získané přibližné řešení diferenciální rovnice a její analytické řešení. Jak si můžeme všimnout, jde o velmi přesnou metodu.



Obrázek 3.2: Graf řešení diferenciální rovnice - RK4







Obrázek 3.4: Graf řešení VP - RK4

## 3.2 Tlumený harmonický oscilátor

Mějme pružinu s tuhostí  $k = 50$  N/m, na které je zavěšené závaží o hmotnosti  $m = 1$  kg. Pružinu vychýlíme o  $x_0 = 1$  m z rovnovážné polohy a její počáteční rychlost bude  $v_0 = 0$  m/s. Zároveň působí tlumící síla úměrná rychlosti:  $F_{od} = -bv_x$ , kde  $b = 4$ . Budeme sledovat, jak se bude poloha závaží měnit s časem.

Řešíme pohyb na ose  $x$ , označíme si  $v_x = v$ , později by se nám indexy pletly.

Metoda RK4 počítá opět s diferenciální rovnicí prvního řádu. Pro tlumený harmonický oscilátor máme soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu, kterou budeme řešit.

$$\dot{x} = v, \quad (3.7)$$

$$\dot{v} = -\frac{b}{m}v - \frac{k}{m}x. \quad (3.8)$$

Zkusme si napsat, jak z těchto rovnic získáme  $k_1$ , budou tato  $k_1$  stejná? Ne, musíme je rozlišit indexy, nejlépe  $k_{1x}$  a  $k_{1v}$  podle toho, kde jsme  $k$  získali.

$$k_{1x} = v_0 = 0$$

$$k_{1v} = -\frac{b}{m}v_0 - \frac{k}{m}x_0 = -\frac{4}{1} \cdot 0 - \frac{50}{1} \cdot 1 = -50$$

Tady není problém, známe vše, co k výpočtu potřebujeme. Problém nastává v  $k_2$  u obou rovnic. My si musíme uvědomit, že nemůžeme míchat rychlost a polohu dohromady. Musíme je rozlišovat, když počítáme s rychlostí, musíme také zároveň počítat s  $k_{1v}$ , které jsme z rychlosti získali, proto jsme si  $k_{1x}$  a  $k_{1v}$  rozlišili.

Na kolika proměnných máme rovnice závislé? První rovnice je závislá na čase  $t$  a rychlosti  $v$  ( $\dot{x} = v = f(t, v)$ ), druhá rovnice je navíc závislá na poloze  $x$  ( $\dot{v} = -\frac{b}{m}v - \frac{k}{m}x = g(t, v, x)$ ).

Vztahy pro  $k_{2x}$  a  $k_{2v}$ , kde krok zvolíme  $dt = 0,07$  s, budou vypadat následovně:

$$k_{2x} = f\left(t_i + \frac{dt}{2}, v_i + k_{1v} \frac{dt}{2}\right) = v_0 + k_{1v} \frac{dt}{2} = 0 - 50 \cdot \frac{0,07}{2} = -1,75$$

$$k_{2v} = g\left(t_i + \frac{dt}{2}, v_i + k_{1v} \frac{dt}{2}, x_i + k_{1x} \frac{dt}{2}\right) = -\frac{b}{m}(v_0 + k_{1v} \frac{dt}{2}) - \frac{k}{m}(x_0 + k_{1x} \frac{dt}{2}) =$$

$$-\frac{4}{1}(0 - 50 \cdot \frac{0,07}{2}) - \frac{50}{1}(1 + 0 \cdot \frac{0,07}{2}) = -43$$

Stejným způsobem budeme počítat  $k_3$  a  $k_4$ .

$$k_{3x} = f\left(t_i + \frac{dt}{2}, v_i + k_{2v} \frac{dt}{2}\right) = v_0 + k_{2v} \frac{dt}{2} = 0 - 43 \cdot \frac{0,07}{2} = -1,51$$

$$k_{3v} = g\left(t_i + \frac{dt}{2}, v_i + k_{2v} \frac{dt}{2}, x_i + k_{2x} \frac{dt}{2}\right) = -\frac{b}{m}(v_0 + k_{2v} \frac{dt}{2}) - \frac{k}{m}(x_0 + k_{2x} \frac{dt}{2}) =$$

$$-\frac{4}{1}(0 - 43 \cdot \frac{0,07}{2}) - \frac{50}{1}(1 - 1,75 \cdot \frac{0,07}{2}) = -40,92$$

$$k_{4x} = f(t_i + dt, v_i + k_{3v} dt) = v_0 + k_{3v} dt = 0 - 40,92 \cdot 0,07 = -2,86$$

$$k_{4v} = g(t_i + dt, v_i + k_{3v} dt, x_i + k_{3x} dt) = -\frac{b}{m}(v_0 + k_{3v} dt) - \frac{k}{m}(x_0 + k_{3x} dt) =$$

$$-\frac{4}{1}(0 - 40,92 \cdot 0,07) - \frac{50}{1}(1 - 1,51 \cdot 0,07) = -41,64$$

Máme vypočítané všechny mezivýpočty, teď nám zbývá dopočítat  $x_1$  a  $v_1$ . Opět si dejte pozor, ať nemícháte dohromady polohu a rychlost.

$$x_1 = x_0 + \frac{dt}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}) = 1 + \frac{0,07}{6}(0 - 2 \cdot 1,75 - 2 \cdot 1,51 - 2,86) = 0,89$$

