Posudek oponentky na diplomovou práci
s názvem
Lipschitz-free spaces and actions of groups,
jejímž autorem je
Bc. Tomáš Raunig

Diplomová práce pana Tomáše Rauniga se zabývá analýzou Lipschitz-free prostorů ve dvou nezávislých směrech: prvním je otázka, kdy je kanonické vnoření Lipschitz-free p-prostoru na podmnožině generujícího metrického prostoru do Lipschitz-free p-prostoru na celém metrickém prostoru ve skutečnosti izomorfizmem, a druhým je studium akcí grup na prostorech Lipschitzovských funkcí prostřednictvím lineárních izometrií indukovaných linearizací akcí na metrických prostorech.

Pro daný metrický prostor (M, d) s libovolně pevně zvoleným počátkem $0 \in M$ nazýváme *Lipschitz-free prostorem na* M jedinečný (až na lineární izometrii) reálný Banachův prostor $\mathcal{F}(M)$ splňující následující univerzální vlastnost:

(1) existuje izometrické vnoření $\delta : M \to \mathcal{F}(M)$ takové, že $\delta(0) = 0$, a
(2) pro libovolný Banachův prostor X a Lipschitzovské zobrazení $f : M \to X$ splňující $f(0) = 0$ existuje jednoznačně určený omezený lineární operátor $T_f : \mathcal{F}(M) \to X$ takový, že $T_f \circ \delta = f$ a $\|T_f\| = \mathrm{Lip}(f)$.

Rozšířením tohoto konceptu do kategorií p-metrických prostorů a p-Banachových prostorů pro libovolné $p \in (0, 1]$ získáváme zobecnění v podobě takzvaných *Lipschitz-free* p*-prostorů* $\mathcal{F}_p(M)$ (předchozí definice odpovídá případu $p = 1$).

Zatímco pro $0 \in N \subset M$ a „klasické" Lipschitz-free prostory platí, že $\mathcal{F}(N)$ se izometricky vnořuje do $\mathcal{F}(M)$ jednoduše díky existenci rozšíření Lipschitzovských funkcí na metrických prostorech (McShane, 1934), pro $p < 1$ není ani zřejmé, zda je kanonické „vnoření" $\mathcal{F}_p(N)$ do $\mathcal{F}_p(M)$, definované univerzální vlastností aplikovanou na δ, vůbec injektivní. V hlavním výsledku první kapitoly práce (Theorem 1.29) autor dokazuje, že pokud M je metrický prostor, potom je toto vnoření izomorfizmem s konstantou izomorfizmu závislou pouze na p. V Example 1.26 také ilustruje, že se obecně nemusí jednat o izometrii. Klíčem k pozitivnímu výsledku je opět existence rozšíření Lipschitzovských zobrazení z metrických prostorů, tentokrát do p-Banachových prostorů, která je zaručena v případě metrických stromů (Matoušek, 1990; Bíma, 2024). Aby bylo možné toto aplikovat, autor dokazuje redukci problému na konečné metrické prostory a ukazuje, že výpočet normy v Lipschitz-free p-prostorech je možné provádět na metrických stromech. Tento výsledek je sám o sobě zajímavý i pro Lipschitz-free (1-)prostory.

Druhá kapitola práce je motivována otázkou, zda je každý funkcionál na Banachově prostoru X, který je „téměř" invariantní na duální akci diskrétní grupy G lineárními izometriemi na X^*, aproximovatelný G-invariatním funkcionálem (Kazhdan and Yom Din, 2022). Autor se zabývá tímto problémem v prostředí Lipschitz-free a Lipschitzovských prostorů. Po řádném zavedení kontextu představí charakterizace invariantních a „téměř" invariantních Lipschitzovských funkcí, které mu umožní odpovědět pozitivně v případě Lipschitzovských prostorů nad volnými grupami s word metrikou působícími na sobě levou translací. Dále dokázaná stabilita na přechody ke grupovým kvocientům vede také ke (slabší) pozitivní odpovědi pro konečně prezentované grupy.

