Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Petr Kříž

Využití počítače ve výuce matematiky na střední škole

Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jan Kašpar, CSc.
Studijní program: Fyzika
Studijní obor: Učitelství pro střední školy, matematika-fyzika

Název práce: Využití počítače ve výuce matematiky na střední škole
Autor: Petr Kříž
Katedra: Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jan Kašpar, CSc.
e-mail vedoucího: kaspar@karlin.mff.cuni.cz
Abstrakt:

Cílem této diplomové práce bylo vytvořit internetové stránky jako kvalitní učební materiál věnovaný tématu „výroková logika a teorie množin". Obsah stránek je rozdělen do tří hlavních kapitol.

V první kapitole „Výroky" se student může seznámit s výroky, výrokovými formulemi a formami, s různými typy důkazů matematických vět a ověřit si své znalosti na interaktivních příkladech.

Druhá kapitola „Množiny"se věnuje teorii množin a Vennovým diagramům, stejně jako první kapitola obsahuje výklad látky i interaktivní příklady.

Poslední třetí kapitola „Slovní úlohy" se zabývá řešením zajímavých slovních úloh pomocí znalostí získaných z předchozích kapitol.

Tištěná podoba stránek je součástí tohoto svazku, elektronická podoba je umístěna na přiloženém CD.

Klíčová slova: logika, množina, matematika, výuka

Title: Use computers at teaching of mathematics at secondary school
Author: Petr Kříž
Department: Department of didactics of mathematics
Supervisor: RNDr. Jan Kašpar, CSc.
Supervisor's e-mail address: kaspar@karlin.mff.cuni.cz
Abstract:

The intent of this diploma work was to form web sites like duality didactic material with thema "Proposition's logic and theory of sets". The contents of sites is divided into three main chapters.

The first chapter "Propositions" can acquaint student with propositions, proposition's formulas and forms, with different types of proof of mathematicssentences. Farther student can find check his knowledge in interactive examples.

Second chapter "Sets" is about Theory of sets and Venn's diagrams. It include explanation of matter and interactive examples like first chapter.

Last third chapter "Verbal assignment" deal with solutions of interesting verbal assignments through knowledge from first and second chapter.

The printed form of sites is in this volume, electronic form was stored in insert CD.

Keywords: logic, set, mathematics, teaching

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu diplomové práce RNDr. Janu Kašparovi, CSc., za vstřícné jednání a cenné připomínky a RNDr. Jarmile Robové, CSc. Za pomoc při shánění podkladů.

Prohlašuji, že jsem svou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 10. 12. 2007 Petr Kříž

Kříž

Obsah

Úvod

Výroková logika a teorie množin je partie matematiky, která dostává oproti ostatním partiím poměrně málo prostoru při výuce na střední škole. Vzhledem k tomu, že prostupuje celou středoškolskou matematikou, ji považuji za její základní stavební kámen, který musí být pevný, jinak nemá smysl stavět dál. Současné středoškolské učebnice se ji věnují většinou okrajově a proto jsem se rozhodl vytvořit obsáhlý materiál pro výuku výrokové logiky a teorie množin na střední škole.

Vzhledem k tomu, že dostupnost internetu na středních školách se stále zvyšuje, rozhodl jsem se, že vytvořím internetové stránky, což bude mít výhodu v tom, že bude učební materiál snadno přístupný, ale také v tom, že interaktivnost stránek umožní studentovi aktivní kontakt s danou látkou. Počítač tak může být dobrým pomocníkem hlavně při samostudiu.

Svou koncepcí zapadá tato práce mezi diplomové práce Lucie Šibravové (2003), Miroslava Pihery (2004), Marie Motyčkové (2006), Lenky Šilarové (2006), Kateřiny Dobiášové (2007), Jany Farské (2007), Jaroslava Richtera (2007) a patří tedy do souboru prací, které vznikají na naší fakultě s úmyslem poskytnout žákům středních škol kvalitní a zajímavý učební materiál.

Doufám, že se úkol podařilo splnit a že tato diplomová práce dobře poslouží zájemcům o dané téma.

Vytvořené internetové stránky

Na následujících listech se nachází tištěná podoba vytvořených internetových stránek. Jejich elektronickou podobu lze nalézt na přiloženém CD.

VÝROKOVÁ LOGIKA A TEORIE MNOŽIN

Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Petr Kříž

Využití počítače ve výuce výrokové logiky a teorie množin na střední škole

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jan Kašpar, CSc.

Studijní program: Učitelství pro střední školy, matematika-fyzika

O smajlících

Příklady na tomto webu jsou vytvořeny tak, aby se student sám mohl aktivně zapojit do jejich řešení a ověřovat si svoje schopnosti. Ke komunikaci mezi studentem a počítačem slouží několik typů smajlíků. Abyste se v nich lépe orientovali, uvedu k nim na této stránce vysvětlivky.

Některé příklady mají formu testu, tzn. že po kliknutí myší na jednu z variant se objeví buď smajlík s nápisem **Špatně!** jako symbol nesprávné odpovědi,

nebo smajlík s nápisem *Správně!*, který signalizuje, že odpověď je správná.

Spolu s ním se někdy objeví také zamyšlený smajlík s nápisem **Postup:**, na kterého když klikneme, tak se zobrazí postup řešení příslušného příkladu. Tento zamyšlený smajlík může mít také v jiných příkladech nápis **Řešení:**, nebo jiný, nebo nápis mít nemusí, jeho význam však zůstává stejný, postupně nám odhaluje řešení.

Konečně tleskající smajlík, který se objevuje vždy na konci řešení příkladu nám dává najevo, že je příklad vyřešen.

Příklad pro ilustraci:
4 zranění vojáci se potřebují dostat v noci přes řeku. Vede přes ni jen uzonká lávka, po které mohou jít nejvýše 2 současně. Každý je jinak zraněn, a tak jeden přejde lávku za 1 minutu, další za 2, další za 5 a poslední za 7 minut. Bohužel mají jen jednu svítilnu, kterou nezbytně potřebují k přechodu lávky, a proto se s ní vždycky musí jeden z druhého břehu vrátit, aby mohl jít další. Za jakou nejkratší možnou dobu se dostanou všichni 4 vojáci na druhý břeh řeky? (Na pořadí, ve kterém vojáci lávku přejdou, nezáleží)

a) 20 minut **Špatně!**

b) 18 minut **Špatně!**

c) 16 minut **Špatně!**

d) 14 minut *Správně!* **Postup:** Označme si vojáky příznačně "1", "2", "5" a "7". Je zřejmé, že bude vhodné, aby "1" šel s "2", aby ho "5" nebo "7" příliš nezdržoval. Nechme tedy přejít "1" a "2" na druhý břeh (uplynou 2 minuty). "1" se vrátí se svítilnou (+1 minuta), předá ji vojákům "5" a "7" a ti půjdou spolu na druhý břeh (+7 minut). Tam předají svítilnu vojákovi "2" a ten se vrátí zpět za vojákem "1" (+2 minuty) a půjdou spolu zpátky na druhý břeh (+2 minuty). Nyní jsou na druhém břehu všichni 4 vojáci a toho jsme chtěli docílit. (Dohromady uplynuly 2 minuty + 1 minuta + 7 minut + 2 minuty + 2 minuty = 14 minut).

Tento postup není jediný možný, můžete vymyslet další.

Výrok

Základním pojmem matematické logiky je výrok.

Definice:
Výrokem rozumíme každou oznamovací větu (nebo nějaké tvrzení), která může být buď pravdivá, nebo nepravdivá.

Poznámka:
Je-li výrok pravdivý, říkáme též, že výrok platí a přiřazujeme mu pravdivostní hodnotu "pravda", je-li výrok nepravdivý, říkáme, že výrok neplatí a přiřazujeme mu pravdivostní hodnotu nepravda. Výroky, o nichž nevíme, zda jsou pravdivé, či nikoliv, avšak principiálně jedna z těchto možností musí nastat, nazýváme hypotézy (domněnky).

Příklad:
Určete podle definice, které z následujících zápisů jsou zápisy výroků, případně určete pravdivostní hodnotu výroku:

1) Praha je hlavní město České republiky.
2) Praha je hlavní město USA.
3) Řešte nerovnici!
4) Je každé prvočíslo liché?
5) Ve vesmíru existují rozumné bytosti i mimo Sluneční soustavu.
6) $5 + 2 < 6$
7) $a^2 + b^2 = c^2$
8) Součet obsahů dvou čtverců o stranách velikosti odvěsen pravoúhlého trojúhelníka je roven obsahu čtverce o straně délky přepony daného trojúhelníka.
9) $10 + 12$
10) V roce 2050 lidé přestanou těžit ropu.
11) Obsah každého kruhu závisí na jeho poloměru.

Řešení:

1) Praha je hlavní město České republiky.
   - je to oznamovací věta, která je navíc pravdivá, jedná se tedy o výrok s pravdivostní hodnotou pravda.
2) Praha je hlavní město USA.
   - je to oznamovací věta, která je však nepravdivá, jedná se tedy o výrok s pravdivostní hodnotou nepravda.
3) Řešte nerovnici!
   - nejedná se o větu oznamovací, nýbrž rozkazovací, nemůže se tedy jednat o výrok.
4) Je každé prvočíslo liché?
   - toto je věta tázací, není to výrok.
5) Ve vesmíru existují rozumné bytosti i mimo Sluneční soustavu.
   - oznamovací věta, o které v tuto chvíli nevíme, jestli je pravdivá či nikoliv, principielně však jedna z těchto dvou možností nastat musí, jedná se tedy o hypotézu.
6) $5 + 2 < 6$
   - toto je zápis nepravdivé oznamovací věty: „Pět plus dva je menší než šest." Je to zápis nepravdivého výroku.
7) $a^2 + b^2 = c^2$
   - v tomto případě by se za určitých okolností mohlo jednat o výrok, ale z toho, co nám tento zápis říká, nedokážeme tyto okolnosti rozpoznat, a proto ho nepovažujeme za výrok.
8) Součet obsahů dvou čtverců o stranách velikosti odvěsen pravoúhlého trojúhelníka je roven obsahu čtverce o straně délky přepony daného trojúhelníka.
   Pythagorova věta je pravdivý výrok.

9) 10 + 12
- toto není zápis věty, nejedná se o výrok.

10) V roce 2050 lidé přestanou těžit ropu.
- oznamovací věta, u níž se můžeme pouze domnívat o její pravdivosti, je to tedy domněnka (hypotéza).

11) Obsah každého kruhu závisí na jeho poloměru.
- oznamovací věta, která vždy platí, jedná se tedy o pravdivý výrok.

Příklady 1

Příklad 1.1:

Určete, na kterých z následujících řádků jsou zapsány výroky, případně určete, zda jsou pravdivé, nepravdivé, nebo hypotézy:
(Klikněte myší na možnost, o které si myslíte, že je pravdivá)

1) Olympijský triatlon se skládá z plavání, cyklistiky a běhu.

   a) Pravdivý výrok *Správně!* **Postup:** Oznamovací věta, která splňuje předpoklad definice výroku, jedná se tedy o výrok. Zasvěcení vědí, že o pravdivý.

   b) Nepravdivý výrok **Špatně!**

   c) Hypotéza **Špatně!**

   d) Není výrok **Špatně!**

2) Plavání, cyklistika, běh.

   a) Pravdivý výrok **Špatně!**

   b) Nepravdivý výrok **Špatně!**

   c) Hypotéza **Špatně!**

   d) Není výrok *Správně!* **Postup:** Není oznamovací věta ani žádné tvrzení, nejedná se tedy o výrok.

3) První olympijský triatlon se konal v roce 1642.

   a) Pravdivý výrok **Špatně!**

   b) Nepravdivý výrok *Správně!* **Postup:** Toto je oznamovací věta, jedná se tedy o výrok. O nepravdivý výrok.

   c) Hypotéza **Špatně!**

   d) Není výrok **Špatně!**

4) Kdo vyhrál?

   a) Pravdivý výrok **Špatně!**

   b) Nepravdivý výrok **Špatně!**

   c) Hypotéza **Špatně!**

   d) Není výrok *Správně!* **Postup:** Toto není oznamovací věta, nejedná se tedy o výrok.

5) V Plzni každý rok na Vánoce sněží.

a) Pravdivý výrok **Špatně!**

b) Nepravdivý výrok *Správně!* **Postup:** Oznamovací věta, která zřejmě není pravdivá, jde o nepravdivý výrok.

c) Hypotéza **Špatně!**

d) Není výrok **Špatně!**

6) Koleda, koleda, Štěpáne, co to neseš ve džbáně?

a) Pravdivý výrok **Špatně!**

b) Nepravdivý výrok **Špatně!**

c) Hypotéza **Špatně!**

d) Není výrok *Správně!* **Postup:** Toto není oznamovací věta, nejedná se tedy o výrok.

7) Hlavní město Ruska je Petrohrad.

a) Pravdivý výrok **Špatně!**

b) Nepravdivý výrok *Správně!* **Postup:** Oznamovací věta, která zřejmě není pravdivá, jde o nepravdivý výrok.

c) Hypotéza **Špatně!**

d) Není výrok **Špatně!**

8) $5 + 2 = 6$

a) Pravdivý výrok **Špatně!**

b) Nepravdivý výrok *Správně!* **Postup:** „Pět plus dva rovná se šest." Je oznamovací věta, která neplatí, jde tedy o nepravdivý výrok.

c) Hypotéza **Špatně!**

d) Není výrok **Špatně!**

9) Číslo 5 je prvočíslo.

a) Pravdivý výrok *Správně!* **Postup:** Oznamovací věta, která platí. Jedná se o pravdivý výrok.

b) Nepravdivý výrok **Špatně!**

c) Hypotéza **Špatně!**

d) Není výrok **Špatně!**

10) Existuje sněžný člověk Yetti.

a) Pravdivý výrok **Špatně!**

b) Nepravdivý výrok **Špatně!**

c) Hypotéza *Správně!* **Postup:** Toto je oznamovací věta, jejíž pravdivost neznáme, jedná se o hypotézu.

d) Není výrok **Špatně!**

11) 3 + 6

a) Pravdivý výrok **Špatně!**

b) Nepravdivý výrok **Špatně!**

c) Hypotéza **Špatně!**

d) Není výrok *Správně!* **Postup:** Tento zápis neodpovídá žádnému tvrzení, není to výrok.

12) NSD(16,48) = 16

a) Pravdivý výrok *Správně!* **Postup:** Předpokládáme, že zápis „NSD(16,48)" znamená „největší společný dělitel čísel 16 a 48". Ten je roven 16, jedná se tedy o pravdivý výrok.

b) Nepravdivý výrok **Špatně!**

c) Hypotéza **Špatně!**

d) Není výrok **Špatně!**

13) Každý kosočtverec má všechny vnitřní úhly tupé.

a) Pravdivý výrok **Špatně!**

b) Nepravdivý výrok *Správně!* **Postup:** Tato oznamovací věta říká samozřejmě nesmysl, jedná se o nepravdivý výrok..

c) Hypotéza **Špatně!**

d) Není výrok **Špatně!**

14) Každá hodina má 100 minut.

a) Pravdivý výrok **Špatně!**

b) Nepravdivý výrok *Správně!* **Postup:** Toto tvrzení je také nepravdivé, je to tedy nepravdivý výrok.

c) Hypotéza **Špatně!**

d) Není výrok **Špatně!**

15) Brontosauři vyhynuli kvůli srážce Země s meteoritem.

a) Pravdivý výrok **Špatně!**

b) Nepravdivý výrok **Špatně!**

c) Hypotéza *Správně!* **Postup:** Na otázku proč vyhynuli brontosauři existuje řada odpovědí a my se můžeme pouze domnívat, která z nich pravdivá. Toto tvrzení je tedy domněnka nebo-li hypotéza.

d) Není výrok **Špatně!**

16) Největší přirozené číslo je 1226.

a) Pravdivý výrok **Špatně!**

b) Nepravdivý výrok *Správně!* **Postup:** Toto tvrzení samozřejmě neplatí, je to nepravdivý výrok.

c) Hypotéza **Špatně!**

d) Není výrok **Špatně!**

Příklad 1.2:

Vymyslete tři pravdivé, tři nepravdivé výroky a tři hypotézy.

Příklad 1.3:

Konečná tabulka fotbalového turnaje je :

Tabulka 1.1

1.	Slavia	3	2	1	0	7:2	7
2.	Bohemians	3	2	1	0	7:3	7
3.	Sparta	3	1	0	2	2:5	3
4.	Viktorka	3	0	0	3	1:7	0

Ve sloupcích tabulky jsou postupně uvedeny pořadí v turnaji, název klubu, počty odehraných utkání, výhry, remízy, prohry, vstřelené a obdržené branky a body. V turnaji se utkal každý s každým. Pouze na základě následujících informací rozhodněte, zda uvedené výroky jsou pravdivé, nepravdivé nebo hypotézy:

1) Za vítězství se přidělovaly 3 body a za remízu l.
2) Splavia hrála nerozhodně s Bohemkou.
3) Viktorka vstřelila gól Spartě i Slavii.
4) Viktorka prohrála se Slavií.
5) Zápas Slavia : Sparta skončil výsledkem 4 : 3 pro Slavii.
6) Viktorka nedostala v žádném zápase více než 4 góly.
7) Z tabulky lze poznat výsledky všech zápasů až na skóre (tj. kdo vyhrál, či zda byla remíza).
8) Bohemka vstřelila každému týmu aspoň jeden gól.
9) Zápas Slavia : Sparta se hrál jako poslední.

Řešení:

1) Pravdivý výrok. Poslední Viktorka nedostala za tři prohry žádný bod, za prohry se tedy body nepřidělovaly. Z toho plyne, že Sparta získala tři body za vítězství, za vítězství se tedy přidělovaly tři body. A protože např. Bohemka získala získala za dvě výhry a jednu remízu 7 bodů, je jasné, že za remízu se přiděloval jeden bod. Výrok je pravdivý.
2) Pravdivý výrok. Z uvedené tabulky je zřejmé, že remizovali jen dva kluby, nutně tedy mezi sebou. Byla to Bohemka a Slavia, výrok je pravdivý.
3) Nepravdivý výrok. Viktorka nemohla vstřelit gól Spartě i Slavii, Protože za celý turnaj dala jen jeden gól. Výrok je nepravdivý.
4) Pravdivý výrok. Viktorka prohrála všechny zápasy, tedy i ten se Slávií. Výrok je pravdivý.
5) Nepravdivý výrok. Slavia nemohla vyhrát nad Spartou 4:3, protože za celý turnaj dostala jen dva góly, navíc Sparta za celý turnaj jen dva góly vstřelila.
6) Pravdivý výrok. Výrok se zdá být hypotézou, ale při podrobném rozboru možností, které mohli nastat, bychom zjistili, že je výrok pravdivý. Podrobnější rozbor zde.
7) Pravdivý výrok. To je pravdivý výrok, Viktorka s každým prohrála, Sparta vyhrála jen nad Viktorkou, jinak také všechno prohrála, Slavia i Bohemka porazili Viktorku a Spartu a vzájemný zápas skončil nerozhodně.
8) Hypotéza. To je hypotéza, zápas se Slavií mohl skončit 0:0.
9) Hypotéza. To je též hypotéza, taková informace se z tabulky určit nedá.

Ověření pravdivosti výroku „Viktorka nedostala v žádném zápase víc než 4 góly."

Budeme předpokládat, že výrok neplatí, tedy že Viktorka dostala v nějakém zápase alespoň 5 gólů. Jelikož má na kontě 3 prohry a skóre 1:7 musela by prohrát 0:1, 0:1 a 1:5.

Prohra 1:5 je možná jen se Slavií. Sparta totiž za celý turnaj 5 gólů nevstřelila a Bohemce by po odečtení skóre 5:1 zápasu s Viktorkou zbylo skóre 2:2 a to nemůže odpovídat jedné remíze a jedné výhře. Jestliže tedy Viktorka v nějakém zápase dostala alespoň 5 gólů, odehrála tyto zápasy:

Viktorka : Slavia 1:5
Viktorka : Bohemka 0:1
Viktorka : Sparta 0:1

Zápas Slavia : Bohemka skončil remízou, a to buď 0:0, nebo 1:1. Jiná možnost není, protože Slavia dostala za celý turnaj jen dva góly. Rozeberme tedy každou variantu zvlášť:

a) Nechť tedy Slavia : Bohemka 0:0. Potom musel zápas Slavia : Sparta dopadnout 2:1 , protože Slavia má celkové skóre 7:2. Utkání Bohemka : Sparta skončilo vítězstvím Bohemky. Aby bylo splněno celkové skóre Sparty (2:5), muselo by to být 3:0 avšak to neodpovídá celkovému skóre Bohemky, které je uvedeno v tabulce (7:3 nikoliv 4:0). Varianta a) tedy nemohla nastat.

b) Nechť Slavia : Bohemka 1 : 1. Potom musel zápas Slavia : Sparta dopadnout 1:0 , protože Slavia má celkové skóre 7:2. Utkání Bohemka : Sparta skončilo vítězstvím Bohemky. Aby bylo splněno celkové skóre Sparty (2:5), muselo by to být 4:1 avšak to neodpovídá celkovému skóre Bohemky, které je uvedeno v tabulce (7:3 nikoliv 6:2). Ani varianta b) tedy nemohla nastat.

Tím jsme ovšem vyčerpali všechny varianty a to znamená, že předpoklad, že je výrok nesprávný, neplatí. Z toho plyne, že výrok platí. Předvedenému postupu ověření pravdivosti se říká důkaz sporem (viz logická výstavba matematiky).

Negace výroku

V předchozí části jsme si rozdělili výroky podle pravdivostní hodnoty na dvě skupiny (pravdivé a nepravdivé). Každý výrok p mohu popřít slovy: „Není pravda, že platí p." Jestliže byl původní výrok *p* pravdivý, je nové tvrzení opět výrokem a tento výrok je nepravdivý a naopak. Operace, kterou jsme nyní na výrok p provedli, se nazývá negace (říkáme též, že jsme výrok negovali).

Definice:

Negací výroku p rozumíme výrok q vytvořený z výroku p a popírající jeho pravdivostní hodnotu. Místo q píšeme $\neg p$.

Jestliže má původní výrok p hodnotu pravda, má $\neg p$ hodnotu nepravda a naopak. Jistě si domyslíte, že výroky p a $\neg(\neg p)$ (tj.dvakrát negovaný výrok p) říkají totéž. Je to podobné, jako když dvakrát vynásobíte nějaké číslo číslem -1, také dostanete původní číslo.

Příklad:

Vytvořte negace z následujících výroků:

1) Tráva je zelená.
2) $5 + 5 = 11$
3) Číslo 2 je prvočíslo.
4) Číslo 6 není prvočíslo.
5) $|3 - 4| < |5| + |3 + 4|$
6) Největší přirozené číslo není 124365.
7) Není pravda, že každá hodina trvá 120 minut.

Řešení:

1) Není pravda, že Tráva je zelená.
2) Není pravda, že $5 + 5 = 11$.
3) Není pravda, že Číslo 2 je prvočíslo.
4) Není pravda, že Číslo 6 není prvočíslo.
5) Není pravda, že $|3 - 4| < |5| + |3 + 4|$
6) Není pravda, že Největší přirozené číslo není 124365.
7) Není pravda, že Není pravda, že každá hodina trvá 120 minut.

Jistě jste si všimli, že předchozí formulace negací jsou zbytečně zdlouhavé a komplikované. Místo „Není pravda, že tráva je zelená" je jednodušší říci „tráva není zelená" atd. Proto se budeme snažit negovat výroky bez předřazení skupiny slov „Není pravda, že..". Tomuto způsobu vyjádření se říká pozitivní vyjádření negace.

Příklad :

Vyjádřete negace výroků z předchozího příkladu pozitivně:

Řešení:

1) Tráva není zelená.
2) $5 + 5 \neq 11$
3) Číslo 2 není prvočíslo.
4) Číslo 6 je prvočíslo.
5) $|3 - 4| \geq |5| + |3 + 4|$
6) Největší přirozené číslo není 124365.
7) Každá hodina trvá 120 minut.

Příklady 2

Příklad 2.1:

Určete, které výroky v pravém sloupci jsou negací výroku v levém sloupci.

Tabulka 2.1

Prší.	Svítí sluníčko., Je hezky., Neprší.
Je 19:30.	Není půl osmé večer., Je půl osmé večer., Není 19:30., Začínají televizní zprávy., Je půl osmé ráno.
24 < 21	24 > 21, 24 ≥ 21, Není pravda, že 24 je menší než 21.
Není pravda, že není pravda, že jsem to řekl.	Řekl jsem to., Není pravda, že jsem to řekl., Není pravda, že není pravda, že není pravda, že jsem to řekl. Neřekl jsem to.
Vím, kdo to udělal.	Nevím, kdo to udělal., Vím, kdo to neudělal. Nevím, kdo to neudělal.

Řešení:

Tabulka 2.2

a	¬a
Prší.	Neprší.
Je 19:30.	Není půl osmé večer. Není 19:30.
24 < 21	24 ≥ 21, Není pravda, že 24 je menší než 21.
Není pravda, že není pravda, že jsem to řekl.	Není pravda, že jsem to řekl., Není pravda, že není pravda, že není pravda, že jsem to řekl. Neřekl jsem to.
Vím, kdo to udělal.	Nevím, kdo to udělal.

Příklad 2.2:

Vyjádřete pozitivně negace těchto výroků:

1) Hlavní město Austrálie je Sydney.
2) 1002 + 202 = 10400
3) Vím, že nic nevím.
4) 5 : 2 = – 2,5
5) Slunce je žluté.
6) Není pravda, že 5/11
7) Šaty, které mám na sobě, jsou světlé.

Řešení:

1) Hlavní město Austrálie není Sydney.
2) 1002 + 202 = 10400
3) Nevím, že nic nevím.
4) 5 : 2 ≠ – 2,5
5) Slunce není žluté.
6) 5/11
7) Šaty, které mám na sobě, nejsou světlé.

Příklad 2.3:

Zestručněte formulace těchto výroků:

1) Není pravda, že kočka je savec.
2) Není pravda, že není pravda, že bagr umí létat.
3) Není pravda, že borůvky jsou žluté.

Řešení:

1) Kočka není savec.
2) Bagr umí létat.
3) Borůvky nejsou žluté.

Příklad 2.4:

Negujte následující výroky:

1) Není pravda, že všichni lidé žijí v Číně.
2) Není pravda, že není pravda, že Měsíc je umělá družice Země.
3) Není pravda, že Slovensko je větší než Maďarsko.

Řešení:

1) Všichni lidé žijí v Číně.
2) Měsíc není umělá družice Země.
3) Slovensko je větší než Maďarsko.

Příklad 2.5:

Rozmyslete si, proč nejsou výroky v pravém sloupci negacemi výroků v levém sloupci.

Tabulka 2.3

Mám 5 kuliček.	Mám 4 kuličky
Hlavním městem Španělska je Barcelona.	Hlavním městem Švýcarska je Madrid.
Mám modrou sukni.	Mám modré kalhoty.
Nesnědl jsem řízek.	Snědl jsem řízek s bramborami.
V 19:30 začínají v televizi zprávy.	V 19:30 začíná v televizi večerníček.
Tato rovnice má 1 řešení.	Tato rovnice nemá řešení.
Číslo 1 je prvočíslo.	Číslo 1 je složené.
5 + 5 = 9	5 + 5 = 10

Složené výroky

V první kapitole jsme si řekli, že výrok je oznamovací věta. Tak jako v češtině máme věty jednoduché a souvětí, tak i ve výrokové logice existují výroky jednoduché (elementární) a složené. Podobně jako souvětí je i složený výrok vytvořen z elementárních výroků pomocí spojek. Říká se jim logické spojky, označují se symboly, a také se vyjadřují slovně vhodnými jazykovými výrazy (v přesně dohodnutém významu). V běžné řeči se vyskytuje mnoho spojek, ale v matematice si vystačíme s šesti základními logickými spojkami a díky nim s šesti základními typy složených výroků. Jsou to: negace, konjunkce, disjunkce, alternativa, implikace a ekvivalence. Negaci jsme si už zavedli dříve, nyní přejděme k ostatním .

Konjunkce

Definice:

Konjunkcí libovolných výroků p, q rozumíme výrok, který vznikne z výroků p,q a je pravdivý právě tehdy (tehdy a jen tehdy), když jsou oba výroky p a q pravdivé. Značíme ji $p \wedge q$. Čteme: „p a q“, resp. „p a zároveň q“.

Konjunkci tedy vytváříme pomocí spojky a, resp. a zároveň. Ukažme si to na příkladě.

Příklad:

Vytvořme konjunkci výroků p a q:
p: Číslo 9 je dělitelné čtyřmi.¨
q: Číslo 9 je liché.

Řešení:

$p \wedge q$: Číslo 9 je dělitelné čtyřmi a zároveň je liché.
Jak je to s pravdivostí této konjunkce? Domníváte-li se, že je nepravdivá a odůvodňujete-li to tím, že jeden z obou výroků je nepravdivý (výrok p), domníváte se správně.