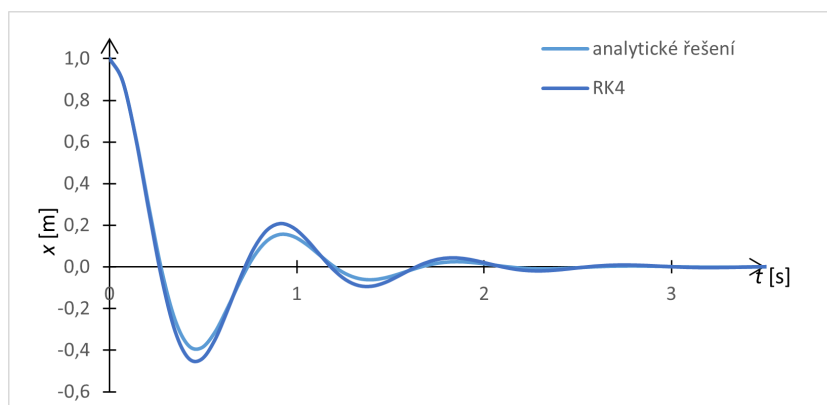
$$v_1 = v_0 + \frac{dt}{6}(k_{1v} + 2k_{2v} + 2k_{3v} + k_{4v}) = 0 + \frac{0,07}{6}(-50 - 2 \cdot 43 - 2 \cdot 40,92 - 41,64) = -3,02$$

Tímto způsobem vytvoříme tabulku. Ukážeme si, jak vychází prvních 7 hodnot (viz obrázek 3.5), pro porovnání do tabulky zaneseme také analytické řešení.

Analytické řešení		Runge-Kutta 4. řádu										
t [s]	x [m]	t	k <sub>1x</sub>	k <sub>2x</sub>	k <sub>3x</sub>	k <sub>4x</sub>	x [m]	k <sub>1v</sub>	k <sub>2v</sub>	k <sub>3v</sub>	k <sub>4v</sub>	v [m/s]
0	1,0000	0,00	x	x	x	x	1 x	x	x	x	x	0
0,07	0,8904	0,07	0,0000	-1,7500	-1,5050	-2,8642	0,8906	-50,0000	-43,0000	-40,9175	-41,6378	-3,0272
0,14	0,6211	0,14	-3,0272	-4,1620	-3,8177	-4,5656	0,6159	-32,4230	-22,5862	-21,9774	-29,3461	-4,7876
0,21	0,2876	0,21	-4,7876	-5,1951	-4,8448	-4,9502	0,2680	-11,6424	-1,6341	-2,3221	-11,3173	-5,1478
0,28	-0,0247	0,28	-5,1478	-4,8961	-4,6160	-4,1935	-0,0629	7,1920	15,1938	13,6330	5,2834	-4,3296
0,35	-0,2556	0,35	-4,3296	-3,6133	-3,4484	-2,7011	-0,3097	20,4659	25,1775	23,2644	17,2089	-2,7598
0,42	-0,3765	0,42	-2,7598	-1,8314	-1,7923	-0,9495	-0,4376	26,5265	27,6424	25,8615	22,9059	-0,9347

Obrázek 3.5: Tabulka řešení THO - RK4

Ukážeme si také, jak vypadá graf porovnávající analytické řešení a naše řešení (viz obrázek 3.6).

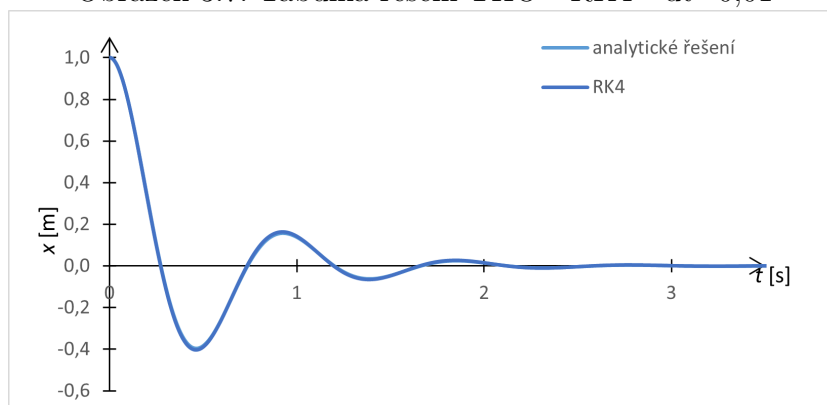


Obrázek 3.6: Graf řešení THO - RK4

Lze si všimnout, že jde o první příklad, kde se nám vypočtené hodnoty liší od teoretického řešení. Vyplyvá z toho, že průběh tlumeného harmonického oscilátoru se příliš rychle mění a metoda RK4 nestíhá tak rychle reagovat. Pro zpřesnění zvolme menší krok například  $dt = 0,01$  s.

Analytické řešení		Runge-Kutta 4. řádu											
t [s]	x[m]	t	$k_{1x}$	$k_{2x}$	$k_{3x}$	$k_{4x}$	x [m]	$k_{1v}$	$k_{2v}$	$k_{3v}$	$k_{4v}$	v [m/s]	
0	1,0000	0,00	x	x	x	x	1	x	x	x	x	0	
0,01	0,9975	0,01	0,0000	-0,2500	-0,2450	-0,4896	0,9975	-50,0000	-49,0000	-48,9575	-48,9596	-0,4915	
0,02	0,9903	0,02	-0,4915	-0,7310	-0,7256	-0,9594	0,9903	-47,9109	-46,8298	-46,7915	-46,9750	-0,9617	
0,03	0,9785	0,03	-0,9617	-1,1900	-1,1842	-1,4065	0,9784	-45,6663	-44,5126	-44,4786	-44,7768	-1,4090	
0,04	0,9623	0,04	-1,4090	-1,6255	-1,6194	-1,8294	0,9622	-43,2838	-42,0659	-42,0361	-42,4431	-1,8323	
0,05	0,9421	0,05	-1,8323	-2,0362	-2,0298	-2,2271	0,9419	-40,7802	-39,5066	-39,4811	-39,9906	-2,2302	
0,06	0,9180	0,06	-2,2302	-2,4210	-2,4144	-2,5985	0,9177	-38,1727	-36,8517	-36,8304	-37,4361	-2,6018	

Obrázek 3.7: Tabulka řešení THO - RK4 -  $dt=0,01$

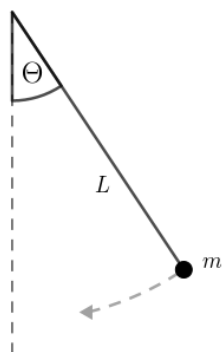


Obrázek 3.8: Graf řešení THO - RK4 -  $dt=0,01$

Když se teď podíváme na upravenou tabulku (viz obrázek 3.7) a upravený graf (viz obrázek 3.8), vidíme, že dostáváme velmi přesné hodnoty a grafy se nám překrývají.