Diplomová práce obsahuje původní a zajímavé výsledky vysoké úrovně, z nichž některé byly dokonce již i publikovány, má široký záběr a potenciál pro navázání dalším výzkumem. Práce zároveň poskytuje jasnou motivaci a všechny potřebné souvislosti. Je dobře strukturována, napsána pečlivě a srozumitelně a (nakolik můžu posoudit) velmi dobrou angličtinou, bez faktických chyb, pouze s nějakými překlepy. Literatura je řádně citována.

Celkově, dle mého názoru pan Tomáš Raunig jednoznačně prokázal výbornou schopnost pro tvůrčí vědeckou činnost a její přehlednou prezentaci, a výsledná diplomová práce dosahuje velmi vysoké úrovně. Doporučuji ji tedy k obhajobě a navrhuji hodnocení známkou výborně.

Komentáře:

(1) Myslím, že v angličtině se obvykle nepoužívá slovosled „for any $\mu \in \mathcal{F}_p(N)$ holds $\|\mu\|_{\mathcal{F}_p(M)} \leq \|\mu\|_{\mathcal{F}_p(N)}$“ (např. strana 11 řádek 9 nebo strana 43 řádek -2) a bylo by vhodnější tyto fráze přeformulovat, například jako „for any $\mu \in \mathcal{F}_p(N)$, $\|\mu\|_{\mathcal{F}_p(M)} \leq \|\mu\|_{\mathcal{F}_p(N)}$ holds“ nebo „for any $\mu \in \mathcal{F}_p(N)$ we have $\|\mu\|_{\mathcal{F}_p(M)} \leq \|\mu\|_{\mathcal{F}_p(N)}$“ nebo „for any $\mu \in \mathcal{F}_p(N)$ it holds that $\|\mu\|_{\mathcal{F}_p(M)} \leq \|\mu\|_{\mathcal{F}_p(N)}$“.

(2) V Proposition 1.31 by bylo vhodné specifikovat význam hodnoty $\|\iota^{-1}\|$ v případě nekonečných metrických prostorů.

(3) Pokud se nemýlím, v důkazu Proposition 1.31 by stačilo se odvolat na Fact 1.14.

(4) Uvítala bych upřesnění reference k Example 2.4. Je také zmíněn v [10]?

(5) Před Corollary 2.27 by bylo nápomocné připomenout pojem *orbit*.

(6) Některé překlepy:
- s.4, ř.3: Kazhdan,
- s.8, ř.3: „be ~~a~~ p-metric spaces“,
- s.15, ř.-12: věta začíná malým písmenem,
- s.16, ř.7,16,17: starting, depend, switching,
- s.17, ř.5: index u posledního E_i by měl být 3,
- s.17, ř.3,7: mělo by být (ii) místo (iii) a opakuje se slovo p-norm,
- s.24, ř.3,8: chybí exponent p,
- s.32, ř.9: $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_n$,
- s.38, ř.21: mělo by být F místo G,
- s.40, ř.12: „G on a Banach space“,
- s.45, ř.-3: $\lim_{n\to\infty} \mu_n$,
- s.52, ř.-3: $y > x$,
- s.57, ř.-1,-2: mělo by být k místo n.

Otázky a úvahy inspirované výsledky práce:

(1) Vzhledem na Example 1.26 a Theorem 1.29, je známa nějaká třída metrických prostorů, pro které je vnoření $\iota : \mathcal{F}_p(N) \to \mathcal{F}_p(M)$, kde $p < 1$, izometrie?

(2) V teorii optimálního transportu existuje pojem takzvané *cyklické monotonie.* Speciálně, pro prvek ze $\mathrm{span}(\delta(M)) \subset \mathcal{F}(M)$ platí, že jeho reprezentace v bázi z $\mathfrak{B}$ (značení z práce) je normově optimální právě tehdy když je nosič této reprezentace cyklicky monotonní. Zajímalo by mě, jestli by to bylo možné využít k (urychlení) hledání stromů a vah, které realizují normu, nebo jestli něco podobného může platit i v Lipschitz-free p-prostorech.

(3) Existují nějaké negativní příklady ke Question 2.3, pokud bychom uvažovali akci grupy na Lipschitzovském prostoru duální k akci grupy na Lipschitz-free prostoru, která nevzniká linearizací akce grupy na generujícím metrickém prostoru?

V Praze dne 24. května 2024 Eva Pernecká