Disjunkce

Definice:

Disjunkcí libovolných výroků p, q rozumíme výrok, který vznikne z výroků p,q a je pravdivý, pokud je alespoň jeden z výroků p, q pravdivý. Značíme ji $p \vee q$. Čteme: „p nebo q“.
Disjunkci tedy vytváříme pomocí spojky nebo. Ukažme si to na příkladě.

Příklad:

Vytvořme Disjunkci výroků p a q:
p: Číslo 9 je dělitelné čtyřmi.
q: Číslo 9 je liché.

Řešení:

$p \vee q$: Číslo 9 je dělitelné čtyřmi nebo je liché.
Jak je to s pravdivostí této disjunkce? Domníváte-li se, že je pravdivá a odůvodňujete-li to tím, že aspoň jeden z obou výroků je pravdivý (výrok q), domníváte se správně.

Alternativa

Definice:

Alternativou libovolných výroků p, q rozumíme výrok, který vznikne z výroků p,q a je pravdivý právě tehdy , když je právě jeden (alespoň jeden a nejvýše jeden) z výroků p, q pravdivý. Značíme ji

$p \veebar q$. Čteme: „p, nebo q“, nebo také „buď p, nebo q“.
Alternativu tedy vytváříme stejně jako disjunkci pomocí spojky nebo.V mluvené řeči lze někdy rozlišit disjunkci a alternativu pouze podle kontextu. V psané formě jazyka se vždy píše před nebo ve vylučovacím smyslu (alternativa) čárka. Na těchto stránkách budeme pro jistotu vždy užívat částici buď. Ukažme si to na příkladě.

Příklad:
Vytvořme alternativu výroků p a q:
p: Číslo 9 je dělitelné čtyřmi.
q: Číslo 9 je liché.

Řešení:
$p \veebar q$: Číslo 9 je buď dělitelné čtyřmi, nebo je liché.
Jak je to s pravdivostí této alternativy? Domníváte-li se, že je pravdivá a odůvodňujete-li to tím, že právě jeden z obou výroků je pravdivý (výrok q), domníváte se správně.

Implikace

Implikace je výrok, který by se dal zapsat ve tvaru: „Jestliže platí výrok p, potom platí výrok q“. Říkáme též: „z p plyne q“ nebo „p implikuje q“ nebo též „platí-li p, platí q“; značíme $p \Rightarrow q$. V této implikaci se výrok p nazývá předpoklad a výrok q závěr.Implikace je pravdivá, jestliže z platného předpokladu plyne platný závěr (Z neplatného předpokladu může plynout cokoliv a implikace je také pravdivá). Uveďme příklad: Maminka řekne malému dítěti: „Když nedojíš oběd, nedostaneš lízátko.“ Dítě poctivě dojedlo oběd a lízátko stejně nedostalo. Podvedla ho maminka? Odpověď zní: Nepodvedla. Označme si výrok „Nedojíš oběd.“ Písmenem p a výrok „Nedostaneš lízátko“ písmenem q. Maminka vyslovila implikaci $p \Rightarrow q$. V situaci, která nastala, dítě oběd dojedlo, tudíž nebyl splněn předpoklad a maminka mohla udělat cokoliv, aniž by porušila svůj slib.
Uveďme si pro pořádek definici:

Definice:
Implikací $p \Rightarrow q$ libovolných výroků p, q rozumíme výrok, který vznikne z výroků p,q a je pravdivý právě tehdy, když jsou oba výroky p a q pravdivé nebo když je výrok p nepravdivý.

Příklad:
Vytvořme z výroků p,q implikace $p \Rightarrow q$ a $q \Rightarrow p$.
p: Trojúhelník ABC je rovnostranný.
q: Trojúhelník ABC je rovnoramenný.

Řešení:
$p \Rightarrow q$: Jestliže je trojúhelník ABC je rovnostranný, pak je rovnoramenný.
$q \Rightarrow p$: Jestliže je trojúhelník ABC je rovnoramenný, pak je rovnostranný.

Všimněte si, že zatímco implikace $p \Rightarrow q$ je pravdivá, obracená implikace $q \Rightarrow p$ pravdivá není. Na rozdíl od ostatních složených výroků zaleží u implikace na pořadí dílčích výroků p a q (jestliže platí výrok $p \Rightarrow q$, ještě to nutně neznamená, že musí platit $q \Rightarrow p$). Nastane-li pro některé výroky p,q případ, že obě implikace $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ jsou pravdivé, říkáme o výrocích p, q, že jsou ekvivalentní.

Poznámka:
Jak jsme již výše zmínili, implikace $q \Rightarrow p$ se nazývá obracená implikace k implikaci $p \Rightarrow q$.

Poznámka:
Zajímavou vlastností implikace je, že pro všechny výroky p a q platí: Jestliže platí $p \Rightarrow q$, platí i t $\neg q \Rightarrow \neg p$. A naopak jestliže platí $\neg q \Rightarrow \neg p$, platí i $p \Rightarrow q$. Implikace $\neg q \Rightarrow \neg p$ se nazývá obměněná implikace implikace $p \Rightarrow q$. Využívá se při důkazech matematických vět, viz logická

výstavba matematiky, nepřímý důkaz.

Ekvivalence

Definice:

Ekvivalencí libovolných výroků p, q rozumíme výrok, který vznikne z výroků p,q a je pravdivý právě tehdy, když jsou oba výroky p a q pravdivé, nebo jsou oba výroky p a q nepravdivé. Značíme ji $p \Leftrightarrow q$. Čteme: „p je ekvivalentní s q“, resp. „p, právě tehdy když q“, nebo též „p je nutná a postačující podmínka pro q“.
Všimněte si, že zápis $p \Leftrightarrow q$ napovídá, že jde o implikace $p \Rightarrow q$ a $q \Rightarrow p$.
Ekvivalenci tedy vytváříme pomocí slovního spojení právě „tehdy, když“. Ukažme si to na příkladě.

Příklad:
Vytvořme ekvivalenci výroků p a q:
p: Číslo 10 je dělitelné 6.
q: Číslo 10 je dělitelné 8.

Řešení:
$p \Leftrightarrow q$: Číslo 10 je dělitelné 6 právě tehdy, když je dělitelné 8.
Jak je to s pravdivostí této ekvivalence? Oba výroky p, q jsou nepravdivé, složený výrok p=q je tedy podle definice pravdivý (i když zní dost hloupě).

Poznámka:
Na skládání výroků lze nahlížet jako na operace. Negace je unární operací (tj. vyskytuje se v ní pouze jeden výrok jako operand), konjunkce, disjunkce, alternativa, implikace a ekvivalence jsou operace binární (tj. operandy jsou dva výroky).

Příklady 3

Příklad 3.1:

Jsou dány výroky k: Karel půjde dnes do kina. a l: Lenka půjde dnes do kina. Formulujte co nejjednodušeji výroky:

1) $\neg k$:

a) Karel dnes nepůjde do kina. Správně!

b) Lenka dnes nepůjde do kina. **Špatně!**

c) Karel dnes půjde do hospody. **Špatně!**

d) Karel dnes nepůjde do kina nebo do hospody. **Špatně!**

2) $k \wedge l$:

a) Karel a Lenka dnes půjdou do kina. Správně! **Postup:** $k \wedge l$:Karel dnes půjde do kina a zároveň Lenka dnes půjde do kina. Jednodušší formulace však je: Karel a Lenka dnes půjdou do kina.

b) Karel ani Lenka dnes nepůjdou do kina. **Špatně!**

c) Karel nebo Lenka dnes půjde do kina **Špatně!**

d) Buď Karel, nebo Lenka dnes půjde do kina. **Špatně!**

3) $k \vee l$:

a) Karel nebo Lenka dnes půjde do kina. Správně! **Postup:** $k \vee l$:Karel dnes půjde do kina nebo Lenka dnes půjde do kina. Jednodušší formulace však je: Karel nebo Lenka dnes půjde do kina.

b) Do kina dnes půjde buď Karel, nebo Lenka. **Špatně!**

c) Do kina dnes půjde Karel i Lenka. **Špatně!**

d) Do kina dnes nepůjde Karel nebo Lenka. **Špatně!**

4) $k \veebar l$:

a) Do kina dnes půjde buď Karel, nebo Lenka. Správně! **Postup:** $k \veebar l$:Buď Karel dnes půjde do kina, nebo Lenka dnes půjde do kina. Jednodušší formulace však je: Do kina dnes půjde buď Karel, nebo Lenka.

b) Do kina dnes půjde Karel nebo Lenka. **Špatně!**

c) Do kina dnes nepůjde Karel nebo Lenka. **Špatně!**

d) Půjde-li dnes Karel do kina, půjde i Lenka **Špatně!**

5) $k \Rightarrow l$:

a) Půjde-li dnes Lenka do kina, půjde i Karel. **Špatně!**

b) Do kina dnes nepůjde Karel nebo Lenka. **Špatně!**

c) Půjde-li dnes Karel do kina, půjde i Lenka. **Správně!** **Postup:** $k \Rightarrow l$:Jestliže dnes Karel půjde do kina, potom půjde Lenka dnes do kina. Jednodušší formulace však je:

Půjde-li dnes Karel do kina, půjde i Lenka.

d) Buď půjde dnes Karel i Lenka do kina, nebo aspoň Lenka. **Špatně!**

6) $l \Rightarrow k$:

a) Půjde-li dnes Karel do kina, půjde i Lenka. **Špatně!**

b) Do kina dnes půjde Karel nebo Lenka. **Špatně!**

c) Karel půjde do kina a Lenka ne. **Špatně!**

d) Půjde-li dnes Lenka do kina, půjde i Karel. **Správně!** **Postup:** $l \Rightarrow k$: Jestliže dnes Lenka půjde do kina, potom půjde Karel dnes do kina. Jednodušší formulace však je:Půjde-li dnes Lenka do kina, půjde i Karel.

7) $k \Leftrightarrow l$:

a) Do kina dnes půjde Karel i Lenka. **Špatně!**

b) Do kina dnes nepůjde ani Karel ani Lenka. **Špatně!**

c) Karel dnes půjde do kina právě tedy, když Lenka do kina nepůjde. **Špatně!**

d) Karel dnes půjde do kina právě tehdy, když tam dnes půjde Lenka. **Správně!**
Postup: $k \Leftrightarrow l$ Karel dnes půjde do kina právě tehdy, když Lenka dnes půjde do kina. Jednodušší formulace však je: Karel dnes půjde do kina právě tehdy, když tam dnes půjde Lenka.

Příklad 3.2:
Určete typ složených výroků, jež vyjadřují matematické zápisy:

1) $-5 < 0 < 10$

a) konjunkce **Správně!** **Postup:** $-5 < 0 < 10$...tento zápis nám říká, že -5 je menší než 0 a 0 je menší než 10. Jedná se tedy o konjunkci : $-5 < 0 \wedge 0 < 10$

b) ekvivalence **Špatně!**

c) disjunkce **Špatně!**

d) alternativa **Špatně!**

2) $\sqrt{143} \leq 12$

a) konjunkce **Špatně!**

b) alternativa Správně! **Postup:** $\sqrt{143} \leq 12$ … tento zápis nám říká, že $\sqrt{143}$ je menší než 12, nebo $\sqrt{143} = 12$. Jedná se tedy o alternativu : $\sqrt{143} < 12 \veebar \sqrt{143} = 12$

c) disjunkce **Špatně!**

d) ekvivalence **Špatně!**

3) $(3 + 5) . 7 = 8 . 7 = 56$

a) ekvivalence **Špatně!**

b) alternativa **Špatně!**

c) disjunkce **Špatně!**

d) konjunkce Správně! **Postup:** $(3 + 5) . 7 = 8 . 7 = 56$ tento zápis nám říká, že $(3 + 5) . 7 = 8 . 7$ a $8 . 7 = 56$. Jedná se tedy o konjunkci: $(3 + 5) . 7 = 8 . 7 \wedge 8 . 7 = 56$

Příklad 3.3:

Jsou dány výroky p: $\sqrt{9} \neq 3$ (nepravdivý výrok), q: $1 < 2$ (pravdivý výrok). Rozhodněte, které z následujících výroků jsou pravdivé a které nepravdivé:

1) $p \wedge q$

a) Pravdivý **Špatně!**

b) Nepravdivý *Správně!* **Postup:** Konjunkce dvou výroků je pravdivá pouze v případě, že jsou oba pravdivé.To v našem příkladě není splněno (p je nepravdivý, q je pravdivý). Výrok $p \wedge q$ je tedy nepravdivý.

2) $p \vee q$

a) Pravdivý *Správně!* **Postup:** Disjunkce dvou výroků p,q je pravdivá, když aspoň jeden z výroků p,q je pravdivý. To je splněno. Výrok $p \vee q$ tedy platí.

b) Nepravdivý **Špatně!**

3) $p \veebar q$

a) Pravdivý *Správně!* **Postup:** Alternativa dvou výroků p,q je pravdivá, když aspoň jeden z výroků p,q je pravdivý. To je splněno. Výrok $p \veebar q$ tedy platí.

b) Nepravdivý **Špatně!**

4) p ⇒ q

a) Pravdivý *Správně!* **Postup:** Implikace platí právě tehdy, když z pravdivého předpokladu plyne pravdivý závěr nebo když z nepravdivého předpokladu plyne cokoliv. Předpoklad je nepravdivý, čili nás pravdivost závěru ani nemusí zajímat a víme, že výrok p ⇒ q platí.

b) Nepravdivý **Špatně!**

5) p ⇔ q

a) Pravdivý **Špatně!**

b) Nepravdivý *Správně!* **Postup:** Ekvivalence dvou výroků je pravdivá právě tehdy, když jsou oba pravdivé, nebo oba nepravdivé. V našem příkladu je jeden pravdivý a druhý ne. Výrok p ⇔ q tedy neplatí.

6) ¬p

a) Pravdivý *Správně!* **Postup:** Negace mění pravdivostní hodnotu výroku v opačnou. ¬p je pravdivý výrok.

b) Nepravdivý **Špatně!**

7) ¬q

a) Pravdivý **Špatně!**

b) Nepravdivý *Správně!* **Postup:** Negace mění pravdivostní hodnotu výroku v opačnou. ¬q je nepravdivý výrok.

8) ¬p ⇒ ¬q

a) Pravdivý **Špatně!**

b) Nepravdivý *Správně!* **Postup:** Implikace platí právě tehdy, když z pravdivého předpokladu plyne pravdivý závěr nebo když z nepravdivého předpokladu plyne cokoliv. Zde máme pravdivý předpoklad a nepravdivý závěr. Výrok ¬p ⇒ ¬q tedy neplatí.

Příklad 3.4:

Na večírek bylo pozváno pět přátel: Karel, Lenka, Michal, Naďa a Petr.
Jejich reakce na pozvání zněly takto:
Karel: „Přijdu já i Lenka."
Lenka: „Přijdu já nebo Michal."
Naďa: „Jestliže přijde Michal, přijdu i já."
Michal: „Pokud bude příznivé počasí, přijdu."
Petr: „ Přijdu právě tehdy, když přijde Michal."

Pro nepříznivé počasí nepřišel nikdo z nich. Rozhodněte, kteří z pozvaných přesto neporušili slib.

Řešení:

Slib neporušili Naďa, Michal a Petr.
Postup řešení:
Karel řekl neplatnou konjunkci “$k \wedge l$“. Karel slib porušil.
Lenka řekla neplatnou disjunkci “$l \vee m$“. Lenka slib porušila.
Naďa vyslovila implikaci “$m \Rightarrow n$“, která je pravdivá (má nepravdivý předpoklad). Naďa slib neporušila.“
Michal řekl výrok “$p_p \Rightarrow m$“.Předpoklad této implikace nebyl splněn. Michal slib neporušil.
Petr vyslovil ekvivalenci “$p \Leftrightarrow m$“.Ta je pravdivá, protože jsou oba dílčí výroky nepravdivé. Petr slib neporušil.

Příklad 3.5:

Stanovte, zda jsou pravdivé tyto implikace:

1) Je-li 5 sudé číslo, pak 5^2 je sudé číslo.

   a) Pravdivá *Správně!* **Postup:** Je-li 5 sudé číslo, pak 5^2 je sudé číslo. Číslo 5 sudé není, tudíž není splněn předpoklad. Pravdivostní hodnota závěru nás již nemusí zajímat. Implikace platí.

   b) Nepravdivá **Špatně!**

2) Jestliže platí, že pes je savec, potom je jahoda ovoce.

   a) Pravdivá **Špatně!**

   b) Nepravdivá *Správně!* **Postup:** Jestliže platí, že pes je savec, potom je jahoda ovoce. Pes je savec, předpoklad je splněn. Jahoda je ovoce a tedy i závěr platí. Z platného předpokladu plyne platný závěr. Implikace neplatí.

3) Pokud je Berlín hlavní město Německa, potom je Německo v Africe.

   a) Pravdivá **Špatně!**

   b) Nepravdivá *Správně!* **Postup:** Pokud je Berlín hlavní město Německa, potom je Německo v Africe. Berlín je hlavní město Německa, je tedy splněn předpoklad. Ale závěr je nepravdivý, protože Německo není v Africe. Z platného předpokladu tedy plyne neplatný závěr a to znamená že celá implikace neplatí.

4) Je-li 6 prvočíslo, pak 6+ 5 je prvočíslo.

   a) Pravdivá *Správně!* **Postup:** Je-li 6 prvočíslo, pak 6+ 5 je prvočíslo. Číslo 6 není prvočíslo, tudíž není splněn předpoklad. Pravdivostní hodnota závěru nás již nemusí zajímat. Implikace platí.

   b) Nepravdivá **Špatně!**

Příklad 3.6:
Implikace z příkladu 3.5 nahraďte obměněnými implikacemi.

1) Je-li 5 sudé číslo, pak 5^2 je sudé číslo.
2) Jestliže platí, že pes je savec, potom je jahoda ovoce.
3) Pokud je Berlín hlavní město Německa, potom je Německo v Africe.
4) Je-li 6 prvočíslo, pak 6 + 5 je prvočíslo.

Řešení:

1) Jestliže 5^2 není sudé číslo, pak 5 není sudé číslo.
2) Jestliže jahoda není ovoce, potom pes není savec.
3) Jestliže Německo není v Africe, pak Berlín není hlavní město Německa.
4) Jestliže 6 + 5 není prvočíslo, pak 6 není prvočíslo.

Poznámka:
Všimněte si, že pravdivostní hodnoty obměněných implikací jsou shodné s pravdivostními hodnotami příslušných původních implikací.

Příklad 3.7:
Implikace z příkladu 3.5 nahraďte obrácenými implikacemi a určete pravdivost takto vzniklých výroků.

1) Je-li 5 sudé číslo, pak 5^2 je sudé číslo.
2) Jestliže platí, že pes je savec, potom je jahoda ovoce.
3) Pokud je Berlín hlavní město Německa, potom je Německo v Africe.
4) Je-li 6 prvočíslo, pak 6 + 5 je prvočíslo.

Řešení:

1) Je-li 5^2 sudé číslo, pak 5 je sudé číslo. Číslo 5 sudé není, tudíž není splněn předpoklad. Implikace platí.
2) Pokud je jahoda ovoce, pes je savec. Z platného předpokladu plyne platný závěr. I tato implikace platí.
3) Pokud je Německo v Africe, je jeho hlavním městem Berlín. Předpoklad není splněn. Tato implikace tedy platí.
4) Je-li 6+5 prvočíslo, pak 6 je prvočíslo. Číslo 6+5 je prvočíslo, číslo 6 prvočíslo není. Z platného předpokladu plyne neplatný závěr. Implikace neplatí.

Příklad 3.8:
Rozhodněte, zda následující ekvivalence jsou pravdivé výroky.

1) Země je planeta obíhající Slunce právě tehdy, když Slunce je žlutá hvězda.

   a) Pravdivý *Správně!* **Postup:** Země je planeta obíhající Slunce právě tehdy, když Slunce je žlutá hvězda. Oba výroky jsou zároveň pravdivé. Ekvivalence platí.

   b) Nepravdivý **Špatně!**

2) Země obíhá okolo Slunce právě tehdy, když Mars obíhá okolo Země.

a) Pravdivý **Špatně!**

b) Nepravdivý *Správně!* **Postup:** Země obíhá okolo Slunce právě tehdy, když Mars obíhá okolo Země. První výrok pravdivý je, druhý nikoliv. Ekvivalence tedy neplatí

3) 5 . 5 = 24 právě tehdy, když každá hodina má 123 minut.

a) Pravdivý *Správně!* **Postup:** 5 . 5 = 24 právě tehdy, když každá hodina má 123 minut. Oba výroky jsou zároveň nepravdivé. Ekvivalence platí.

b) Nepravdivý **Špatně!**

Tabulky pravdivostních hodnot

Pravdivostní hodnota složeného výroku tedy závisí jak na pravdivostních hodnotách elementárních výroků, tak i na spojkách, kterými jsou spojeny. Poznatky o pravdivostních hodnotách základních složených výroků lze shrnout v definiční tabulce:

Tabulka 1 - tabulka pravdivostních hodnot:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \veebar B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1

Písmena A,B zde nepředstavují elementární výroky, ale výrokové proměnné (tj.proměnné zastupující výroky), proto je v tabulce pamatováno na všechny možné kombinace pravdivostních hodnot proměnných A,B (1 znamená pravda, 0 nepravda). Výrazy vytvořené z konečného počtu výrokových proměnných, logických spojek a popř. závorek se nazývají výrokové formule. Vyjadřují sled logických operací. Pro zápisy výrokových formulí platí tato úmluva: Logické operace v závorkách mají přednost před logickými operacemi vně závorek. Pokud přednost logické operace není vyznačena závorkou, pak z logických spojek $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ v uvedeném pořadí má přednost každá spojka předcházející před všemi následujícími. Stejná úmluva platí i pro zápisy složitějších složených výroků.

Poznámka:
Výrokové formule budeme značit velkými písmeny, zatímco výroky malými.

Příklady výroků:
p, q, $\neg p$, $p \wedge q$, $p \Leftrightarrow q$, $(p \vee q) \Rightarrow s$, $(p \vee q) \Leftrightarrow (s \wedge \neg q)$, aj.

Příklady výrokových formulí:
P, Q, $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \Leftrightarrow Q$, $(P \vee Q) \Rightarrow S$, $(P \vee Q) \Leftrightarrow (S \wedge \neg Q)$, aj.

Pravdivostním ohodnocením výrokové formule se rozumí zjištění jejích pravdivostních hodnot v závislosti na pravdivostních hodnotách výrokových proměnných. Obvykle se provádí užitím výše uvedené tabulky (resp. jí podobné) viz následující příklady.

Příklad:
Určete pravdivostní ohodnocení výrokové formule $\neg(A \vee B) \wedge (B \Rightarrow \neg A)$ pří všech možných pravdivostních hodnotách proměnných A,B.

Řešení:
Při zjišťování pravdivostního ohodnocení takovýchto složitějších výrokových formulí postupujeme takto: Nejprve si uvědomíme, jakou posloupností logických operací daná formule vznikla, rozdělíme si ji na dílčí výrokové formule, ze kterých je složena. V našem případě jsou to tyto výrokové formule: $\neg A$, $(B \Rightarrow \neg A)$, $A \vee B$, $\neg(A \vee B)$;
Pak najdeme jejich pravdivostní ohodnocení (postupujeme od nejednodušších ke složitějším, až nakonec dospějeme k celkovému výsledku). Ke hledání pravdivostních hodnot užijeme tabulku, do jejíž hlavičky zapíšeme jednotlivé etapy konstrukce výrokové formule.

Tabulka 2

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$B \Rightarrow \neg A$	$\neg(A \vee B) \wedge (B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0

0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1

První tři sloupce tabulky jsme v podstatě opsali z tabulky 2. Čtvrtý sloupec je totožný s pátým sloupcem tabulky 2. Výroková formule v pátém sloupci je negací výrokové formule ve čtvrtém, proto jsou nuly zaměněny za jedničky a naopak. V šestém sloupci je implikace výrokových formulí ze druhého a třetího, její pravdivostní ohodnocení získáme z definiční tabulce 2. A konečně v posledním sloupci je zadaná výroková formule, která je konjunkcí formulí z pátého a šestého sloupce, její ohodnocení opět získáme z definiční tabulky. Vidíme, že je pravdivá pouze tehdy, když mají obě výrokové proměnné A,B hodnotu 0.

Příklad:
Určete pravdivostní ohodnocení výrokové formule $(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ pří všech možných pravdivostních hodnotách proměnných P, Q.

Řešení:
Postupujeme stejně jako v předchozím příkladě. Tentokrát vypadá tabulka pravdivostních hodnot takto:

Tabulka 3

P	Q	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	$(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Jak vidíme v posledním sloupci, zadaná výroková formule je pravdivá pro všechny možné kombinace hodnot proměnných P, Q. Takovýmto výrokovým formulím se říká tautologie.

Další příklady tautologií:
$P \vee \neg P$, $\neg(P \wedge \neg P)$, $P \vee \neg P$, $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$, $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge Q)$

Poznámka:
Výrok $\neg q \Rightarrow \neg p$ se nazývá obměna (obměněná) implikace výroku $p \Rightarrow q$.

Určit pravdivostní hodnotu složeného výroku, jestliže známe pravdivostní hodnoty elementárních výroků a způsob jejich složení, je tedy jednoduché. O to složitější je převést hovorovou řeč do řeči matematické logiky.

Negování složených výroků

Složené výroky samozřejmě také lze negovat tím nejprimitivnějším způsobem, tj. předřazením slov „Není pravda, že…“. My se ale opět budeme snažit o pozitivní vyjádření negace.

Příklad:
Určete negaci výroku: „Mám hlad nebo žízeň.“

Řešení:
Tento složený výrok je disjunkce, která je pravdivá v těchto případech:
-Mám hlad (a žízeň nemám).
-Mám žízeň (a hlad nemám).
- Mám hlad i žízeň.
Potřebujeme vytvořit výrok, který by popíral všechny tyto tři možnosti zároveň. Tuto podmínku splňuje výrok: „Nemám hlad ani žízeň.“
Ten je tedy pozitivním vyjádřením negace výroku „Mám hlad nebo žízeň“. Píšeme $\neg(h \vee ž) \Leftrightarrow (\neg h \wedge \neg ž)$

Příklad:
Určete negaci výroku: „Koupím salám právě tehdy, když nebude šunka.“

Řešení:
Tento složený výrok je ekvivalence, která je pravdivá v těchto případech:
-koupím salám a zároveň šunka nebude
-nekoupím salám a šunka bude
Potřebujeme vytvořit výrok, který by popíral tyto dvě možnosti zároveň. Tuto podmínku splňuje výrok: „Buď koupím salám, nebo nebude šunka.“ Ten je tedy pozitivním vyjádřením negace výroku „Koupím salám právě tehdy, když nebude šunka.“. Píšeme: $\neg(s \Leftrightarrow \neg š) \Leftrightarrow (s \vee \neg š)$

Poznámka:
Všimněte si, že jsme v prvním příkladu negovali disjunkci dvou výroků a dostali jsme konjunkci jejich negací a ve druhém příkladu jsme negovali ekvivalenci dvou výroků a dostali jsme jejich alternativu. To samozřejmě není náhoda, ale pravidlo, pomocí kterého můžeme určovat negace těchto i dalších složených výroků.
Toto pravidlo si nyní odvodíme pomocí tabulky pravdivostních hodnot, která je uvedena výše. V této tabulce máme znázorněny pravdivostní hodnoty základních složených výroků pro všechny možné kombinace pravdivostních hodnot výroků elementárních. Pokud chceme získat pravdivostní hodnoty negací těchto složených výroků, je třeba zaměnit v příslušných sloupcích tabulky jedničky za nuly a naopak. Tím dostáváme následující tabulku:

Tabulka 4: tabulka negací:

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \vee B)$	$\neg(A \veebar B)$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0
A	B	$\neg A \vee \neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \wedge \neg B$	$A \veebar B$

V posledním řádku tabulky je uveden zápis pozitivního vyjádření negace.Ověřte, že je tomu skutečně tak.

Příklad:

Negujte následující složené výroky pomocí tabulky negací:
1) Stromy a keře jsou dřeviny.
2) Pavouci mají 5 párů končetin nebo mají křídla.
3) Trojúhelník ABC je pravoúhlý právě tehdy, když druhá mocnina délky jedné z jeho stran je rovna součtu druhých mocnin délek zbylých dvou stran.

