Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Černý

Charakterizace perfektních okruhů

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Jan Šaroch, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2024

Předně bych chtěl poděkovat svému vedoucímu práce doc. Mgr. Janu Šarochovi, Ph.D. za ochotu a velké množství trpělivosti. Dále bych chtěl poděkovat rodině za podporu při psaní práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....   Podpis autora

Název práce: Charakterizace perfektních okruhů

Autor: Jakub Černý

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mrg. Jan Šaroch, Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: V této práci provádíme důkaz Bassova Teorému P, věty charakterizující perfektní okruhy, pomocí elementárních nástrojů z teorie modulů a teorie kategorií. Dále uvádíme Bergmanův příklad okruhu, který je perfektní z právě jedné strany, ukážeme, že okruhy artinovské z libovolné strany jsou perfektní, okruhy, které jsou noetherovské a perfektní, jsou artinovské a nakonec, že perfektní obory jsou nekomutativní tělesa.

Klíčová slova: perfektní okruh, projektivní pokrytí, plochý modul

Title: Characterisations of perfect rings

Author: Jakub Černý

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. Mgr. Jan Šaroch, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: In this thesis, we present a proof of Bass's Theorem P, a theorem characterizing perfect rings, using elementary tools from module theory and category theory. Next we introduce Bergman's example of ring that is perfect on only one side, show that Artinian rings are perfect, rings which are Noetherian and perfect are Artinian, and finally, that perfect domains are division rings.

Keywords: perfect ring, projective cover, flat module

Obsah

Úvod

Jeden z klasických výsledků teorie modulů minulého století je fakt, že pro každý modul nad daným okruhem existuje jeho injektivní obal. Přirozeně se tak objevila stejná otázka ohledně duálního pojmu, a to projektivního pokrytí. V průběhu 50. let se vědělo, že na rozdíl od injektivního obalu projektivní pokrytí modulů nad daným okruhem nutně nemusí existovat. Okruhy, nad kterými tato pokrytí existují, se začaly nazývat (zprava/zleva) perfektní. Roku 1959 přišel americký matematik Hyman Bass ve svém článku *Finistic dimensions and homological generalisation of semi-primary rings* ([1]) s větou (Teorém P), která netriviálním způsobem charakterizuje třídu perfektních okruhů.

V této práci zpracováváme důkaz této věty. Tvrzení s důkazy z [1] rozepisujeme, doplňujeme o detaily a využíváme pouze elementárních nástrojů z teorie modulů. Vyhýbáme se využití tenzorového součinu modulů, jeho derivovanému funktoru Tor a dále derivovanému funktoru Ext. Snažíme se přitom dodržovat značení zavedená právě v [1] a dále v [2].

První kapitola obsahuje základní pojmy z teorie modulů, které budeme využívat skrze celou práci. Dále zde uvádíme znění Teorému P. Ten obsahuje šest ekvivalentních podmínek včetně podmínky pravé perfektnosti okruhu.

Druhá kapitola se soustředí na řetězec implikací (*4*), (*5*), (*6*), (*1*).

Ve třetí kapitole dokazujeme ekvivalenci podmínek (*1*) a (*2*) spolu s charakterizací slabší vlastnosti, než je perfektnost, a to semi-perfektnosti.

Ve čtvrté kapitole dokážeme zbylé implikace pro dokončení cyklu. V důkazech těchto implikací se od článku [1] odlišíme, neboť Bass v jejich důkazech využívá tenzorového součinu a jeho derivovaného funktoru Tor.

V páté kapitole uvádíme Bergmanův příklad okruhu, který je perfektní pouze z jedné strany, což ukazuje, že perfektnost není symetrická vlastnost. Dále se věnujeme vztahu perfektnosti s noetherovskostí, artinovskostí a ukážeme, že perfektní obor je nutně nekomutativní těleso.

Kapitola 1

Základní definice a věty

Na začátek si připomeňme některé základní pojmy a definice z teorie modulů.

1.1 Základní definice

Uvažme okruh R. Kategorii všech pravých R-modulů spolu s R-lineárními zobrazeními mezi nimi značíme Mod-R. Obdobně R-Mod značí kategorii levých R-modulů s R-lineárními zobrazeními.

Dále připomeňme, že pro fixní okruh jsou tyto kategorie preaditivní, čili pro $M, N \in$ Mod-R je $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ abelovská grupa. Pro $M \in$ Mod-R značíme $\mathrm{End}_R(M)$ okruh R-lineárních zobrazení na M. Násobení je zde definováno jako skládání zobrazení. V případě R-Mod užíváme stejné značení.

Epimorfismy v Mod-R jsou právě surjektivní R-lineární zobrazení a monomorfismy v Mod-R jsou právě prostá R-lineární zobrazení. Obdobně pro kategorii R-Mod. Obě kategorie jsou balancované, tj. izomorfismy jsou právě morfismy, které jsou epimorfismy a zároveň monomorfismy.

Nebude-li uvedeno jinak, všechny moduly uvažujeme jako pravé R-moduly. Pravý regulární modul budeme občas značit R_R a levý regulární modul ${}_RR$.

Definice 1 (Jednoduchý modul)**.** *Nenulový $S \in$ Mod-R nazveme jednoduchý, pokud je generován každým svým nenulovým prvkem.*

Poznámka. Není těžké ověřit, že S je jednoduchý R-modul právě tehdy, když nemá netriviální podmoduly.

Definice 2 (Sokl)**.** *Nechť je $M \in$ Mod-R. Podmodul modulu M generovaný všemi jeho jednoduchými podmoduly nazýváme sokl a značíme $\mathrm{Soc}(M)$*

Definice 3 (Totálně rozložitelný modul)**.** *Modul $M \in$ Mod-R nazveme totálně rozložitelný, pokud $M = \mathrm{Soc}(M)$.*

Lemma 1. ([2, Theorem 9.6]) *Pro $M \in$ Mod-R jsou následující podmínky ekvivalentní*

(i) $M = \mathrm{Soc}(M)$.

(ii) M je izomorfní direktní sumě jednoduchých pravých R-modulů.

(iii) Každý podmodul M je direktní sčítanec v M.

(iv) Každá krátká exaktní posloupnost v Mod-R s prostředním členem M se štěpí.

Díky této charakterizaci si není těžké rozmyslet, že direktní suma totálně rozložitelných modulů je totálně rozložitelná a faktormodul totálně rozložitelného modulu je opět totálně rozložitelný.

Definice 4 (Totálně rozložitelný okruh)**.** *Okruh R je totálně rozložitelný, pokud je modul R_R totálně rozložitelný.*

Poznámka. Okruh R je totálně rozložitelný právě tehdy, když je každý modul $M \in \text{Mod-}R$ totálně rozložitelný.

Obdobně lze definovat totální rozložitelnost pro levé moduly, jde ovšem o symetrickou vlastnost. To lze nahlédnout například z Weddernburnovy–Artinovy věty, která je k nalezení například v [2, Theorem 13.6].

Lemma 2. *Je-li R totálně rozložitelný okruh, pak je každý cyklický R-modul izomorfní pravému ideálu v R.*

Důkaz. Každý cyklický modul je izomorfní faktormodulu regulárního modulu R_R, tedy je z bodu (iv) v lemmatu 1 izomorfní direktnímu sčítanci v R_R. □

Definice 5 (Jacobsonův radikál)**.** *Nechť $M \in \text{Mod-}R$. Potom definujeme radikál modulu M jako $\operatorname{Rad}(M) = \bigcap\{N \subseteq M \mid N$ je maximální pravý podmodul v $M\}$. Pokud M neobsahuje maximální podmoduly, definujeme $\operatorname{Rad}(M) = M$. Obdobně definujeme radikál levých modulů. Nakonec definujeme Radikál okruhu, značeno $\mathrm{J}(R)$, jako radikál regulárního pravého modulu R_R.*

Následující tři lemmata obsahují vlastnosti Jacobsonova radikálu, které jsou ovšem notoricky známé. Z toho důvodu tato tvrzení nedokazujeme, ale pouze odkazujeme na důkazy v literatuře.

Lemma 3. *Pro $M, N \in \text{Mod-}R$ platí:*
(i) je-li $f \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$, pak $f(\operatorname{Rad}(M)) \subseteq \operatorname{Rad}(N)$,
(ii) $\operatorname{Rad}(M/\operatorname{Rad}(M)) = 0$,
(iii) $\mathrm{J}(R) = \operatorname{Rad}({}_R R)$,
(iv) $\mathrm{J}(R)$ je oboustranný ideál v R,
(v) $\mathrm{J}(R) = \{x \in R \mid \forall s, r \in R, \exists t \in R\colon t(1 - sxr) = (1 - sxr)t = 1\}$,
(vi) $M\,\mathrm{J}(R) \subseteq \operatorname{Rad}(M)$.

Důkaz. Body $(i), (ii)$ jsou dokázány v [2, str. 120–121] a důkaz bodů $(iii), (v)$ nalezneme v [2, str. 166–167]. Bod (iv) plyne z bodu (i) a faktu, že násobení prvkem $r \in R$ zleva je endomorfismus. Nakonec bod (vi) je v [2, Corollary 15.18]. □

Lemma 4 (Nakayamovo lemma)**.** *Nechť je $M \in \text{Mod-}R$ konečně generovaný. Je-li M netriviální, pak je $\operatorname{Rad}(M) \subsetneq M$.*

Důkaz. Plyne přímo z [2, Corollary 10.5]. □

Lemma 5. ([2, Proposition 9.19]) *Nechť $(A_i \mid i \in I)$ je soubor R-modulů, pro indexovou množinu I. Potom $\operatorname{Rad}(\bigoplus_{i\in I} A_i) = \bigoplus_{i\in I} \operatorname{Rad}(A_i)$.*

Definice 6 (Anihilátor)**.** *Nechť $M \in$ Mod-R, uvažme N libovolnou podmnožinu modulu M. Anihilátorem množiny N rozumíme podmnožinu okruhu R definovanou jako* $\mathrm{Ann}(N) = \{r \in R \mid \forall n \in N : nr = 0\}$.

Poznámka. Pro podmnožinu N pravého R-modulu M je $\mathrm{Ann}(N)$ pravý ideál a $\mathrm{Ann}(M)$ oboustranný ideál.

Definice 7 (Volný modul)**.** *Ať $M \in$ Mod-R. Podmnožinu X modulu M nazveme volnou bází modulu M, pokud generuje M a jde o R-nezávislou množinu, tj. kdykoliv $x_1, \dots x_n \in X$, $r_1, \dots, r_n \in R$ jsou takové, že $\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = 0$, pak je $r_1 = \dots = r_n = 0$. Modul M nazveme volný, pokud má nějakou volnou bázi.*

Definice 8. *Nechť $P \in$ Mod-R. Řekneme, že P je projektivní, pokud je funktor* $\mathrm{Hom}_R(P, -) \colon$ Mod-$R \to \mathbb{Z}$-Mod *exaktní.*

Definice 9. *Nechť $I \in$ Mod-R. Řekneme, že I je injektivní, pokud je funktor* $\mathrm{Hom}_R(-, I) \colon$ Mod-$R \to \mathbb{Z}$-Mod *exaktní.*

Lemma 6. ([2, str. 192–193]) *Nechť $P, M, N \in$ Mod-R. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní.*
(i) P je projektivní.
(ii) Pro každý epimorfismus $f \colon M \to N$ je $\mathrm{Hom}_R(P, f)$ rovněž epimorfismus.
(iii) P je izomorfní direktnímu sčítanci volného modulu.
(iv) Pro každý epimorfismus $f \colon M \to P$ existuje $g \colon P \to M$, že $f \circ g = \mathrm{id}_P$.

Definice 10 (Nepodstatný podmodul)**.** *Nechť R je okruh, $M \in$ Mod-R a N je podmodul modulu M. Řekneme, že N je nepodstatný v M, značíme $N \ll M$, pokud pro libovolný podmodul K modulu M platí: $(N + K = M) \Rightarrow (K = M)$.*

Příklad 1. Nechť $n \in \mathbb{N}$. V grupě $\mathbb{Z}_{p^n}$ jsou všechny netriviální podgrupy nepodstatné. To plyne z toho, že je svaz podgrup této grupy lineárně uspořádaný.

Lemma 7. *Nechť $M \in$ Mod-R, pak* $\mathrm{Rad}(M) = \sum_{N \ll M} N$. *Je-li navíc M konečně generovaný, platí* $\mathrm{Rad}(M) \ll M$

Důkaz. První část je [2, Proposition 9.13] a druhá plyne z [2, Proposition 9.18]. □

Definice 11 (Projektivní pokrytí)**.** *Ať $P \in$ Mod-R je projektivní a $M \in$ Mod-R. Řekneme, že surjektivní R-lineární zobrazení $\pi \colon P \to M$ je projektivní pokrytí modulu M, pokud je* $\mathrm{Ker}\,\pi \ll P$.