### 3.3 Matematické kyvadlo

Matematické kyvadlo je model fyzikálního kyvadla, kde zanedbáváme rozměry zavěšeného tělesa (jde o hmotný bod) a hmotnost závěsu.



Obrázek 3.9: Matematické kyvadlo

Mějme kyvadlo, na kterém je závaží zavěšeno na závěsu o délce  $L = 1$  m. Na začátku měření je kyvadlo v klidu a je vychýlené o úhel  $\Theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$  z rovnovážné polohy.

Diferenciální rovnici matematického kyvadla lze odvodit dvěma způsoby - přes Newtonovu pohybovou rovnici, nebo přes zákon zachování mechanické energie. Obě odvození jsou hezky zpracována v bakalářské práci Kučerová (2010).

Máme nelineární diferenciální rovnici druhého řádu (proměnná je zde uvnitř goniometrické funkce)

$$\ddot{\Theta} + \sqrt{\frac{g}{L}} \sin \Theta = 0. \quad (3.9)$$

Chceme-li použít metodu RK4, musíme si tuto rovnici upravit na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu.

Úhel  $\Theta$  určuje polohu hmotného bodu. Derivace úhlu  $\Theta$  podle času je rovna úhlové rychlosti  $\dot{\Theta} = \omega$ . Druhá derivace  $\ddot{\Theta} = \dot{\omega}$ .

Diferenciální rovnici 3.9 upravíme podle zmíněného značení a dostaneme soustavu diferenciálních rovnic.

$$\dot{\Theta} = \omega \quad (3.10)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{g}{L} \sin \Theta \quad (3.11)$$

Dostáváme podobnou úlohu, jako byl tlumený harmonický oscilátor.

Víme:

$$L = 1 \text{ m}$$

$$\Theta_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\omega_0 = 0 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Už víme, že si musíme dát pozor, abychom nemíchali hrušky s jablky. Rozebereme si, jak vypočítat první hodnoty.

$$k_{1\Theta} = \omega_0 = 0$$

$$k_{1\omega} = -\frac{g}{L} \sin \Theta_0 = -\frac{9,81}{1} \sin \frac{\pi}{4} = -6,937$$

$$k_{2\Theta} = \omega_0 + k_{1\omega} \frac{dt}{2} = \frac{\pi}{4} - 6,937 \cdot \frac{0,05}{2} = -0,173$$

$$k_{2\omega} = -\frac{g}{L} \sin (\Theta_0 + k_{1\Theta} \frac{dt}{2}) = -\frac{9,81}{1} \sin (\frac{\pi}{4} - 0 \cdot \frac{0,05}{2}) = -6,937$$

$$k_{3\Theta} = \omega_0 + k_{2\omega} \frac{dt}{2} = \frac{\pi}{4} - 6,937 \cdot \frac{0,05}{2} = -0,173$$

$$k_{3\omega} = -\frac{g}{L} \sin (\Theta_0 + k_{2\Theta} \frac{dt}{2}) = -\frac{9,81}{1} \sin (\frac{\pi}{4} - 0,173 \cdot \frac{0,05}{2}) = -6,907$$

$$k_{4\Theta} = \omega_0 + k_{3\omega} dt = \frac{\pi}{4} - 6,907 \cdot 0,05 = -0,345$$

$$k_{4\omega} = -\frac{g}{L} \sin (\Theta_0 + k_{3\Theta} dt) = -\frac{9,81}{1} \sin (\frac{\pi}{4} - 0,173 \cdot 0,05) = -6,876$$

$$\Theta_1 = \Theta_0 + \frac{dt}{6} (k_{1\Theta} + 2k_{2\Theta} + 2k_{3\Theta} + k_{4\Theta}) = \frac{\pi}{4} + \frac{0,05}{6} (0 - 2 \cdot 0,173 - 2 \cdot 0,173 - 0,345) = 0,777$$

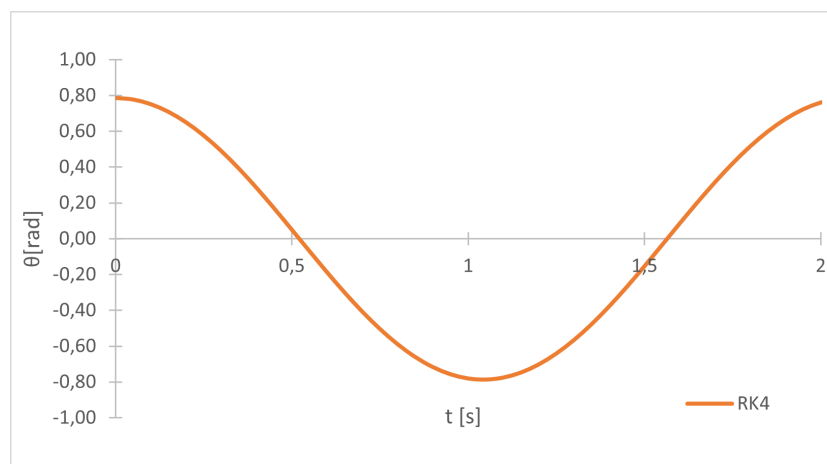
$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{dt}{6} (k_{1\omega} + 2k_{2\omega} + 2k_{3\omega} + k_{4\omega}) = 0 + \frac{0,05}{6} (-6,937 - 2 \cdot 6,937 - 2 \cdot 6,907 - 6,876) = -0,346$$

Další hodnoty se vypočítají analogicky.