Řešení:
1) Stromy a keře jsou dřeviny. Tento výrok je konjunkce dvou výroků, symbolicky ho zapíšeme s $\wedge$ k a podle tabulky určíme negaci, která je $\neg s \vee \neg k$. Slovní formulace: Stromy nebo keře nejsou dřeviny.
2) Pavouci mají 5 párů končetin nebo mají křídla. Tento výrok je disjunkce dvou výroků, symbolicky ho zapíšeme 5 $\vee$ k a podle tabulky určíme negaci, která je $\neg s \wedge \neg k$. Slovní formulace: Pavouci nemají 5 párů končetin ani nemají křídla.
3) Trojúhelník ABC je pravoúhlý právě tehdy, když druhá mocnina délky jedné z jeho stran je rovna součtu druhých mocnin délek zbylých dvou stran. Tento výrok je ekvivalence dvou výroků, symbolicky ho zapíšeme $p \Leftrightarrow q$ a podle tabulky určíme negaci, která je $\neg p \vee \neg q$. Slovní formulace: Trojúhelník ABC buď není pravoúhlý, nebo druhá mocnina délky žádné z jeho stran není rovna součtu druhých mocnin délek zbylých dvou stran.

Poznámka:
Původní výroky 1) a 3) jsou pravdivé, výrok 2) nepravdivý. Příslušné negace mají logicky pravdivostní hodnotu opačnou.

Pokud chceme negovat složitější složené výroky, např. výrok $s \Rightarrow (p \vee q)$, musíme určit, jak vypadá pozitivní vyjádření negace příslušné výrokové formule, v našem případě $S \Rightarrow (P \vee Q)$. Hledáme tedy pozitivní vyjádření této negace: $\neg(S \Rightarrow (P \vee Q))$.Pokud mluvíme o pozitivním vyjádření negace výrokové formule, máme tím na mysli, že se znaménko negace objeví pouze před výrokovou proměnnou, nikoliv před závorkou.Docílíme toho tak, že si uvědomíme, která z logických operací má přednost (v našem případě je to implikace) a negujeme výrokovou formuli jednoduše podle tabulky negací: $\neg(S \Rightarrow (P \vee Q))$ je tedy ekvivalentní s: $S \wedge \neg(P \vee Q)$. Nyní už potřebujeme jen odstranit znaménko negace před $(P \vee Q)$. To opět uděláme pomocí tabulky negací a dostáváme, že $S \wedge \neg(P \vee Q)$ je ekvivalentní s: $S \wedge \neg P \wedge \neg Q$ a to je pozitivní vyjádření negace $\neg(S \Rightarrow (P \vee Q))$. Negací výroku $s \Rightarrow (p \vee q)$ je tedy výrok: $s \wedge \neg p \wedge \neg q$.

Příklad:
Negujte následující výrok:
Jestliže na večírek přijde Lenka nebo Marie, pak nepřijde Aleš ani Robert.

Řešení:
Tento výrok zapíšeme symbolicky takto: $(l \vee m) \Rightarrow (\neg a \wedge \neg r)$. Hledáme tedy pozitivní vyjádření negace této výrokové formule: $(L \vee M) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg R)$ .Postupem uvedeným výše dojdeme k tomu, že $\neg((L \vee M) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg R))$ se dá zapsat $(L \vee M) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg R)$ a to se dá zapsat $(L \vee M) \wedge (A \vee R)$. Hledaná negace má tedy symbolický zápis: $(l \vee m) \wedge (a \vee r)$. Slovní vyjádření: Na večírek přijde Lenka nebo Marie a zároveň přijde Aleš nebo Robert.

Paradoxy

Pikantní záležitostí v logických úlohách jsou paradoxy.Jsou to taková zvláštní tvrzení, která se zdají být pravdivá a nepravdivá zároveň. Nemůže se tedy jednat o výroky. Jestliže nevíte proč, přečtěte si pozorně definici výroku a porozumíte. Definici paradoxu si uvádět nebudeme, jen si ukážeme několik paradoxů, aby bylo jasné o co jde.

Příklady paradoxů:

- „***Lžu.***“ Jedná se o jasný paradox, protože je-li pravda, že lžu, je výrok nepravdivý. Nechť tedy není pravda, že lžu, tedy mluvím pravdu, ale pak nemohu tvrdit, že lžu.
- Paradox holiče: Ve vesnici je jediný holič a ten si na dveře pověsil ceduli s nápisem: „***Holím všechny lidi v naší vesnici, kteří se neholí sami.***“Kdo potom holí holiče?
- Jordanův paradox: Máme kartu na jejíž jedné straně je nápis:„***Nápis na druhé straně je pravdivý.***“. Na druhé straně najdete nápis: „Nápis na druhé stranně je nepravdivý“.Budete-li hledat na které straně je pravda, zjistíte, že jste narazili na paradox.

Příklady 4

Příklad 4.1:

Doplňte tabulku, jejíž záhlaví je uvedeno:

Tabulka 4.1

A	B	C	$\neg C$	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg C$

Řešení:

Tabulka 4.2

A	B	C	$\neg C$	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg C$
1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Příklad 4.2:

Určete pravdivostní ohodnocení následujících výrokových formulí a rozhodněte, zda se jedná o tautologie:

1) $(A \wedge \neg B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$
2) $A \wedge (B \vee \ \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
3) $((A \wedge B) \Rightarrow \neg C) \Rightarrow (A \wedge \neg C)$
4) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Rightarrow (B \Leftrightarrow A)$

Řešení:

1) $(A \wedge \neg B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$

Tabulka 4.3

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \vee B$	$(A \wedge \neg B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1

0	0	1	1	0	1	1

Toto není tautologie.

2) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Tabulka 4.4

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

Toto je tautologie.

3) $((A \vee B) \Rightarrow \neg C) \Rightarrow (A \wedge \neg C)$

Tabulka 4.5

A	B	C	$\neg C$	$A \vee B$	$A \wedge \neg C$	$(A \vee B) \Rightarrow \neg C$	$((A \vee B) \Rightarrow \neg C) \Rightarrow (A \wedge \neg C)$
1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0

Toto není tautologie.

4) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Rightarrow (B \Leftrightarrow A)$

Tabulka 4.6

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$B \Leftrightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Rightarrow (B \Leftrightarrow A)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Toto je tautologie.

Příklad 4.3:

Negujte následující složené výroky pomocí tabulky negací:

1) Máme rohlíky i housky.
2) Dáme si čaj, nebo kávu.
3) Do okurkového salátu se přidává cukr nebo ocet.

4) Bude-li ke koupi čerstvé ovoce, nekoupím kompot.
5) Mandarinky koupím právě tehdy, nebudou-li pomeranče.

Řešení:

1) Máme rohlíky i housky. Symbolicky: $r \wedge h$, negace:$\neg(r \text{ Ù } h)$ podle tabulky negací odpovídá disjunkci: $\neg r \vee \neg h$.. Nemáme rohlíky nebo housky.
2) Dáme si čaj, nebo kávu. $\neg(č \veebar k) \Leftrightarrow (č \Leftrightarrow k)$. Čaj si dáme právě tehdy, když si dáme kávu.
3) Do okurkového salátu se přidává cukr nebo ocet.$\neg(c \vee o) \Leftrightarrow (\neg c \wedge \neg o)$. Do okurkového salátu se nepřidává cukr ani ocet.
4) Bude-li ke koupi čerstvé ovoce, nekoupím kompot.$\neg(čo \Rightarrow \neg k) \Leftrightarrow (čo \wedge k)$. Koupím čerstvé ovoce i kompot.
5) Mandarinky koupím právě tehdy, nebudou-li pomeranče. $\neg(m \Leftrightarrow \neg p) \Leftrightarrow (m \veebar \neg p)$ .Buď koupím mandarinky, nebo nebudou pomeranče.

Příklad 4.4:
Negujte následující složené výroky:
1) Buď koupím jahodový jogurt, nebo koupím bílý jogurt a marmeládu.
2) Pokud na oslavu nepřijde Petr ani Eliška, potom nepřijde ani Vlasta ani Karel, ale přijde Michal.
3) Hořčici si namažu na chleba právě tehdy, když nebude k dostání máslo nebo sádlo nebo když bude zavřený obchod.

Řešení:

1) Buď koupím jahodový jogurt, nebo koupím bílý jogurt a marmeládu. Symbolicky: $jj \veebar (bj \text{ Ù } m)$, negace: $\neg(jj \veebar (bj \wedge m))$ nebo-li: $jj \Leftrightarrow (bj \wedge m)$, slovně: Jahodový jogurt koupím právě tehdy, když koupím bílý jogurt a marmeládu.
2) Pokud na oslavu nepřijde Petr ani Eliška, potom nepřijde ani Vlasta ani Karel, ale přijde Michal. Symbolicky: $(\neg p \wedge \neg e) \Rightarrow ((\neg v \wedge \neg k) \wedge m)$, negace: $\neg((\neg p \wedge \neg e) \Rightarrow ((\neg v \wedge \neg k) \wedge m))$, nebo-li: $(\neg p \wedge \neg e) \wedge \neg((\neg v \wedge \neg k) \wedge m)$, nebo-li: $(\neg p \wedge \neg e) \wedge (\neg(\neg v \wedge \neg k) \vee \neg m)$), nebo-li: $(\neg p \wedge \neg e) \wedge ((v \vee k) \vee \neg m)$, slovně: Na oslavu nepřijde Petr ani Eliška, a zároveň přijde Vlasta nebo Karel nebo Michal nepřijde.
3) Hořčici si namažu na chleba právě tehdy, když nebude k dostání máslo nebo sádlo nebo když bude zavřený obchod. Symbolicky: $h \Leftrightarrow ((\neg m \vee \neg s) \vee z)$, negace: $\neg(h \Leftrightarrow ((\neg m \vee \neg s) \vee z))$, nebo-li: $h \veebar ((\neg m \vee \neg s \vee z)$, slovně: Buď si na chleba namažu hořčici, nebo nastane aspoň jedna z těchto variant: nebude máslo nebo nebude chleba nebo bude zavřený obchod.

Příklad 4.5:
Negujte následující složené výroky a ověřte správnost řešení pomocí příslušných tabulek pravdivostních hodnot:
1) $(a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow c)$

2) $a \veebar (b \wedge c \wedge \neg d)$
3) $a \Rightarrow (b \Leftrightarrow (a \Rightarrow \neg b))$
4) $a \vee \neg(\neg a \Rightarrow (a \wedge (a \vee \neg a)))$

Řešení:

1) $\neg((a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow c))$ je ekvivalentní s: $\neg(a \Rightarrow b) \wedge \neg(a \Rightarrow c)$ a to je ekvivalentní s: $(a \wedge \neg b) \wedge (a \wedge \neg c)$.(Dále budeme psát: $\neg((a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow c)) \equiv \neg(a \Rightarrow b) \wedge \neg(a \Rightarrow c) \equiv (a \wedge \neg b) \wedge (a \wedge \neg c)$ apod.)

Tabulky pravdivostních hodnot vypadají takto:

Tabulka 4.7

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$	$\boldsymbol{\neg((A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C))}$
1	1	1	1	1	1	**0**
1	1	0	1	0	1	**0**
1	0	1	0	1	1	**0**
1	0	0	0	0	0	**1**
0	1	1	1	1	1	**0**
0	1	0	1	1	1	**0**
0	0	1	1	1	1	**0**
0	0	0	1	1	1	**0**

Tabulka 4.8

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$A \wedge \neg B$	$A \wedge \neg C$	$\boldsymbol{(A \wedge \neg B) \wedge (A \wedge \neg C)}$
1	1	1	0	0	0	0	**0**
1	1	0	0	1	0	1	**0**
1	0	1	1	0	1	0	**0**
1	0	0	1	1	1	1	**1**
0	1	1	0	0	0	0	**0**
0	1	0	0	1	0	0	**0**
0	0	1	1	0	0	0	**0**
0	0	0	1	1	0	0	**0**

Z posledních sloupců tabulek 4.7 a 4.8 je vidět, že platí: $\neg((a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow c)) \equiv (a \wedge \neg b) \wedge (a \wedge \neg c)$

2) $\neg(a \veebar (b \wedge (c \wedge \neg d))) \equiv a \Leftrightarrow (b \wedge (c \wedge \neg d))$

Tabulka 4.9

A	B	C	D	$\neg D$	$C \wedge \neg D$	$B \wedge (C \wedge \neg D)$	$A \veebar (B \wedge (C \wedge \neg D))$	$\boldsymbol{\neg(A \veebar (B \wedge (C \wedge \neg D)))}$
1	1	1	1	0	0	0	1	**0**
1	1	1	0	1	1	1	0	**1**
1	1	0	1	0	0	0	1	**0**
1	1	0	0	1	0	0	1	**0**
1	0	1	1	0	0	0	1	**0**
1	0	1	0	1	0	0	1	**0**
1	0	0	1	0	0	0	1	**0**
1	0	0	0	1	0	0	1	**0**

0	1	1	1	0	0	0	0	**1**
0	1	1	0	1	1	1	1	**0**
0	1	0	1	0	0	0	0	**1**
0	1	0	0	1	0	0	0	**1**
0	0	1	1	0	0	0	0	**1**
0	0	1	0	1	1	0	0	**1**
0	0	0	1	0	0	0	0	**1**
0	0	0	0	1	0	0	0	**1**

Tabulka 4.10

A	B	C	D	$\neg D$	$C \wedge \neg D$	$B \wedge (C \wedge \neg D)$	$\mathbf{A \Leftrightarrow (B \wedge (C \wedge \neg D))}$
1	1	1	1	0	0	0	**0**
1	1	1	0	1	1	1	**1**
1	1	0	1	0	0	0	**0**
1	1	0	0	1	0	0	**0**
1	0	1	1	0	0	0	**0**
1	0	1	0	1	0	0	**0**
1	0	0	1	0	0	0	**0**
1	0	0	0	1	0	0	**0**
0	1	1	1	0	0	0	**1**
0	1	1	0	1	1	1	**0**
0	1	0	1	0	0	0	**1**
0	1	0	0	1	0	0	**1**
0	0	1	1	0	0	0	**1**
0	0	1	0	1	1	0	**1**
0	0	0	1	0	0	0	**1**
0	0	0	0	1	0	0	**1**

Z posledních sloupců tabulek 4.9 a 4.10 je vidět, že platí: $\neg(a \veebar (b \wedge (c \wedge \neg d))) \equiv a \Leftrightarrow (b \wedge (c \wedge \neg d))$

3) $\neg(a \Rightarrow (b \Leftrightarrow (a \Rightarrow \neg b))) \equiv a \wedge \neg(b \Leftrightarrow (a \Rightarrow \neg b)) \equiv a \wedge (b \veebar (a \Rightarrow \neg b))$

Tabulka 4.11

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow \neg B$	$B \Leftrightarrow (A \Rightarrow \neg B)$	$A \Rightarrow (B \Leftrightarrow (A \Rightarrow \neg B))$	$\mathbf{\neg(A \Rightarrow (B \Leftrightarrow (A \Rightarrow \neg B)))}$
1	1	0	0	0	0	**1**
1	0	1	1	0	0	**1**
0	1	0	1	1	1	**0**
0	0	1	1	0	1	**0**

Tabulka 4.12

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow \neg B$	$B \veebar (A \Rightarrow \neg B)$	$\mathbf{A \wedge (B \veebar (A \Rightarrow \neg B))}$
1	1	0	0	1	**1**
1	0	1	1	1	**1**
0	1	0	1	0	**0**
0	0	1	1	1	**0**

Z posledních sloupců tabulek 4.11 a 4.12 je vidět, že platí: $\neg(a \Rightarrow (b \Leftrightarrow (a \Rightarrow \neg b))) \equiv a \wedge (b \veebar (a \Rightarrow \neg b))$

4) $\neg(a \vee \neg(\neg a \Rightarrow (a \wedge (a \vee \neg a)))) \equiv \neg a \wedge (\neg a \Rightarrow (a \wedge (a \vee \neg a)))$

Tabulka 4.13

A	¬A	A ∨ ¬A	A(A ∨ ¬A)	¬A ⇒ (A ∧ (A ∨ ¬A))	¬(¬A ⇒ (A ∧ (A ∨ ¬A)))	A ∨ ¬(¬AÞ(A ∧ (A ∨ ¬A))))	**¬(A ∨ ¬(¬A ⇒ (A ∧ (A ∨ ¬A))))**
1	0	1	1	1	0	1	**0**
0	1	1	0	0	1	1	**0**

Tabulka 4.14

A	¬A	A ∨ ¬A	A ∧ (A ∨ ¬A)	¬A ⇒ (A ∧ (A ∨ ¬A))	**¬A ∧ (¬A ⇒ (A ∧ (A ∨ ¬A)))**
1	0	1	1	1	**0**
0	1	1	0	0	**0**

Z posledních sloupců tabulek 4.13 a 4.14 je vidět, že platí: $\neg(a \vee \neg(\neg a \Rightarrow (a \wedge (a \vee \neg a)))) \equiv \neg a \wedge (\neg a \Rightarrow (a \wedge (a \vee \neg a)))$

Výrokové formy

Příklad:

Určete, která z následujících tvrzení jsou výroky:

1) Přirozené číslo n je sudé.
2) Každé přirozené číslo n je sudé.
3) Existuje alespoň jedno přirozené číslo n, které je sudé.
4) Přirozené číslo 5 je sudé.
5) Studenti rádi hrají fotbal.
6) Někteří studenti rádi hrají fotbal.
7) Studenti Petr a Pavel rádi hrají fotbal.
8) Všichni studenti rádi hrají fotbal.

Řešení:

.Oznamovací věty 2,3,4,6,7,8 jsou výroky. Věty 1 a 5 bychom mohli po malé úpravě považovat za výroky, ale pokud jsou vysloveny pouze takto, říká se jim výrokové formy.

Definice:

Výrokovou formou (predikátem) rozumíme takové sdělení, které obsahuje jednu, nebo více proměnných, a které po dosazení přípustných hodnot proměnných (konstant z oboru proměnných) se stávají výroky. Značíme ji V(x), resp. $V(x_1,x_2,\ldots x_n)$.

Poznámka:

Např. z výrokové formy „přirozené číslo n je sudé." Jsme dosazením čísla 5 vytvořili nepravdivý výrok „přirozené číslo 5 je sudé."

Poznámka:

Výrokovou formou obsahující více proměnných je například sdělení $a^2 + b^2 = c^2$ z první kapitoly.

Poznámka:

Obdobně jako se vytvářejí složené výroky, lze také spojovat logickými spojkami výrokové formy s týmiž obory proměnných, mluvíme o logických operacích s výrokovými formami, jejichž výsledkem jsou složené výrokové formy (predikátové formule).

Kvantifikované výroky

Dosazení konstant za proměnné do výrokové formy není jediným způsobem, jak z ní vytvořit výrok. Dalším významným způsobem je kvantifikace, tj. doplnění výrokové formy údaji o počtu, resp. odhadu počtu konstant, jejichž dosazením za proměnné do výrokové formy bychom dostali výroky. Tato kvantifikace se provádí pomocí slovních spojení zvaných kvantifikátory.

Definice:
Kvantifikovaným výrokem rozumíme každý výrok vzniklý kvantifikací všech proměnných ve výrokové formě..

Poznámka:
Např. z výrokové formy „přirozené číslo n je sudé.“ Jsme doplněním slovíčka (kvantifikátoru) „Každé“ vytvořili nepravdivý výrok „Každé přirozené číslo n je sudé.“

Poznámka:
Příkladem kvantifikovaného výroku je i výše uvedená definice. O kvantifikovaný výrok se jedná díky kvantifikátoru „každý“.

Příklad:
Nalezněte v následujících výrocích kvantifikátory a určete pravdivostní hodnotu výroků:
1) Některé trojúhelníky jsou pravoúhlé.
2) Žádný člověk neviděl živého dinosaura.
3) Čtverec má právě 4 vnitřní pravé úhly.
4) Všechny obdélníky mají stejné obsahy.
5) Existuje alespoň jedno reálné číslo x, které je menší než jedna.
6) Číslo 9 je sudé.
7) Každý obdélník má aspoň 2 ostré vnitřní úhly.
8) Existuje nejvýše 10 000 000 přirozených čísel.

Řešení:
1) V této větě plní roli kvantifikátoru slovo „některé", neudává sice přesný počet, ale víme, že existuje aspoň jeden takový trojúhelník. Výrok je samozřejmě pravdivý, neboť pravoúhlé trojúhelníky opravdu existují.
2) Zde je kvantifikátorem slovo „žádný". O kvantifikátor se jedná, neboť jde o slovo, které udává počet lidí, kteří spatřili dinosaura. Výrok je pravdivý.
3) Kvantifikátorem je slovní spojení „právě 4" a výrok je pravdivý.
4) Kvantifikátorem je slovo „všechny“, výrok je nepravdivý.
5) Kvantifikátorem je slovní spojení „Existuje alespoň jedno“, výrok je pravdivý.
6) Ve výroku se sice vyskytuje číslovka, ale v této souvislosti nemá význam kvantifikátoru, výrok není kvantifikovaný. Výrok je pravdivý.
7) V tomto výroku se vyskytují hned dva kvantifikátory: „každý" a „aspoň 2". V každém obdélníku jsou všechny vnitřní úhly pravé, tedy výrok je nepravdivý.
8) Kvantifikátorem je slovní výraz „existuje nejvýše 10 000 000". Čísla l, 2, 3, ..., 10 000 000 jsou přirozená a je jich právě 10000000. Číslo 10 000 001 je také přirozené, ale není z množiny všech čísel l, 2,..., 10 000 000, a tedy existuje více než 10 000 000 přirozených čísel. Výrok je nepravdivý.

Význam některých kvantifikátorů lze dobře znázornit na číselné poloose začínající v bodě 0. Jedná se o kvantifikátory tohoto typu: „právě dva“, „aspoň dva“, „nejvýše dva“.

Příklad:
Vyznačme na číselné poloose všechna čísla udávající možné počty stokorun ve vlastnictví člověka,

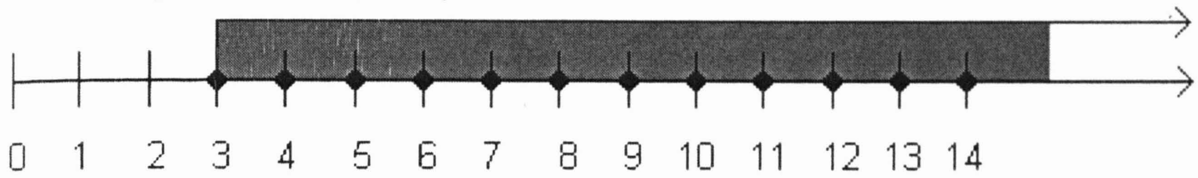
který říká pravdivé výroky:

1) Mám aspoň tři stokoruny.
2) Mám právě dvě, nebo aspoň šest stokorun.
3) Mám aspoň pět, ale nejvýš deset stokorun.
4) Mám nejvýš dvě nebo aspoň osm stokorun.

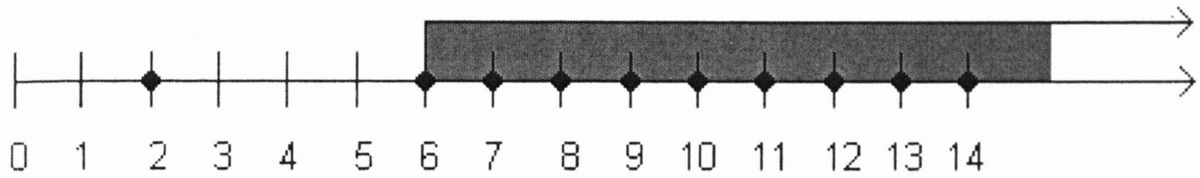
Kolik stokorun by měl člověk, který by vyslovil pravdivou konjunkci všech čtyř výroků?

Řešení:

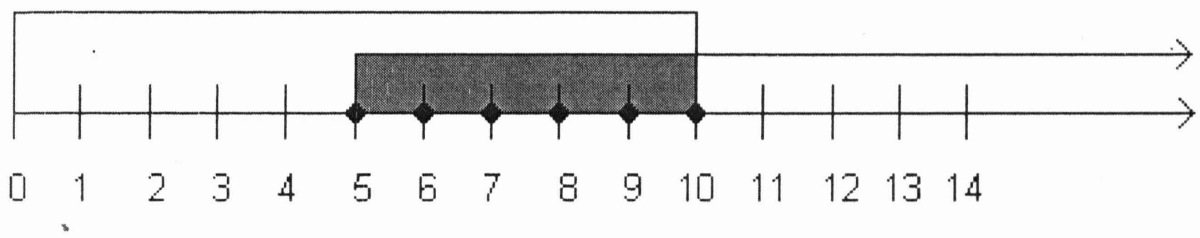
1) Mám aspoň tři stokoruny.



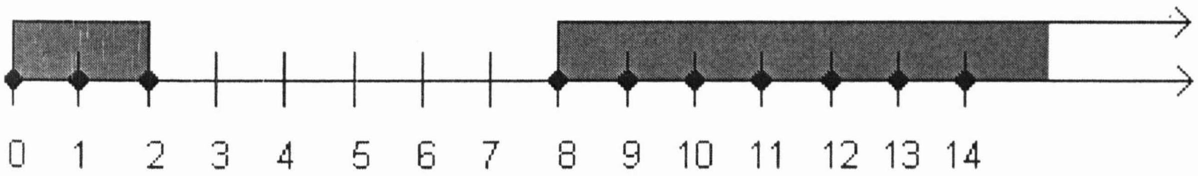
2) Mám právě dvě, nebo aspoň šest stokorun.



3) Mám aspoň pět, ale nejvýš deset stokorun.



4) Mám nejvýš dvě nebo aspoň osm stokorun.



Člověk, který vysloví pravdivou konjunkci všech výše uvedených výroků má nejméně 8 a nejvýše 10 stokorun, protože tyto počty vyhovují všem výše uvedeným variantám.

Velký a malý kvantifikátor

Mezi všemi kvantifikátory jsou dva, které zaujímají v matematice a logice výsadní místo. Obvykle nás zajímá, jestli nějaký objekt existuje, a už se nestaráme o to, kolik jich je, nebo nás zajímá, jestli všechny zkoumané objekty mají danou vlastnost.

Definice:
Obecným (též velkým) **kvantifikátorem** rozumíme kvantifikátor, který vyjadřuje, že každý uvažovaný objekt má (nebo žádný nemá) vlastnost, o kterou jde. Kromě slov „každý, žádný" užíváme také slov „pro každé, pro všechna, všechny, libovolný, kterýkoliv, ani jeden". Značíme ho $\forall$. Výrok, ve kterém je první kvantifikátor obecný, se nazývá obecný.

Příklady obecných výroků:
- s jednou proměnnou
Pro každé reálné číslo x platí, že $x^2 \geq 0$. (matematický zápis: $\forall x \in R;\ x^2 \geq 0$)
Žádný lichoběžník není rovnoramenný.
- s více proměnnými
Pro každé reálné číslo x existuje (aspoň jedno) reálné číslo y takové, že platí, že x > y. matematický zápis: $\forall x \in R\ \exists y \in R;\ x > y$

Poznámka:
Zápis $x \in R$ znamená, že x je prvkem množiny reálných čísel R, tj. že x je reálné číslo. Podrobněji se se symbolem $\in$ můžete seznámit v první kapitole o množinách, množina a její určení .

Definice:
Existenčním (též malým) **kvantifikátorem** rozumíme kvantifikátor, který vyjadřuje, že aspoň jeden uvažovaný objekt má vlastnost, o kterou jde. Kromě slov „existuje aspoň jeden" užíváme také slov „někteří, lze nalézt, existuje". Značíme ho $\exists$. Výrok, ve kterém je první kvantifikátor existenční, se nazývá existenční.

Příklady existenčních výroků:
- s jednou proměnnou
Některé zlomky nelze zkrátit.
Existuje aspoň jedno reálné číslo x takové, že platí: $x^2 = 3$
(matematický zápis: $\exists x \in R;\ x^2 = 3$)
-s více proměnnými:
Existuje (aspoň jedno) reálné číslo y takové, že pro každé reálné číslo x platí, že x > y. ....
matematický zápis: $\exists y \in R\ \forall x \in R;\ x > y$

Poznámka:
Porovnejte oba uvedené výroky s více proměnnými. Všimněte si toho, jak malá změna (změna pořadí kvantifikátorů a proměnných) ovlivní význam celého tvrzení. Každý výrok říká něco zcela jiného, první je pravdivý, druhý ne, přitom jejich matematický zápis se liší nepatrně. Proto je v matematické řeči třeba dbát na každý detail, všechny myšlenky a tvrzení formulovat zcela přesně.

Příklad:
Určete, které z následujících výroků jsou výroky existenční a které obecné:
1) Všichni psi mají blechy.
2) Existují psi, kteří blechy nemají.
3) $\forall z \in Z\ \exists n \in N;\ |z| = n$
4) $\exists! x \in R\ \forall y \in R;\ y + x = y$

Poznámka:
Symbol "!" v matematickém zápisu znamená „právě jeden" (právě jedno, právě jedna), tj aspoň jeden a nejvýš jeden. Když tento znak následuje bezprostředně existenční kvantifikátor, mluvíme o spojení znaků $\exists!$ jako o kvantifikátoru jednoznačné existence a čteme „ existuje právě jedno".