Příklad 2. Pro moduly nad $\mathbb{Z}$ neexistují netriviální projektivní pokrytí. V abelovských grupách jsou projektivní grupy právě volné grupy. Jelikož $\mathrm{J}(\mathbb{Z}) = 0$, pro každou volnou grupu F platí $\mathrm{Rad}(F) = 0$. Kdykoliv tak máme epimorfismus $\pi \colon F \twoheadrightarrow G$ pro nějakou $G \in \mathbb{Z}$-Mod, který má nepodstatné jádro, musí platit $\mathrm{Ker}\,\pi \subseteq \mathrm{Rad}(F) = 0$, tedy jde o izomorfismus.

Díky tomuto příkladu vidíme, že netriviální projektivní pokrytí modulů nad okruhem R obecně nemusí existovat.

Definice 12 (Perfektní okruh). *Okruh R nazveme zprava perfektní, pokud pro každý pravý R-modul existuje jeho projektivní pokrytí. Okruh R nazveme zprava semi-perfektní, pokud pro každý cyklický pravý R-modul existuje jeho projektivní pokrytí. Obdobně definujeme levou perfektnost a semi-perfektnost.*

Lemma 8. *Nechť je $A, B, C \in$ Mod-R. Potom platí*
(i) $A \ll B \neq 0 \Rightarrow A \subsetneq B$,
(ii) $A \ll B \subseteq C \Rightarrow A \ll C$,
(iii) $A \subseteq B \ll C \Rightarrow A \ll C$,
(iv) $A \ll C \;\&\; B \ll C \Rightarrow A + B \ll C$.

Důkaz. (i) Kdyby $A = B$, tak $A + 0 = B$. Z nepodstatnosti získáme $B = 0$.
(ii) Kdyby $M \subseteq C$ takový, že $A + M = C$, ukážeme, že $A + (M \cap B) = B$. Kdyby $b \in B \subseteq C$, tak existují $a \in A$, $m \in M$, že $b = a + m$. Protože $a, b \in B$, tak musí být $m \in B$. Naopak je-li $a + m \in A + (M \cap B)$, pak $a \in A \subseteq B$, $m \in B \cap M$, tedy je jejich součet v B. Z nepodstatnosti A v B získáme $M \cap B = B$, čili je $B \subseteq M$. Máme, že $A \subseteq B \subseteq M$, tudíž $C = A + M = M$.
(iii) Kdyby $M \subseteq C$ splňoval $A + M = C$, tak je $C = A + M \subseteq B + M \subseteq C$, tedy $B + M = C$ a z nepodstatnosti B v C získáme $M = C$.
(iv) Kdyby $M \subseteq C$ takový, že $(A + B) + M = C$, tak z asociativity sčítání je $A + (B + M) = C$, čili z faktu $A \ll C$ máme $B + M = C$. Pak ale z $B \ll C$ ihned plyne $M = C$.

□

Tvrzení 9 (Ekvivalentní definice pokrytí). *Nechť $P \in$ Mod-R je projektivní, $M \in$ Mod-R a $\pi \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*
(i) π *je projektivní pokrytí,*
(ii) π *je surjektivní a každý* $\alpha \in \mathrm{End}_R(P)$ *splňující* $\pi \circ \alpha = \pi$ *je bijekce.*

Důkaz. Ať $\pi\colon P \to M$ je projektivní pokrytí. Pak je z definice surjektivní. Nyní mějme $\alpha \in \mathrm{End}_R(P)$ splňující $\pi \circ \alpha = \pi$. Chceme ukázat, že jde o bijekci. Pro surjektivitu ukážeme, že $P = \mathrm{Im}\,\alpha + \mathrm{Ker}\,\pi$. Z nepodstatnosti $\mathrm{Ker}\,\pi$ v P pak dostaneme $\mathrm{Im}\,\alpha = P$. Ať $p \in P$, potom $p = \alpha(p) + (p - \alpha(p))$. To je hledaný rozklad, neboť $\alpha(p) \in \mathrm{Im}\,\alpha$ a dále

$$\pi(p - \alpha(p)) = \pi(p) - \pi(\alpha(p)) = \pi(p) - \pi(p) = 0,$$

čili $p - \alpha(p) \in \mathrm{Ker}\,\pi$.

Protože je α surjektivní, tak z projektivity P existuje $g \in \mathrm{End}_R(P)$ takové, že $\alpha \circ g = \mathrm{id}_P$ (obr. 1.1a). Díky tomu je $P = \mathrm{Im}\,g \oplus \mathrm{Ker}\,\alpha$. Všimněme si, že $\mathrm{Ker}\,\alpha \subseteq \mathrm{Ker}\,\pi$, neboť pro $a \in \mathrm{Ker}\,\alpha$ je $\pi(a) = \pi(\alpha(a)) = \pi(0) = 0$. Proto z lemmatu 8 platí $\mathrm{Ker}\,\alpha \ll P$. Získáme tak $\mathrm{Im}\,g = P$, z čehož ihned plyne $\mathrm{Ker}\,\alpha = 0$.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\mathrm{id}_P"] \arrow[d, dashed, "g"'] & P \\
P \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

(a) existence g

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] & M \\
L \arrow[ur, "\pi\restriction L"'] &
\end{tikzcd}$$

(b) existence α

Obrázek 1.1

Naopak předpokládejme podmínku (ii). Ověříme, že $\operatorname{Ker}\pi \ll P$. Uvažme L podmodul v P takový, že $P = L + \operatorname{Ker}\pi$. Ukážeme, že $\pi \restriction L$ je surjektivní. Ať je $m \in M$. Pak existuje $p \in P$ takové, že $\pi(p) = m$. Protože $P = L + \operatorname{Ker}\pi$, tak existují $a \in L$ a $b \in \operatorname{Ker}\pi$ splňující $p = a + b$. Potom

$$m = \pi(p) = \pi(a + b) = \pi(a) = (\pi \restriction L)(a).$$

Protože je $\pi \restriction L$ epimorfismus, tak z projektivity P existuje $\alpha \in \operatorname{Hom}_R(P, L)$ takové, že $\pi = (\pi \restriction L) \circ \alpha = \pi \circ \alpha$ (obr. 1.1b). Nyní se na α podíváme jako na zobrazení do P. Pak je z předpokladu α bijekce, tedy $L = \operatorname{Im}\alpha = P$. $\square$

Definice 13 (T-nilpotence). *Nechť R je okruh a I je oboustranný ideál v R. Řekneme, že I je zprava T-nilpotentní ideál, pokud pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}$ v I existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n \cdots a_1 = 0$. Obdobně řekneme, že I je zleva T-nilpotentní ideál, pokud pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}$ v I existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $a_1 \cdots a_n = 0$.*

Definice 14 (idempotent). *Řekneme, že $e \in R$ je idempotent, pokud $e^2 = e$. Řekneme, že idempotenty $e_1, \ldots, e_n \in R$ jsou ortogonální, pokud pro všechna $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ platí: $e_i e_j = e_j e_i = 0$.*

1.2 Znění Teorému P

Věta 10 (Teorém P). *Ať je R okruh. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(1) $\mathrm{J}(R)$ je zprava T-nilpotentní a $R/\,\mathrm{J}(R)$ je totálně rozložitelný.

(2) R je zprava perfektní.

(3) Každý plochý R-modul je projektivní.

(4) Direktní limita projektivních pravých R-modulů je projektivní.

(5) V R není ostře klesající řetězec levých hlavních ideálů.

(6) V R není žádná nekonečná množina ortogonálních idempotentů a každý nenulový levý R-modul má netriviální sokl.

Poznámka. Podmínku (4) lze zobecnit. Ať $n \in \mathbb{N}$. Direktní limita pravých R-modulů s projektivní dimenzí menší nebo rovnou n má projektivní dimenzi menší nebo rovnou n.

Kapitola 2

Řetězec implikací mezi podmínkami (4), (5), (6) a (1)

V této kapitole se soustředíme na důkaz implikací z (*4*) do (*5*), z (*5*) do (*6*) a z (*6*) do (*1*) ve větě 10. Není-li řečeno jinak, všechna tvrzení jsou převzata z článku [1, str. 468–470]. Důkazy jsou rovněž převzaty a doplněny o případné chybějící detaily.

2.1 Implikace z (4) do (5)

Definice 15. *Nechť* $\{a_n\}$ *je posloupnost v* R*. Zápis* $[F, \{a_n\}, G]$ *značí*

(i) volný R*-modul* $F = R^{\mathbb{N}}$ *s volnou bází* $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$*, tj. pro* $n \in \mathbb{N}$ *je prvek* x_n *posloupnost konstantních nul s jednotkou na* n*-té pozici,*

(ii) podmodul G *modulu* F *generovaný množinou* $\{x_n - x_{n+1}a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$*.*

Modul F/G nazveme Bassův modul. Dále v této sekci využíváme značení $\pi\colon F \twoheadrightarrow F/G$ pro projekci mod G a následně $z_n = \pi(x_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Definice 16 (nahoru usměrněná množina)**.** *Částečně uspořádaná množina* $(I, \leq)$ *je nahoru usměrněná, pokud pro každé* $i, j \in I$ *existuje* $k \in I$ *takové, že* $i, j \leq k$*.*

Definice 17 (usměrněný soubor modulů)**.** *Nechť* $(I, \leq)$ *je nahoru usměrněná množina. Soubor* $\mathcal{D} = (M_i, f_{ji} \mid i \leq j \in I)$ *nazveme nahoru usměrněný soubor pravých* R*-modulů, pokud pro všechny* $i \in I$ *je* $M_i \in \text{Mod-}R$*, pro každé* $i \leq j \in I$ *je* $f_{ji}\colon M_i \to M_j$*, dále* $f_{ii} = \mathrm{id}_{M_i}$ *a pro všechny* $i \leq j \leq k \in I$ *platí* $f_{ki} = f_{kj} \circ f_{ji}$*.*

Definice 18 (Direktní limita)**.** *Nechť* $\mathcal{D} = (M_i, f_{ji} \mid i \leq j \in I)$ *je nahoru usměrněný soubor pravých* R*-modulů. Uvažme diagram* F *vedoucí do* Mod-R*, který na objektech vrací právě* M_i *a na morfismech právě* f_{ji}*. Dvojici* (M, ι) *nazveme direktní limitou systému* $\mathcal{D}$*, značeno* $\varinjlim \mathcal{D} = (M, \iota)$*, pokud jde o kolimitu diagramu* F*.*

Poznámka. Pro jednoduchost budeme občas místo značení $\varinjlim \mathcal{D} = (M, \iota)$ značit $M = \varinjlim \mathcal{D}$ a kolimitní injekce ι dodefinujeme stranou.

Dále nám přijde k užitku následující lemma, které hovoří o tom, kdy je modul direktní limita fixovaného nahoru usměrněného systému modulů.

Lemma 11. ([3, Lemma 2.3]) *Nechť $\mathcal{D} = (M_i, f_{ji} \mid i \le j \in I)$ je nahoru usměrněný soubor pravých R-modulů. Dvojice $(M, (f_i \mid i \in I))$, která splňuje $f_i = f_j \circ f_{ji}$ pro každé $i \le j \in I$ a $M \in \text{Mod-}R$, je direktní limita systému $\mathcal{D}$ právě tehdy, když $M = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Im} f_i$ a zároveň platí následující: Pro každé $x \in M_i$ je $f_i(x) = 0$ právě tehdy, když existuje $i \le j \in I$ takové, že $f_{ji}(x) = 0$.*

Tvrzení 12. *Pro každou posloupnost $\{a_n\}$ v R je modul G volný a F/G je direktní limita projektivních modulů.*

Důkaz. Definujme si pro $n \in \mathbb{N}$ modul $G_n = \langle \{x_i - x_{i+1}a_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \rangle$. Ukážeme, že je G_n volný a zvolená množina generátorů je rovněž jeho volná báze. Z definice množina $\{x_i - x_{i+1}a_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ generuje G_n. Chceme tedy její R-nezávislost. Je-li $\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1}a_i) r_i = 0$, pro $r_1, \dots, r_n \in R$, pak je

$$x_1 r_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i (r_i - a_{i-1} r_{i-1}) = 0.$$

Z R-nezávislosti volné báze modulu F je $r_1 = 0$ a $r_i = r_{i-1}a_{i-1}$, $i \in \{2, \dots n\}$. Dohromady $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$. Jde tedy o R-nezávislou množinu. Všimněme si, že $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Pro každé $g \in G$ tak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $g \in G_n$, což nám dává R-nezávislost množiny $\{x_n - x_{n+1}a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Jedná se tedy o volnou bázi modulu G, pročež je G volný.

Nyní ukážeme, že je F/G_n projektivní modul. Nechť je $n \in \mathbb{N}$. Označme $H_n = \langle \{x_k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n\}\} \rangle$. Očividně platí, že $F = G_n + H_n$. Navíc je průnik obou sčítanců triviální. Kdyby nebyl, tak existují $k > n$ a $r_i \in R$ pro $i \le k$ takové, že $\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1}a_i) r_i = \sum_{i=n+1}^k x_i r_i$. Dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1}a_i) r_i + \sum_{i=n+1}^{k} x_i (-r_i) = 0,$$

tedy užitím R-nezávislosti volné báze F získáme $r_1 = r_i = 0$ pro $n+1 \le i \le k$. Dále pro $1 \le i \le n$ platí $r_{i+1} = r_i a_i$, čili i ta jsou nulová. Nakonec

$$F/G_n = (G_n \oplus H_n)/G_n \simeq H_n/(G_n \cap H_n) \simeq H_n.$$

Proto je F/G_n projektivní modul (dokonce volný).