Runge-Kutta 4. řádu										
t	$k_{1\Theta}$	$k_{2\Theta}$	$k_{3\Theta}$	$k_{4\Theta}$	$\Theta_i$	$k_{1\omega}$	$k_{2\omega}$	$k_{3\omega}$	$k_{4\omega}$	$\omega_i$
0	x	x	x	x	0,7854	x	x	x	x	0
0,05	0,0000	-0,1734	-0,1734	-0,3453	0,7767	-6,9367	-6,9367	-6,9066	-6,8763	-0,3458
0,1	-0,3458	-0,5177	-0,5162	-0,6851	0,7509	-6,8764	-6,8157	-6,7853	-6,6935	-0,6856
0,15	-0,6856	-0,8529	-0,8498	-1,0125	0,7084	-6,6934	-6,5695	-6,5390	-6,3828	-1,0130
0,2	-1,0130	-1,1726	-1,1678	-1,3211	0,6499	-6,3825	-6,1918	-6,1614	-5,9368	-1,3216
0,25	-1,3216	-1,4700	-1,4635	-1,6039	0,5767	-5,9363	-5,6751	-5,6453	-5,3495	-1,6043
0,3	-1,6043	-1,7380	-1,7297	-1,8536	0,4900	-5,3487	-5,0146	-4,9864	-4,6183	-1,8540
0,35	-1,8540	-1,9695	-1,9593	-2,0633	0,3919	-4,6172	-4,2112	-4,1856	-3,7485	-2,0637

Obrázek 3.10: Tabulka řešení matematického kyvadla

Do grafu si zaneseme závislost úhlu  $\Theta$  na čase (viz obrázek 3.11).



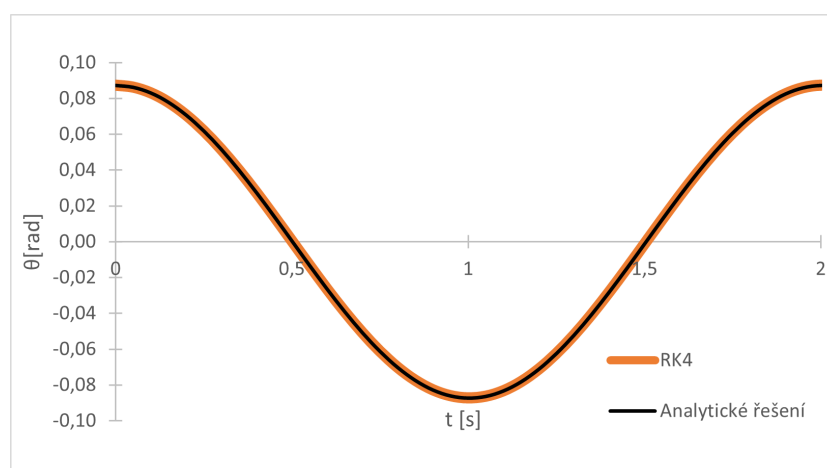
Obrázek 3.11: Graf řešení matematického kyvadla

Jak bychom si mohli ověřit, že jsme tabulku sestavili správně? Můžeme zkusit, zda funguje pro malé kmity ( $\Theta_0 = 5^\circ$ ). Nelineární diferenciální rovnici 3.9 upravíme na lineární diferenciální rovnici. Platí, že pro malé úhly je  $\sin \Theta \approx \Theta$ . Pro diferenciální rovnici  $\ddot{\Theta} + \sqrt{\frac{g}{L}}\Theta = 0$  je analytické řešení  $\Theta_i = \Theta_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{L}}t_i)$ .

Vzorce v tabulce nebudeme nijak měnit. Jediné, co se změní, je počáteční výchylka.

Runge-Kutta 4. řádu											Analytické řešení	
t	$k_{1\theta}$	$k_{2\theta}$	$k_{3\theta}$	$k_{4\theta}$	$\theta_i$	$k_{1\omega}$	$k_{2\omega}$	$k_{3\omega}$	$k_{4\omega}$	$\omega_i$	t	$\theta_i$
0	x	x	x	x	0,0873	x	x	x	x	0	0	0,0873
0,05	0,0000	-0,0214	-0,0214	-0,0425	0,0862	-0,8550	-0,8550	-0,8498	-0,8446	-0,0426	0,05	0,0862
0,1	-0,0426	-0,0637	-0,0634	-0,0840	0,0830	-0,8446	-0,8342	-0,8290	-0,8136	-0,0841	0,1	0,0830
0,15	-0,0841	-0,1045	-0,1039	-0,1235	0,0778	-0,8136	-0,7930	-0,7880	-0,7627	-0,1236	0,15	0,0778
0,2	-0,1236	-0,1427	-0,1419	-0,1600	0,0707	-0,7627	-0,7324	-0,7278	-0,6933	-0,1601	0,2	0,0707
0,25	-0,1601	-0,1774	-0,1764	-0,1926	0,0619	-0,6932	-0,6540	-0,6497	-0,6068	-0,1926	0,25	0,0619
0,3	-0,1926	-0,2078	-0,2066	-0,2204	0,0515	-0,6067	-0,5595	-0,5558	-0,5055	-0,2205	0,3	0,0515
0,35	-0,2205	-0,2331	-0,2318	-0,2429	0,0399	-0,5053	-0,4513	-0,4482	-0,3917	-0,2430	0,35	0,0399

Obrázek 3.12: Tabulka řešení malé kmity



Obrázek 3.13: Graf řešení malé kmity

Z tabulky (viz obrázek 3.12) a grafu (viz obrázek 3.13) lze vidět, že hodnoty získané analyticky a z metody RK4 se liší až na pátém desetinném místě. Což je velmi dobrá přesnost a náš výpočet tedy funguje.