Řešení:
1) Všichni psi mají blechy. Toto je obecný výrok díky kvantifikátoru „všichni".
2) Existují psi, kteří blechy nemají. Toto je existenční výrok díky kvantifikátoru „existují".
3) $\forall z \in Z\ \exists n \in N;\ |z| = n$. Toto je obecný výrok díky tomu, že první kvantifikátor je obecný.
4) $\exists! x \in R\ \forall y \in R;\ y + x = y$. Toto je existenční výrok díky tomu, že první kvantifikátor je existenční.

Příklad:
Pokuste se následující složené výroky přetvořit na jednoduché tak, aby se zachoval jejich význam:
1) Jestliže cestuji do zahraničí, potřebuji cestovní pas.
2) Jestliže si koupíte 6-ti kilogramové balení pracího prášku, dostanete 0,5 kg zdarma.
3) Je-li trojúhelník rovnostranný, potom je také rovnoramenný.
4) $n \in N \Rightarrow n \in Z$

Nápověda: Pomůže nám obecný kvantifikátor.

Řešení:
1) Při každé cestě do zahraničí potřebuji cestovní pas.
2) Ke každému zakoupenému 6-ti kilogramovému balení pracího prášku dostanete 0,5 kg zdarma.
3) Každý rovnostranný trojúhelník je rovnoramenný.
4) Každé přirozené číslo je celé číslo.

Poznámka:
Na předchozích výrocích jsme si ukázali, že obecný kvantifikátor má svým způsobem velmi blízko k implikaci. Některé implikace lze snadno nahradit obecnými výroky a naopak.

Negování kvantifikovaných výroků

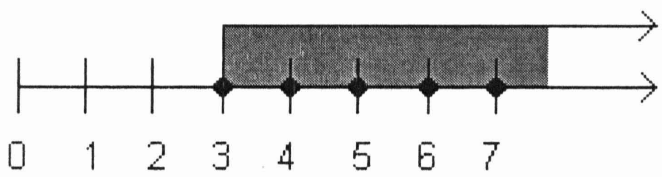
I kvantifikované výroky můžeme samozřejmě negovat pomocí předřazení slov “Není pravda, že…“. Stejně jako v předchozích případech se však budeme snažit o pozitivní vyjádření negace. Musíme si však dát pozor na to, aby byla negace výroku pravdivá, resp. nepravdivá právě tehdy, když je původní výrok nepravdivý, resp. pravdivý. Např. pro výrok „V naší vsi dnes ráno kokrhali aspoň 3 kohouti.“ (ve žije 10 kohoutů) není negací výrok „V naší vsi dnes ráno nekokrhali aspoň 3 kohouti.“ (Oba výroky jsou pravdivé např. pro variantu, že 4 kohouti kokrhali a 6 ne.) Správnou negací je výrok: „V naší vsi dnes ráno kokrhali nejvýše 2 kohouti.“ Pro tvorbu negací kvantifikovaných výroků je vhodné grafické znázornění na číselné poloose.

Příklad:
Zformulujte pozitivní vyjádření negací následujících výroků a využijte znázornění na číselné poloose:

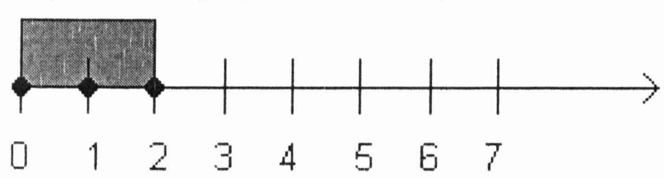
1) Aspoň 3 okna jsou otevřená.
2) Novákovi mají 3, nebo 4 děti.
3) Rovnice $2x^8 - 2 = 0$ má aspoň 2 reálné kořeny.
4) Nejvýše 4 prvočísla jsou jednociferná čísla.
5) Právě jedno prvočíslo je sudé.

Řešení:
Budeme postupovat tak, že si napřed zeleně znázorníme původní výrok, a pak červeně jeho negaci.

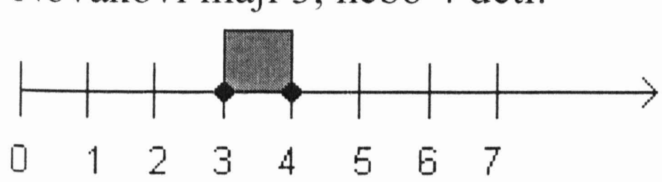
1) Aspoň 3 okna jsou otevřená.



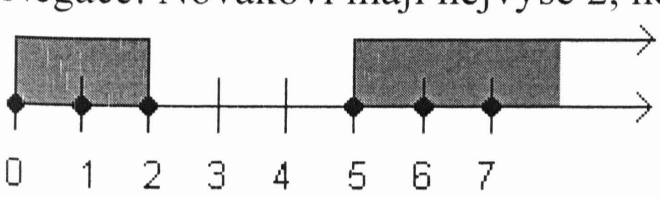
Negace: Nejvýše 2 okna jsou otevřená.



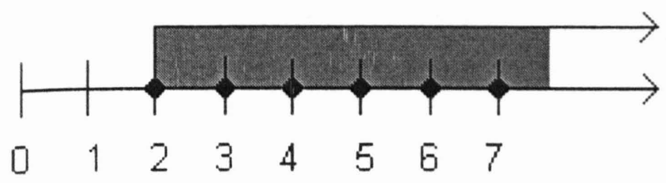
2) Novákovi mají 3, nebo 4 děti.



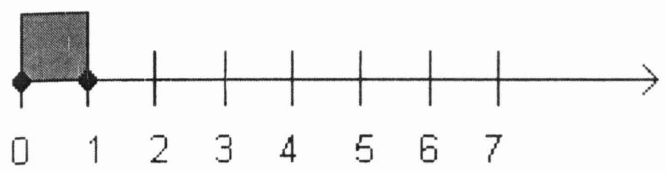
Negace: Novákovi mají nejvýše 2, nebo aspoň 5 dětí.



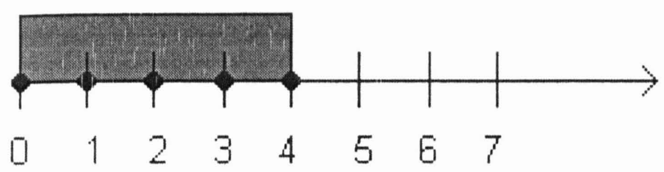
3) Rovnice $2x^8-2=0$ má aspoň 2 reálné kořeny.



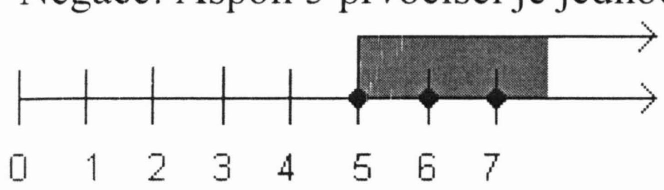
Negace: Rovnice $2x^8-2=0$ má nejvýše 1 reálný kořen.



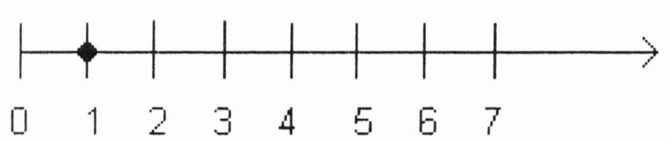
4) Nejvýše 4 prvočísla jsou jednociferná čísla.



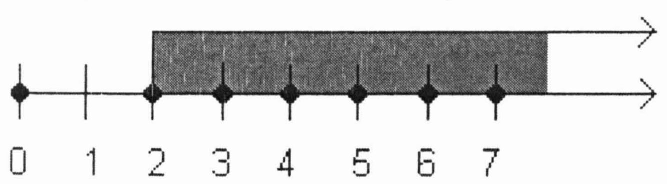
Negace: Aspoň 5 prvočísel je jednociferných.



5) Právě jedno prvočíslo je sudé.



Negace: Žádné nebo aspoň 2 prvočísla jsou sudá.



Příklad:

Negujte pozitivně výroky:

1) Všechny násobky osmi jsou sudá čísla.
2) Některé násobky osmi jsou násobky pěti.
3) Aspoň jeden kořen rovnice (x – 3) . (x + 5) je záporné číslo.
4) Všechny trojúhelníky mají součet délek těžnic větší než součet délek stran.
5) Některé zlomky nelze zkrátit.
6) Žádný lichoběžník není rovnoramenný.

Řešení:

1) Existuje aspoň jeden násobek osmi, který není sudé číslo.
2) Žádné násobky osmi nejsou násobky pěti.
3) Žádný kořen rovnice (x – 3) . (x + 5) není záporné číslo.
4) Existuje aspoň jeden trojúhelník, který má součet délek těžnic větší než součet délek stran.
5) Všechny zlomky lze zkrátit.
6) Existuje aspoň jeden lichoběžník, který je rovnoramenný.

Příklad:

Zformulujte negace následujících výroků slovně i matematickým zápisem:

1) Pro každé reálné číslo x platí, že $x^2 \geq 0$. (matematický zápis: $\forall x \in R;\ x^2 \geq 0$)
2) Existuje aspoň jedno reálné číslo x takové, že platí: $x^2 = 3$. (matematický zápis: $\exists x \in R;\ x^2 = 3$)

Řešení:

1) Existuje aspoň jedno reálné číslo x, pro které neplatí, že $x^2 \geq 0$. (matematický zápis: $\exists x \in R;\ x^2 < 0$)
2) Pro všechna reálná čísla x platí že $x^2 \neq 3$. (matematický zápis: $\forall x \in R;\ x^2 \neq 3$)

Poznámka:

Všimli jste si něčeho? Že se při negování zaměňuje obecný kvantifikátor za existenční a naopak? Správně. Pro negování výroků s kvantifikátory $\forall, \exists$ lze formulovat jednoduchá pravidla, která platí nejen tehdy, když v negovaném kvantifikovaném výroku je jediný kvantifikátor $\forall$, resp. $\exists$ (viz tabulka), ale také tehdy, když je v něm více kvantifikátorů tohoto typu.

Tabulka 5 - tabulka negací výroků s jedním z kvantifikátorů $\forall, \exists$:

Kvantifikovaný výrok	Negace výroku
$\forall x \in D;\ V(x)$	$\exists x \in D;\ \neg V(x)$
$\exists x \in D;\ V(x)$	$\forall x \in D;\ \neg V(x)$

Pravidla negace výroků s kvantifikátory $\forall$, $\exists$:

- V negovaném kvantifikovaném výroku zaměníme každý kvantifikátor $\forall$ kvantifikátorem $\exists$ a naopak.
- Výrokovou formu v negovaném kvantifikovaném výroku nahradíme její negací.

Příklady 5

Příklad 5.1:

Určete, zda se jedná o kvantifikovaný výrok a pokud ano, nalezněte kvantifikátor:

1) Všichni lidé na Zemi potřebují k životu vodu, kyslík a potravu.
2) Každé ráno vyjde Slunce.
3) Písmeno C je třetí v abecedě.
4) Někteří papoušci umí mluvit.
5) Číslo 15 je dělitelné třemi.
6) Závodník s číslem 12 doběhl šestý.
7) Žádný dopink nebyl povolen.
8) Každý rovnoramenný trojúhelník má aspoň 2 shodné vnitřní úhly.

Řešení:

1) Jedná se o kvantifikovaný výrok, kvantifikátorem je slovíčko „všichni“.
2) Jedná se o kvantifikovaný výrok, kvantifikátorem je slovíčko „všichni“.
3) Nejedná se o kvantifikovaný výrok, číslovka „třetí“ není kvantifikátor.
4) Jedná se o kvantifikovaný výrok, kvantifikátorem je slovíčko „někteří“.
5) Nejedná se o kvantifikovaný výrok, číslovky „15“ ani „třemi“ nejsou kvantifikátory.
6) Nejedná se o kvantifikovaný výrok, číslovky „12“ ani „šestý“ nejsou kvantifikátory.
7) Jedná se o kvantifikovaný výrok, kvantifikátorem je slovíčko žádný“.
8) Jedná se o kvantifikovaný výrok, kvantifikátory jsou výrazy „každý“ a „aspoň 2“.

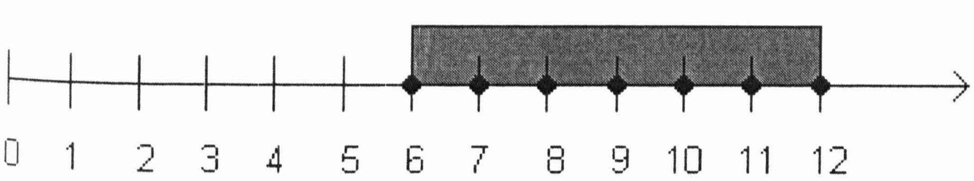
Příklad 5.2:

Vyznačte na číselné poloose všechna čísla udávající možné počty měsíců majících 31 dnů podle následujících výroků a rozhodněte, zda jsou výroky pravdivé:

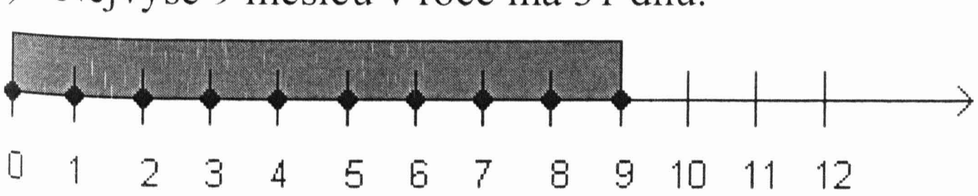
1) Aspoň 6 měsíců v roce má 31 dnů.
2) Nejvýše 9 měsíců v roce má 31 dnů.
3) Právě 5 měsíců v roce nemá 31 dnů.
4) Právě 8 měsíců v roce má 31 dnů.
5) Aspoň 8 nebo nejvýše 6 měsíců v roce má 31 dnů.
6) Aspoň 6 a ne víc než 8 měsíců v roce má 31 dnů.

Řešení:

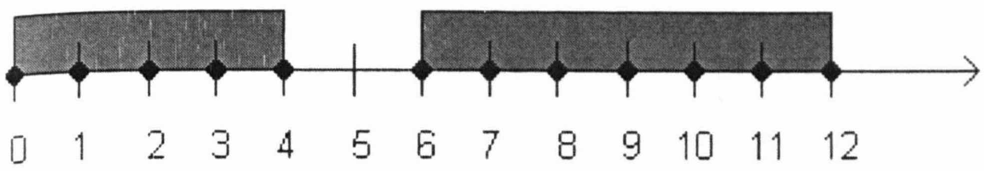
1) Aspoň 6 měsíců v roce má 31 dnů.



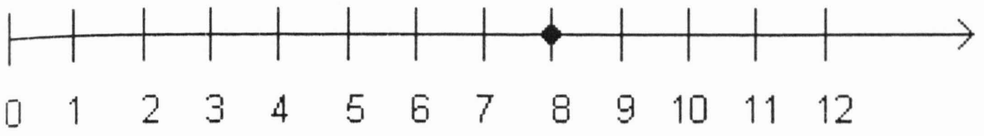
2) Nejvýše 9 měsíců v roce má 31 dnů.



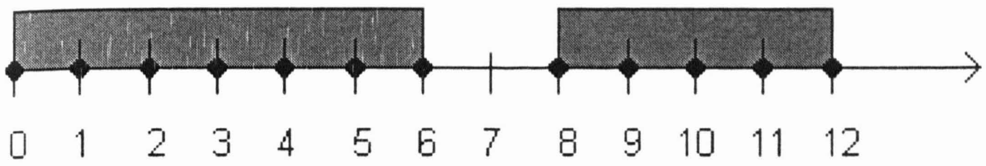
3) Právě 5 měsíců v roce nemá 31 dnů.



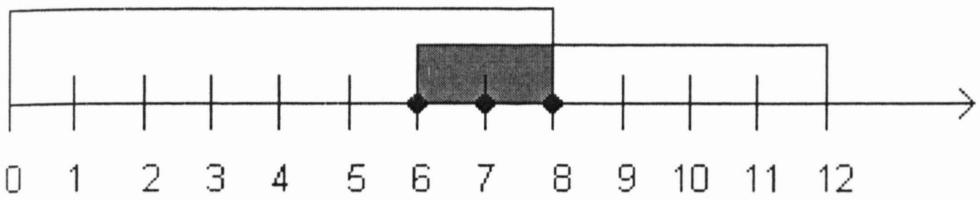
4) Právě 8 měsíců v roce má 31 dnů.



5) Aspoň 8 nebo nejvýše 6 měsíců v roce má 31 dnů.



6) Aspoň 6 a ne víc než 8 měsíců v roce má 31 dnů.



Příklad 5.3:

Negujte pozitivně výroky:

1) Všechny houby jsou jedlé.
2) Některé houby jsou jedovaté.
3) Aspoň jedna houba je jedlá a zároveň jedovatá.
4) Na každou planetu Sluneční soustavy dorazila aspoň jedna sonda již ve 20. století.
5) Něco je ve vzduchu.
6) Nikdo se nezranil.

Řešení:

1) Aspoň jedna houba není jedlá.
2) Žádná houba není jedovatá.
3) Žádná houba není jedlá a zároveň jedovatá.
4) Aspoň na jednu planetu Sluneční soustavy žádná sonda ve 20. století nedorazila.
5) Nic není ve vzduchu.
6) Někdo se zranil.

Příklad 5.4:

Zformulujte negace následujících výroků slovně i matematickým zápisem:

1) Pro každé přirozené číslo n platí, že $n - 1 \geq 0$. (matematický zápis: $\forall n \in N;\ n - 1 \geq 0$)
2) Existuje aspoň jedno přirozené číslo n takové, že platí,že číslo 2n je dělitelné dvěma (matematický zápis: $\exists n \in N;\ 2/2n$).

Řešení:

1) Existuje aspoň jedno přirozené číslo n, pro které platí, že $n - 1 \geq 0$. (matematický zápis: $\exists n \in N;\ n - 1 < 0$)
2) Pro každé přirozené číslo n platí, že číslo 2n není dělitelné dvěma (matematický zápis:$\exists n \in N;$

$2 \nmid 2n)$

Příklad 5.5:

Zformulujte negace následujících výroků a určete pravdivost těchto negací:

1) $\forall k \in Z; \left| k \right| + 1 \in N$
2) $\exists l \in Z; 3/(2n + 1)$

Řešení:

1) $\neg(\forall k \in Z; \left| k \right| + 1 \in N)$ tj. $\exists k \in Z; \left| k \right| + 1 \notin N$.....nepravda
2) $\neg(\exists l \in Z; 3 \nmid (2n + 1))$ tj. $\forall l \in Z; 3 \nmid (2n + 1)$.....pravda

Logická výstavba matematiky

Jedním z hlavních rysů soudobé matematiky je axiomatická logická výstavba matematických teorií. Jejím základem jsou axiómy (postuláty) – výchozí matematické výroky, které se prohlásí za pravdivé bez dokazování. Obsahují základní (primitivní) pojmy, které se nedefinují, ale pokládají se za zavedené (úplně charakterizované) právě soustavou axiómů. /Přitom soustava axiómů musí mít tyto vlastnosti: bezespornost (ze soustavy axiómů není možné odvodit jeho výrok a zároveň jeho negaci), úplnost (ze soustavy axiómů je možné odvodit pravdivost, nebo nepravdivost).
Další matematické pojmy se zavádějí pomocí definic. Definice stanoví název (popř. označení) zaváděného pojmu a vymezuje podstatné (charakteristické) vlastnosti pojmu pomocí dříve definovaných nebo primitivních pojmů. Jako příklad různých forem definice uvedeme některé formulace definice čtverce: „Rovnoběžník, který má všechny strany shodné a všechny vnitřní úhly pravé, se nazývá čtverec.“ „Rovnoběžníku, jehož všechny strany jsou shodné a všechny vnitřní úhly pravé, se říká čtverec.“ „Čtvercem rozumíme rovnoběžník, jehož všechny strany jsou shodné a všechny vnitřní úhly pravé.“
Své výsledky formuluje matematická teorie ve větách. Matematická věta (poučka, teorém) je pravdivý matematický výrok, který má význam v matematické teorii nebo její aplikaci a dá se odvodit pomocí logiky na základě axiómů, definic a dříve dokázaných vět. Věty, které obsahují návod k provedení výpočtu nebo konstrukce, se nazývají též pravidla. Pro pomocné věty se v matematické literatuře používá název lemma.
Matematické věty se dokazují, tj. ověřuje se, že představují pravdivé výroky neboli že věta platí. Důkaz pravdivosti výroku je logický proces, jímž ověřujeme pravdivost výroku na základě pravdivosti jiných výroků užitím logických zákonů. Speciálně důkazem věty nazýváme logický proces, kterým ověřujeme její platnost pomocí axiómů, definic a dříve dokázaných vět na základě logických zákonů.
Většina matematických vět má tvar obecného výroku $\forall \ldots$, tzv. obecné věty, anebo existenčního výroku $\exists \ldots$, tzv. existenční věty.

Podle druhu logických zákonů použitých v důkazu rozlišujeme tyto základní typy důkazů výroků a obecných vět ve tvaru implikace:

Přímý důkaz

Přímý důkaz implikace $p \Rightarrow q$ spočívá v tom, že sestavíme řetězec pravdivých implikací $p \Rightarrow p_1$, $p_1 \Rightarrow p_2, \ldots, p_n \Rightarrow q$, čili $p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow p_n \Rightarrow q$, z čehož plyne platnost dokazované implikace $p \Rightarrow q$.

Příklad přímého důkazu:

Máme dokázat tuto obecnou větu: $\forall n \in N;\ 3/n \Rightarrow 3/n^2$
Přímý důkaz provedeme sestavením řetězce obecných vět ve tvaru implikací: $\Rightarrow$
$n \in N;\ 3/n \Rightarrow \exists k \in N;\ n = 3k \Rightarrow n^2 = 9k^2 = 3\ .\ 3k^2 \Rightarrow 3/n^2$. Platí tedy: $\forall n \in N;\ 3/n3/n^2$ a to jsme chtěli dokázat.

Nepřímý důkaz

Nepřímý důkaz implikace $p \Rightarrow q$ spočívá v přímém důkazu její obměny $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Příklad nepřímého důkazu:

Máme dokázat tuto obecnou větu: $\forall n \in N;\ n^2$ je sudé $\Rightarrow$ n je sudé.
Nepřímý důkaz provedeme jako přímý důkaz obměny dokazované věty. Bude to tedy přímý důkaz věty: $\forall n \in N;\ \neg$(n je sudé) $\Rightarrow \neg(n^2$ je sudé) neboli: $\forall n \in N$; n je liché $\Rightarrow$ n^2 je liché

Při přímém důkazu této věty postupujeme analogicky jako v předchozím příkladu.
$\forall n \in N$: n je liché $\Rightarrow \exists k \in N$; $n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow n^2$ je liché. Platí tedy $\forall n \in N$; n je liché $\Rightarrow n^2$ je liché a to jsme chtěli dokázat.

Důkaz sporem

Důkaz sporem výroku v (např. implikace $p \Rightarrow q$) vychází z předpokladu platnosti negace $\neg v$; sestavíme řetězec pravdivých implikací $\neg v \Rightarrow \neg v_1$, $\neg v_1 \Rightarrow \neg v_2, \ldots, \neg v_n \Rightarrow \neg z$, čili $\neg v \Rightarrow \neg z$, kde výrok z neplatí (říkáme, že došlo ke sporu), odtud vyplývá, že neplatí výrok $\neg v$, a tedy platí dokazovaný výrok v.

Příklad důkazu sporem:

Máme dokázat tuto obecnou větu: $\forall r \in R; r \neq 0 \Rightarrow r^2 + \frac{1}{r^2} \geq 2$

Vytvořme napřed negaci této věty: $\neg(\forall r \in R; r \neq 0 \Rightarrow$ tj. $\exists r \in R$: $\neg(r \neq 0 \Rightarrow r^2 + \frac{1}{r^2} \geq 2)$ tj. $\exists r \in R$: $r \neq 0 \wedge r^2 + \frac{1}{r^2} < 2$. Pokud jste něčemu nerozuměli, vraťte se ke kapitolám o negování složených a kvantifikovaných výroků. Pak porozumíte. Vzhledem k tomu, že $r \neq 0$, je $r^2 > 0$ a tedy můžeme nerovnici bez problémů vynásobit r^2 a dostaneme $r^4 + 1 < 2r^2 \Rightarrow r^4 - 2r^2 + 1 < 0 \Rightarrow (r^2 - 1)^2 < 0$. Poslední nerovnice je jednoznačně spor, protože druhá mocnina reálného čísla nemůže nikdy být menší než nula. Došli jsme ke sporu, důkaz je tedy hotov.

Důkaz matematickou indukcí

Důkaz matematickou indukcí se užívá pro obecné věty typu $\forall n \in N$; $n \geq n_0$: $V(n)$, kde $V(n)$ je výroková forma proměnné n z N, n_0 je dané přirozené číslo (pokud větu dokazujeme pro všechna přirozená n, je $n_0 = 1$). Metoda důkazu matematickou indukcí spočívá ve dvou krocích:
I. Dokážeme, že věta platí pro $n = n_0$, tj. platí $V(n_0)$.
II. Dokážeme pro každé přirozené číslo $k \geq n_0$: Jestliže platí $V(k)$, pak platí také $V(k + 1)$, tj. platí implikace $V(k) \Rightarrow V(k + 1)$.
(II. kroku se říká indukční krok a jeho předpoklad se nazývá indukční předpoklad.)

Příklad důkazu věty matematickou indukcí:

Dokažte větu: $\forall n \in N$; $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$

Označme dokazovanou rovnost $V(n)$ a součet na její levé straně s_n.
I.krok: Ověříme platnost $V(1)$ tj. do výrokové formy dosadíme za n číslo 1.

$1 = \frac{1}{2} 1 \cdot (1 + 1) \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow V(1)$ tedy platí.

II.krok: Dokážeme implikaci $V(k) \Rightarrow V(k + 1)$ pro každé $k \in N$.
Předpokládejme, že dokazovaná rovnost platí pro nějaké $n = k \in N$, tj. platí:

Při přímém důkazu této věty postupujeme analogicky jako v předchozím příkladu.
$\forall n \in N$: n je liché $\Rightarrow \exists k \in N$; $n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow n^2$ je liché. Platí tedy $\forall n \in N$; n je liché $\Rightarrow n^2$ je liché a to jsme chtěli dokázat.

Důkaz sporem

Důkaz sporem výroku v (např. implikace $p \Rightarrow q$) vychází z předpokladu platnosti negace $\neg v$; sestavíme řetězec pravdivých implikací $\neg v \Rightarrow \neg v_1$, $\neg v_1 \Rightarrow \neg v_2, \ldots, \neg v_n \Rightarrow \neg z$, čili $\neg v \Rightarrow \neg z$, kde výrok z neplatí (říkáme, že došlo ke sporu), odtud vyplývá, že neplatí výrok $\neg v$, a tedy platí dokazovaný výrok v.

Příklad důkazu sporem:

Máme dokázat tuto obecnou větu: $\forall r \in R$; $r \neq 0 \Rightarrow r^2 + \frac{1}{r^2} \geq 2$

Vytvořme napřed negaci této věty: $\neg(\forall r \in R; r \neq 0 \Rightarrow$ tj. $\exists r \in R$: $\neg(r \neq 0 \Rightarrow r^2 + \frac{1}{r^2} \geq 2)$ tj. $\exists r \in R$: $r \neq 0 \wedge r^2 + \frac{1}{r^2} < 2$. Pokud jste něčemu nerozuměli, vraťte se ke kapitolám o negování složených a kvantifikovaných výroků. Pak porozumíte. Vzhledem k tomu, že $r \neq 0$, je $r^2 > 0$ a tedy můžeme nerovnici bez problémů vynásobit r^2 a dostaneme $r^4 + 1 < 2r^2 \Rightarrow r^4 - 2r^2 + 1 < 0 \Rightarrow (r^2 - 1)^2 < 0$. Poslední nerovnice je jednoznačně spor, protože druhá mocnina reálného čísla nemůže nikdy být menší než nula. Došli jsme ke sporu, důkaz je tedy hotov.

Důkaz matematickou indukcí

Důkaz matematickou indukcí se užívá pro obecné věty typu $\forall n \in N$; $n \geq n_0$: V(n), kde V(n) je výroková forma proměnné n z N, n_0 je dané přirozené číslo (pokud větu dokazujeme pro všechna přirozená n, je $n_0 = 1$). Metoda důkazu matematickou indukcí spočívá ve dvou krocích:
I. Dokážeme, že věta platí pro $n = n_0$, tj. platí $V(n_0)$.
II. Dokážeme pro každé přirozené číslo $k \geq n_0$: Jestliže platí V(k), pak platí také V(k + 1), tj. platí implikace $V(k) \Rightarrow V(k + 1)$.
(II. kroku se říká indukční krok a jeho předpoklad se nazývá indukční předpoklad.)