Nechť $\mathcal{D} = (F/G_i, f_{ji} \mid i \le j \in \mathbb{N})$, kde pro $i \le j$ je $f_{ji} \colon F/G_i \to F/G_j$ změna faktoru, tj. pro $a \in F$ je $f_{ji}(a + G_i) = a + G_j$. To lze, neboť pro $i \le j$ je $G_i \subseteq G_j$. Očividně jde o nahoru usměrněný systém pravých R-modulů.

Stejným způsobem zadefinujme pro $n \in \mathbb{N}$ zobrazení $\iota_n \colon F/G_n \to F/G$ jako změnu faktoru. Položme $\iota = (\iota_n \mid n \in \mathbb{N})$. Můžeme si všimnout, že každé ι_n je epimorfismus a platí $\iota_j \circ f_{ji} = \iota_i$. Ukážeme, že $\varinjlim \mathcal{D} = (F/G, \iota)$.

Stačí nám ověřit podmínky lemmatu 11. Protože jsou všechny ι_n epimorfismy, podmínka $F/G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Im} \iota_i$ platí triviálně. Nyní ať $x \in F/G_i$. Platí, že $\iota_i(x) = 0$ právě tehdy, když $x \in \operatorname{Ker} \iota_i = G/G_i$. Protože je $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$, tak podmínka $x \in G/G_i$ platí právě tehdy, když existuje nějaké $j \ge i$ takové, že $x \in G_j/G_i$. Nakonec z faktu $\operatorname{Ker} f_{ji} = G_j/G_i$ získáme, že $x \in G_j/G_i$ právě tehdy, když $f_{ji}(x) = 0$. Tím jsme ukázali, že F/G je dirketní limita projektivních modulů. $\square$

Tvrzení 13. *Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $J_k = \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} \colon a_{k+n} \cdots a_k \cdot r = 0\}$. Potom platí, že $J_k = \mathrm{Ann}(z_k)$*

Důkaz. Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Protože $\pi(x_k - x_{k+1}a_k) = 0$, tak $z_k = z_{k+1}a_k$. Iterací tohoto vztahu dostaneme, že pro $n \geq k$ je $z_k = z_{k+n+1}a_n \cdots a_k$. To nám dává inkluzi $J_k \subseteq \mathrm{Ann}(z_k)$, neboť $z_k r = z_{k+n+1}a_n \cdots a_k r = 0$. Pro opačnou inkluzi mějme $r \in \mathrm{Ann}(z_k)$. Potom $0 = z_k r = \pi(x_k r)$, čili $x_k r \in G$. Můžeme tak vyjádřit $x_k r$ pomocí generátorů G. Existuje proto $n > k$ a $r_i \in R$ pro $i \leq n$ takové, že

$$x_k r = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1}a_i)r_i = x_1 r_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i(r_i - a_{i-1}r_{i-1}).$$

BÚNO $r_n = 0$. Ověříme, že $r_k = r$. Z R-nezávislosti volné báze modulu F platí: pokud je $k = 1$, tak $r_k = r$ a pokud je $k > 1$, tak $r_1 = 0$, $r = r_k - a_{k-1}r_{k-1}$ a pro $1 < i < k$ platí $r_i = a_{i-1}r_{i-1}$. Díky tomuto rekurzivnímu vztahu získáme rovnost $r_1 = \cdots = r_{k-1} = 0$, tedy je $r = r_k - a_{k-1}r_{k-1} = r_k$.

Nyní získáme opětovným využitím R-nezávislosti volné báze modulu F na rovnost výše, že pro všechny $k < i \leq n$ platí $r_i = a_{i-i}r_{i-1}$. Iterací tohoto vztahu získáváme rovnost

$$0 = r_n = a_{n-1}r_{n-1} = a_{n-1}a_{n-2}r_{n-2} = \cdots = a_{n-1} \cdots a_k r_k = a_{n-1} \cdots a_k r.$$

Našli jsme tak $m = n - k - 1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{k+m} \cdots a_k r = 0$, čili $r \in J_k$. □

Tvrzení 14. *Je-li G direktním sčítanem v F, pak je řetězec $\{R(a_n \cdots a_1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ hlavních levých ideálů v R konečný.*

Důkaz. Ať je $F = Q \oplus G$. Označme $\rho \colon F \twoheadrightarrow Q$ projekci na Q. Potom máme izomorfismus $\iota \colon F/G \to Q$ takový, že $\iota \circ \pi = \rho$. Pro $k \in \mathbb{N}$ položme $q_k = \iota(z_k)$. Tyto prvky si můžeme vyjádřit ve volné bázi modulu F, tedy pro každé $k \in \mathbb{N}$ získáme vzorec $q_k = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i c_{i,k}$. Poznamenejme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje pouze konečně mnoho $i \in \mathbb{N}$ takových, že $c_{i,k} \neq 0$. Pomocí těchto vzorců jsme schopni vyjádřit, jak vypadá ρ na prvcích. Uvažme tak $\sum_i x_i r_i \in F$. Potom

$$\rho\Big(\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i r_i\Big) = \sum_{i \in \mathbb{N}} q_i r_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} x_j c_{j,i} r_i = \sum_{j \in \mathbb{N}} x_j \Big(\sum_{i \in \mathbb{N}} c_{j,i} r_i\Big).$$

Nyní využijeme faktu, že $q_k = \rho(q_k)$ a oboje rozepíšeme do volné báze modulu F. Získáme tak rovnost

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i c_{ik} = \rho\Big(\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i c_{ik}\Big) = \sum_{j \in \mathbb{N}} x_j \Big(\sum_{i \in \mathbb{N}} c_{j,i} c_{i,k}\Big).$$

Užitím R-nezávislosti volné báze modulu F získáváme identitu $c_{j,k} = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_{j,i} c_{i,k}$. Dále z faktu $\pi(x_i - x_{i+1}a_i) = 0$ máme, že $z_i = z_{i+1}a_i$. Iterací této rovnosti pro $n \geq k$ získáme $z_k = z_{n+1}a_n \cdots a_k$. Následná aplikace izomorfismu ι na tuto rovnost nám dává $q_k = q_{n+1}a_n \cdots a_k$. Speciálně rozepsáním do volné báze modulu F a následným využitím R-nezávislosti dostaneme $\forall i \in \mathbb{N} : c_{i,k} = c_{i,n+1}a_n \cdots a_k$.

Nyní definujme levý ideál I v R jako $I = \langle \{c_{i,1} \mid i \in \mathbb{N}\} \rangle$. Z minulého odstavce máme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $c_{i,1} = c_{i,n+1}a_n \cdots a_1$, tedy pro všechna $n \in \mathbb{N}$

máme $I \subseteq R(a_n \cdots a_1)$. Najdeme-li $m \in \mathbb{N}$ takové, že $a_m \cdots a_1 \in I$, tak bude platit $R(a_k \cdots a_m \cdots a_1) \subseteq I$ pro všechna $k \geq m$. Speciálně

$$I = R(a_m \cdots a_1) = R(a_{m+1}a_m \cdots a_1) = \cdots$$

a řetězec $\{R(a_n \cdots a_1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ tak bude konečný.

Uvažme $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $k \geq n$ platí $c_{k,1} = 0$. Z první části důkazu máme rovnost $c_{j,1} = \sum_{k=1}^{n} c_{j,k}c_{k,1}$. Přidáme-li fakt, že $c_{i,k} = c_{i,n+1}a_n \cdots a_1$ pro všechny $i \in \mathbb{N}$ a $n \geq k$, dostaneme

$$c_{j,1} = \sum_{k=1}^{n} c_{j,k}c_{k,1} = \sum_{k=1}^{n} c_{j,n+1}a_n \cdots a_k c_{k,1} = c_{j,n+1} \sum_{k=1}^{n} a_n \cdots a_k c_{k,1}.$$

Položme $\gamma = \sum_{k=1}^{n} a_n \cdots a_k c_{k,1}$. Potom je $c_{j,1} = c_{j,n+1}\gamma$. Všimněme si, že $\gamma \in I$. To protože prvky $c_{j,1}$ jsou generátory I a jde o levý ideál. Dále platí

$$q_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i c_{i,1} = \sum_{i=1}^{n} x_i c_{i,n+1}\gamma = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i c_{i,n+1}\Big)\gamma = q_{n+1}\gamma.$$

Připomeňme, že $q_1 = q_{n+1}a_n \cdots a_1$. Našli jsme tak druhý způsob vyjádření q_1, a proto $q_{n+1}a_n \cdots a_1 = q_{n+1}\gamma$. Úpravou pak získáváme, že $a_n \cdots a_1 - \gamma \in \operatorname{Ann}(q_{n+1})$. Jelikož máme izomorfismus ι a tvrzení 13, platí $\operatorname{Ann}(q_{n+1}) = \operatorname{Ann}(z_{n+1}) = J_{n+1}$. Existuje proto $k \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+k} \cdots a_{n+1}(a_n \cdots a_1 - \gamma) = 0$. Našli jsme $m = n + k \in \mathbb{N}$ takové, že $a_m \cdots a_1 = a_m \cdots a_{n+1}\gamma \in I$. □

Nyní již můžeme přistoupit k důkazu implikace z *(4)* do *(5)* ve větě 10.

(4) ⇒ (5). Uvažme nekonečný klesající řetězec $\mathcal{R}$ levých hlavních ideálů v R. BÚNO ať je $\mathcal{R}$ spočetný, tj. $\mathcal{R} = \{Rx_i \mid x_i \in R,\ i \in \mathbb{N}\}$. Označme $a_1 = x_1$. Mějme dáno $i \in \mathbb{N}$ a $a_i \in R$. Jelikož je $\mathcal{R}$ klesající řetězec, pro $x_{i+1} \in Rx_i$ existuje $r \in R$ takové, že $x_{i+1} = rx_i$. Polož $a_{i+1} = r$. Vytvořili jsme tak posloupnost $\{a_n\}$ v R splňující $x_i = a_i \cdots a_1,\ i \in \mathbb{N}$. Díky tomu můžeme řetězec $\mathcal{R}$ vyjádřit jako $\mathcal{R} = \{R(a_n \cdots a_1) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Nyní uvažme trojici $[F, \{a_n\}, G]$ definující Bassův modul F/G. Tvrzení 12 nám dá, že F/G je direktní limita projektivních modulů, čili je z předpokladu projektivní. Díky tomu se krátká exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\subseteq} F \xrightarrow{\pi} F/G \longrightarrow 0$$

štěpí, speciálně je G direktní sčítanec v F. Nakonec je z tvrzení 14 řetězec $\mathcal{R}$ konečný. □

2.2 Implikace z (5) do (6)

V této sekci budeme předpokládat, že v R není žádný nekonečný ostře klesající řetězec levých hlavních ideálů. Budeme dokazovat, že v R není spočetná množina ortogonálních idempotentů. Nejprve začněme následujícím lemmatem.

Lemma 15. *Nechť $e, f \in R$ jsou dva navzájem různé ortogonální idempotenty. Potom je $Re \subseteq R(1 - f)$.*

Důkaz. Protože je f idempotent, máme rozklad $R = Rf \oplus R(1-f)$. Můžeme si proto vyjádřit $e \in R$ jako $e = rf + t(1-f)$, pro nějaké $r, t \in R$. Rovnost vynásobíme zprava prvkem f a z ortogonality e s f pak dostaneme

$$\begin{aligned} ef &= rf^2 + t(1-f)f \\ 0 &= rf, \end{aligned}$$

tedy je $e \in R(1-f)$. Proto je $Re \subseteq R(1-f)$. □

Nyní se můžeme přesunout k důkazu implikace z *(5)* do *(6)* ve větě 10.

(5) $\Rightarrow$ *(6)*. Důkaz budeme dělat sporem. Předpokládejme, že máme k dispozici $M = \{e_1, e_2, e_3, \dots\} \subseteq R$ spočetnou množinu navzájem ortogonálních idempotentů. Bez újmy na obecnosti $0 \notin M$. Využijeme lemmatu 15 ke konstrukci nekonečného ostře klesajícího řetězce levých hlavních ideálů. Budeme postupovat indukcí.

Pro $n \in \mathbb{N}$ si označme $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Můžeme si všimnout, že z ortogonality prvků M jsou $e_i e = e e_i = e_i$, pokud $i \leq n$ a $e_i e = e e_i = 0$, pokud $i > n$. Speciálně je e idempotent ortogonální ke všem e_i pro $i > n$. Nyní chceme, že $R(1 - e - e_{n+1}) \subsetneq R(1-e)$. Nejprve ukážeme inkluzi. K tomu nám stačí, že $e_{n+1} \in R(1-e)$. To ale plyne ihned z lemmatu 15. Proto je $1 - e - e_{n+1} \in R(1-e)$.