Také jsme si tím ověřili, že když pracujeme s malými výchylkami, můžeme využít aproximace  $\sin \Theta \approx \Theta$ .

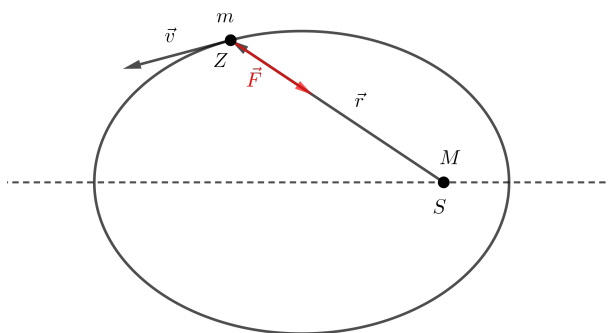
## 3.4 Pohyb planet

Pohyb planet je typický příklad, na který se aplikují numerické metody.

Nejprve je potřeba si odvodit pohybové rovnice. Na obrázku 3.14 je zobrazena situace, kterou chceme popsat. Počítáme pohyb planety okolo Slunce. Slunce o hmotnosti  $M$  umístíme do počátku, má tedy souřadnice  $S[0; 0]$  a kolem Slunce se bude pohybovat Země o hmotnosti  $m$ , jejíž souřadnice jsou  $Z[x; y]$ .

Polohový vektor má souřadnice  $\vec{r} = Z - S = (x; y)$  a velikost  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Z Newtonova gravitačního zákona známe vztah pro sílu  $\vec{F}$ , kterou Slunce působí



Obrázek 3.14: Pohyb planet

na planetu:

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (3.12)$$

Budeme řešit Newtonovu pohybovou rovnici 1.5, do které dosadíme sílu 3.12

$$m\ddot{\vec{r}} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (3.13)$$

Vztah 3.13 můžeme ještě upravit:

$$\ddot{\vec{r}} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r}. \quad (3.14)$$

Dostali jsme diferenciální rovnici druhého řádu, analogicky s úlohou tluměného harmonického oscilátoru převedeme diferenciální rovnici pohybu planet na soustavu diferenciálních rovnic prvních řádů.

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} \quad (3.15)$$

$$\dot{\vec{v}} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r} \quad (3.16)$$

V rovnicích se vyskytují vektory, ve finále budeme mít dvakrát víc rovnic. Rovnice si vyjádříme pro jednotlivé složky a rovnou dosadíme velikost polohového vektoru  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$$\dot{x} = v_x \quad (3.17)$$

$$\dot{y} = v_y \quad (3.18)$$

$$v_x = -G \frac{M}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} x \quad (3.19)$$

$$v_y = -G \frac{M}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} y \quad (3.20)$$

Důležité je si správně zvolit počáteční podmínky, příklad budeme počítat v astronomických jednotkách (chceme používat menší a „hezčí“ čísla), konstanty, které budeme používat, naleznete v tabulkách Mikulčák a kol. (2019).

Souřadnice Země na začátku pohybu jsou  $Z[1;0]$ , volíme takto, protože vzdálenost Země od Slunce je 1 au.

Součin gravitační konstanty a hmotnosti Slunce je  $GM = (\frac{2\pi a}{T})^2 a$ , kde  $a$  je délka hlavní poloosy,  $a_Z = 1$  au,  $T$  je oběžná doba planety,  $T_Z = 1$  rok, součin  $GM = (\frac{2\pi \cdot 1}{1})^2 \cdot 1 = 4\pi^2 \frac{\text{au}^3}{\text{rok}^2}$ .

Počáteční rychlost má složky  $v_{x0} = 0 \frac{\text{au}}{\text{rok}}$  a  $v_{y0} = \sqrt{\frac{GM}{a_Z}} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{1}} = 2\pi \frac{\text{au}}{\text{rok}}$ .

Zvolíme délku kroku  $dt = 0,01$  roku a ukážeme si, jak vypočítat první hodnoty  $x_1, y_1, v_{x1}$  a  $v_{y1}$ .

$$k_{1x} = v_{x0} = 0$$

$$k_{1y} = v_{y0} = 2\pi$$

$$k_{1vx} = -\frac{GM}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} x_0 = -\frac{4\pi^2}{(1^2 + 0^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 1 = -39,4784$$

$$k_{1vy} = -\frac{GM}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} y_0 = -\frac{4\pi^2}{(1^2 + 0^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 0 = 0$$

$$k_{2x} = v_{x0} + k_{1vx} \frac{dt}{2} = 0 - 39,4784 \cdot \frac{0,01}{2} = -0,1974$$

$$k_{2y} = v_{y0} + k_{1vy} \frac{dt}{2} = 2\pi + 0 \cdot \frac{0,01}{2} = 2\pi$$

$$k_{2vx} = -\frac{GM}{((x_0 + k_{1x} \frac{dt}{2})^2 + (y_0 + k_{1y} \frac{dt}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} (x_0 + k_{1x} \frac{dt}{2})$$

$$k_{2vx} = -\frac{4\pi^2}{((1 + 0 \cdot \frac{0,01}{2})^2 + (0 + 2\pi \cdot \frac{0,01}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (1 + 0 \cdot \frac{0,01}{2}) = -39,4200$$

$$k_{2vy} = -\frac{GM}{((x_0 + k_{1x} \frac{dt}{2})^2 + (y_0 + k_{1y} \frac{dt}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} (y_0 + k_{1y} \frac{dt}{2})$$

$$k_{2vy} = -\frac{4\pi^2}{((1 + 0 \cdot \frac{0,01}{2})^2 + (0 + 2\pi \cdot \frac{0,01}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (0 + 2\pi \cdot \frac{0,01}{2}) = -1,2384$$