Příklad důkazu věty matematickou indukcí:

Dokažte větu: $\forall n \in N$; $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$

Označme dokazovanou rovnost V(n) a součet na její levé straně s_n.
I.krok: Ověříme platnost V(1) tj. do výrokové formy dosadíme za n číslo 1.

$1 = \frac{1}{2} 1 \cdot (1+1) \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow$ V(1) tedy platí.

II.krok: Dokážeme implikaci $V(k) \Rightarrow V(k + 1)$ pro každé $k \in N$.
Předpokládejme, že dokazovaná rovnost platí pro nějaké $n = k \in N$, tj. platí:

$1+2+\ldots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$ čili $s_k=\frac{1}{2}k(k+1)$.

Máme dokázat, že za tohoto předpokladu dokazovaná rovnost V(n) platí také pro n=k+1, tj. platí:

$1+2+\ldots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ čili $s_{k+1}=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$.

Dosaďme do levé strany rovnosti V(k+1) za 1+2+...+k pravou stranu rovnosti V(k).

Tedy platí: $\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ ....roznásobíme závorky

$\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+k+1=\frac{1}{2}(k^2+k+2k+2)$ ...a dále upravíme

$\frac{1}{2}(k^2+3k+2)=\frac{1}{2}(k^2+3k+2)$ a to jsme potřebovali dostat. Rovnost V(n) tedy platí i pro n=k+1 a důkaz je hotov.

Důkaz ekvivalence

Důkaz ekvivalence výroků p $\Leftrightarrow$ q lze provést tak, že dokážeme implikaci p $\Rightarrow$ q a obrácenou implikaci q $\Rightarrow$ p. Obě implikace je nutno dokazovat zvlášť, neboť z platnosti implikace ještě neplyne platnost obrácené implikace.

Příklad důkazu ekvivalence:
Dokažme tuto větu: $\forall n\in Z;\ 6/n \Leftrightarrow 3/n \wedge 2/n$
I.krok: Dokážeme větu: $\forall n\in Z;\ 6/n \Rightarrow 3/n \wedge 2/n$
Předpokládejme, že $\forall n\in N;\ 6/n$. To znamená, že ke každému číslu n existuje číslo $k\in Z$ takové, že platí: n = 6k, potom pro čísla l = 2k a m = 3k platí: n = 3l a n = 2m. Tj. $3/n \wedge 2/n$. Provedli jsme tedy přímý důkaz obecné věty, podobně budeme postupovat i ve II. Kroku.
II.krok: Dokážeme větu: $\forall n\in Z\text{: } 3/n \wedge 2/n \Rightarrow 6/n$
Předpokládejme, že $\forall n\in Z;\ 3/n \wedge 2/n$ z toho plyne, že $\forall n\in Z\ \exists l, m\in Z;\ n=3l \wedge n=2m \Rightarrow 3l=2m$ $\Rightarrow m=\frac{3}{2}l$ Vzhledem k tomu, že m je celé číslo, musí být i $\frac{3}{2}l$ celé číslo, tj. l musí být dělitelné dvěma $\Rightarrow \exists c\in Z;\ l=2c \Rightarrow n=3l=6c \Rightarrow 6/n$ Tím jsme provedli i důkaz obrácené implikace a důkaz ekvivalence je tedy hotov.

Příklady 6

Příklad 6.1:

Určete, které z následujících výroků jsou definice a které věty středoškolské matematiky:

1) Celé číslo, jehož ciferný součet je dělitelný devíti, je dělitelné devíti.

   a) Definice **Špatně!**

   b) Věta *Správně!*

2) Kruh se středem S a poloměrem r je množina všech bodů, které mají od bodu S vzdálenost menší, nebo rovnu r.

   a) Definice *Správně!*

   b) Věta **Špatně!**

3) Ostroúhlý trojúhelník je trojúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou ostré.

   a) Definice *Správně!*

   b) Věta **Špatně!**

4) Každý rovnostranný trojúhelník je ostroúhlý.

   a) Definice **Špatně!**

   b) Věta *Správně!*

5) Číslo 2 je jediné sudé prvočíslo.

   a) Definice **Špatně!**

   b) Věta *Správně!*

6) Prvočíslo je každé číslo, které má právě 2 dělitele.

   a) Definice *Správně!*

   b) Věta **Špatně!**

7) Obsah obdélníka je roven součinu délek jeho stran.

   a) Definice **Špatně!**

   b) Věta *Správně!*

8) Obdélník je rovnoběžník, který má všechny vnitřní úhly pravé a nemá všechny strany shodné.

   a) Definice *Správně!*

   b) Věta **Špatně!**

Příklad 6.2:

Podejte přímý důkaz věty: Druhá mocnina libovolného sudého čísla je opět číslo sudé.

Řešení:

Symbolicky: $\forall n \in N;\ 2/n \Rightarrow 2/n^2$

Přímý důkaz provedeme sestavením řetězce obecných vět ve tvaru implikací:

$\forall n \in N;\ 2/n \Rightarrow \exists k \in N;\ n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2.2k^2 \Rightarrow 2/n^2$. Platí tedy $\forall n \in N;\ 2/n \Rightarrow 2/n^2$ a to jsme chtěli dokázat.

Příklad 6.3:

Podejte nepřímý důkaz věty: Pro každé přirozené n platí, že jestli n^3-n není dělitelné 30ti, potom n není dělitelné 5ti.

Řešení:

Nepřímý důkaz provedeme jako přímý důkaz obměny dokazované věty. Bude to tedy přímý důkaz věty: $\forall n \in N;\ 5/n \Rightarrow 30/(n^3 - n)$.

Předpokládáme tedy, že 5/n. To znamená, že n = 5k, kde $k \in N$. Výraz $n^3 - n$ lze rozložit na součin $(n - 1)n(n + 1)$, což je součin tří po sobě následujících činitelů, čili právě jeden z nich musí být dělitelný třemi a aspoň jeden z nich musí být dělitelný dvěma. A protože prostřední z nich je dělitelný pěti, musí být celý součin dělitelný součinem prvočísel 3.2.5, tedy 30ti. Platí tedy: $\forall n \in N;\ 5/n \Rightarrow 30/(n^3 - n)$ a to jsme chtěli dokázat.

Příklad 6.4:

Dokažte sporem výrok: „ $\sqrt{2}$ je iracionální číslo“.

Řešení:

Vyjdeme z negace daného výroku, tedy z výroku: „ $\sqrt{2}$ je racionální číslo“. To ovšem znamená, že $\sqrt{2}$ lze zapsat ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou dvě nesoudělná celá čísla.

Platí tedy: $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ … umocníme celou rovnici na druhou

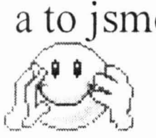
$p^2 = 2q^2$ $p^2 = 2q^2$ Jelikož q je celé číslo, q^2 je také celé číslo $\Rightarrow$ p^2 je sudé $\Rightarrow$ p musí být také sudé, protože druhá mocnina lichého číslo nemůže být sudé číslo. Mužem to tedy zapsat ve tvaru p = 2k $\Rightarrow p^2 = 4k^2$. A protože $p^2 = 2q^2$, platí: $2q^2 = 4k^2$, tedy $q^2 = 2k^2$. A jestliže q^2 je sudé $\Rightarrow$ q musí být také sudé. Došli jsme k tomu, že obě čísla p,q jsou sudá. To je ovšem ve sporu s předpokladem, že jsou nesoudělná. Došli jsme ke sporu a tím je výrok dokázán.

Příklad 6.5:

Dokažte matematickou indukcí větu: $\forall n \in N$: $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

**Řešení:**

Označme dokazovanou rovnost V(n) a součet na její levé straně s_n.
I.krok: Ověříme platnost V(1) tj. do výrokové formy dosadíme za n číslo 1.
$1 = 1 \Rightarrow$ V(1) tedy platí.
II.krok: Dokážeme implikaci $V(k) \Rightarrow V(k + 1)$ pro každé $k \in N$.
Předpokládejme, že dokazovaná rovnost platí pro nějaké $n = k \in N$, tj. platí: $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1)$ $= k^2$.
Máme dokázat, že za tohoto předpokladu dokazovaná rovnost V(n) platí také pro $n = k + 1$,
tj. platí: $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$.
Stačí snadné úpravy a dostaneme: $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1$
Když do pravé strany dosadíme za k^2 součet $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1)$,
dostaneme platnou rovnost: $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1)$
a to jsme potřebovali dostat. Rovnost V(n) tedy platí i pro $n = k + 1$ a důkaz je hotov.



Množina a její určení

Kromě jednotlivých objektů se v matematice často zabýváme také jejich soubory. Na názorné představě souboru objektů jako jednoho určitého celku je založeno intuitivní pojetí pojmu množina: Množina je soubor nějakých objektů (předmětů), jenž je chápán jako jeden celek. Množinu pokládáme za určenou, je-li možno o každém objektu jednoznačně rozhodnout, zda do ní patří, či nikoliv. Každý objekt, který patří do množiny, se nazývá prvek množiny. Patří-li jistý objekt a do množiny A, vyjadřujeme to zápisem $a \in A$, který čteme: a je prvek (elementem) množiny A, nepatří-li jistý objekt b do množiny A, vyjadřujeme to zápisem $b \notin A$, který čteme: b není prvek (elementem) množiny A. Jestliže množina obsahuje alespoň jeden prvek, nazývá se neprázdná množina. Důležitou množinou, bez které se v matematice neobejdeme je množina, která neobsahuje žádný prvek-tzv. prázdná množina; označuje se symbolem „$\emptyset$", někdy též „{}". Příklady prázdné množiny: Množina všech přirozených čísel menších než jedna, množina všech reálných čísel x, pro která platí: $x^2 < 0$.

Množina, která má konečný počet prvků (tj. je buď prázdná, nebo je počet jejích prvků dán přirozeným číslem), se nazývá konečná množina. Množina, která nemá konečný počet prvků, se nazývá nekonečná množina.

Způsoby určení (zadání) množin

Množinu určujeme obvykle jedním ze dvou následujících způsobů:

I. Výčtem prvků, tj. uvedením všech prvků množiny, což je ovšem možné jen pro konečné množiny. Matematický zápis zadání množiny M výčtem prvků vypadá takto: $M==\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ (Pokud je některé z čísel $x_1,x_2,\ldots,x_n$ desetinné, píšeme mezi ně středníky a ne čárky).Čteme: „M je množina prvků x_1, x_2, atd. až x_n." Při určení množiny výčtem prvků nezáleží na pořadí prvků a každý z těchto prvků musí být ve výčtu zastoupen právě jednou (aspoň jednou a nejvýše jednou). Například množinu A, jejímiž prvky jsou právě čísla 1,2,3, můžeme zadat např. těmito způsoby: $A=\{1,2,3\}$, $A=\{2,3,1\}$, $A=\{3,2,1\}$; není však možné ji zadat např. takto: $A=\{1,2,1,3\}$.

Příklad:

Určete, která z následujících zadání jsou zadání množiny výčtem prvků:

1) A = {Praha,Bratislava,Varšava,Riga,Vilnius, Minsk, Kyjev, Moskva, Lublaň, Záhřeb, Bělehrad, Sofia}
2) $B = \{1;2;0,5\}$
3) $B = \{2^{-1};1;2;0,5\}$
4) $M = \{1,2, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{2}\}$
5) $M = \{1,2, \sqrt{3}, \sqrt{2}\}$

Řešení:

1) A = {Praha, Bratislava, Varšava, Riga, Vilnius, Minsk, Kyjev, Moskva, Lublaň, Záhřeb, Bělehrad, Sofia} je zápisem množiny výčtem prvků.
2) $B = \{1;2;0,5\}$ je zápisem množiny výčtem prvků.
3) $B = \{2^{-1};1;2;0,5\}$ není zápisem množiny protože 0,5 a 2^{-1} je tentýž prvek.
4) $M = \{1,2, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{2}\}$ není zápisem množiny protože 2 a $\sqrt{4}$ je tentýž prvek.
5) $M = \{1,2, \sqrt{3}, \sqrt{2}\}$ je zápisem množiny výčtem prvků.

II. Uvedením charakteristické vlastnosti prvků množiny, což znamená, že uvedeme takovou vlastnost, kterou mají všechny prvky dané množiny a žádný jiný prvek tuto vlastnost nemá. Přitom zjišťování uvažované vlastnosti se provádí pouze v tzv. základní množině, která obsahuje všechny prvky, které nás v dané situaci zajímají. Např. množinu A={1,2,3} můžeme třeba určit tak, že řekneme, že je to množina všech přirozených čísel menších než 4, což zapíšeme takto: $A = \{x \in N; x < 4\}$. /nebo můžeme říci, že je to množina všech celých čísel, která jsou menší než 4 a zároveň větší než 0 a zapsat to takto: $A = \{x \in Z; x < 4 \wedge x > 0\}$, možností je více./ V tomto případě je základní množinou množina přirozených čísel. Obecně zapisujeme zadání množiny M uvedením charakteristické vlastnosti takto: $M = \{x \in U; V(x)\}$ Čteme: „M je množina všech x z množiny U, pro které platí V(x).

Příklad:

Pokuste se určit následující množiny uvedením charakteristické vlastnosti:

1) A = {Praha, Bratislava, Varšava, Riga, Vilnius, Minsk, Kyjev, Moskva, Lublaň, Záhřeb, Bělehrad, Sofia} je zápisem množiny.
2) $D = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$
3) $M = \{1,2, \sqrt{3}, \sqrt{2}\}$
4) $B = \{1;2;0,5\}$
5) $C = \{2,4,6,\dots\}$

Poznámka:

Určení množiny C připomíná zadání výčtem. Není to však zadání výčtem, jedná se pouze o symbolický zápis nekonečné množiny.

Řešení:

1) Kdo zná trochu zeměpis, ten si může všimnout, že se jedná o hlavní města všech slovanských států. A je tedy množina všech hlavních měst, pro která platí, že jsou to hlavní města slovanského státu (Základní množinou je množina všech hlavních měst.).
2) $D = \{x \in Z; |x| < 6\}$
3) $M = \{x \in R; x \leq 2 \wedge x^2 \in N\}$
4) $B = \{x \in R; x = 2^n, \text{ kde } n \in N \wedge |n| < 2\}$
5) $C = \{n \in N; 2/n\}$

Poznámka:

Předchozí řešení jsou pouze jedna z mnoha variant, samozřejmě by se uvedené množiny daly určit mnoha jinými způsoby.

Množinové vztahy a operace

Mějme dánu základní množinu U. Prvky všech dalších uvažovaných množin A,B atd. budeme vybírat z prvků základní množiny U.

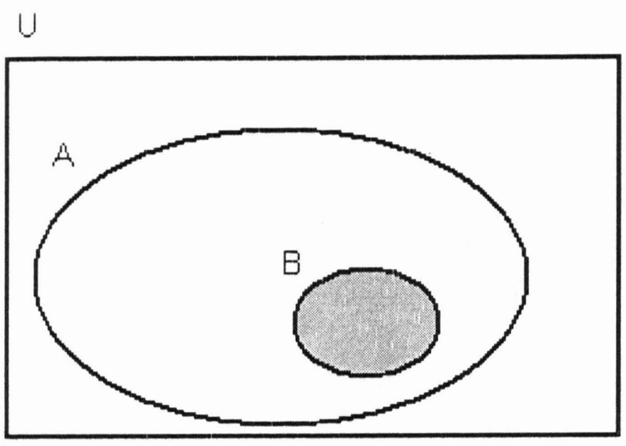
Množinové vztahy

Množiny A,B atd. mohou být navzájem v různých vztazích, které znáte již ze základní školy. Přesto si je nadefinujeme.

Definice:
Množina B se nazývá **podmnožinou množiny** A (píšeme $B \subset A$) právě tehdy, když každý prvek množiny B je zároveň prvkem množiny A (tj. neexistuje prvek množiny B, který není prvkem množiny A).

Platí tedy: $B \subset A \Leftrightarrow (\forall x \in U; x \in B \Rightarrow x \in A)$

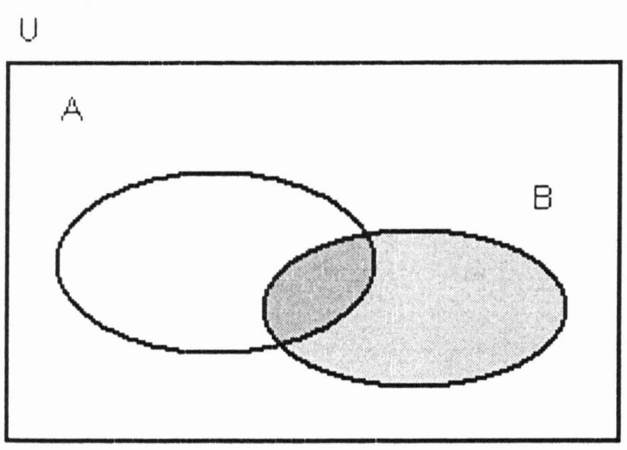
Graf:
$B \subset A$



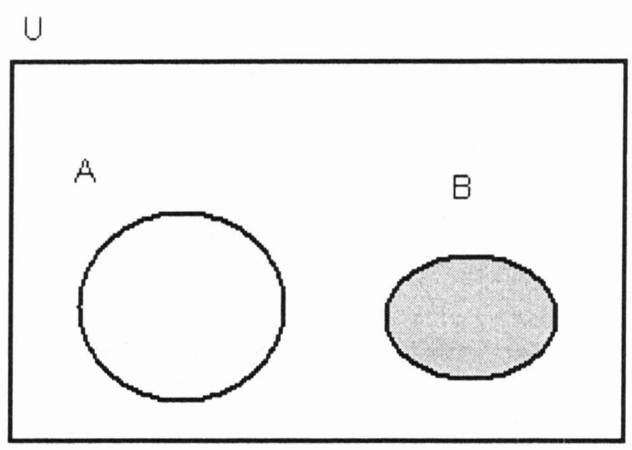
Poznámka:
Symbolu „$\subset$" se také říká inkluze.

Poznámka:
Pokud množina B není podmnožinou množiny A, píšeme $B \not\subset A$.

Graf:
$B \not\subset A$



$B \not\subset A$



Příklady:

- Množina přirozených čísel je podmnožinou množiny celých čísel, ta je podmnožinou množiny racionálních čísel, ta je podmnožinou množiny reálných čísel.Píšeme: $(N \subset Z) \wedge (Z \subset Q) \wedge (Q \subset R)$, nebo stručně $N \subset Z \subset Q \subset R$.
- Množina všech reálných čísel x, pro která platí: $5x < -3$ je podmnožinou množiny reálných čísel.Píšeme:$\{x \in R; 5x < -3\} \subset R$

Všimněme si ještě dvou krajních případů vztahujících se k podmnožině.
1) Protože každý prvek libovolné množiny A je prvkem množiny A, je každá množina A podmnožinou sebe sama,

tj. platí $A \subset A$.

2) Protože každý prvek prázdné množiny je prvkem libovolné množiny A (prázdná množina totiž žádné prvky nemá), je prázdná množina podmnožinou každé množiny A, tj. platí $\emptyset \subset A$. Jinými slovy: Neexistuje prvek množiny $\emptyset$, který není prvkem množiny A; proto je $\emptyset \subset A$.

Příklad:

Zapište všechny podmnožiny množiny $\{1,2,3\}$.

Řešení:

$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$.

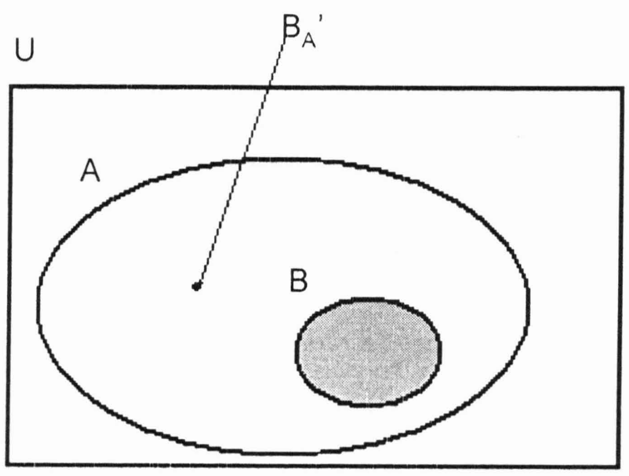
Podmnožinou dané množiny je samozřejmě prázdná množina, všechny jednoprvkové množiny, které lze vytvořit z prvků 1,2,3, všechny dvouprvkové množiny, které lze vytvořit z prvků 1,2,3 a daná množina.

V případě, že množina B je podmnožinou množiny A, zavádíme pojem doplněk.

Definice:

Nechť $B \subset A$. Potom množinu všech prvků z A, které nepatří do B nazýváme **doplněk množiny** B **v množině** A (značíme B_A').

Graf:



Příklad:

Určete doplněk množiny B v množině A:

1) $A = \{x \in Z; x > -7\}$, $B = N$.
2) $A = R$, $B = \{x \in R; |x| > 5\}$.
3) $A=Z$, $B=\{x \in Z; x^2 \geq 0\}$.

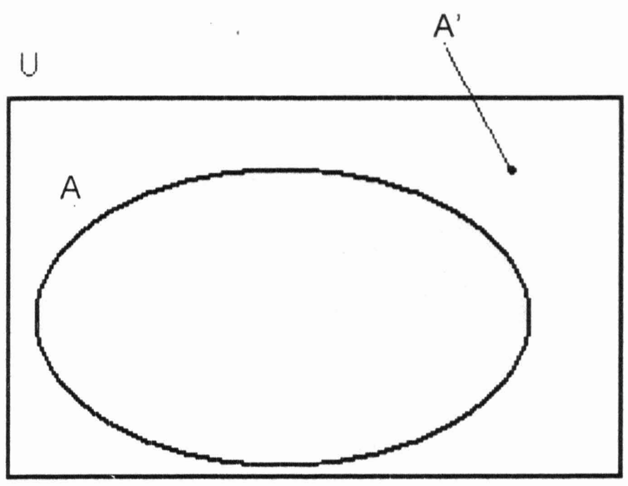
Řešení:

1) $B_A'=\{-6,-5,-4,-3,-2,-1\}$
2) $B_A'=\{x \in R; |x| \leq 5\}$
3) $B_A'=\{\}$

Poznámka:

Pokud se bavíme o doplňku nějaké množiny A v základní množině U, nazýváme ho prostě doplňkem množiny A a značíme A'.

Graf:



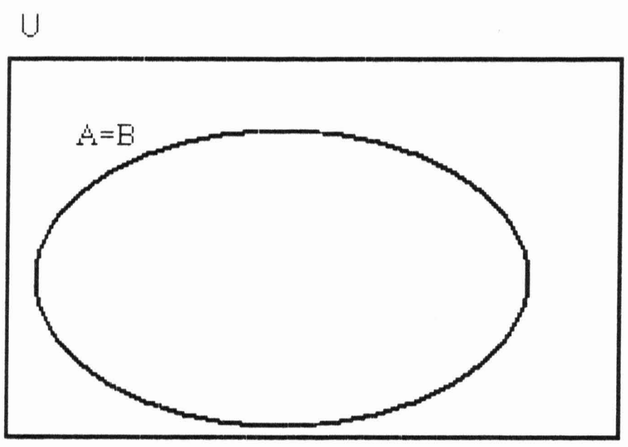
Definice:

Řekneme, že **množiny** A,B **se rovnají** (píšeme A = B) právě tehdy, když každý prvek množiny A je prvkem množiny B a zároveň každý prvek množiny B je prvkem množiny A.

Platí tedy: $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in U; x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Užitím pojmu podmnožina můžeme rovnost A = B vyjádřit tak, že platí $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$ (píšeme: $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$). Této vlastnosti se využívá při důkazu rovnosti množin.

Graf:



Poznámka:

Pokud množina A nerovná množině B, píšeme $A \neq B$.

Příklad:

Určete, které z následujících množin se rovnají:

$\{x \in N; x \leq 0\}$
$\{0\}$
$\{x \in R; |x| \leq 3\}$
$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$
$\emptyset$
$\{x \in Z; x > -4 \wedge x < 4\}$
$\{x \in Z; |x| \leq 0\}$

Řešení:

$\{x \in N; x \leq 0\} = \emptyset$
$\{0\}=\{x \in Z; |x| \leq 0\}$
$\{x \in R; |x| \leq 3\} = \{x \in R; -3 \leq x \leq 3\}$
$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\} = \{x \in Z; x > -4 \wedge x < 4\}$

Poznámka:

O intervalech…

Některé množiny reálných čísel se dají snadno znázornit na reálné ose. Například množina ze 3. řádku předchozího příkladu je zobrazena červenou úsečkou v následujícím obrázku.

Obrázek:

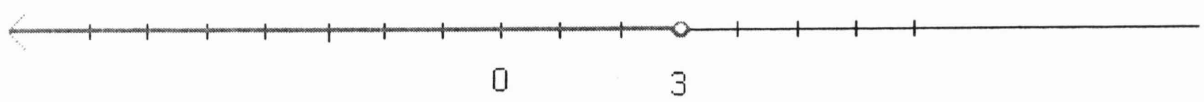
Červené tečky v krajních bodech úsečky naznačují, že krajní body také patří do množiny.
Symbolicky se takováto množina dá také zapsat takto: $\langle -3,3 \rangle$. Takovému zápisu se říká uzavřený interval od mínus 3 do 3. Uzavřený proto, že krajní body intervalu také patří do množiny. Platí tedy : $\{x \in R;\ |x| \leq 3\} = \langle -3,3 \rangle$
Pokud máme znázornit např. množinu $\{x \in R;\ |x| < 3\}$, kde krajní body do úsečky nepatří, naznačíme to „prázdnými" tečkami na v krajních bodech úsečky viz obrázek.

Obrázek:

Symbolicky se takováto množina dá také zapsat takto: (-3,3). Takovému zápisu se říká otevřený interval od mínus 3 do 3. Otevřený proto, že krajní body intervalu nepatří do množiny. Platí tedy : $\{x \in R;\ |x| < 3\} = (-3,3)$

Pomocí reálné osy můžeme zobrazit i jiné množiny, např. $\{x \in R;\ x < 3\}$ viz obrázek:

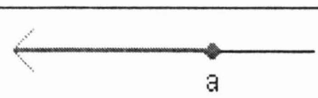
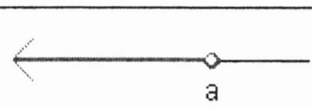
Obrázek:



I takováto množina, která se znázorňuje na ose polopřímkou, se dá zapsat pomocí intervalu a sice takto: $(-\infty,3)$.
Čteme: zleva uzavřený interval od 3 do nekonečna. Platí tedy : $\{x \in R;\ x \leq 3\} = (-\infty,3)$

V následující tabulce jsou uvedeny všechny druhy intervalů s krajními body $a,b \in R$, $a<b$:

Tabulka 6: Tabulka intervalů:

zápis množiny	zápis intervalu	znázornění na ose	název intervalu
$\{x \in R;\ a \leq x \leq b\}$	$\langle a,b \rangle$		uzavřený
$\{x \in R;\ a < x \leq b\}$	$(a,b\rangle$		zleva otevřený, zprava uzavřený
$\{x \in R;\ a \leq x < b\}$	$\langle a,b)$		zleva uzavřený, zprava otevřený
$\{x \in R;\ a < x < b\}$	(a,b)		otevřený
$\{x \in R;\ x \geq a\}$	$\langle a,\infty)$		zprava neomezený
$\{x \in R;\ x > a\}$	(a,∞)		zprava neomezený
$\{x \in R;\ x \leq a\}$	$(-\infty,a\rangle$		zleva neomezený
$\{x \in R;\ x < a\}$	$(-\infty,a)$		zleva neomezený
R	$(-\infty,\infty)$		oboustranně neomezený

Poznámka:
Pokud $B \subset A$ a zároveň $B \neq A$, říkáme, že B je vlastní podmnožinou množiny A.

Poznámka:
V některých zdrojích je možno se setkat s odlišným značením pro podmnožiny. Místo $B \subset A$ tam je psáno $B \subseteq A$, zápis $B \subset A$ tam pak může znamenat, že B je vlastní podmnožinou množiny A

Množinové operace

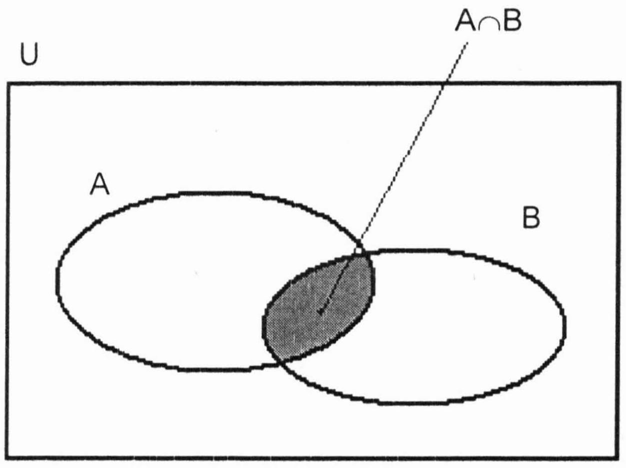
Definice:

Průnik množin A,B (píšeme $A \cap B$) se nazývá množina všech prvků, které patří zároveň do obou množin.