Nyní ukážeme, že jde o ostrou inkluzi. Již víme, že $e_{n+1} \in R(1-e)$. Sporem nahlédneme, že nemůže být v $R(1 - e - e_{n+1})$. Kdyby byl $e_{n+1} \in R(1 - e - e_{n+1})$, tak existuje $r \in R$ takové, že $e_{n+1} = r(1 - e - e_{n+1})$. Rovnost vynásobíme zprava prvkem e_{n+1}. Získáme

$$\begin{aligned} e_{n+1}^2 &= r(1 - e - e_{n+1})e_{n+1} \\ e_{n+1} &= r(e_{n+1} - e_{n+1}^2) \\ e_{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

To je ale spor s tím, že $0 \notin M$.

Zkonstruovali jsme nekonečný ostře klesající řetězec $\{R(1 - \sum_{i=1}^{n} e_i) \mid n \in \mathbb{N}\}$ levých hlavních ideálů v R, což je spor. Proto M nemůže být nekonečná.

Teď chceme ukázat, že $0 \neq A \in R$-Mod má netriviální sokl. Předpokládejme, že $\mathrm{Soc}(A) = 0$. Protože $A \neq 0$, máme $0 \neq \alpha \in A$. Dále z faktu $\mathrm{Soc}(A) = 0$ nemůže být $R\alpha$ jednoduchý. Proto existuje $a_1 \in R$ takové, že $a_1\alpha \neq 0$ negeneruje modul $R\alpha$, tj. $0 \neq Ra_1\alpha \subsetneq R\alpha$. Indukcí pak z předpokladu $0 \neq R(a_n \cdots a_1\alpha)$ nemůže být jednoduchý, tedy existuje prvek, který ho negeneruje. Máme tak $a_{n+1} \in R$ takové, že $0 \neq R(a_{n+1}a_n \cdots a_1\alpha) \subsetneq R(a_n \cdots a_1\alpha)$. To je ale spor, neboť jsme takto vytvořili nekonečný ostře klesající řetězec levých hlavních ideálů. Proto $\mathrm{Soc}(A) \neq 0$. □

2.3 Implikace z (6) do (1)

V této sekci značí On třídu ordinálních čísel. Díky podmínce *(6)* z věty 10 se v této sekci budeme zabývat spíše levými R-moduly. Chceme ukázat, že za podmínky *(6)* je $\mathrm{J}(R)$ zprava T-nilpotentní a $R/\mathrm{J}(R)$ totálně rozložitelný. Pro důkaz tohoto faktu budeme potřebovat následující konstrukci.

Definice 19 (Sokl posloupnost)**.** *Nechť* $M \in R$-Mod. *Položme* $\mathrm{Soc}^0(M) = 0$. *Ať* $\alpha \in \mathrm{On}$*, označme* $\pi_\alpha \colon M \to M/\operatorname{Soc}^\alpha(M)$ *projekci mod* $\operatorname{Soc}^\alpha(M)$ *a položme* $\operatorname{Soc}^{\alpha+1}(M) = \pi_\alpha^{-1}(\operatorname{Soc}(M/\operatorname{Soc}^\alpha(M)))$. *Je-li* $\alpha \in \mathrm{On}$ *limitní ordinál, definujeme* $\operatorname{Soc}^\alpha(M) = \bigcup_{\beta<\alpha} \operatorname{Soc}^\beta(M)$. *Sokl posloupnost pravých R-modulů definujeme obdobně. Dále pro* $\alpha \in \mathrm{On}$ *využíváme značení* $\operatorname{Soc}^\alpha = \operatorname{Soc}^\alpha(\mathrm{J}(R))$*, kde* $\mathrm{J}(R)$ *chápeme jako na levý R-modul.*

Poznámka. Ať $M \in \text{Mod-}R$. Sokl posloupnost modulu M z definice ostře roste, dokud nemá pro nějaké $\alpha \in \mathrm{On}$ modul $M/\operatorname{Soc}^\alpha(M)$ triviální sokl. V takovém případě se růst zastaví, tj. posloupnost bude od tohoto α dále konstantní. Navíc tato situace musí nastat, neboť jde o rostoucí posloupnost podmodulů modulu M indexovanou třídou ordinálních čísel a kardinalita žádného členu sokl posloupnosti nemůže přerůst kardinalitu modulu M.

Nás bude zajímat situace, kdy platí podmínka (*6*) z věty 10, tj. situace, kdy má každý netriviální levý R-modul netriviální sokl. Díky tomu se růst sokl posloupnosti každého levého modulu M zastaví až tehdy, když $\operatorname{Soc}^\alpha(M) = M$, pro nějaké $\alpha \in \mathrm{On}$. Díky tomu máme následující pozorování.

Pozorování. *Má-li má každý netriviální levý R-modul netriviální sokl, pak je pro každé* $a \in \mathrm{J}(R)$ *třída* $\{\alpha \in \mathrm{On} \mid a \in \operatorname{Soc}^\alpha\}$ *neprázdná.*

Definice 20. *Definujme zobrazení* $h \colon \mathrm{J}(R) \to \mathrm{On}$ *následujícím způsobem. Nechť* $a \in \mathrm{J}(R)$*, položme* $h(a) = \min\{\alpha \in \mathrm{On} \mid a \in \operatorname{Soc}^\alpha\}$.

Poznámka. Za předpokladu podmínky (*6*) z věty 10 a pozorování výše jde o dobře definované zobrazení.

Pozorování. *Pokud* $\mathrm{J}(R) \neq 0$*, pak pro* $a \in \mathrm{J}(R)$ *není* $h(a)$ *limitní ordinál.*

Důkaz. Kdyby byl $h(a)$ limitní, máme že $a \in \operatorname{Soc}^{h(a)} = \bigcup_{\beta<h(a)} \operatorname{Soc}^\beta$, čili existuje $\beta < h(a)$ takové, že $a \in \operatorname{Soc}^\beta$. To je ale spor s definicí $h(a)$. □

Poznámka. Jelikož je pro $a \in \mathrm{J}(R)$ ordinál $h(a)$ izolovaný, budeme pro $a \neq 0$ psát, že $h(a) = \beta + 1$ pro nějaké $\beta \in \mathrm{On}$.

Lemma 16. *Pro nenulové* $a \in \mathrm{J}(R)$ *platí* $\mathrm{J}(R)\operatorname{Soc}^{\beta+1} \subseteq \operatorname{Soc}^\beta$.

Důkaz. Uvažme $\pi_\beta \colon \mathrm{J}(R) \twoheadrightarrow \mathrm{J}(R)/\operatorname{Soc}^\beta$ projekci mod $\operatorname{Soc}^{\beta+1}$. Díky vlastnostem radikálu máme $\mathrm{J}(R)\operatorname{Soc}^{\beta+1} \subseteq \operatorname{Rad}(\operatorname{Soc}^{\beta+1})$. Ověříme, že $\operatorname{Rad}(\operatorname{Soc}^{\beta+1}) \subseteq \operatorname{Soc}^\beta$.

Definice sokl posloupnosti nám dává $\pi_\beta \restriction \operatorname{Soc}^{\beta+1} \colon \operatorname{Soc}^{\beta+1} \to \operatorname{Soc}(\mathrm{J}(R)/\operatorname{Soc}^\beta)$. Jelikož je radikál totálně rozložitelného modulu nulový, máme

$$\pi_\beta(\operatorname{Rad}(\operatorname{Soc}^{\beta+1})) \subseteq \operatorname{Rad}(\operatorname{Soc}(\mathrm{J}(R)/\operatorname{Soc}^\beta)) = 0.$$

Tím jsme získali požadovanou inkluzi.

□

Lemma 17. *Pro libovolná* $a, b \in \mathrm{J}(R)$*, kde* $a \neq 0$ *platí* $h(ba) < h(a)$.

Důkaz. Z definice h je $a \in \operatorname{Soc}^{h(a)} = \operatorname{Soc}^{\beta+1}$. Proto $ba \in \mathrm{J}(R)\operatorname{Soc}^{\beta+1} \subseteq \operatorname{Soc}^\beta$. Proto $h(ba) = \min\{\alpha \in \mathrm{On} \mid ba \in \operatorname{Soc}^\alpha\} \leq \beta$, tedy $h(ba) < \beta + 1 = h(a)$. □

Tvrzení 18. *Má-li každý netriviální levý R-modul netriviální sokl, pak je $\mathrm{J}(R)$ zprava T-nilpotentní ideál.*

Důkaz. Mějme danou posloupnost $\{a_n\}$ v $\mathrm{J}(R)$. Kdyby pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platilo, že $a_n \cdots a_1 \neq 0$, tak je z lemmatu 17 řetězec $\{h(a_n \cdots a_1) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{On}$ nekonečný a ostře klesající, což je spor. $\square$

Lemma 19. *Ať je R okruh a I je nil ideál v R. Potom lze zvedat idempotentní prvky mod I. Pokud máme navíc dáno $g \in R$ takové, že $g+I \in R/I$ je idempotent, pak existují $t \in R$, $n \in \mathbb{N}$ taková, že $g^n t^n = t^n g^n \in R$ je ono zvednutí $g+I$, tj. $g^n t^n$ je idempotent v R a $g^n t^n + I = g + I$.*

Důkaz. Důkaz první části je k nalezení v [2, Proposition 27.1] a zbytek plyne přímo z uvedeného důkazu. $\square$

Lemma 20. *Jednoduché podmoduly modulu $R/\mathrm{J}(R)$ jsou generované idempotentními prvky okruhu $R/\mathrm{J}(R)$.*

Důkaz. Označme $S = R/\mathrm{J}(R)$. Nechť $0 \neq I \subseteq S$ je jednoduchý. Pak existuje $0 \neq a \in S$, takové že $I = aR$. Jelikož je $\mathrm{Rad}(S) = 0$, tak $a \notin \mathrm{Rad}(S)$. Díky tomu existuje maximální pravý ideál M v S takový, že $a \notin M$. Platí $I \not\subseteq M$. To nám spolu s maximalitou M dává $S = I + M$. Dokonce $I \cap M = 0$. Kdyby totiž $0 \neq b \in I \cap M$, tak $I = bR \subseteq I \cap M \subseteq M$, což je spor. Máme tak $S = I \oplus M$. Podíváme-li se pak na S jako na S-modul, tak je I direktní sčítanec v regulárním S-modulu. Proto je generován idempotentem. $\square$

Definice 21. *Konečnou množinu $\{e_i \mid i \in I\}$ ortogonálních idempotentů v R nazveme kompletní, pokud je $\sum_{i\in I} e_i = 1$.*

Tvrzení 21. *Ať v R není žádná nekonečná množina ortogonálních idempotentů a každý nenulový levý R-modul má netrivální sokl. Potom je $R/\mathrm{J}(R)$ totálně rozložitelný.*

Důkaz. Označme $S = R/\mathrm{J}(R)$. Kdyby $S = 0$, tak tvrzení platí. Předpokládejme, že $S \neq 0$. Označme $\pi \colon R \twoheadrightarrow S$ projekci mod $\mathrm{J}(R)$. Z předpokladu existuje jednoduchý podmodul v S, který je z lemmatu 20 generovaný idempotentem $f_1 \neq 0$. Díky tvrzení 18 je $\mathrm{J}(R)$ nil ideál, a tak lze z lemmatu 19 zvednout f_1 na idempotent $e_1 \in R$, tj. $f_1 = \pi(e_1)$. Proto v R existuje idempotent e_1 takový, že je $S\pi(e_1)$ jednoduchý podmodul modulu S.

Mějme pro $n \in \mathbb{N}$ dány $e_1, \ldots, e_n$ nenulové ortogonální idempotenty takové, že pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ je $0 \neq S\pi(e_i)$ jednoduchý podmodul v S. Označme $f_i = \pi(e_i)$. Pokud $\sum_{i=1}^n f_i = 1$, tak platí $S = \mathrm{Soc}(S) = \bigoplus_{i=1}^n Sf_i$ a máme hotovo.

Pokud $\sum_{i=1}^n f_i \neq 1$, polož $e_0 = 1 - \sum_{i=1}^n e_1$ a $f_0 = \pi(e_0) \neq 0$. Můžeme si všimnout, že $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ a $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ jsou kompletní množiny navzájem ortogonálních idempotentů v R, resp. v S. Jelikož je Sf_0 levý modul, existuje z předpokladu jeho jednoduchý podmodul Sf generovaný idempotentem $f \neq 0$.