$$k_{3x} = v_{x0} + k_{2vx} \frac{dt}{2} = 0 - 39,4200 \cdot \frac{0,01}{2} = -0,1971$$

$$k_{3y} = v_{y0} + k_{2vy} \frac{dt}{2} = 2\pi - 1,2384 \cdot \frac{0,01}{2} = 6,2770$$

$$k_{3vx} = -\frac{GM}{((x_0 + k_{2x} \frac{dt}{2})^2 + (y_0 + k_{2y} \frac{dt}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} (x_0 + k_{2x} \frac{dt}{2})$$

$$k_{3vx} = -\frac{4\pi^2}{((1 - 0,1974 \cdot \frac{0,01}{2})^2 + (0 + 2\pi \cdot \frac{0,01}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (1 - 0,1974 \cdot \frac{0,01}{2}) = -39,4979$$

$$k_{3vy} = -\frac{GM}{((x_0 + k_{2x} \frac{dt}{2})^2 + (y_0 + k_{2y} \frac{dt}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} (y_0 + k_{2y} \frac{dt}{2})$$



$$k_{3vy} = -\frac{4\pi^2}{((1-0,1974 \cdot \frac{0,01}{2})^2 + (0+2\pi \cdot \frac{0,01}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (0 + 2\pi \cdot \frac{0,01}{2}) = -1,2421$$

$$k_{4x} = v_{x0} + k_{3vx}dt = 0 - 39,4979 \cdot 0,01 = -0,3950$$

$$k_{4y} = v_{y0} + k_{3vy}dt = 2\pi - 1,2421 \cdot 0,01 = 6,2708$$

$$k_{4vx} = -\frac{GM}{((x_0+k_{3x}dt)^2+(y_0+k_{3y}dt)^2)^{\frac{3}{2}}}(x_0+k_{3x}dt)$$

$$k_{4vx} = -\frac{4\pi^2}{((1-0,1971 \cdot 0,01)^2+(0+6,2770 \cdot 0,01)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (1 - 0,1971 \cdot 0,01) = -39,4005$$

$$k_{4vy} = -\frac{GM}{((x_0+k_{3x}dt)^2+(y_0+k_{3y}dt)^2)^{\frac{3}{2}}}(y_0+k_{3y}dt)$$

$$k_{4vy} = -\frac{4\pi^2}{((1-0,1971 \cdot \frac{0,01}{2})^2+(0+6,2770 \cdot \frac{0,01}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (0 + 6,2770 \cdot \frac{0,01}{2}) = -2,4780$$

$$x_1 = x_0 + \frac{dt}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x})$$

$$x_1 = 1 + \frac{0,01}{6}(0 - 2 \cdot 0,1974 - 0,1971 - 0,3950) = 0,9980$$

$$y_1 = y_0 + \frac{dt}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y}) = 0 + \frac{0,01}{6}(2\pi + 2 \cdot 2\pi + 2 \cdot 6,2770 + 6,2708) = 0,0628$$

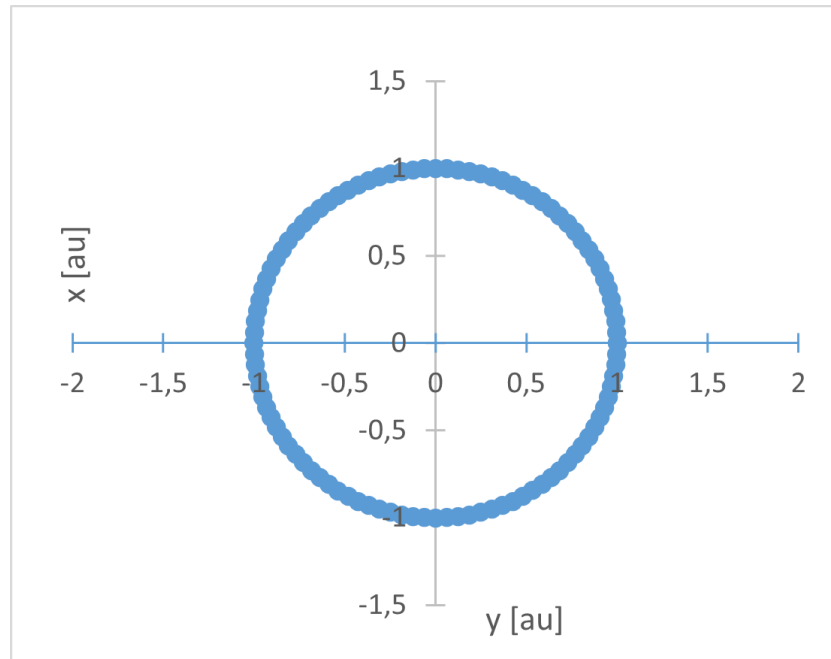
$$v_{x1} = v_{x0} + \frac{dt}{6}(k_{1vx} + 2k_{2vx} + 2k_{3vx} + k_{4vx})$$

$$v_{x1} = 0 + \frac{0,01}{6}(-39,4784 - 2 \cdot 39,4200 - 2 \cdot 39,4976 - 39,4005) = -0,3945$$

$$v_{y1} = v_{y0} + \frac{dt}{6}(k_{1vy} + 2k_{2vy} + 2k_{3vy} + k_{4vy})$$

$$v_{y1} = 2\pi + \frac{0,01}{6}(0 - 2 \cdot 1,2384 - 2 \cdot 1,2421 - 2,4780) = 6,2708$$

Analogicky vypočítáme další hodnoty. Pro pohyb planet si ukážeme jen graf (viz. obrázek 3.15).



Obrázek 3.15: Graf řešení pohybu planet - Země

Očekávali bychom podle 1. Keplerova zákona, že nám vyjde elipsa, ale Země má velmi malou excentricitu ( $e = 0,0167$ ), proto nám na grafu vyšla prakticky kružnice. Pokud bychom chtěli, aby nám vyšla viditelná elipsa, museli bychom zvolit planetu, která má větší excentricitu, například Merkur ( $e = 0,2056$ ).