Platí tedy: $A \cap B = \{x \in U; x \in A \wedge x \in B\}$

Z definice průniku vyplývá, že průnik každé množiny s prázdnou množinou je prázdná množina, tj. $A \cap \emptyset = \emptyset$. Průnikem každých dvou množin, které nemají žádné společné prvky, je prázdná množina. Množiny A,B, pro které platí $A \cap B = \emptyset$, nazýváme disjunktní.

Graf:



Příklad:

Určete průnik množin A a B, jestliže:

$A = \{0,2,4,6,8\}$, $B = \{0,4,8,12,16\}$

$A = \{x \in N; x \leq 9\}$, $B = \{-1,0,1,2,3,6,9,10,14\}$

$A = N$, $B = (4,8\rangle$

$A = N$, $B = \{ x \in Z; |x| = -x\}$

Řešení:

1) $A \cap B = \{0,4,8\}$
2) $A \cap B = \{1,2,3,6,9\}$
3) $A \cap B = \{5,6,7,8\}$
4) $A \cap B = \{\}$

Poznámka:

Množiny, které nemají průnik, resp. Jejichž průnik je prázdná množina, se nazývají disjunktní

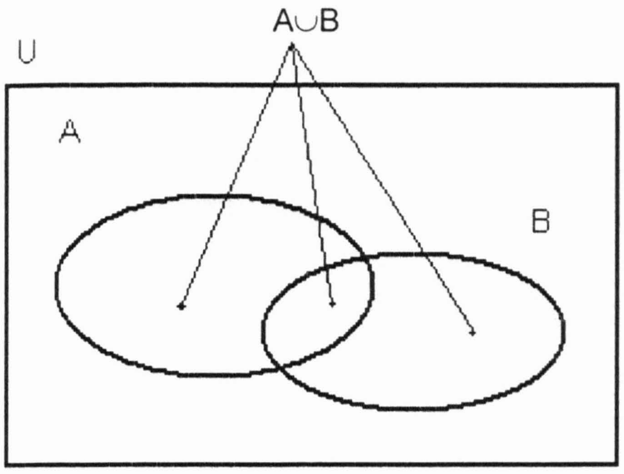
Definice:

Sjednocení množin A,B (píšeme $A \cup B$) se nazývá množina všech prvků, které patří do množiny A nebo do množiny B (aspoň do jedné z nich).

Platí tedy: $A \cup B = \{x \in U; x \in A \vee x \in B\}$

Z definice sjednocení vyplývá, že sjednocení libovolné množiny A s prázdnou množinou je opět množina A, tj. $A \cup \emptyset = A$.

Graf:



Příklad:

Určete sjednocení množin A a B, jestliže:

1) $A = \{0,2,4,6,8\}$, $B = \{0,4,8,12,16\}$
2) $A = \{x \in N;\ x \leq 9\}$, $B = \{-1,0,1,2,3,6,9,10,14\}$
3) $A = \{0,5\}$, $B = (0,5)$
4) $A = N$, $B = \{\ x \in Z;\ |x| = -x\}$

Řešení:

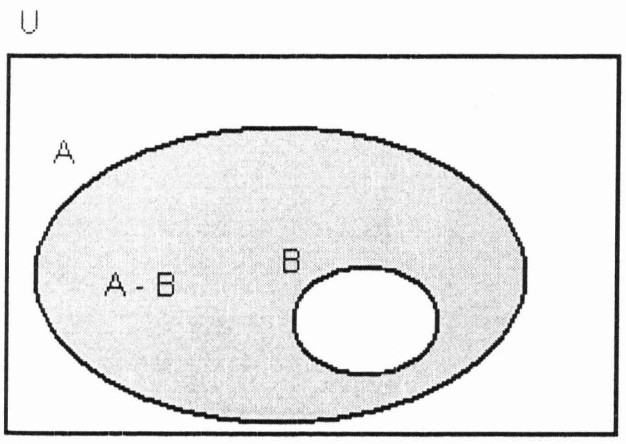
1) $A \cup B = \{0,2,4,8,12,16\}$
2) $A \cup B = \{-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,14\}$
3) $A \cup B = \langle 0,5 \rangle$
4) $A \cup B = Z$

Definice:

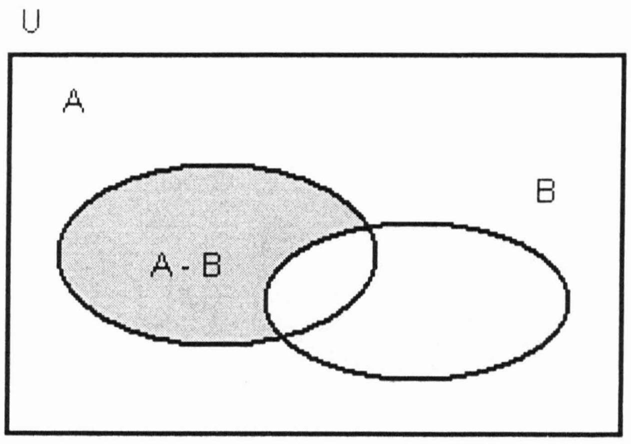
Rozdíl množin A,B (píšeme A – B) se nazývá množina všech prvků množiny A, které nepatří do množiny B.
Platí tedy: $A - B = \{x \in U;\ x \in A \wedge x \notin B\}$

Graf:

$B \subset A$:



$B \not\subset A$:



Příklad:

Určete rozdíl množin A–B a ,B–A jestliže:

1) $A = \{0,2,4,6,8\}$, $B = \{0,4,8,12,16\}$
2) $A=\{x \in N;\ x \leq 9\}$, $B = \{-1,0,1,2,3,6,9,10,14\}$
3) $A = \langle 0,5 \rangle$, $B = \langle 0,3)$
4) $A = N$, $B = \{x \in Z;\ |x| = -x\}$

Řešení:

1) $A - B = \{2,6\}$, $B - A = \{12,16\}$
2) $A - B = \{7,8\}$, $B - A = \{-1,0,10,14\}$
3) $A - B = \langle 3,5 \rangle$, $B - A =\{\}$
4) $A - B = N$, $B - A = \{x \in Z;\ x \leq 0\}$

Poznámka:

Ve 3. řádku si všimněte, že speciálně pro případ, kdy $B \subset A$, je rozdíl A – B roven doplňku množiny B v množině A a rozdíl B – A je v tomto případě logicky prázdná množina.
Ve 4.řádku si můžeme všimnout toho, že pokud jsou množiny A,B disjunktní, tj. pokud je $A \cap B = \emptyset$, je $A - B = A$ a $B - A = B$.

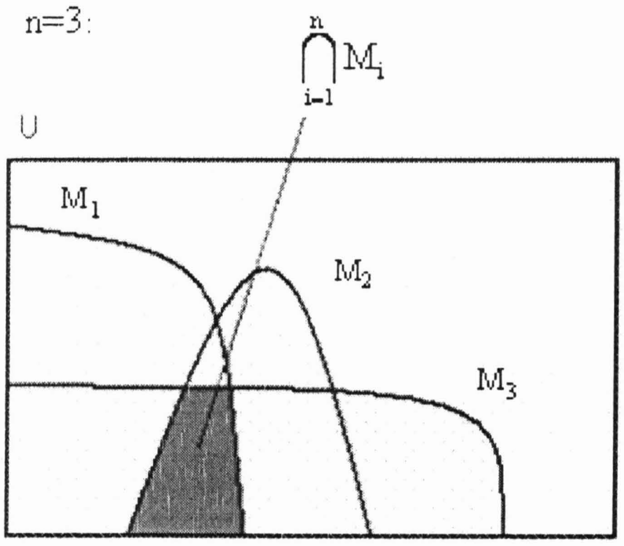
Množinové operace průnik a sjednocení lze zobecnit pro systém množin.

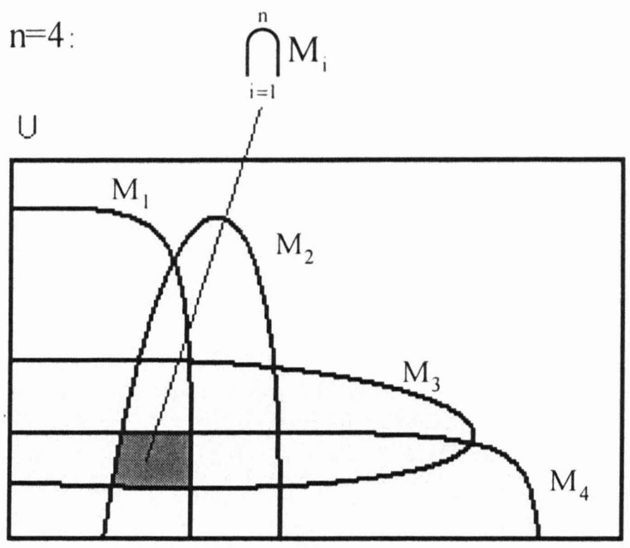
Definice:

Průnik systému množin $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (píšeme $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$ nebo též $\bigcap_{i=1}^{n} M_i$) se nazývá množina všech prvků, které patří zároveň do každé z množin $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Platí tedy: $\bigcap_{i=1}^{n} M_i = \{x \in U;\ x \in M_1 \wedge x \in M_2 \wedge \ldots \wedge x \in M_n\}$

Graf:



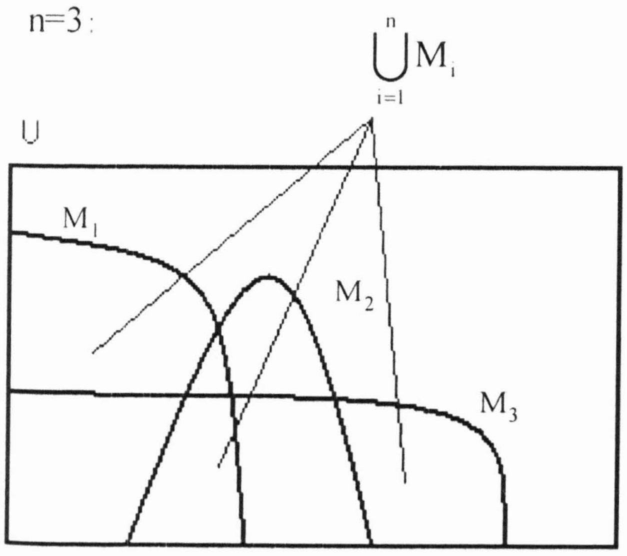


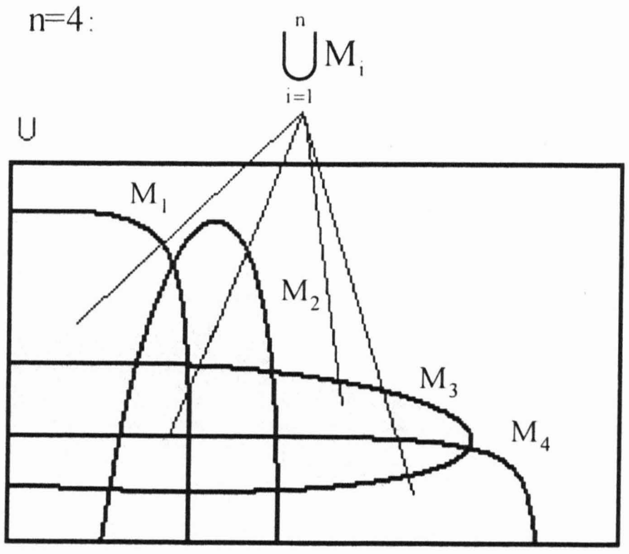
Definice:

Sjednocení systému množin $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (píšeme $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$ nebo též $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$) se nazývá množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Platí tedy: $\bigcup_{i=1}^{n} M_i = \{x \in U;\ x \in M_1 \vee x \in M_2 \vee \ldots \vee x \in M_n\}$

Graf:





Poznámka:

Logické symboly $\wedge$, $\vee$. Jsou záměrně zvoleny tak, aby připomínaly množinové symboly $\cap, \cup$. Jejich vzájemnou vazbu vyjadřují následující množinově-logické vztahy:

$x \in M_1 \wedge x \in M_2 \wedge \ldots \wedge x \in M_n$ znamená totéž jako: $x \in M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$.

$x \in M_1 \vee x \in M_2 \vee \ldots \vee x \in M_n$ znamená totéž jako: $x \in M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$.

Důkazy množinových rovností

Chceme-li dokázat množinovou rovnost A=B, kde A,B jsou množiny, vycházíme obvykle z pravidla uvedeného u

definice rovnosti tj. z tvrzení: : $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$
Důkaz rovnosti množin A,B si tedy rozdělíme na 2 části: Dokážeme zvlášť $A \subset B$ (tj. $\forall x \in U: x \in A \Rightarrow x \in B$) a $B \subset A$ (tj. $\forall x \in U: x \in B \Rightarrow x \in A$).

Příklad:
Dokažme, že platí:
$(A \cup B)' = A' \cap B'$

Řešení:
1.část: dokážeme, že platí: $(A \cup B) \subset A' \cap B'$
-provedeme přímý důkaz:
$x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \Rightarrow (x \in A') \wedge (x \in B') \Rightarrow x \in A' \cap B'$
Platí tedy: $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$
2.část: dokážeme, že platí: $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$
-provedeme přímý důkaz:
$x \in A' \cap B' \Rightarrow (x \in A') \wedge (x \in B') \Rightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \in (A \cup B)'$
Platí tedy: $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$
Důkaz je hotov.

Příklady 7

Příklad 7.1:

Určete výčtem prvků následující množiny:

1) M, kde M je množina všech přirozených čísel menších než 50, která jsou dělitelná 6ti.
2) P, kde P je množina všech prvočísel menších než 20.
3) $A = \{x \in Z;\ |x| \leq 3\}$
4) $B = \{x \in N;\ x^2 + 2 \leq 1\}$

Řešení:

1) $M = \{6,12,18,24,30,36,42,48\}$
2) $P = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$
3) $A = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$
4) $B = \{\}$

Příklad 7.2:

Určete následující množiny pomocí jejich charakteristické vlastnosti:

1) $A = \{1,3,9,27,81\}$
2) $B = \{5,10,15,20,25\}$
3) $M = \{1,4,27,256,3125\}$
4) $N = \emptyset$

Řešení:

1) $A = \{x \in N;\ x = 3^n, \text{ kde } n \in Z \wedge n \rangle -1 \wedge n < 6\}$
2) $B = \{x \in N;\ x \leq 25 \wedge 5/n\}$
3) $M = \{x \in N;\ x = n^n, \text{ kde } n \in N \wedge n < 6\}$
4) Např. $N = \{x \in N;\ x \leq 0\}$

Příklad 7.3:

Rozhodněte, zda jsou následující zápisy v pořádku:

1) $\emptyset \subset \{1,2,3\}$

   a) Je v pořádku. *Správně!* **Postup:** Prázdná množina i $\{1,2,3\}$ jsou dvě množiny, pro které platí uvedený vztah.

   b) Není v pořádku. **Špatně!**

2) $\emptyset \in \{0\}$

   a) Je v pořádku. **Špatně!**

   b) Není v pořádku. *Správně!* **Postup:** Žádná množina nemůže být prvkem jiné množiny.(Může však být podmnožinou, to by zápis vypadal takto: $\emptyset \subset \{0\}$)

3) $\{1\} \in \{1,2,3\}$

a) Je v pořádku. **Špatně!**

b) Není v pořádku. *Správně!* **Postup:** Žádná množina nemůže být prvkem jiné množiny. (Může však být podmnožinou, to by zápis vypadal takto: $\{1\} \subset \{1,2,3\}$)

4) $0 \subset \{0\}$

a) Je v pořádku. **Špatně!**

b) Není v pořádku. *Správně!* **Postup:** Prvek nemůže být podmnožinou nějaké množiny.(Správný zápis faktu, že 0 je prvkem množiny $\{0\}$ vypadá takto: $0 \in \{0\}$.)

Příklad 7.4:

Zapište všechny platné inkluze mezi množinami A,B,C, kde:

1) $A = \emptyset$, $B = \{1,2,5\}$, $C = N$
2) $A = \emptyset$, $B = \{0\}$, $C = \{-1,1\}$
3) $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2\}$, $C = R$
4) $A = \{-5,-2\}$, $B = \{-4,-3\}$, $C = N$
5) A je množina všech čtverců, B je množina všech čtyřúhelníků, jejichž úhlopříčky jsou na sebe kolmé, C je množina všech kosočtverců.

Řešení:

1) $A \subset B$, $B \subset C$, $A \subset C$
2) $A \subset B$, $A \subset C$
3) $A \subset B$, $B \subset A$, $A \subset C$, $B \subset C$
4) Tyto tři množiny jsou navzájem disjunktní.
5) $A \subset B$, $C \subset B$

Příklad 7.5:

Určete všechny podmnožiny množiny A, kde:

1) $A = \emptyset$
2) $A = \{-2,-1,1\}$

Řešení:

1) $\emptyset$
2) $\emptyset, \{-2\}, \{-1\}, \{1\}, \{-2,-1\}, \{-2,1\}, \{-1,1\}, \{-2,-1,1\}$

Příklad 7.6:

Určete všechny podmnožiny množiny A, které jsou zároveň podmnožinami množiny B, kde:

1) $A = \{0\}$, $B = N$
2) $A = \{-2,-1,1,2\}$, $B = \{0,1,2,3,4,5\}$

Řešení:

1) $\emptyset$
2) $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$

Příklad 7.7:

Zjistěte, které z následujících množin se rovnají:

$Z - \{0\}$

$\langle 210, \infty) \cup \{x \in R;\ x < 210\}$

$(210, \infty) \cup \{x \in R;\ x < 210\}$

$(210, \infty) \cup \{x \in R;\ x \leq 210\}$

R

$(-\infty, \infty)$

$R - \{210\}$

$N \cup \{x \in Z;\ x \leq 1\}$

Řešení:

$Z - \{0\} = N \cup \{x \in Z;\ x \leq 1\}$

$\langle 210, \infty) \cup \{x \in R;\ x < 210\} = (210, \infty) \cup \{x \in R;\ x \leq 210\} = R = (-\infty, \infty)$

$(210, \infty) \cup \{x \in R;\ x < 210\} = R - \{210\}$

Příklad 7.8:

Určete doplněk množiny B v množině A, jestliže:

1) $A = Z$, $B = N$
2) $A = R$, $B = N$
3) $A = R$, $B = \langle 2, \infty)$
4) $A = R$, $B = \{1,2\}$

Řešení:

1) $B_A' = \{x \in Z;\ x \leq 0\}$
2) $B_A' = R - N$
3) $B_A' = (-\infty, 2)$
4) $B_A' = (-\infty, 1) \cup (1,2) \cup (2, \infty)$

Příklad 7.9:

Určete průnik a sjednocení množin A a B, jestliže:

1) $A = (-\infty, 2)$, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$
2) $A = Z$, $B = N$
3) $A = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$, $B = \{1,2\}$
4) $A = (-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, \infty)$, $B = \{1,2\}$

Řešení:

1) $A \cap B = \{1\}$, $A \cup B = (-\infty, 4\rangle \cup \{3,4,5,6\}$
2) $A \cap B = N$, $A \cup B = Z$
3) $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = (-\infty, 4\rangle \cup \langle 2, \infty)$
4) $A \cap B = \{1,2\}$, $A \cup B = (-\infty, 4\rangle \cup \langle 2, \infty)$

Příklad 7.10:

Určete rozdíly $A - B$ a $B - A$ množin A a B, jestliže:

1) $A = (-\infty, 2)$, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$
2) $A = Z$, $B = N$
3) $A = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$, $B = \{1,2\}$
4) $A = (-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, \infty)$, $B = \{1,2\}$

Řešení:

1) $A - B = (-\infty, 1) \cup (1, 2)$, $B - A = \{2,3,4,5,6\}$
2) $A - B = \{x \in Z; x \leq 0\}$, $B - A = \{\}$
3) $A - B = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$, $B - A = \{1,2\}$
4) $A - B = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$, $B - A = \{\}$

Příklad 7.11:

Určete množiny A,B, nebo aspoň stanovte podmínky, které musí být splněny tak, aby platilo:

1) $A \cap B = \langle 2, 4\rangle$, $A \cup B = (-\infty, 5)$, $A = \langle 0, 4\rangle$
2) $A \cup B = A$
3) $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = A$
4) $A \cup B = A$, $A - B = \emptyset$

Řešení:

1) $A = \langle 0, 4\rangle$, $B = (-\infty, 0) \cup \langle 2, 5)$
2) $B \subset A$
3) $B = \emptyset$
4) $B = A$

Grafické znázornění množin

Ke znázornění problémů popsaných pomocí množin užíváme grafické znázornění množin v rovině, se kterým jsme se již všichni setkali v 1. třídě na základní škole, tzv. množinové diagramy. Množiny, např. A,B, které obsahují některé z prvků uvažované základní množiny U, se znázorňují kruhy nebo jinými, obvykle oválnými obrazci zakreslenými v obdélníku, který znázorňuje základní množinu U. Do těchto obrazců zakreslujeme např. křížky nebo kroužky jako různé prvky podle toho, do které množiny patří. My se však budeme zabývat diagramy, pomocí nichž se dají dobře znázornit množinové vztahy a operace. Říká se jim Vennovy diagramy a již jste se s nimi setkali na těchto stránkách v předchozí kapitole.

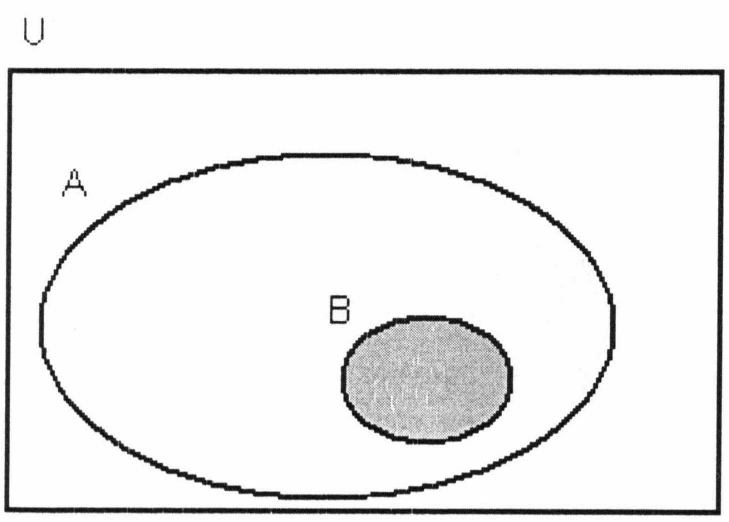
Příklad:
Znázorněme si ještě jednou pomocí Vennových diagramů všechny možné varianty vzájemných vztahů dvou množin A,B, tedy tyto varianty:

1) $B \subset A$:
   a) $B \subset A \wedge A \neq B$
   b) $B \subset A \wedge A = B$
2) $B \not\subset A$:
   a) $B \not\subset A \wedge A \cap B = \emptyset$
   b) $B \not\subset A \wedge A \cap B \neq \emptyset \wedge A \not\subset B$
   c) $B \not\subset A \wedge A \subset B \wedge A \neq B$

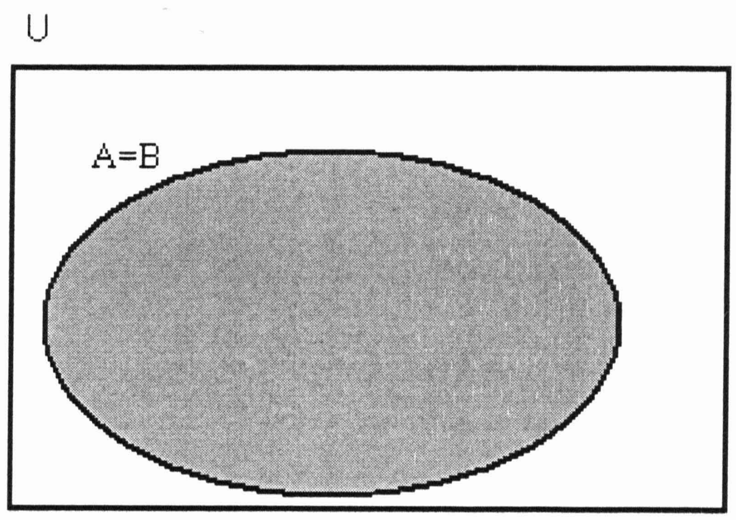
Řešení:

$B \subset A$:

$B \subset A \wedge A \neq B$

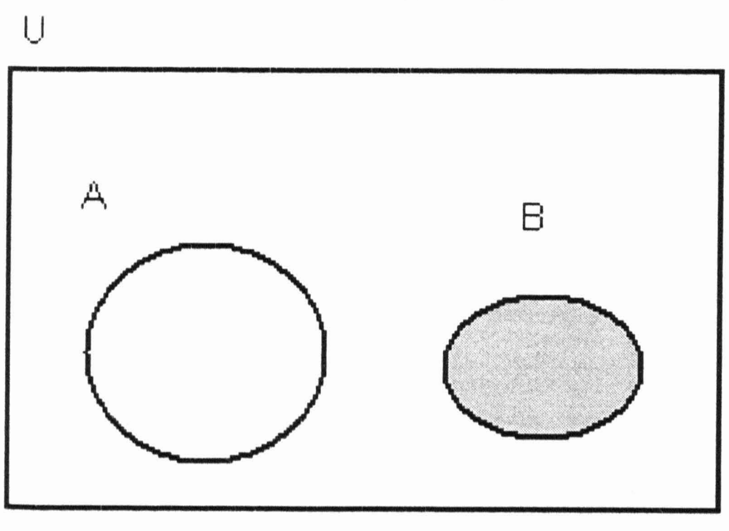


$B \subset A \wedge A = B$

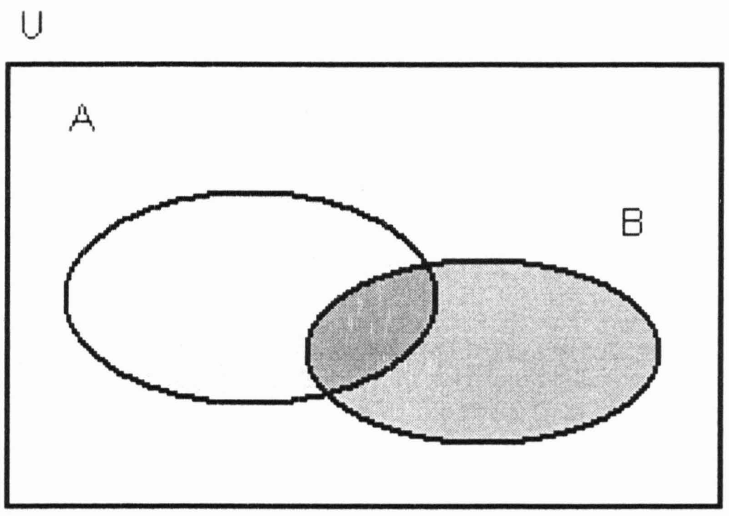


$B \not\subset A$:

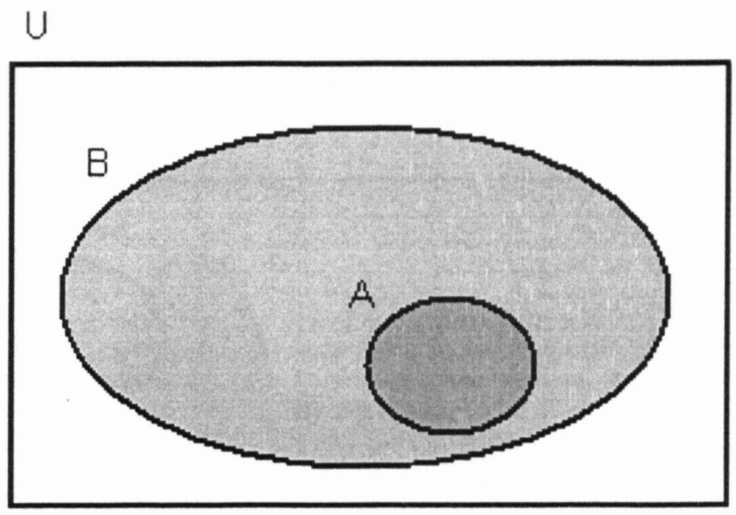
$B \not\subset A \wedge A \cap B = \emptyset$



$B \not\subset A \wedge A \cap B \neq \emptyset \wedge A \not\subset B$

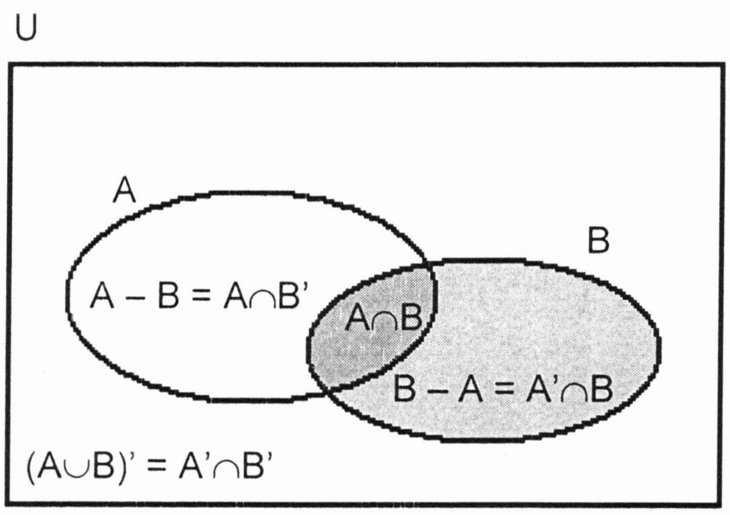


$B \not\subset A \wedge A \subset B \wedge A \neq B$



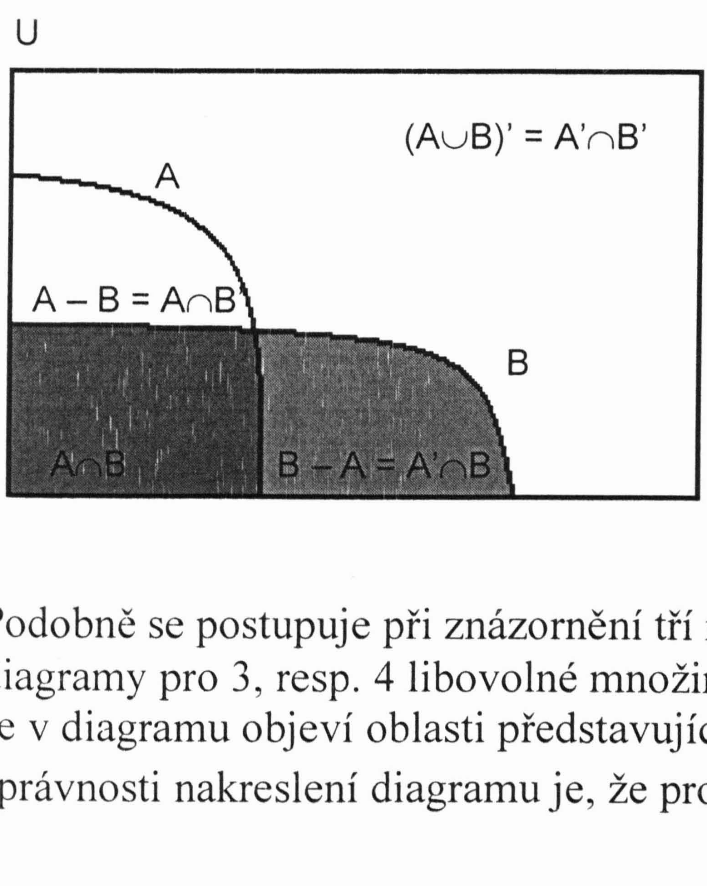
Jestliže chceme Vennovým diagramem znázornit 2 zcela libovolné množiny A,B (tj. množiny, které nejsou předem zadány a nemáme žádnou informaci o jejich vztahu), nakreslíme si obecný Vennův diagram, ve kterém jsou obě množiny A,B znázorněny v obecné poloze, aby bylo možné znázornit jejich průnik, rozdíl atd.(viz obrázek).