Ať je $g \in \pi^{-1}(f)$. Protože je $f \in Sf_0$, existuje $r \in R$ takové, že $f = \pi(re_0)$, tedy můžeme uvažovat $g \in Re_0$. Z lemmatu 19 existují $n \in \mathbb{N}$ a $t \in R$ taková, že $e = t^n g^n \in R$ je idempotent splňující $f = \pi(e)$. Protože je f nenulový, musí být e nenulový a dále máme, že $e = t^n g^n = (t^n g^{n-1})g \in Re_0$. Máme tak rozklad $R = Re \oplus R(1-e)$, speciálně je

$$Re_0 = Re_0 \cap \big(Re \oplus R(1-e)\big) = Re \oplus \big(Re_0 \cap R(1-e)\big).$$

Poslední rovnost platí, neboť $Re \subseteq Re_0$, a tedy kdykoliv $r_1e + r_2(1-e) \in Re_0$, jelikož $r_1e \in Re_0$, musí být $r_2(1-e) \in Re_0$. Opačná inkluze je triviální. Díky této rovnosti máme $e_0 = e_0e + e_0(1-e)$, kde $e_0(1-e) \in Re_0$. Položme $e_{n+1} = e_0e$. Můžeme si všimnout, že z faktu $e = re_0$, pro nějaké $r \in R$, je e_{n+1} idempotent

$$e_{n+1}^2 = e_0re_0e_0re_0 = e_0re_0re_0 = e_0e^2 = e_0e = e_{n+1}.$$

Navíc je ortogonální se všemi idempotenty z $\{e_1, \dots, e_n\}$ a není nulový. Kdyby byl, tak je pro $\rho\colon Re_0 \twoheadrightarrow Re$ projekci do složky $\rho(e_0) = e_0e = e_{n+1} = 0$, čili je $e = \rho(re_0) = 0$, což je spor. Navíc je $S\pi(e_{n+1})$ jednoduchý v S. To proto, že $0 \neq \pi(e_{n+1}) = \pi(e_0)\pi(e) = \pi(e_0)f \in Sf$, tedy z jednoduchosti Sf je $S\pi(e_{n+1}) = Sf$. Máme tak nenulové ortogonální idempotenty $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$ takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n+1\}$ je $0 \neq S\pi(e_i)$ jednoduchý modul v S.

Dále induktivně pokračujme v konstrukci idempotentů. Jelikož v R neexistuje nekonečná množina ortogonálních idempotentů, musí existovat $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=1}^m f_i = 1$, a tedy $S = \mathrm{Soc}(S) = \bigoplus_{i=1}^m Sf_i$ □

Důkaz implikace z *(6)* do *(1)* ve větě 10 už je jen spojení dokázaných tvrzení.

(6) ⇒ *(1)*. Předpokládejme podmínku *(6)*. Potom je $\mathrm{J}(R)$ z tvrzení 18 zprava T-nilpotentní a $R/\mathrm{J}(R)$ je z tvrzení 21 totálně rozložitelný. □

Kapitola 3

Ekvivalence podmínek (1) a (2)

Tato kapitola obsahuje důkaz ekvivalence podmínek *(1)* a *(2)* z věty 10. Následně je uveden důkaz věty charakterizující semi-perfektnost. Není-li řečeno jinak, všechna tvrzení v této kapitole jsou převzata z [1, str. 471–476]. Důkazy jsou rovněž převzaty, náležitě přizpůsobeny a doplněny o chybějící detaily.

Věta 22. *Pro okruh R jsou následující podmínky ekvivalentní:*
(a) R je zprava semi-perfektní,
(b) $R/\operatorname{J}(R)$ je totálně rozložitelný okruh a idempotenty lze zvedat mod $\operatorname{J}(R)$,
(c) každý konečně generovaný pravý R-modul má projektivní pokrytí.
Navíc je R je zprava perfektní právě tehdy, když platí podmínka (b) a k tomu je $\operatorname{J}(R)$ zprava T-nilpotentní ideál.

Poznámka. Tato věta platí obdobně i pro levé R-moduly. Podmínka (b) je ovšem totožná s tou pro pravé R-moduly. Vidíme tak, že semi-perfektnost je symetrická vlastnost.

Předpoklad zvedání idempotentů v podmínce (b) je nutný. Uvažme následující příklad.

Příklad 3. Ať je M množina všech přirozených čísel, která nejsou dělitelná dvěma ani třemi. Jde o multiplikativní množinu v $\mathbb{Z}$. Uvažme okruh $\mathbb{Z}_M = M^{-1}\mathbb{Z}$.

Nechť $\frac{k}{m} \in \mathbb{Z}_M$ takové, že $k > 0$ není dělitelné dvěma ani třemi, potom je $\frac{m}{k}$ jeho inverz. Obdobně pro $k < 0$. Uvažme vlastní ideál I v $\mathbb{Z}_M$. Z výše dokázaného je čitatel každého prvku z I dělitelný dvěma nebo třemi. Dokonce dělí dvojka nebo trojka čitatel každého prvku z I. BÚNO ať v I existuje prvek, jehož čitatel není dělitelný třemi, tj. existuje $\frac{2k}{m} \in I$ takové, že $3 \nmid k$. Kdyby existovalo $\frac{3l}{n} \in I$ takové, že $2 \nmid l$, tak čitatel prvku $\frac{3l}{n} + \frac{2k}{m} = \frac{3lm+2kn}{mn}$ není dělitelný dvěma ani třemi, čili je $I = \mathbb{Z}_M$, což je spor. Proto je $I \subseteq 2\mathbb{Z}_M$ nebo $I \subseteq 3\mathbb{Z}_M$. Speciálně, je-li I maximální, získáme $I = 2\mathbb{Z}_M$, nebo $I = 3\mathbb{Z}_M$. Ideály $2\mathbb{Z}_M$ a $3\mathbb{Z}_M$ jsou maximální, neboť když $2\mathbb{Z}_M \subseteq I \subsetneq \mathbb{Z}_M$, platí $2\mathbb{Z}_M \subseteq I \subseteq 2\mathbb{Z}_M$, tj. $I = 2\mathbb{Z}_M$, nebo $2\mathbb{Z}_M \subseteq I \subseteq 3\mathbb{Z}_M$, což nám dá spor. Obdobně pro $3\mathbb{Z}_M$. Proto má okruh $\mathbb{Z}_M$ právě dva maximální ideály a $\operatorname{J}(\mathbb{Z}_M) = 2\mathbb{Z}_M \cap 3\mathbb{Z}_M = 6\mathbb{Z}_M$. Navíc platí, že $\mathbb{Z}_M/6\mathbb{Z}_M \simeq \mathbb{Z}_6$, čili je totálně rozložitelný a $3 + 6\mathbb{Z}_M$ je netriviální idempotent, který nelze zvednout, neboť je $\mathbb{Z}_M$ obor, a tak neobsahuje netriviální idempotenty. Z věty o semi-perfektnosti pak vyplyne, že nejde o semiperfektní okruh.

3.1 Lemmata k větě o semi-perfektnosti

Pozorování. *Nechť je I oboustranný ideál v okruhu R a $M \in$ Mod-R. Pak je vztahem $m(r+I) = mr$ na M korektně definována struktura R/I-modulu právě tehdy, když $MI = 0$.*

Tvrzení 23. *Ať je R okruh a I je oboustranný ideál v R. Nechť A je R/I-modul a $\pi\colon P \to A$ je jeho R-projektivní pokrytí. Potom je zobrazení $\rho\colon P/PI \to A$, indukované zobrazením π, jeho R/I-projektivní pokrytí. Speciálně faktorokruhy (semi-)perfektních okruhů jsou (semi-)perfektní.*

Důkaz. Nejprve si všimněme, že $(P/PI)I = 0$, čili jde o R/I-modul. Uvažme $M, N \in \text{Mod-}R/I$, $f \in \operatorname{Hom}_{R/I}(M, N)$ epimorfismus. Ať $g \in \operatorname{Hom}_{R/I}(P/PI, N)$. Pak jde rovněž o R-lineární zobrazení. Označme $\sigma \in \operatorname{Hom}_R(P, P/PI)$ projekci mod PI. Z projektivity P existuje $h' \in \operatorname{Hom}_R(P, M)$ takové, že $f \circ h' = g \circ \sigma$. Pro libovolné $p \in P$ a $i \in I$ platí $h'(pi) = h'(p)i = h'(p)(i + I) = 0$. Věta o homomorfismu nám tak dá existenci $h \in \operatorname{Hom}_{R/I}(P/PI, M)$ splňující $h \circ \sigma = h'$. Dohromady je $f \circ h \circ \sigma = f \circ h' = g \circ \sigma$, ale σ je epimorfismus, čili $f \circ h = g$. Proto je P/PI projektivní R/I-modul.

A je R/I-modul, tedy $AI = 0$. Z toho máme, že pro všechny $p \in P$ a pro všechny $i \in I$ je $\pi(pi) = \pi(p)i = 0$, tedy je $PI \subseteq \operatorname{Ker}\pi$. Proto je z věty o homomorfismu zobrazení

$$\begin{aligned} \rho\colon P/PI &\to A \\ p + PI &\mapsto \pi(p) \end{aligned}$$

dobře definované R/I-lineární zobrazení. Navíc je surjektivní, neboť $\operatorname{Im}\rho = \operatorname{Im}\pi$, a také $\operatorname{Ker}\rho = \operatorname{Ker}\pi/PI$. Zbývá tak ukázat, že $\operatorname{Ker}\rho \ll P/PI$. Uvažme tedy $B \subseteq P/PI$ podmodul takový, že $P/PI = B + \operatorname{Ker}\rho$. Potom existuje C podmodul v P takový, že $PI \subseteq C$ a $B = C/PI$. Jsme tak schopni rovnost rozepsat jako:

$$P/PI = B + \operatorname{Ker}\rho = C/PI + \operatorname{Ker}\pi/PI = (\operatorname{Ker}\pi + C)/PI.$$

Užitím nepodstatnosti $\operatorname{Ker}\pi$ v P dostaneme $C = P$, pročež je $B = P/PI$. □

Tvrzení 24 (Jednoznačnost projektivního pokrytí)**.** *Nechť $A \in$ Mod-R a dál je $P \in$ Mod-R projektivní. Nechť $\rho\colon P \twoheadrightarrow A$ je epimorfismus a $\pi\colon P_A \twoheadrightarrow A$ je projektivní pokrytí. Pak existují Q podmodul v P, D podmodul v $\operatorname{Ker}\rho$ takové, že:*

(i) $P = Q \oplus D$,

(ii) $\rho \restriction Q$ je projektivní pokrytí modulu A,

(iii) existuje izomorfismus $\iota\colon Q \to P_A$ takový, že $\rho \restriction Q = \pi \circ \iota$.

Je-li navíc ρ projektivní pokrytí modulu A, tak $Q = P$.

Důkaz. Z projektivity P existuje $f \in \operatorname{Hom}_R(P, P_A)$ takové, že $\rho = \pi \circ f$. Obdobně z projektivity P_A existuje $g \in \operatorname{Hom}_R(P_A, P)$ takové, že $\pi = \rho \circ g$, viz obrázek 3.1. Spojením těchto rovností získáme $\pi = \rho \circ g = \pi \circ f \circ g$, tedy z tvrzení 9 je zobrazení $f \circ g$ bijekce. Ukážeme, že platí $P = \operatorname{Im} g \oplus \operatorname{Ker} f$. Ať $p \in P$, potom

$$p = (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(p) + p - (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(p).$$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, two heads, "\rho"] \arrow[dr, dashed, shift left, "f"] & & A \\
& P_A \arrow[ul, dashed, shift left, "g"] \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Obrázek 3.1

První člen je v $\operatorname{Im} g$ a $f(p - [g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f](p)) = f(p) - f(p) = 0$. Kdyby $p \in \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f$, tak existuje $q \in P_A$ takové, že $0 = f(p) = (f \circ g)(q)$. Protože je $f \circ g$ bijekce, tak $q = 0$. Z toho je $p = g(q) = 0$. Nakonec $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} \rho$, protože pro $p \in \operatorname{Ker} f$ je $\rho(p) = \pi(f(p)) = 0$. Položme $Q = \operatorname{Im} g$ a $D = \operatorname{Ker} f$. Našli jsme tak rozklad $P = Q \oplus D$. Speciálně je Q projektivní R-modul.

Označme $\iota = f \restriction Q$. Potom $\operatorname{Ker} \iota = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g = 0$. Dále víme, že f je epimorfismus. Proto pro $p \in P_A$ existují $q \in Q$, $d \in D$ takové, že

$$p = f(q + d) = f(q) + f(d) = f(q) = \iota(q).$$

Z faktu $\rho = \pi \circ f$ pak dostaneme $\rho \restriction Q = \pi \circ \iota$. Hledaný izomorfismus je ι.

Zbývá ukázat, že $\rho \restriction Q$ je projektivní pokrytí. V první řadě je $\rho \restriction Q$ epimorfismus. To protože pro $a \in A$ existují $q \in Q$, $d \in D \subseteq \operatorname{Ker} \rho$ takové, že $a = \rho(q + d) = (\rho \restriction Q)(q)$. Dále si všimneme, že $\iota(\operatorname{Ker} \rho \cap Q) = \operatorname{Ker} \pi$. Ať $q \in \operatorname{Ker}(\rho \restriction Q)$. Pak je $\pi(\iota(q)) = (\rho \restriction Q)(q) = 0$. Naopak pro $p \in \operatorname{Ker} \pi$ existuje $q \in Q$ takové, že $p = \iota(q)$. Potom $(\rho \restriction Q)(q) = \pi(\iota(q)) = \pi(p) = 0$.
Ať $S + \operatorname{Ker}(\rho \restriction Q) = Q$. Potom obrazem přes ι získáme rovnost $\iota(S) + \operatorname{Ker} \pi = P_A$. Užitím nepodstatnosti $\operatorname{Ker} \pi$ v P_A je $\iota(S) = P_A$. Proto musí být $S = \iota^{-1}(P_A) = Q$.