Počáteční podmínky:

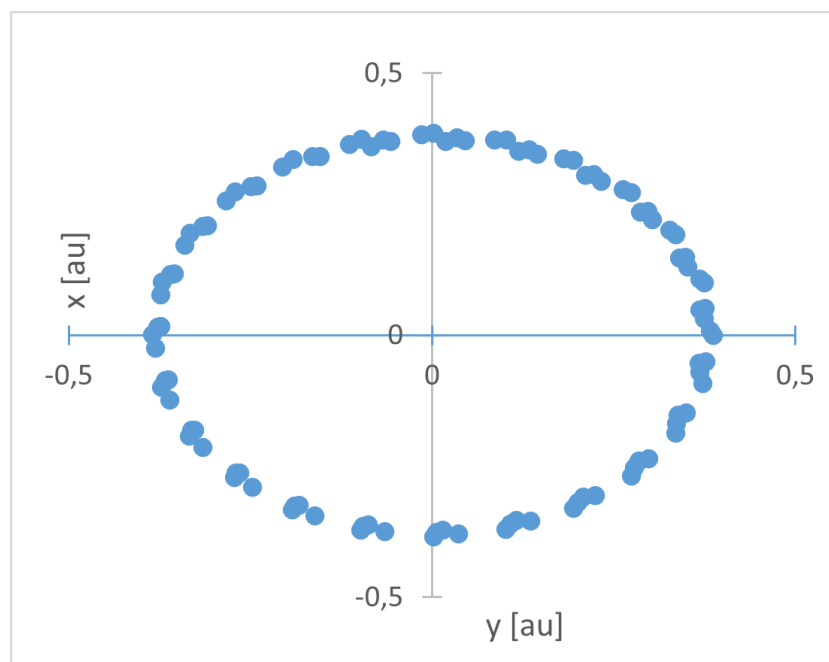
$$x_0 = a_M = 0,3871 \text{ au}$$

$$y_0 = 0 \text{ au}$$

$$v_{x0} = 0 \frac{\text{au}}{\text{rok}}$$

$$v_{y0} = \sqrt{\frac{GM}{a_M}} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{0,3871}} = 10,0922 \frac{\text{au}}{\text{rok}}$$

Upravením počátečních hodnot, dostáváme řešení pro oběh Merkuru kolem Slunce (viz. obrázek 3.16).



Obrázek 3.16: Graf řešení pohybu planet - Merkur

Pokud bychom chtěli, aby kružnice byla vysázena hustěji, museli bychom zmenšit krok, protože Merkur má kratší dobu oběhu ( $T_M = 0,241$  roku) než Země. Na obrázku 3.16 je zobrazeno více oběhů Merkuru kolem Slunce.

## 4. Stručný přehled zdrojů

Pro ty, kteří se chtějí do tajů numerické matematiky ponořit hlouběji, přikládám přehled zdrojů, které jsou ke studiu užitečné.

### 4.1 Knihy v anglickém jazyce

Pro studenty, kterým nevadí studium v anglickém jazyce, existuje mnoho kvalitních zdrojů, doporučuji například:

**Introduction to Numerical Methods in Differential Equations** Holmes (2007) Poskytuje přehled numerických metod, které jsou aplikovány na fyzikální problémy.

**Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing** Press a kol. (2007) Tato kniha je jedním z nejpopulárnějších zdrojů pro numerické výpočty a obsahuje rozsáhlou sbírku algoritmů a kód v různých programovacích jazycích. Zajímají-li vás jiná prostředí, kde numerické metody programovat, stojí tato kniha za přečtení.

### 4.2 Knihy v českém jazyce

**Přehled užití matematiky** Rektorys a Spolupracovníci (1968) Tato kniha poskytuje komplexní přehled o aplikované matematice včetně numerických metod a je široce používána na českých univerzitách.

**Základy numerické matematiky** Ralston (1973) Tato kniha je základním textem pro studium numerické matematiky, který pokrývá teoretické základy a praktické aplikace numerických metod.

### 4.3 Bakalářské a diplomové práce

**Elektronická učebnice matematických metod fyziky – diferenciální rovnice** Tarabíková (2021) Tato bakalářská práce poskytuje vhled do diferenciálních rovnic.

**Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic** Monhartová (2011) Tato práce zpracovává přehled numerických metod z teoretického hlediska. Najdete tady podrobněji zpracovaný přehled chyb numerických metod.

**Numerické řešení tuhých problémů** Vaňková (2023) V této diplomové práci najdete podrobný rozbor základních numerických metod a zároveň je zde rozebrána stabilita jednotlivých metod.

### 4.4 Studijní materiály a online zdroje

**NUMERICKÉ METODY I** Vondrák a Pospíšil (2011) Jde o interaktivní materiál, ve kterém jsou zpracované numerické metody. Jsou zde přehledná od-

vození, odvození chyb a navíc na konci každé kapitoly také najdete test k ověření získaných znalostí.

Ke studiu vám může posloužit i **Wikipedia** Wikimedia Foundation (2001). Pokud se k ní uchýlíte, doporučuji použít anglickou verzi, která bývá přesnější a rozsáhlejší.

# Závěr

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře s vybranými numerickými metodami řešení obyčejných diferenciálních rovnic na fyzikálních příkladech zpracovaných v programu Microsoft Excel. Z jednokrokových metod jsme popsali Eulerovu metodu explicitní i implicitní a z více krokových metod jsme rozebrali metodu Runge-Kutta 4.řádu.

Implementaci numerických metod jsme si ukázali na volném pádu v tíhovém poli a tlumeném harmonickém oscilátoru. Pro metodu Runge-Kutta 4. řádu jsme navíc zpracovali matematické kyvadlo a pohyb planet. Každou úlohu jsme zpracovali v programu Microsoft Excel.