Obrázek:



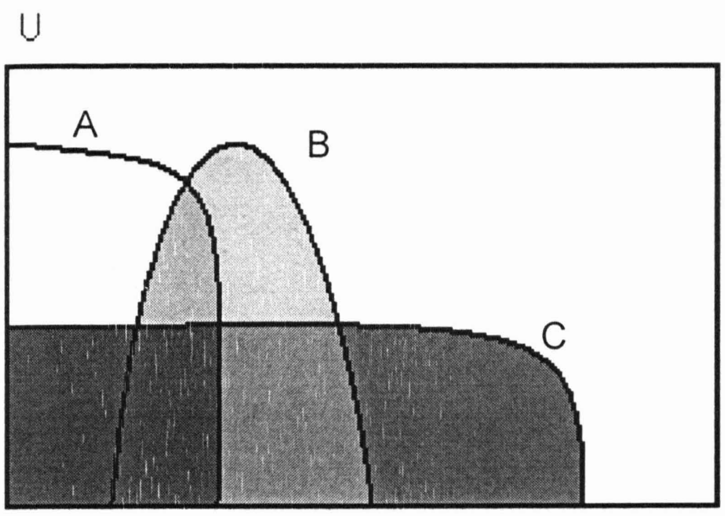
Množiny ve Vennově diagramu samozřejmě nemusí být znázorněny pouze elipsami. Často se využívá také následující způsob:

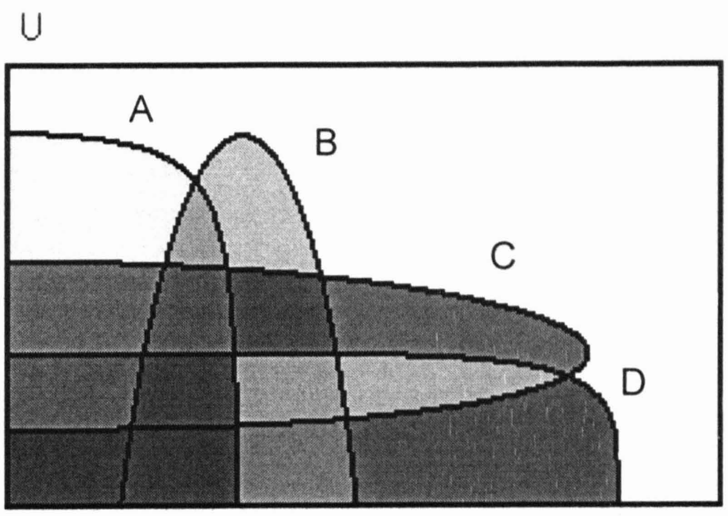
Obrázek:



Podobně se postupuje při znázornění tří nebo více libovolných množin (na obrázcích máme Vennovy diagramy pro 3, resp. 4 libovolné množiny). Principem diagramů je zakreslení všech množin, tak že se v diagramu objeví oblasti představující všechny možné průniky daných množin. Kontrola správnosti nakreslení diagramu je, že pro n množin získáme 2^n oblastí, kde jedna z oblastí znázorňuje prázdnou množinu.

Obrázek:





Příklady 8

Příklad 8.1:

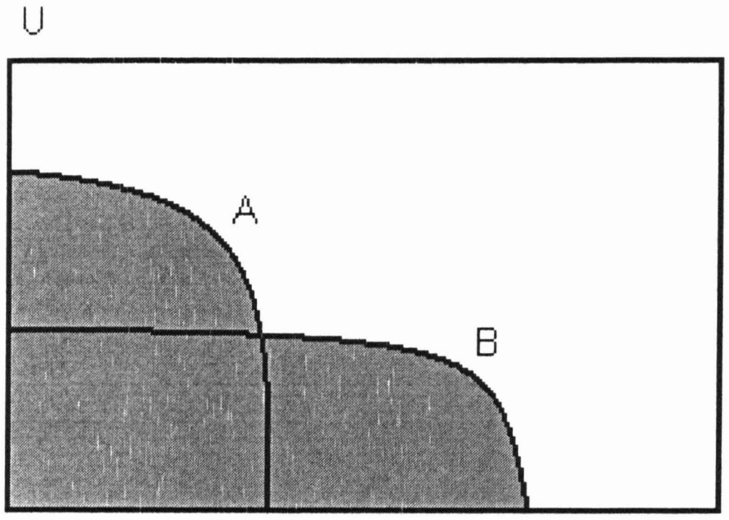
Pomocí Vennových diagramů znázorněte množiny:

1) $(A \cup B)' \cup A$
2) $A' \cup (B \cap C) \cup B'$
3) $A \cup (B \cup (C \cup D)')')$

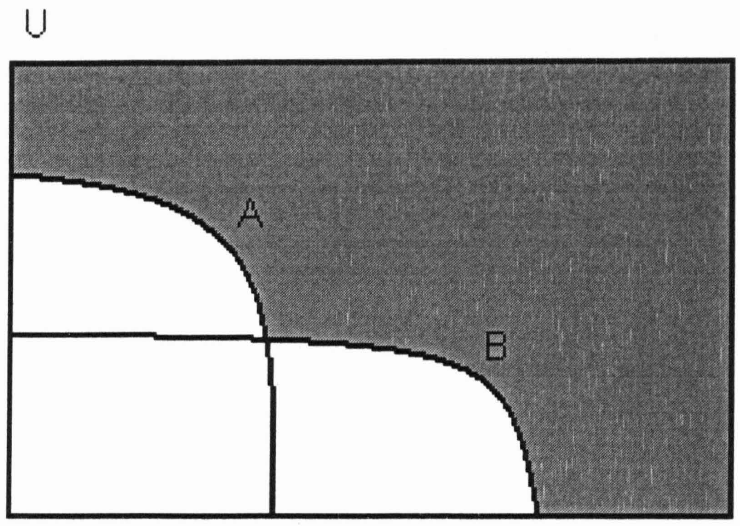
Řešení:

1) $(A \cup B)' \cup A$

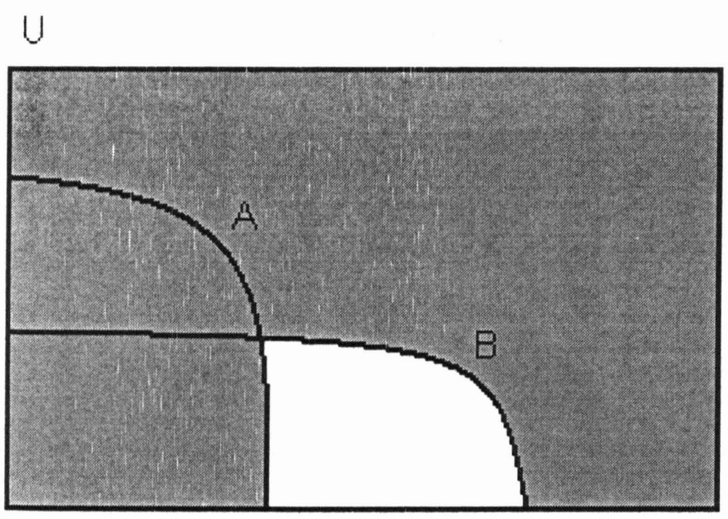
Budeme znázorňovat postupně od jednodušších množin ke složitějším, začneme tedy znázorněním množiny $A \cup B$, dále pokračujeme znázorněním$(A \cup B)'$, atd.



$A \cup B$

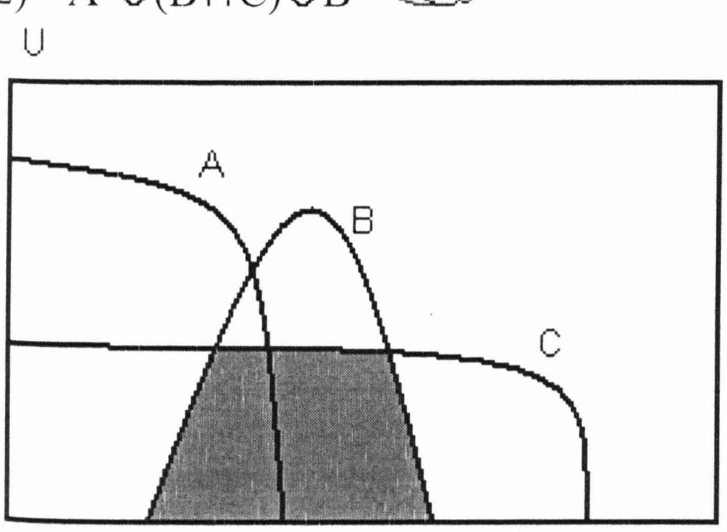


$(A \cup B)'$

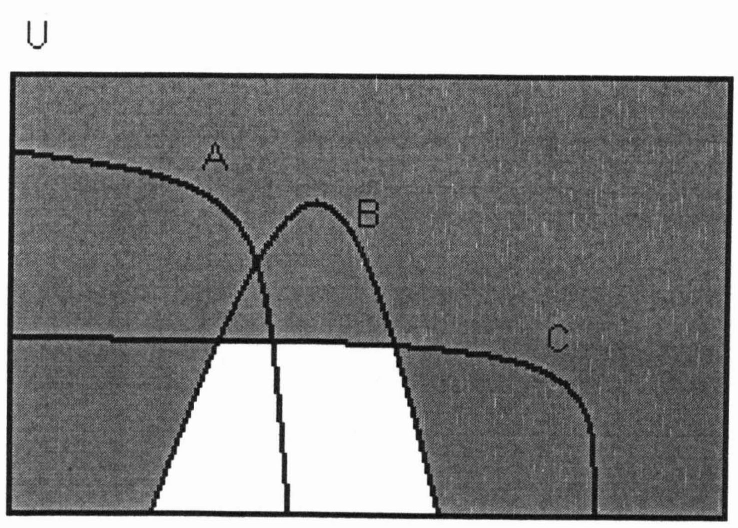


$(A \cup B)' \cup A$

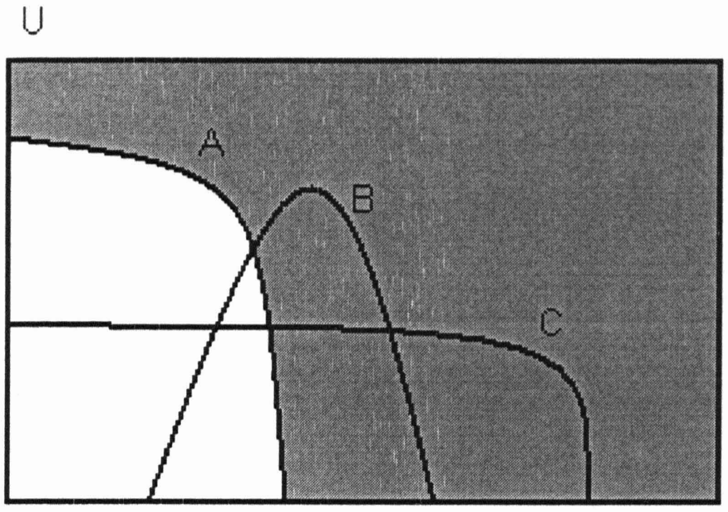
2) $A' \cup (B \cap C) \cup B'$



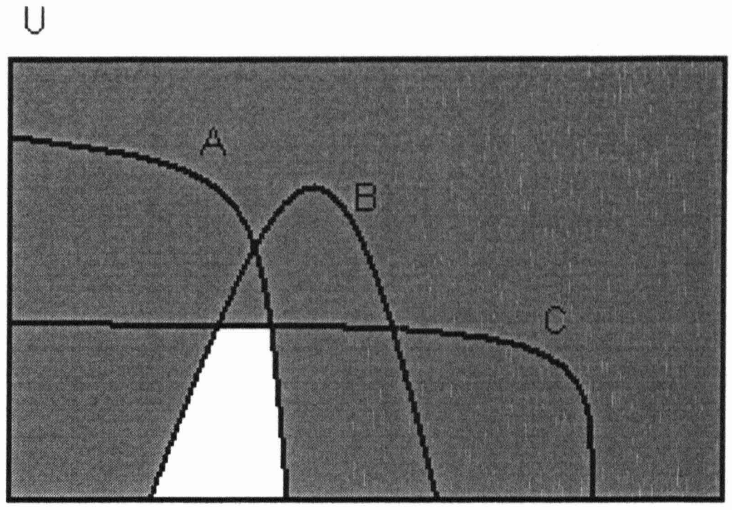
$B \cap C$



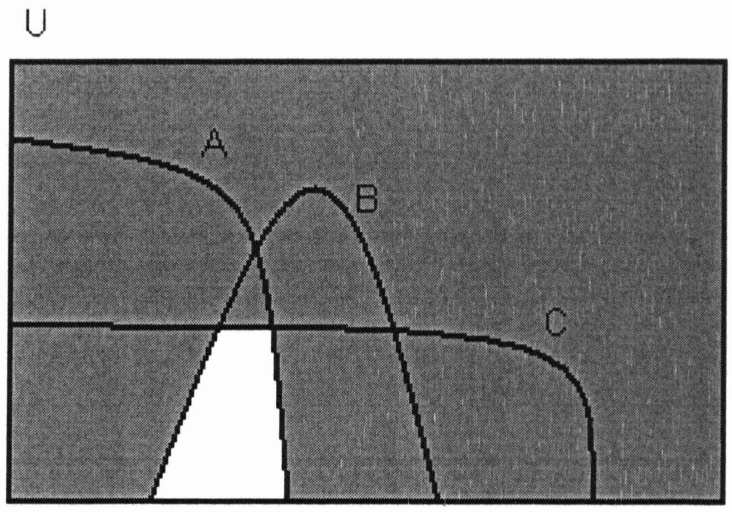
$(B \cap C)'$



A´

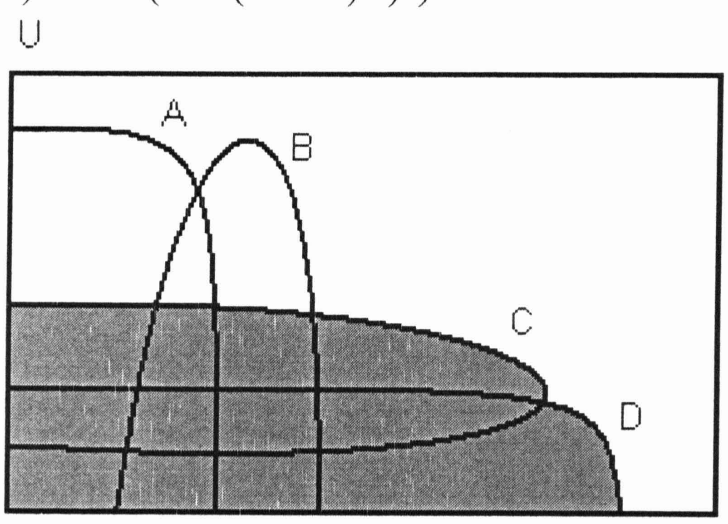


A´∪(B∩C)´

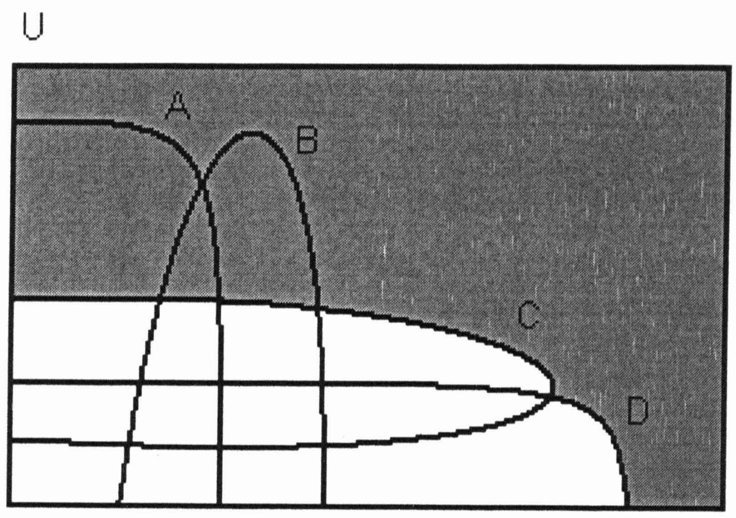


A´∪(B∩C)´∪B´

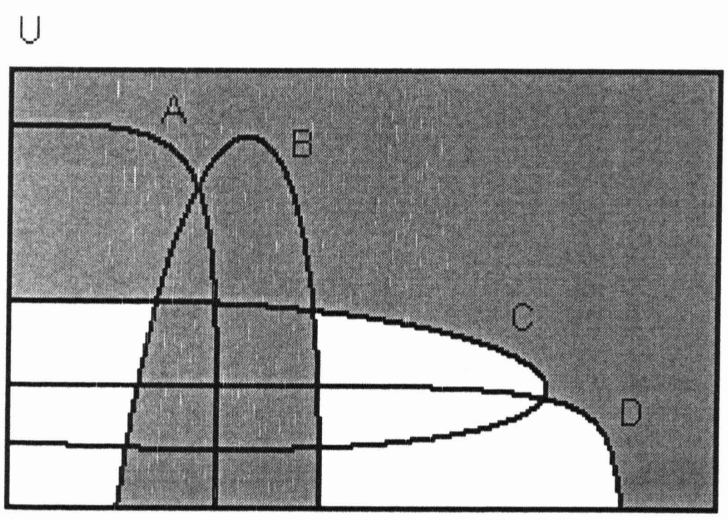
3) A∪(B∪(C∪D)´)´)



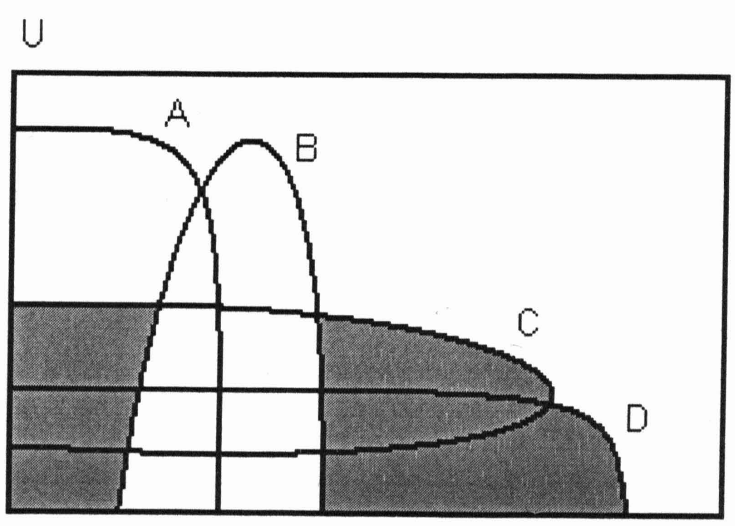
C∪D



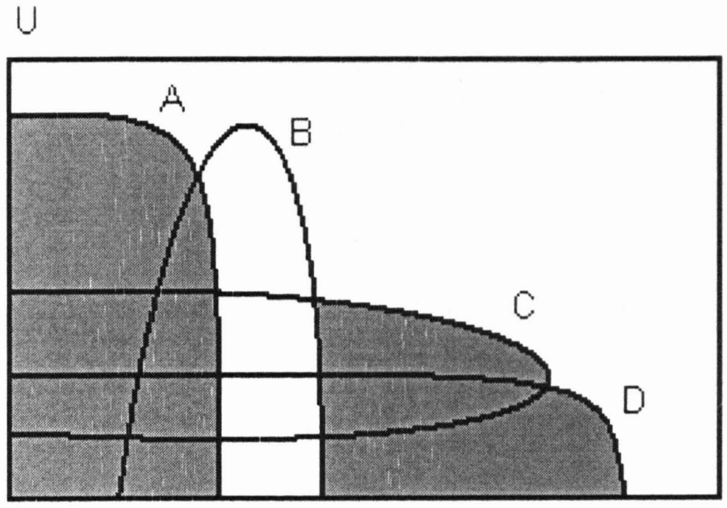
(C∪D)´



B∪(C∪D)´



(B∪(C∪D)´)´



$A \cup (B \cup (C \cup D)')'$

Příklad 8.2:
Dokažte, že platí rovnost $(A \cap B)' = A' \cup B'$ a graficky znázorněte.

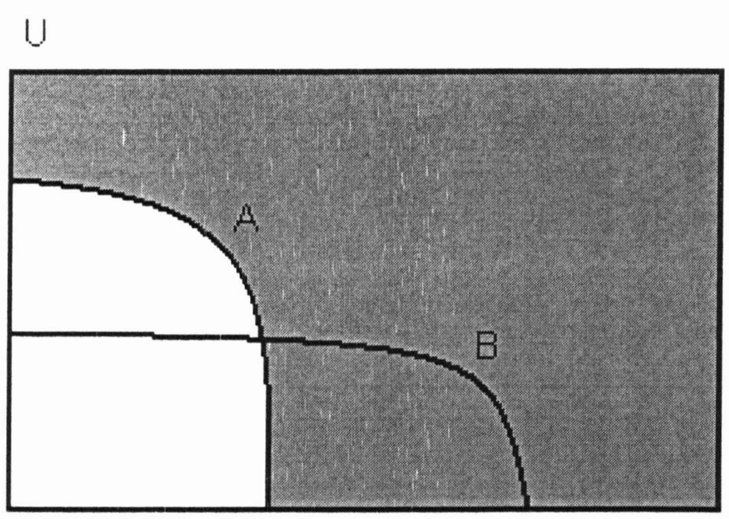
Řešení:

Důkaz

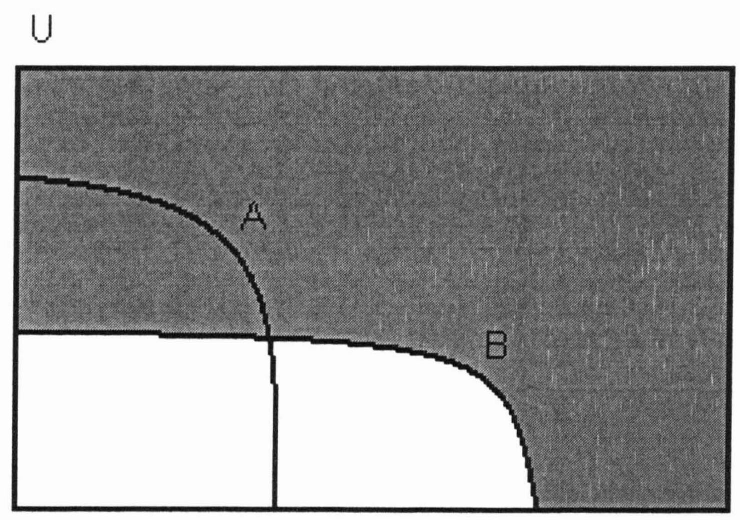
1.část: dokážeme, že platí: $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$
-provedeme přímý důkaz:
$x \in (A \cap B)' \Rightarrow x \notin (A \cap B) \Rightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B) \Rightarrow (x \in A') \vee (x \in B') \Rightarrow x \in A' \cup B'$
Platí tedy: $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$
2.část: dokážeme, že platí: $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$
-provedeme přímý důkaz:
$x \in A' \cup B' \Rightarrow (x \in A') \vee (x \in B') \Rightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B) \Rightarrow x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \in (A \cap B)'$
Platí tedy: $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$
Důkaz je hotov.