Nakonec ať je ρ projektivní pokrytí. Potom je $g \circ f$ bijekce, tudíž jsou f a g izomorfismy. Z toho $Q = \operatorname{Im} g = P$. □

Tvrzení 25. *Ať je I pravý ideál v okruhu R. Ať $\pi\colon R \to R/I$ je projekce mod I. Projekce π je projektivní pokrytí právě tehdy, když $I \subseteq \mathrm{J}(R)$. Je-li navíc R zprava semi-perfektní, tak nastane právě jedna z následujících podmínek:*
(i) $I \subseteq \mathrm{J}(R)$,
(ii) I obsahuje netriviální direktní sčítanec regulárního modulu R.

Důkaz. Ať je π projektivní pokrytí modulu R/I, tj. $\operatorname{Ker} \pi = I \ll R_R$. Z vlastností radikálu máme $\mathrm{J}(R) = \sum_{N \ll R_R} N$, tedy $I \subseteq \mathrm{J}(R)$. Ať je naopak $I \subseteq \mathrm{J}(R)$. Jelikož je R_R konečně generovaný, platí $\mathrm{J}(R) \ll R_R$. Speciálně nám lemma 8 dává $I \ll R$.

Nyní ať je R semi-perfektní. R/I je cyklický R-modul. Proto existuje jeho projektivní pokrytí $\rho\colon P \to R/I$. Dále vezměme krátkou exaktní posloupnost $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\subseteq} R \xrightarrow{\pi} R/I \longrightarrow 0$. Z tvrzení 24 máme Q, D pravé ideály v R takové, že $D \subseteq I$, $R = Q \oplus D$ a $\pi \restriction Q$ je projektivní pokrytí. Kdyby $D \neq 0$, tak I obsahuje netriviální direktní sčítanec v R, totiž D. Kdyby $D = 0$, tak $R = Q$, čili je π projektivní pokrytí a z první části dostáváme $I \subseteq \mathrm{J}(R)$. □

Předchozí tvrzení nám tak říká, že nad semi-perfektními okruhy jsou nepodstatné ideály právě ty ideály, které neobsahují nenulové idempotenty.

Tvrzení 26. *Je-li R zprava semi-perfektní a $\mathrm{J}(R) = 0$, je R totálně rozložitelný.*

Důkaz. Kdyby $\mathrm{Soc}(R) \subsetneq R$, existuje M maximální pravý ideál v R takový, že $\mathrm{Soc}(R) \subseteq M$. Ze semi-perfektnosti R existuje $\rho\colon P \to R/M$ projektivní pokrytí modulu R/M. Uvažme $\pi\colon R \twoheadrightarrow R/M$ projekci mod M. Jelikož R je projektivní, z tvrzení 24 existují pravé ideály Q a D v R takové, že $D \subseteq M$ a $R = Q \oplus D$. Navíc je $\pi \restriction Q$ projektivní pokrytí. Díky tomu je $M \cap Q$ nepodstatný v Q.

Nyní ukážeme, že M neobsahuje žádný netriviální direktní sčítanec modulu Q. Kdyby $Q = A \oplus B$, $A \subseteq M$, pak

$$Q = A \oplus B \subseteq (Q \cap M) + B = Q.$$

Z nepodstatnosti $Q \cap M$ v Q je $B = Q$, tedy je A triviální. Protože v M nejsou netriviální direktní sčítance modulu Q, tak $M \cap Q$ neobsahuje netriviální direktní sčítance regulárního modulu R. Kdyby totiž $R = A \oplus B$, kde $A \subseteq M \cap Q$, tak z předchozího $A = 0$. Z tvrzení 25 tak musí nastat situace $M \cap Q \subseteq \mathrm{J}(R) = 0$. Máme tedy

$$Q \simeq Q/(M \cap Q) \simeq R/M.$$

Jelikož je M maximální, Q je jednoduchý, čili $Q \subseteq \mathrm{Soc}(R) \subseteq M$. Dostáváme tak, že $R = Q \oplus D \subseteq M \subsetneq R$, což je spor. □

Následující dvě tvrzení jsou alternativní přístup k [1, Proposition 2.7], který je jako možnost zmíněn již v článku [1]. Cílem je ukázat, že pro netriviální projektivní modul P musí vždy platit $P\,\mathrm{J}(R) \subsetneq P$.

Tvrzení 27. *Ať $M \in \text{Mod-}R$, $x \in M$. Ať existuje $k \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_k \in \mathrm{Rad}(M)$ a $f_1, \dots, f_k \in \mathrm{Hom}_R(M, R_R)$ takové, že $x = \sum_{i=1}^{k} m_i f_i(x)$. Potom je $x = 0$. Speciálně kdykoliv $0 \neq M = \mathrm{Rad}(M)$, pak M není projektivní.*

Důkaz. Indukcí podle $k \in \mathbb{N}$. Nejprve ať je $k = 1$, tedy mějme pro $x \in M$ dané $m \in \mathrm{Rad}(M)$ a $f \in \mathrm{Hom}_R(M, R_R)$ takové, že $x = mf(x)$. Pak je

$$f(x) = f(mf(x)) = f(m)f(x).$$

Jelikož $m \in \mathrm{Rad}(M)$, tak z vlastností radikálu je $f(m) \in \mathrm{J}(R)$ a existuje $t \in R$ takové, že $t(1 - f(m)) = (1 - f(m))t = 1$. Proto máme

$$\begin{gathered} 0 = f(x) - f(x) = f(x) - f(m)f(x) = (1 - f(m))f(x) \\ 0 = t(1 - f(m))f(x) = f(x) \end{gathered}$$

Získáme tak, že $x = mf(x) = m \cdot 0 = 0$.

Nyní mějme $k \geq 2$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny $l \in \mathbb{N}$, $l < k$. Mějme dané $x \in M$ a k němu $m_1, \dots, m_k \in \mathrm{Rad}(M)$ s $f_1, \dots, f_k \in \mathrm{Hom}_R(M, R_R)$ takové, že $x = \sum_{i=1}^{k} m_i f_i(x)$. Podívejme se na obraz x při f_k:

$$f_k(x) = f_k\Big(\sum_{i=1}^{k} m_i f_i(x)\Big) = \sum_{i=1}^{k} f_k(m_i f_i(x)) = \sum_{i=1}^{k} f_k(m_i) f_i(x). \tag{3.1}$$

Potom, opět jako v případu pro $k = 1$, je $f_k(m_k) \in \mathrm{J}(R)$ a existuje $t \in R$ takové, že $t(1-f_k(m_k)) = (1-f_k(m_k))t = 1$. Upravme si rovnici (3.1) do tvaru

$$\begin{aligned} f_k(x) - f_k(m_k)f_k(x) &= \sum_{i=1}^{k-1} f_k(m_i)f_i(x) \\ (1-f_k(m_k))f_k(x) &= \sum_{i=1}^{k-1} f_k(m_i)f_i(x) \\ t(1-f_k(m_k))f_k(x) &= t\sum_{i=1}^{k-1} f_k(m_i)f_i(x) \\ f_k(x) &= \sum_{i=1}^{k-1} tf_k(m_i)f_i(x). \end{aligned}$$

Poslední člen ve vyjádření x tak lze rozepsat jako R-lineární kombinaci prvků z radikálu, tj.

$$\begin{aligned} x &= \left(\sum_{i=1}^{k-1} m_i f_i(x)\right) + m_k f_k(x) = \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{k-1} m_k t f_k(m_i) f_i(x) = \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (m_i + m_k t f_k(m_i)) f_i(x). \end{aligned}$$

Protože $m_i + m_k t f_k(m_i) \in \mathrm{Rad}(M)$, z indukčního předpokladu obdržíme $x = 0$.

Uvažme R-modul M splňující $0 \neq M = \mathrm{Rad}(M)$. Kdyby byl projektivní, tak z lemmatu o duální bázi máme pro každé $x \in M$ vyjádření $x = \sum_{i=1}^{k_x} m_i^x f_i^x(x)$, kde $k_x \in \mathbb{N}$ a $f_i^x \in \mathrm{Hom}_R(M, R_R)$, $m_i^x \in M = \mathrm{Rad}(M)$ pro $i \leq k_x$. Z dokázaného pak $x = 0$, čili $M = 0$, což je spor. □

Lemma 28. *Pro P projektivní R-modul je* $\mathrm{Rad}(P) = P\,\mathrm{J}(R)$.

Důkaz. Inkluze $P\,\mathrm{J}(R) \subseteq \mathrm{Rad}(P)$ platí z lemmatu 3. Pro opačnou inkluzi, protože je P projektivní, máme z lemmatu o duální bázi pro každé $x \in P$ vyjádření $x = \sum_{i=1}^{k_x} m_i^x f_i^x(x)$, kde $k_x \in \mathbb{N}$ a $f_i^x \in \mathrm{Hom}_R(P, R_R)$, $m_i^x \in P$ pro $i \leq k_x$. Z lemmatu 3 bod (*i*) pro $x \in \mathrm{Rad}(P)$ a $i \leq k_x$ dostáváme $f_i^x(x) \in \mathrm{J}(R)$. Proto je $x = \sum_{i=1}^{k_x} m_i^x f_i^x(x) \in P\,\mathrm{J}(R)$. □

Tvrzení 29. *Ať je $R/\mathrm{J}(R)$ totálně rozložitelný okruh a každý idempotent lze zvednout mod $\mathrm{J}(R)$. Modul $A \in \mathrm{Mod}\text{-}R$ má projektivní pokrytí, pokud je splněna následující podmínka: Je-li $B \in \mathrm{Mod}\text{-}R$ netriviální modul, který nemá více generátorů, než A, pak $B\,\mathrm{J}(R) \subsetneq B$.*

Důkaz. Nejprve si označme $S = R/\mathrm{J}(R)$. Podívejme se na R-modul $A/A\,\mathrm{J}(R)$. Ten splňuje, že

$$\begin{aligned} \big(A/A\,\mathrm{J}(R)\big)\,\mathrm{J}(R) &= \langle\{(a + A\,\mathrm{J}(R))r \mid a \in A,\ r \in \mathrm{J}(R)\}\rangle = \\ &= \langle\{(ar + A\,\mathrm{J}(R)) \mid a \in A,\ r \in \mathrm{J}(R)\}\rangle = \\ &= A\,\mathrm{J}(R)/A\,\mathrm{J}(R) = 0, \end{aligned}$$

čili tvoří S-modul. Jelikož je S totálně rozložitelný, tak je $A/A\,\mathrm{J}(R)$ totálně rozložitelný. Proto existuje množina I a pro $i \in I$ jednoduchý S-modul M_i splňující $A/A\,\mathrm{J}(R) \simeq \bigoplus_{i\in I} M_i$. Z lemmatu 2 je pak pro každé $i \in I$ modul M_i izomorfní nějakému pravému ideálu K_i v S. Z komplementarity svazu podmodulů S je pak každý tento ideál direktním sčítancem. Proto pro něj existuje idempotent $f_i \in S$ takový, že $K_i = f_i S$. Složením těchto rovností a izomorfismů dostaneme $A/A\,\mathrm{J}(R) \simeq \bigoplus_{i\in I} f_i S \subseteq S^{(I)}$.