Tato práce vznikla jako studijní text předmětu „Numerické metody ve výuce fyziky“. Také bych byla ráda, kdyby tato práce byla přínosem pro každého, kdo se začíná zajímat o numerické metody.

# Seznam použité literatury

- HOLMES, M. H. (2007). *Introduction to Numerical Methods in Differential Equations*. Springer. ISBN 978-0387308913.
- JAGOŠ, L. (2011). Numerické metody řešení nelineárních rovnic. URL [https://is.muni.cz/th/g224u/Lukas\\_Jagos\\_bakalarska\\_prace.pdf](https://is.muni.cz/th/g224u/Lukas_Jagos_bakalarska_prace.pdf). Dostupné také z: [https://is.muni.cz/th/g224u/Lukas\\_Jagos\\_bakalarska\\_prace.pdf](https://is.muni.cz/th/g224u/Lukas_Jagos_bakalarska_prace.pdf).
- KUČEROVÁ, B. (2010). Matematické kyvadlo. Dostupné také z: [https://www.vut.cz/www\\_base/zav\\_prace\\_soubor\\_verejne.php?file\\_id=28939](https://www.vut.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=28939).
- MIKULČÁK, J., CHARVÁT, J., MACHÁČEK, M. a ZEMÁNEK, F. (2019). *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy*. Prometheus, Praha, 2 edition. ISBN 978-807-1964-773.
- MONHARTOVÁ, P. (2011). Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Dostupné také z: [https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/50191/BPTX\\_2009\\_1\\_\\_0\\_236684\\_0\\_42702.pdf?sequence=1&is](https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/50191/BPTX_2009_1__0_236684_0_42702.pdf?sequence=1&is).
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. a FLANNERY, B. P. (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, third edition. ISBN 978-0-521-88068-8.
- RALSTON, A. (1973). *Základy numerické matematiky*. Academia, Praha. ISBN 21-116-73.
- REKTORYS, K. a SPOLUPRACOVNÍCI (1968). *Přehled užité matematiky*. SNTL, Praha, 2. opravné vydání edition. ISBN 04-002-68.
- TARABÍKOVÁ, A. (2021). Elektronická učebnice matematických metod fyziky – diferenciální rovnice. URL <https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/152544/130315814.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Dostupné také z: <https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/152544/130315814.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- VAŇKOVÁ, K. (2023). Numerické řešení tuhých problémů. URL [https://is.muni.cz/th/q312x/Numericke\\_reseni\\_tuhych\\_problemu.pdf](https://is.muni.cz/th/q312x/Numericke_reseni_tuhych_problemu.pdf). Dostupné také z: [https://is.muni.cz/th/q312x/Numericke\\_reseni\\_tuhych\\_problemu.pdf](https://is.muni.cz/th/q312x/Numericke_reseni_tuhych_problemu.pdf).
- VONDRÁK, V. a POSPÍŠIL, L. (2011). *Numerické metody I*. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni, Ostrava. URL [https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke\\_metody.pdf](https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke_metody.pdf). Dostupné také z: [https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke\\_metody.pdf](https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke_metody.pdf).
- WIKIMEDIA FOUNDATION (2001). Numerical methods for ordinary differential equations. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical\\_methods\\_for\\_ordinary\\_differential\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_methods_for_ordinary_differential_equations). Citováno 16. července 2024.

# Seznam obrázků

2.1	Eulerova metoda . . . . .	6
2.2	Graf řešení diferenciální rovnice - explicitní Eulerova metoda . . .	7
2.3	Tabulka řešení volný pád - explicitní Eulerova metoda - vzorce . .	8
2.4	Tabulka řešení volný pád - explicitní Eulerova metoda - hodnoty .	8
2.5	Graf řešení volný pád - explicitní Eulerova metoda . . . . .	9
2.6	Tabulka řešení THO - explicitní Eulerova metoda. . . . .	10
2.7	Graf řešení THO - explicitní Eulerova metoda . . . . .	10
2.8	Graf řešení diferenciální rovnice - implicitní Eulerova metoda . . .	12
2.9	Tabulka řešení volný pád - implicitní Eulerova metoda. . . . .	13
2.10	Graf řešení volný pád - implicitní Eulerova metoda. . . . .	13
2.11	Tabulka řešení THO - implicitní Eulerova metoda . . . . .	14
2.12	Graf řešení THO - implicitní Eulerova metoda. . . . .	15
2.13	Graf řešení THO - porovnání metod . . . . .	16
2.14	Graf řešení diferenciální rovnice $y'(t) = 3t + y(t)$ - porovnání metod	16
2.15	Graf řešení THO - Eulerova metoda krok 0,2 . . . . .	17
2.16	Graf řešení THO - Eulerova metoda krok 0,01 . . . . .	17
3.1	Tabulka řešení diferenciální rovnice - RK4 . . . . .	19
3.2	Graf řešení diferenciální rovnice - RK4 . . . . .	19
3.3	Tabulka řešení VP - RK4 . . . . .	20
3.4	Graf řešení VP - RK4 . . . . .	21
3.5	Tabulka řešení THO - RK4 . . . . .	22
3.6	Graf řešení THO - RK4 . . . . .	23
3.7	Tabulka řešení THO - RK4 - dt=0,01 . . . . .	23
3.8	Graf řešení THO - RK4 - dt=0,01 . . . . .	23
3.9	Matematické kyvadlo . . . . .	24
3.10	Tabulka řešení matematického kyvadla . . . . .	25
3.11	Graf řešení matematického kyvadla . . . . .	25
3.12	Tabulka řešení malé kmity . . . . .	26
3.13	Graf řešení malé kmity . . . . .	26
3.14	Pohyb planet . . . . .	27
3.15	Graf řešení pohybu planet - Země . . . . .	29
3.16	Graf řešení pohybu planet - Merkur . . . . .	30