Graficky: Nejprve znázorníme množinu $A' \cup B'$ a potom $(A \cap B)'$:

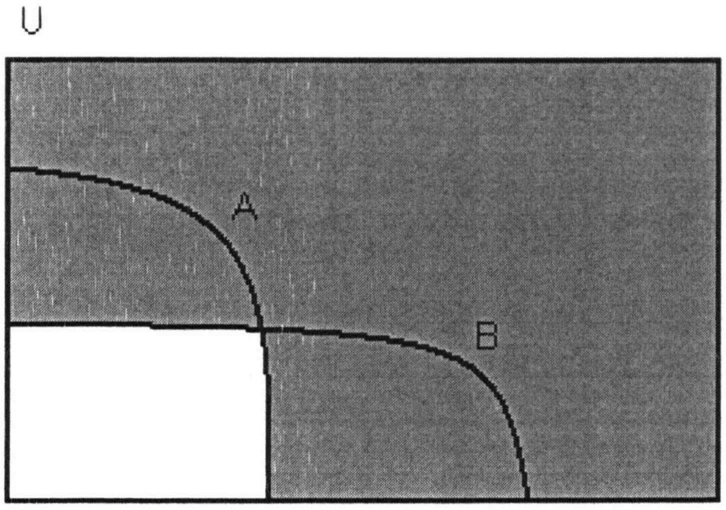
$A' \cup B$:'



A´

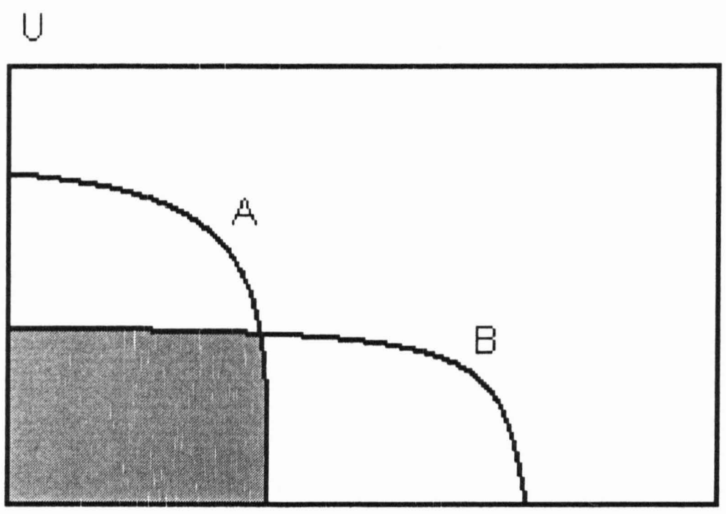


B´

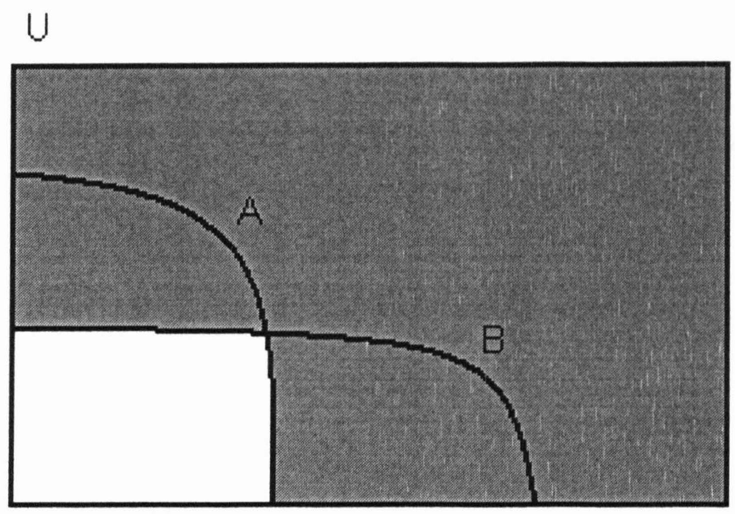


A′∪B′

(A∩B)′: 



A∩B



(A∩B)′

 Vidíme, že Vennovy diagramy pro množiny A′∪B′ a (A∩B)′ jsou stejné a proto platí: A′ ∪B′= (A∩B)′ 

Poznámka:
Vztahům (A∪B)′=A′∩B′ a (A∩B)′=A′∪B′ se říká de Morganovy vzorce.

Metody řešení slovních úloh

Existuje mnoho metod, jimiž se dají řešit slovní úlohy zaměřené na výrokovou logiku. My se budeme zabývat jen některými z nich.

Úsudková metoda

Úsudková metoda spočívá ve správném pochopení souvislostí ze zadání. Klíčový je jistý nadhled nad úlohou. Při řešení obvykle zkusíme, zda je nějaké tvrzení ze zadání pravdivé, nebo nepravdivé tak, že sledujeme, co by se stalo, kdyby dané tvrzení bylo pravdivé, a co by se stalo v opačném případě. Úloha se nám může větvit, neboť vždy musíme prozkoumat obě možnosti pravdivostních hodnot. Některé větve nás dovedou k výsledku, a jiné skončí jako slepé (dojdeme ke sporu). Úsudkovou metodu je vhodné použít u lehčích příkladů. Často se setkáme s elegantními úvahami, které nás jednoduše dovedou k výsledku, ale jejich objevení vyžaduje určité zkušenosti s řešením logických úloh. Na některé příklady lze rozumně použít i jiné metody. Nevýhodou této metody je neexistence algoritmu, který by bylo možno použít na všechny příklady.

Příklad:
Na jednom ostrově ve středomoří žijí notoričtí lháři a věčně pravdomluvní ostrované. Na pohled je od sebe nelze rozeznat. Jeden cizinec jednou potkal tři ostrovany. První povídá: „Všichni tři jsme lháři.", druhý dodá: „Právě jeden z nás zbývajících dvou je pravdomluvný." a třetí věděl, že ať řekne cokoliv, jsou už stejně všichni tri odhaleni, a tak mlčel. Určete, kdo je pravdomluvný, a kdo lhář.

Řešení:
První je lhář, protože pravdomluvný by o sobě nikdy neřekl, že je lhář. Platí tedy negace jeho výroku: „Aspoň jeden z nás je pravdomluvný." Druhý říká, že jeden ze zbývajících je pravdomluvný a má pravdu, neboť ji musí mít aspoň jeden z dvojice druhý a třetí. Kdyby lhal, má pravdu třetí, ale pak by měl pravdu i druhý, což je spor. Třetí je podle tvrzení druhého lhář. Pravdomluvný j e pouze druhý z ostrovanů.

Tabulky pravdivostních hodnot

S tabulkami pravdivostních hodnot jste se již setkali na těchto stránkách ve stejnojmenné kapitole. Pomocí těchto tabulek jsme zjišťovali pravdivostní hodnoty různých složených výroků. To se nám bude hodit při řešení následujících slovních úloh. Princip této metody tkví v tom, že nalezneme symbolický zápis výroku a v tabulce pravdivostních hodnot hledáme řešení. Tato metoda má na rozdíl od úsudkové metody tu výhodu, že není třeba, aby řešitel „viděl" do všech vztahů mezi jednotlivými výroky. Pro objasnění metody vyřešme následující příklad.

Příklad:
Z noční loupeže v bance jsou 3 podezřelí: Vrána, Straka a Čáp. Pan Vrána měří 187 cm, váží 120 kg a kulhá. Pan Straka měří 162 cm, váží 65 kg a nemá levou ruku. Pan Čáp měří 190 cm, váží 87 kg a je hrbatý. Loupež viděli tři svědci, kteří toho moc nevědí, ale přesto

se snaží pomoci a pravdivě vypovídají. První svědek vzpomíná: „Každý den v době přepadení jezdím okolo tramvají a skoro nikdo tam takhle pozdě v noci nebývá, ale minulý týden si dva
dny po sobě dva lidé prohlíželi zabezpečení banky. První byl vysoký nebo tlustý, rozhodně nápadný a ten druhý den tam byl takový malý člověk, co neměl jednu ruku, jeden z nich to musel být!" Druhý svědek viděl vše z dálky a vzpomíná si, že to byla taková velká osoba. Třetí svědek říká: „Buď byl malý, nebo měl hrb, ale nekulhal." Čtvrtý svědek tvrdí: „Jestliže to udělal malý člověk, měl s sebou hrbatého komplice.“ Divné výpovědi. Dokážete z nich určit, kdo je pachatel?

Řešení:
Příklad byste jistě poměrně lehce rozluštili úsudkovou metodou, ale mi si ukážeme řešení s použitím algebry pravdivostních hodnot. Určeme si význam jednotlivých výpovědí a zapišme je symbolicky:
1. svědek: $(V \vee Č) \vee S \Leftrightarrow V \vee Č \vee S$
2. svědek: $\neg Č$
3. svědek: $(S \veebar Č) \wedge \neg V$
3. svědek: $Č \Rightarrow S$
Všichni svědci vypovídali pravdivě, a tedy pravdivá je i konjunkce všech jejich výroků: $(V \vee Č \vee S) \wedge \neg Č \wedge ((S \veebar Č) \wedge \neg V) \wedge (Č \Rightarrow S)$.
V tabulce jednička symbolizuje účast na loupeži a nula neúčast.

Tabulka 7:

V	Č	S	**V ∨ Č ∨ S**	**¬Č**	¬V	S ∨ Č	**(S ⊻ Č) ∧ ¬V**	**Č ⇒ S**	Konjunkce „tučných výroků“
1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	0	0	0	1	1	0	0	1	0

Výsledkem je pouze jedna jednička a to pro ohodnocení (V,Č, S) = (0,0,1). Pouze v tomto případě mohli všichni svědci mluvit pravdu. Viníkem je pan Straka.Banku vyloupil pan Straka.

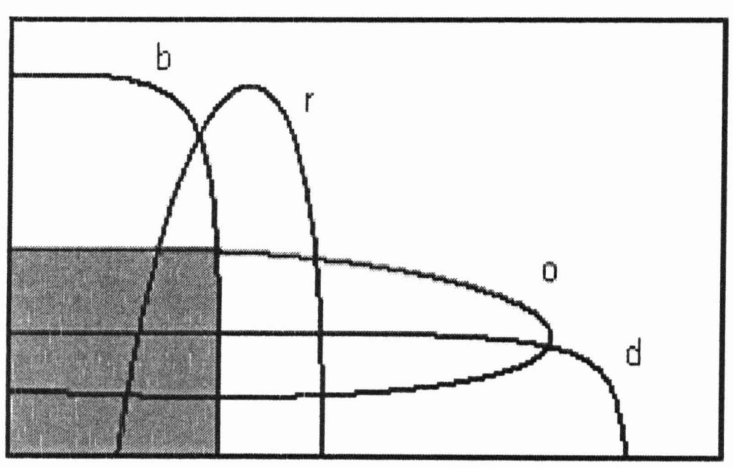
Vennovy diagramy

Poslední metodou řešení logických slovních úloh, kterou si na těchto stránkách ukážeme, je metoda Vennových diagramů, se kterými jsme se setkali v předchozí kapitole. Jak souvisejí Vennovy diagramy s matematickou logikou? Odpověď najdeme v souvislostech mezi výroky a množinami. Velké množství výroků přiřazuje nějakým objektům (prvkům) nějakou vlastnost (množinu). Množinou všech takovýchto vlastností je základní množina U, kterou znázorňujeme ve Vennově diagramu celým čtvercem, do něhož jsou následně zakresleny jednotlivé množiny. Některé výroky popisují prvky množin, a proto je pro ně použití Vénnových diagramů vhodné. Poznamenejme, že na konjunkci lze nahlížet jako na průnik, na disjunkci jako na sjednocení a na negaci jako na doplněk. Vše lépe pochopíte na příkladech.

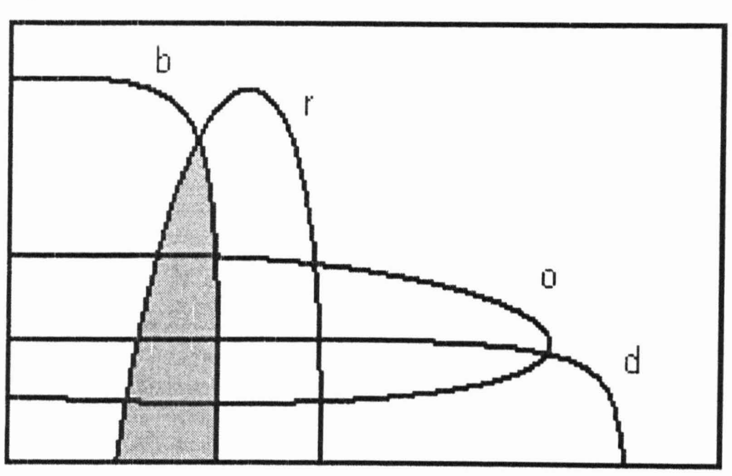
Příklad:
3 zemědělci se domlouvají, jakou zeleninu budou pěstovat příští sezonu. V úvahu připadají brambory, okurky, rajčata dýně.
1. říká: „Rozhodně bych zasadil brambory a ještě okurky nebo dýně.“
2. říká: „Souhlasím s bramborami a ještě chci zasadit rajčata.“
3.říká: „Jenom prosím nesázejme zároveň brambory, rajčata a dýně.“
Je možné vyhovět všem? Pokud ano, co by se mělo zasadit?

Řešení:
Zapišme si nejprve symbolicky výroky zemědělců:
1.$b \wedge (o \vee d)$
2.$b \wedge r$
3.$(b \wedge r \wedge d)$
A nyní si znázorníme odpovídající Vennovy diagramy:

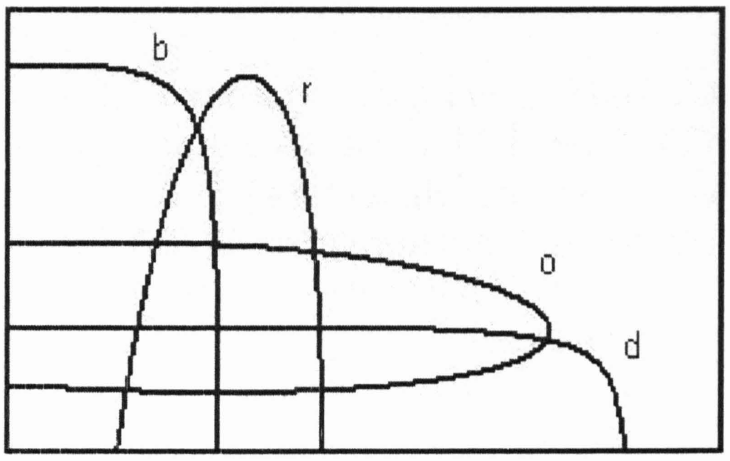
1. $b \cap (o \cup d)$
U



2. $b \cap r$
U

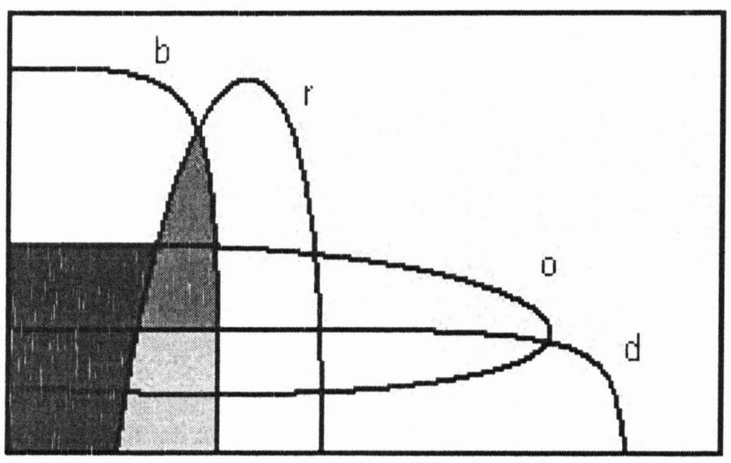


3. $(b \cap r \cap d)'$



Protože chceme vyhovět všem třem zemědělcům, hledáme takové řešení, aby platily všechny tři výroky zároveň, tj. aby platila konjunkce $(b \wedge (o \vee d)) \wedge (b \wedge r) \wedge (\neg(b \wedge r \wedge d))$. Ve Vennově diagramu znázorníme konjunkci jako průnik. Znázorněme tedy průnik tří předchozích množin:

$(b \cap (o \cup d)) \cap (b \cup r) \cap (b \cap r \cap d)'$



Červeně vybarvené pole označuje, co je třeba zasadit, aby byli všichni zemědělci spokojeni. Je to průnik okurek, rajčat a brambor, nikoliv však dýní. Aby bylo vyhověno všem, je třeba zasadit brambory, rajčata a okurky a nesázet dýně.

Příklady 9

Příklad 9.1:

Dnes již víme, jak to u Svatého Petra chodí. Posadí vás do místnosti, ze které vedou dvoje dveře, jedny do nebe a druhé do pekla. U dveří do nebe stojí vždy pravdomluvný anděl a u dveří do pekla stoji věčný lhář čert. Od pohledu není poznat, kdo je kdo.Vstoupíte-li do jedněch dveří, není návratu. Byl jste dobrý člověk, a tak máte právo položit jednomu ze strážných jakoukoliv otázku, ale pouze jednu. Dokážete se dostat do nebe?

Řešení:

Na přímou otázku, které dveře kam vedou, budou oba odpovídat stejně, ale jen jeden říká pravdu. Nikdo nám nikdy neřekne, že jeho dveře vedou do pekla. Položíme otázku: „Co mi odpoví druhý strážný, když se ho zeptám, zda stojí u dveří do pekla?" Zeptáme-li se anděla, popravdě nám odpoví, že ne a můžeme vstoupit do jeho dveří. Zeptáme-li se čerta, změní původní andělovu odpověď ne na ano a víme, že máme vstoupit do druhých dveří.
Do nebe se dostanete správným rozluštěním významu odpovědi na otázku: „Co mi odpoví druhý strážný, když se ho zeptám, zda stojí u dveří do pekla?"

Příklad 9.2:

Při návštěvě New Yorku si pan Holub se svými přáteli nad sklenicí dobrého moku povídal o svých cestách.
Alan:„V Africe byl Joe, nebo Dan "
Bob:„Byl tam Dan."
Joe:„Já tam bohužel nebyl."
Dan:„Ani já ne."
Pan Holub věděl, že aspoň 3 z jeho přátel vždy mluví pravdu. Kdo z dvojice Joe a Dan byl tedy v Africe?

Řešení:

Víme, že aspoň 3 z výpovědí jsou pravdivé. Všechny 4 pravdivé být nemohou, protože výpovědi Boba a Dana jsou navzájem ve sporu. Buď tedy mluví pravdu Bob, nebo Dan. Jestliže Bob lže a Dan mluví pravdu, znamená to, že Dan v Africe nebyl. Podle Joa tam nebyl ani on. To je však v rozporu s tím co říká Alan. Našli jsme tedy dva, kteří neříkají pravdu a to je spor s tím, že aspoň 3 z Holubových přátel vždy mluví pravdu. Nechť má tedy pravdu Bob. Dan tedy Africe byl. Joe má pravdu, on tam nebyl. To odpovídá i výpovědi Alana.
Dan v Africe byl, Joe nikoliv

Příklad 9.3:

Na schodišti sedí za sebou tři dívky. Jmenují se Hana, Jana a Dana. Hana sedí nejvýš a vidí na obě děvčata před sebou, uprostřed sedí Jana, která vidí pouze na Danu a nejníže sedí Dana, která nevidí na nikoho. Všechny tři mají perfektní úsudek. Přišel pan učitel s krabicí, ve které je pět čepic, 3 bílé a 2 černé-to děvčata vědí. Každé dívce dal na hlavu jednu náhodně vybranou čepici tak, aby nevěděla, jakou má barvu. Zeptal se Hany, jestli podle toho, co vidí na hlavách zbylých holek může určit, jakou má ona sama čepici. Hana odpověděla, že ne.Pak se zeptal Jany, zda podle toho, co vidí a podle toho co slyšela Hanu, může určit jakou čepici ona sama má. Jana odpověděla, že ne.Pak se zeptal Dany, zda podle toho co slyšela Hanu a Janu, může určit jakou čepici ona sama má. Co mu Dana odpověděla? Jakou měla na hlavě čepici?

Řešení:

V krabici bylo původně 5 čepic-3 bílé a 2 černé. Existují tedy 3 možné varianty trojic vybraných čepic, které mohli nastat. Jsou to tyto varianty:

A. 3 bílé čepice
B. 2 bílé a 1 černá
C. 1 bílá a 2 černé

Budeme zkoumat odpovědi děvčat a některé varianty postupně vyvracet. Vycházíme samozřejmě z toho, že děvčata mají naprosto správný úsudek. Díky odpovědi Hany můžeme vyloučit variantu C. Kdyby totiž Hana viděla, že obě holky před ní mají černé čepice, bylo by jí jasné, že ona musí mít bílou. To však Hana neřekla. Zbývají tedy pouze 2 varianty A a B. Vzhledem k tomu, že ani Jana nemohla určit, jakou má čepici, můžeme tedy vyloučit i variantu B, protože kdyby Jana před sebou viděla černou čepici, bylo by jí jasné, že ona sama má bílou. Zbývá tedy varianta A, která je jediná možná. Všechny tři dívky měly na hlavách bílé, čepice. Dana tedy odpověděla, že může určit, jakou má čepici, měla bílou čepici.

Příklad 9.4:

Detektiv Babočka se svými muži už dlouho sleduje podvodníka, který vyhledává své oběti v šesti kavárnách města, jež jsou v zájmu utajení označeny písmeny A, B, C, D, E, F. Babočka z dlouhých pozorování ví, že podvodník navštíví v témž dni vždy kavárnu A nebo C, dále kavárnu B nebo F a také nikdy nevynechá kavárnu D nebo E. Nikdy však v témž dni nenavštíví současně kavárny D a B, také vždy vynechá návštěvu alespoň jedné z kaváren C, F. Dnes ho chce Babočka dopadnout při činu. Od svých mužů, kteří hlídají vchody kaváren, dostal hlášení, že podvodník již navštívil kavárny A, E a F. Babočka se rozjíždí do kavárny B. Míří tam podvodník také? (Předpokládejte, že podvodník neporuší Pravidelnost „obchůzek".

Řešení:

Řešme příklad tabulkovou metodou. V zadání lze nalézt 5 výroků o kavárnách, které podvodník navštěvuje. Jsou to tyto výroky:

$A \vee C$, $B \vee F$, $D \vee E$, $\neg(B \wedge D)$, $\neg(C \wedge F)$

Všechny výroky platí zároveň, musí tedy být pravdivá konjunkce:

$\varphi\ (A \vee C) \wedge (B \vee F) \wedge (D \wedge E) \wedge \neg(B \wedge D) \wedge \neg(C \wedge F)$

My víme, že již navštívil kavárny A, E a F, což znamená, nevýrokové proměnné označené stejnými písmeny jsou pravdivé. Ptáme se, zda podvodník nyní dorazí do kavárny B. Přejdeme-li k výrokovým formulím, zajímá nás, zda při ohodnocení A, E a F pravdou, je výroková formule φ pravdivá právě tehdy, když B je také pravda. Tabulku nemusíme psát celou, neboť víme, že A, E a F jsou pravdivé.

Tabulka 9.1:

A	B	C	D	E	F	$A \vee C$	$B \vee F$	$D \vee E$	$B \wedge D$	$\neg(B \wedge D)$	$C \wedge F$	$\neg(C \wedge F)$	φ
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0

1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**

Formule φ je pravdivá při ohodnocení $(A,B,C,D,E,F) \in \{(1,1,0,0,1,1), (1,0,0,1,1,1), (1,0,0,0,1,1)\}$. V reálné interpretaci řekneme, že dnes navštívil kavárny A, E a F (víme již ze zadání) a ještě navštíví kavárnu B, nebo D, nebo již žádnou kavárnu nenavštíví. Podvodník tedy do kavárny B dorazit může, ale nemusí.

Příklady

Příklady	Téma
Příklady 1	Výrok
Příklady 2	Negace výroku
Příklady 3	Složené výroky
Příklady 4	Tabulky pravdivostních hodnot, negování složených výroků
Příklady 5	Výrokové formy, kvantifikované výroky
Příklady 6	Logická výstavba matematiky
Příklady 7	Určení množiny, množinové vztahy a operace
Příklady 8	Grafické znázornění množin
Příklady 9	Slovní úlohy

Rejstřík

Pojem	symbol	celý zápis	čteme
Alternativa	$\veebar$	$a \veebar b$	Buď platí výrok a, nebo platí výrok b.
Definice			
Disjunkce	$\vee$	$a \vee b$	Platí výrok a nebo výrok b.
Doplněk		B_A'	Doplněk množiny B v množině A
Důkaz			
Důkaz ekvivalence			
Důkaz matematickou indukcí			
Důkaz nepřímý			
Důkaz přímý			
Důkaz sporem			
Ekvivalence	$\Leftrightarrow$	$a \Leftrightarrow b$	Výrok a platí právě tehdy, když platí b.
Hypotéza			
Implikace	$\Rightarrow$	$a \Rightarrow b$	Jestliže platí a, platí i b.
Implikace obměněná		$\neg b \Rightarrow \neg a$	Jestliže neplatí b, neplatí ani a.
Implikace obrácená		$b \Rightarrow a$	Jestliže platí b, platí i a.
Intervaly	$\langle,\rangle$, (,)	$\langle a,b\rangle$, (a,b)	Uzavřený, otevřený interval od a do b.
Konjunkce	$\wedge$	$a \wedge b$	Platí a a zároveň platí b.
Kvantifikované výroky			
Kvantifikátory			
Kvantifikátor-velký (obecný)	$\forall$	$\forall x;\forall x$:	pro každé x platí:
Kvantifikátor-malý (existenční)	$\exists$	$\exists x$;, $\exists x$:	Existuje x, pro které platí:
Kvantifikátor jednoznačné existence	$\exists!$	$\exists!x$;, $\exists!x$:	Existuje právě jedno x, pro které platí:
Množina			
Negace výroku	$\neg$	$\neg a$	Neplatí výrok a.
Negace složených výroků			
Negace kvantifikovaných výroků			
Paradoxy			
Podmnožina	$\subset, \not\subset$	$A \subset B, A \not\subset B$	Množina A je podmnožina množiny B., A není podmnožinou množiny B.
Prázdná množina	$\emptyset$,{}		
Průnik	$\cap$	$A \cap B$	Průnik množin A a B
Prvek množiny	$\in, \notin$	$x \in A$, $x \notin A$	x je prvkem množiny A.,x není prvkem A
Rovnost množin	$=, \neq$	$A=B, A\neq B$	Množina A se rovná množině B., Množina A je různá od B.
Rozdíl množin	$-$	$A-B$	Rozdíl množin A a B
Sjednocení	$\cup$	$A \cup B$	Sjednocení množin A a B
Složené výroky			
Tabulka negací			
Tabulka negací výroků s kvantifikátory $\forall,\exists$			
Tabulka pravdivostních hodnot (složených výroků)			
Tautologie			
Vennovy diagramy			
Výrok			
Výrok-existenční			
Výrok-obecný			
Výrokové formule			
Výrokové formy			

Odkazy

Na této stránce uvádím několik odkazů na doplňkovou, rozšiřující nebo alternativní literaturu a www-stránky.

Literatura:

- **I. Bušek, L. Boček, E. Calda: Matematika pro gymnázia – Základní poznatky z matematiky. Praha, Prométheus 1992**
- **J. Polák: Přehled středoškolské matematiky. Praha, Prométheus 2005**
- **J. Polák: Středoškolská matematika v úlohách I. Praha, Prométheus 2002**
- **J. Šedivý, J. Lukátšová, O. Odvárko, M. Zöldy: Úlohy o výrocích a množinách pro I. Ročník gymnázia. SPN Praha 1972**

www-stránky:

- Posloupnosti a řady - diplomová práce Lucie Šibravové
- Limita a spojitost - diplomová práce Miroslava Pihery
- Goniometrie a trigonometrie - diplomová práce Marie Motyčkové
- Komplexní čísla - diplomová práce Lenky Šilarové
- Kombinatorika - diplomová práce Jany Farské
- Geometrická zobrazení - diplomová práce Kateřiny Dobiášové
- Funkce - diplomová práce Jaroslava Richtera
- Stránka katedry didaktiky matematiky MFF UK - studentské práce
- Ostravský školáček (blog pro školáky nejen o matematice) - výroková logika a množiny
- Filosofická fakulta Masarykovy university - stránky o logice
- wikipedie - internetová encyklopedie, v kategorii matematika je spousta pojmů z matematické logiky a teorie množin

Závěr

Vytvořil jsem internetové stránky věnované výrokové logice a teorii množin o rozsahu mírně přesahujícím učivo střední školy. Obsah stránek je rozdělen do tří hlavních kapitol.

V první kapitole „Výroky“ se student může seznámit s výroky, výrokovými formulemi a formami, s různými typy důkazů matematických vět a ověřit si své znalosti na interaktivních příkladech. Druhá kapitola „Množiny“se věnuje teorii množin a Vennovým diagramům, stejně jako první kapitola obsahuje výklad látky i interaktivní příklady a poslední třetí kapitola „Slovní úlohy“ se zabývá řešením zajímavých slovních úloh pomocí znalostí získaných z předchozích kapitol.

Kladl jsem důraz na to, aby se studenti dobře seznámili s matematickými symboly, aby si osvojovali matematický „jazyk“. Myslím, že jim to přijde vhod při dalším studiu matematiky na střední, případně na vysoké škole.

Stránky jsou optimalizovány pro prohlížeče Internet Explorer, Mozilla Firefox a Netscape Browser.

Seznam použité literatury

- I. Bušek, L. Boček, E. Calda: Matematika pro gymnázia – Základní poznatky z matematiky. Praha, Prométheus 1992
- J. Polák: Přehled středoškolské matematiky. Praha, Prométheus 2005
- J. Polák: Středoškolská matematika v úlohách I. Praha, Prométheus 2002
- J. Šedivý, J. Lukátšová, O. Odvárko, M. Zöldy: Úlohy o výrocích a množinách pro I. Ročník gymnázia. SPN Praha 1972
- M. Kobza: Sbírka úloh z logiky pro výuku středoškolské matematiky. Diplomová práce, Praha, 2004
- M. Pihera: Diferenciální počet na střední škole s využitím internetu. Diplomová práce, Praha, 2004
- P. Broža: Tvorba www stránek pro úplné začátečníky. Brno, Computer Press 2004
- P. Broža: Programování www stránek pro úplné začátečníky. Brno, Computer Press 2003

- http://www.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/index.php
- http://skolacci.blog.cz/0610/matematika-1-2-vyrokova-logika-mnoziny.blog.
- http://www.fphil.muni.cz/fil/logika/vl.php
- www.wikipedie.cz
- www.jakpsatweb.cz