Označme $\pi\colon R \twoheadrightarrow S$ projekci mod $\mathrm{J}(R)$. Z předpokladu pro každé $i \in I$ existuje idempotent $e_i \in R$ takový, že $\pi(e_i) = f_i$. Dále pro $i \in I$ označme $\sigma_i = \pi \restriction e_i R$. Pak pro $r \in R$ máme $\pi(e_i r) = \pi(e_i) r = f_i r = f_i(r + \mathrm{J}(R)) \in f_i S$, čili $\sigma_i\colon e_i R \twoheadrightarrow f_i S$ je epimorfismus. Zajímá nás, co je jeho jádro.

$$\operatorname{Ker}\sigma_i = \operatorname{Ker}\pi \cap e_i R = \mathrm{J}(R) \cap e_i R = e_i\,\mathrm{J}(R),$$

kde poslední rovnost platí, neboť pro $e_i r \in \mathrm{J}(R) \cap e_i R$ je $e_i r = e_i(e_i r) \in e_i\,\mathrm{J}(R)$. Naopak pro $e_i r$, kde $r \in \mathrm{J}(R)$ je $e_i r \in \mathrm{J}(R) \cap e_i R$, protože je $\mathrm{J}(R)$ oboustranný ideál. Dostáváme $e_i R / e_i\,\mathrm{J}(R) \simeq f_i S$, a proto

$$A/A\,\mathrm{J}(R) \simeq \bigoplus_{i\in I} e_i R / e_i\,\mathrm{J}(R).$$

Definujme si $P = \bigoplus_{i\in I} e_i R$. Protože $R = e_i R \oplus (1 - e_i) R$, tak jsou $e_i R$ projektivní. P je pak projektivní jako direktní suma projektivních modulů. Díky tomu, že jde o projektivní moduly, z lemmatu 5 a lemmatu 28 získáme

$$P\,\mathrm{J}(R) = \operatorname{Rad}(P) = \bigoplus_{i\in I} \operatorname{Rad}(e_i R) = \bigoplus_{i\in I} e_i\,\mathrm{J}(R).$$

Nyní chceme ukázat, že $P/P\,\mathrm{J}(R) \simeq \bigoplus_{i\in I} e_i R / e_i\,\mathrm{J}(R)$. Pro každé $i \in I$ označme $\psi_i\colon e_i R \twoheadrightarrow e_i R / e_i\,\mathrm{J}(R)$ projekci mod $\mathrm{J}(R)$ a uvažme krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to e_i\,\mathrm{J}(R) \xrightarrow{\subseteq} e_i R \xrightarrow{\psi_i} e_i R / e_i\,\mathrm{J}(R) \to 0.$$

Jejich direktním součtem přes $i \in I$ získáme novou krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to P\,\mathrm{J}(R) \xrightarrow{\subseteq} P \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{i\in I} e_i R / e_i\,\mathrm{J}(R) \to 0,$$

kde $\psi = \bigoplus_{i\in I} \psi_i$. Využili jsme předešlé rovnosti a definice P. Z první věty o izomorfismu pro ψ tak dostáváme požadovaný výsledek. Dohromady máme

$$A/A\,\mathrm{J}(R) \simeq P/P\,\mathrm{J}(R).$$

Definujme si $\rho\colon P \to A/A\,\mathrm{J}(R)$ jako projekci $P \to P/P\,\mathrm{J}(R)$ mod $P\,\mathrm{J}(R)$ složenou s izomorfismem $P/P\,\mathrm{J}(R) \to A/A\,\mathrm{J}(R)$. Proto jde o epimorfismus a $\operatorname{Ker}\rho = P\,\mathrm{J}(R)$. Ať je $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/A\,\mathrm{J}(R)$ projekce mod $A\,\mathrm{J}(R)$. Z projektivity P pak existuje $f \in \operatorname{Hom}_R(P, A)$ takové, že $\rho = \pi \circ f$, jako na obrázku 3.2.
Chceme ukázat, že f je projektivní pokrytí. Nejprve nahlédneme, že f je surjektivní za předpokladu $\operatorname{Ker}\pi \ll A$. Ať $a \in A$. Ze surjektivity ρ pak existuje $p \in P$ takové, že $\rho(p) = \pi(a)$. Potom $a = f(p) + a - f(p)$. Všimneme si, že

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, two heads, "\rho"] \arrow[dr, dashed, "f"'] & & A/A\mathrm{J}(R) \\ & A \arrow[ur, two heads, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

Obrázek 3.2

$\pi(a - f(p)) = \pi(a) - \rho(p) = 0$. Dostáváme tak, že $A = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} \pi$. Užitím nepodstatnosti $\operatorname{Ker} \pi$ v A získáme $\operatorname{Im} f = A$.

Platí, že $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} \rho$, neboť pro $a \in \operatorname{Ker} f$ je $\rho(a) = \pi(f(a)) = 0$. Díky lemmatu 8 tak stačí ukázat, že $\operatorname{Ker} \rho$ je nepodstatné v P.

Zbývá tak dokázat, že $A\,\mathrm{J}(R) \ll A$ a $P\,\mathrm{J}(R) \ll P$. Ať $C \in \{A, P\}$. Uvažme K podmodul modulu C takový, že $K + C\,\mathrm{J}(R) = C$. Ukážeme, že $C/K = 0$. Platí

$$\begin{aligned}
\big(C/K\big)\,\mathrm{J}(R) &= \langle\{(c+K)r \mid c \in C,\ r \in \mathrm{J}(R)\}\rangle = \\
&= \langle\{cr + K \mid c \in C,\ r \in \mathrm{J}(R)\}\rangle = \\
&= \langle\{(cr + k) + K \mid c \in C,\ k \in K,\ r \in \mathrm{J}(R)\}\rangle = \\
&= \big(C\,\mathrm{J}(R) + K\big)/K = \\
&= C/K.
\end{aligned}$$

V případě $C = A$ nemá modul A/K větší počet generátorů než A. Z předpokladu tedy $A/K = 0$. Pro případ $C = P$ rozlišíme dva případy. Víme, že $A \simeq \bigoplus_{i \in I} f_i S$. Je-li A konečně generovaný, potom je I konečná, čili jsou P a P/K konečně generované. Z Nakayamova lemmatu je pak $P/K = 0$. Není-li A konečně generovaný, potom I není konečná množina. Pro $M \in$ Mod-R označme $\operatorname{gen}(M)$ nejmenší kardinál takový, že M je generován množinou této kardinality. Potom

$$\operatorname{gen}(P/K) \le \operatorname{gen}(P) = |I| = \operatorname{gen}(A/A\,\mathrm{J}(R)) \le \operatorname{gen}(A).$$

Využili jsme definice $P = \bigoplus_{i \in I} e_i R$ a faktu, že $e_i R$ je cyklický. Z předpokladu dostáváme, že $P/K = 0$. $\square$

3.2 Důkaz věty o semi-perfektnosti

Než se dostaneme k důkazu věty 22 o semi-perfektnosti, budeme potřebovat následující lemma. To nám dá podmínku na to, kdy se rovnají dva idempotenty.

Lemma 30. *Nechť R je okruh a $e, f \in R$ jsou idempotenty. Pokud $eR = fR$ a zároveň $(1-e)R = (1-f)R$, tak $e = f$.*

Důkaz. Z předpokladů můžeme vyjádřit $f \in fR = eR$ jako násobek e a stejně tak $1 - f \in (1-f)R = (1-e)R$, čili existují $r_1, r_2 \in R$takové, že

$$\begin{aligned}
er_1 &= f \\
(1-e)r_2 &= 1 - f.
\end{aligned}$$

Sečtením rovnic dostaneme:

$$\begin{aligned} r_2 - er_2 + er_1 &= 1 \\ e(r_1 - r_2) &= 1 - r_2. \end{aligned}$$

Nyní vynásobíme rovnici zleva e a využijeme toho, že je e idempotent. Dostaneme:

$$\begin{aligned} e^2(r_1 - r_2) &= e(1 - r_2) \\ e(r_1 - r_2) &= e(1 - r_2) \\ er_1 &= e \end{aligned}$$

Tedy máme $e = er_1 = f$. □

Důkaz věty 22. $(b) \Rightarrow (c)$: Ať je $M \in$ Mod-R konečně generovaný. Ať B nemá více generátorů než M a splňuje $B\,\mathrm{J}(R) = B$. Z Nakayamova lemmatu získáme $B = 0$. Z tvrzení 29 tak existuje projektivní pokrytí modulu M.
$(c) \Rightarrow (a)$: cyklický modul je konečně generovaný.
$(a) \Rightarrow (b)$: Předpokládejme, že R je zprava semi-perfektní. Protože $\mathrm{J}(R)$ je oboustranný ideál, z tvrzení 23 je $R/\mathrm{J}(R)$ semi-perfektní. Z vlastností radikálu je $\mathrm{J}(R/\mathrm{J}(R)) = 0$, čili nám tvrzení 26 dává, že $R/\mathrm{J}(R)$ je totálně rozložitelný. Nyní označme $S = R/\mathrm{J}(R)$ a mějme daný $f \in S$ idempotent. Chceme f zvednout na idempotent v R. Uvažme rozklad S na

$$S = fS \oplus (1 - f)S.$$

Označme $A = fS$ a $B = (1 - f)S$. Protože jde o cyklické R-moduly, tak ze semi-perfektnosti R existují $\alpha\colon P \twoheadrightarrow A$ projektivní pokrytí R-modulu A a $\beta\colon Q \twoheadrightarrow B$ projektivní pokrytí R-modulu B. Definujme zobrazení:

$$\begin{aligned} \varphi\colon P \oplus Q &\to S \\ (p, q) &\mapsto \alpha(p) + \beta(q). \end{aligned}$$

To je zřejmě dobře definovaný epimorfismus pravých R-modulů. Nyní ukážeme, že $\operatorname{Ker}\varphi \ll P \oplus Q$. Platí, že $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\alpha \oplus \operatorname{Ker}\beta$. To protože

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\varphi &= \{(p, q) \in P \oplus Q \mid f((p, q)) = 0\} = \\ &= \{(p, q) \in P \oplus Q \mid \alpha(p) + \beta(q) = 0\} = \\ &= \{(p, q) \in P \oplus Q \mid \alpha(p) = 0,\ \beta(q) = 0\} = \\ &= \operatorname{Ker}\alpha \oplus \operatorname{Ker}\beta. \end{aligned}$$

Třetí a čtvrtá rovnost platí, protože $A \cap B = 0$. Protože je $\operatorname{Ker}\alpha \ll P$, tak je $\operatorname{Ker}\alpha \oplus 0 \ll P \oplus 0 \subseteq P \oplus Q$. Stejně tak je $0 \oplus \operatorname{Ker}\beta \ll 0 \oplus Q \subseteq P \oplus Q$. Z lemmatu 8 je pak $\operatorname{Ker}\alpha \oplus \operatorname{Ker}\beta \ll P \oplus Q$. Proto je φ projektivní pokrytí.

Máme $S = A \oplus B$, z tvrzení 25 je $\pi\colon R \twoheadrightarrow S$ projekce mod $\mathrm{J}(R)$ také projektivní pokrytí. Z tvrzení 24 obdržíme izomorfismus $\iota\colon R \to P \oplus Q$ takový, že $\pi = \varphi \circ \iota$. Pomocí tohoto izomorfismu dostaneme rozklad $R = C \oplus D$, kde

$$\begin{aligned} C &= \iota^{-1}(P \oplus 0) \\ D &= \iota^{-1}(0 \oplus Q). \end{aligned}$$

Nyní ať $j: R \twoheadrightarrow C$ je projekce na C. Pak $j \in \mathrm{End}_R(R)$ je idempotent. Označme $e = j(1)$. Potom jsou e a $1-e$ idempotenty a navíc z faktu $\mathrm{Ker}\, j = D$ dostaneme

$$\begin{aligned} C &= j(R) = j(1)R = eR, \\ D &= (\mathrm{id} - j)(C + D) = (\mathrm{id} - j)(1)R = (1-e)R. \end{aligned}$$

Z lemmatu 30 je pak e touto vlastností jednoznačně určen. Nakonec

$$\pi(e)S = \pi(eR) = \pi(C) = fS, \quad \pi(1-e)S = \pi((1-e)R) = \pi(D) = (1-f)S.$$

Využili jsme definic C a D spolu s faktem $\pi = \varphi \circ \iota$. Z lemmatu 30 plyne $\pi(e) = f$. Tím jsme zvedli $f \in R/\mathrm{J}(R)$ idempotent na $e \in R$ idempotent. Poslední část věty dokážeme, až budeme mít k dispozici ekvivalenci prvních dvou podmínek Teorému P. □

3.3 Důkaz ekvivalence (1) a (2) z Teorému P

Nyní máme dostatečné prostředky pro důkaz obou implikací prvních dvou podmínek ve větě 10. Začneme implikací z (*1*) do (*2*).

(1) ⇒ (2). Ať je $R/\mathrm{J}(R)$ totálně rozložitelný a $\mathrm{J}(R)$ je zprava T-nilpotentní. Ukážeme, že pro každý netriviální R-modul B nastane situace $B\,\mathrm{J}(R) \subsetneq B$. Pro každý R-modul tak budou splněny předpoklady tvrzení 29, čili bude mít nějaké projektivní pokrytí. Mějme dán netriviální modul B takový, že $B = B\,\mathrm{J}(R)$. Potom existuje nenulové $b \in B$. Protože $b \in B = B\,\mathrm{J}(R)$, můžeme b zapsat jako konečnou $\mathrm{J}(R)$-lineární kombinaci prvků z B:

$$b = \sum_{i_1} b_{i_1} r_{i_1}, \quad b_{i_1} \in B, \quad r_{i_1} \in \mathrm{J}(R).$$

Nyní postupujme indukcí podle počtu sčítacích indexů. Mějme vyjádření b jako

$$b = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} b_{i_1 \cdots i_k} r_{i_1 \cdots i_k} \cdots r_{i_1 i_2} r_{i_1}, \quad b_{i_1 \cdots i_k} \in B, \quad r_{i_1 \cdots i_k}, \ldots, r_{i_1} \in \mathrm{J}(R). \tag{3.2}$$

Protože $b_{i_1 \cdots i_k} \in B = B\,\mathrm{J}(R)$, tak existují $b_{i_1 \cdots i_k i_{k+1}} \in B$ a $r_{i_1 \cdots i_k i_{k+1}} \in \mathrm{J}(R)$ takové, že $b_{i_1 \cdots i_k} = \sum_{i_{k+1}} b_{i_1 \cdots i_k i_{k+1}} r_{i_1 \cdots i_k i_{k+1}}$ je konečný součet. Dosazením této rovnosti do (3.2) dostaneme:

$$b = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} \sum_{i_{k+1}} b_{i_1 \cdots i_k i_{k+1}} r_{i_1 \cdots i_k i_{k+1}} r_{i_1 \cdots i_k} \cdots r_{i_2 i_1} r_{i_1}. \tag{3.3}$$

Protože je $b \neq 0$, tak je v každém kroku nějaký sčítanec nenulový. Speciálně tak existuje posloupnost po sobě jdoucích indexů $i_{j_1}, \ldots, i_{j_n}$ taková, že

$$r_{i_{j_1}, \cdots, i_{j_n}} \cdots r_{i_{j_1} i_{j_2}} r_{i_{j_1}} \neq 0.$$

Nyní si vytvořme graf, kde každý vrchol bude takováto posloupnost indexů a jehož hrany odpovídají připojení nového indexu do posloupnosti stejně, jako se přidává příslušný prvek z $\mathrm{J}(R)$ do sumy ve (3.3). Díky induktivní konstrukci jde o nekonečný strom. Navíc má každý jeho vrchol konečný index. To proto, že v (3.3) přidáváme konečný součet, tedy jen konečně nových indexů. Těch co nám dají nenulový součin tak může být také pouze konečně. Z Kőnigova lemmatu pak má tento strom nekonečnou větev. Našli jsme tak nekonečnou posloupnost prvků $\mathrm{J}(R)$ takovou, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je $r_{i_{j_1},\dots,i_{j_n}} \cdots r_{i_{j_1} i_{j_2}} r_{i_{j_1}} \neq 0$. To je ale spor s T-nilpotencí $\mathrm{J}(R)$. □

(2) ⇒ (1). Nechť je R zprava perfektní okruh. Pak je R semi-perfektní, tedy z první části věty 22 je $R/\mathrm{J}(R)$ totálně rozložitelný. Chceme, že $\mathrm{J}(R)$ je zprava T-nilpotentní. Uvažme libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathrm{J}(R)$. Vezměme trojici $[F, \{a_n\}, G]$ určující Bassův modul F/G, tj. F je volný R-modul s volnou bází $\{x_1, x_2, \dots\}$ a $G \subseteq F$ je jeho podmodul generovaný prvky $x_n - x_{n+1}a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Z perfektnosti máme $\sigma\colon P \twoheadrightarrow F/G$ projektivní pokrytí. Dál máme krátkou exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\subseteq} F \xrightarrow{\rho} F/G \longrightarrow 0,$$

kde $\rho\colon F \twoheadrightarrow F/G$ je projekce mod G. Pak ale z tvrzení 24 existují Q, D podmoduly v F takové, že $D \subseteq G$, $F = Q \oplus D$ a $\rho\restriction Q$ je projektivní pokrytí modulu F/G, tj. $G \cap Q \ll Q$ a Q je projektivní. Dále platí $F = G + F\,\mathrm{J}(R)$. To protože pro všechny $n \in \mathbb{N}$ je prvek $x_n - x_{n+1}a_n$ jeden z generátorů modulu G a $x_{n+1}a_n \in F\,\mathrm{J}(R)$, tedy

$$x_n = (x_n + x_{n+1}a_n) - (x_{n+1}a_n) \in G + F\,\mathrm{J}(R).$$

Modul $G + F\,\mathrm{J}(R)$ tak obsahuje celou volnou bázi F, tedy obsahuje F. Opačná ikluze je triviální. Máme tak:

$$\begin{aligned}
F &= G + F\,\mathrm{J}(R) = \\
&= [G \cap (Q \oplus D)] + [(Q \oplus D)\,\mathrm{J}(R)] = \\
&= [(G \cap Q) \oplus (G \cap D)] + [Q\,\mathrm{J}(R) + D\,\mathrm{J}(R)] = && (3.4)\\
&= [(G \cap Q) \oplus D] + [Q\,\mathrm{J}(R) + D\,\mathrm{J}(R)] = \\
&= (G \cap Q) + D + Q\,\mathrm{J}(R) + D\,\mathrm{J}(R) = \\
&= [(G \cap Q) + Q\,\mathrm{J}(R)] + [D + D\,\mathrm{J}(R)] = \\
&= [(G \cap Q) + Q\,\mathrm{J}(R)] \oplus [D + D\,\mathrm{J}(R)] = && (3.5)\\
&= [(G \cap Q) + Q\,\mathrm{J}(R)] \oplus D.
\end{aligned}$$

Pro rovnost (3.4) uvažme $q \in Q$, $d \in D \subseteq G$. Je-li $q+d \in G$, tak $q = q+d-d \in G$; naopak je-li $q, d \in G$, tak $q+d \in G$. Pro druhou polovinu rovnosti je první inkluze z distributivity a opačná z faktu $Q\,\mathrm{J}(R) \subseteq F\,\mathrm{J}(R)$ a $D\,\mathrm{J}(R) \subseteq F\,\mathrm{J}(R)$.
Rovnost (3.5) platí, protože $G \cap Q + Q\,\mathrm{J}(R) \subseteq Q$, $D + D\,\mathrm{J}(R) \subseteq D$ a $Q \cap D = 0$. Máme tak rovnost

$$Q \oplus D = [(G \cap Q) + Q\,\mathrm{J}(R)] \oplus D.$$

Tu protneme s Q, čímž dostaneme $Q = (G \cap Q) + Q\,\mathrm{J}(R)$. Protože je $G \cap Q$ nepodstatný v Q, tak $Q = Q\,\mathrm{J}(R)$, což je z projektivity Q a z lemmatu 28 rovno $\mathrm{Rad}(Q)$. Využitím tvrzení 27 tak získáme $Q = 0$. Díky tomu je $F = D \subseteq G \subseteq F$, čili $F = G$ a $F/G = 0$. Proto je $\rho(x_1) \cdot 1 = 0$, neboli $1 \in \mathrm{Ann}(\rho(x_1))$. Z tvrzení 13 pak existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $a_k \cdots a_1 \cdot 1 = 0$. Našli jsme tak hledaný index a proto je $\mathrm{J}(R)$ zprava T-nilpotentní. □

Důkaz zbytku věty 22 o semi-perfektnosti. Nyní ukážeme, že R je perfektní, právě když platí podmínka (b) a $\mathrm{J}(R)$ je zprava T-nilpotentní. Je-li R zprava perfektní, tak je z věty 10 $\mathrm{J}(R)$ zprava T-nilpotentní ideál a $R/\mathrm{J}(R)$ je totálně rozložitelný. Speciálně je $\mathrm{J}(R)$ nil ideál, čili z lemmatu 19 lze zvedat idempotenty mod $\mathrm{J}(R)$. Naopak, je-li $R/\mathrm{J}(R)$ totálně rozložitelný, $\mathrm{J}(R)$ je zprava T-nilpotentní a jsme-li schopni zvedat idempotenty mod $\mathrm{J}(R)$, pak je z věty 10 R zprava perfektní. $\square$

Kapitola 4

Implikace mezi podmínkami (2), (3) a (4)

V této kapitole se soustředíme na implikace z (*2*) do (*3*) a z (*3*) do (*4*) ve větě 10. V jejich důkazu se odlišíme od článku [1]. Způsob, kterým obě implikace dokazujeme není nejkratší, avšak je elementární a vyhýbáme se přitom využití tenzorového součinu a derivovaného funktoru Tor.

4.1 Implikace z (2) do (3)

V celé této sekci uvažujeme, že okruh R je zprava perfektní.

Definice 22 (Modul charakterů)**.** *Nechť $M \in$ Mod-R. Modul charakterů modulu M definujeme jako $M^+ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.*

Poznámka. 1) Pro $M \in$ Mod-R je $M^+ \in R$-Mod s násobením definovaným následovně. Pro $f \in M^+$, $r \in R$ definujeme $\forall m \in M : (r \cdot f)(m) = f(m \cdot r)$.
2) Kontravariantní funktor $(-)^+\colon$ Mod-$R \to R$-Mod je exaktní. Navíc je grupa $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ kogenerátor kategorie $\mathbb{Z}$-Mod, čili jde o věrný funktor.

Definice 23 (Plochý modul)**.** *$M \in$ Mod-R je plochý, pokud je M^+ injektivní.*

Poznámka. Projektivní moduly jsou ploché.

Definice 24. *Ať je I levý ideál v R, $M \in$ Mod-R. Pak MI značí abelovskou grupu generovanou všemi součiny prvků M a I, tj. $MI = \langle\{m \cdot i \mid m \in M, i \in I\}\rangle$.*

Uvažme situaci, kdy máme dán netriviální $M \in$ Mod-R spolu s jeho projektivním pokrytím $\pi\colon P \twoheadrightarrow M$. Označme $K = \mathrm{Ker}\,\pi$. Naším cílem je ukázat, že za předpokladu pravé perfektnosti R a plochosti M bude $K = 0$. Tím získáme, že je toto projektivní pokrytí izomorfismus, tedy bude M projektivní. Začneme několika pozorováními.

Lemma 31. *Nechť $M, P \in$ Mod-R, $\pi\colon P \twoheadrightarrow M$ je epimorfismus a I je levý ideál v R. Platí $\mathrm{Im}\,(\pi \restriction PI) = MI$. Je-li navíc π projektivní pokrytí modulu $M \neq 0$ s jádrem K, máme $K \subseteq P\,\mathrm{J}(R)$.*

Důkaz. Máme-li $\sum_j p_j i_j \in PI$, tak je $\pi\big(\sum_j p_j i_j\big) = \sum_j \pi(p_j) i_j \in MI$. Naopak mějme dané $\sum_j m_j i_j \in MI$. Ze surjektivity π pro každé $m_j \in M$ existuje $p_j \in P$ takové, že $\pi(p_j) = m_j$. Proto $\sum_j m_j i_j = \pi(\sum_j p_j i_j)$.

Nyní chceme, že $K \subseteq P\,\mathrm{J}(R)$. Z vlastností radikálu je $\mathrm{Rad}(P) = \sum_{N \ll P} N$. Jelikož je K nepodstatný v P, získáme $K \subseteq \mathrm{Rad}(P)$. Nakonec nám z projektivity modulu P lemma 28 dává, že $K \subseteq \mathrm{Rad}(P) = P\,\mathrm{J}(R)$. □

Lemma 32. *Nechť* $0 \neq M, P \in \text{Mod-}R$*, kde* P *je projektivní a* $\pi\colon P \twoheadrightarrow M$ *je projektivní pokrytí modulu* M *s jádrem* K*. Potom platí* $P/P\,\mathrm{J}(R) \simeq M/M\,\mathrm{J}(R)$*,* $M\,\mathrm{J}(R) \subsetneq M$ *a* $M\,\mathrm{J}(R) = \mathrm{Rad}(M)$*.*

Důkaz. Z 1. věty o izomorfismu a lemmatu výše dostáváme, že $P/K \simeq M$ a $P\,\mathrm{J}(R)/K \simeq M\,\mathrm{J}(R)$. Použitím 2. věty o izomorfismu získáme

$$M/M\,\mathrm{J}(R) \simeq \frac{P/K}{P\,\mathrm{J}(R)/K} \simeq P/P\,\mathrm{J}(R).$$

Z tvrzení 27 a lemmatu 28 je $P\,\mathrm{J}(R) = \mathrm{Rad}(P) \subsetneq P$, čili $P/P\,\mathrm{J}(R) \neq 0$. Díky tomu ani $M/M\,\mathrm{J}(R)$ není triviální, a tak $M\,\mathrm{J}(R) \subsetneq M$. Jelikož $\mathrm{Rad}(P/P\,\mathrm{J}(R)) = 0$, tak $\mathrm{Rad}(M/M\,\mathrm{J}(R)) = 0$, čímž získáme $\mathrm{Rad}(M) \subseteq M\,\mathrm{J}(R)$. Naopak z vlastností radikálu je $M\,\mathrm{J}(R) \subseteq \mathrm{Rad}(M)$, takže máme $M\,\mathrm{J}(R) = \mathrm{Rad}(M)$. □

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] & & P/P\,\mathrm{J}(R) \arrow[r, "\simeq"] & M/M\,\mathrm{J}(R) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\subseteq"] & P \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[u, two heads] & M \arrow[r] \arrow[u, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[u, "\mathrm{id}_K"'] & P\,\mathrm{J}(R) \arrow[r, two heads, "\pi\restriction P\,\mathrm{J}(R)"] \arrow[u] & M\,\mathrm{J}(R) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Obrázek 4.1: Lemmata 31 a 32

Mějme R zprava perfektní a M plochý. Abychom ukázali, že je projektivní pokrytí π modulu M izomorfismus, uvažme $\rho\colon Q \twoheadrightarrow K$ projektivní pokrytí jeho jádra. Kdyby $K \neq 0$, máme z lemmatu 32, že $K\,\mathrm{J}(R) \subsetneq K$. Ukážeme-li, že za těchto podmínek platí $K\,\mathrm{J}(R) = K$, dostaneme spor a $K = 0$. Rovnost ukážeme tak, že ověříme platnost rovnosti $KI = K \cap PI$ pro každý levý ideál I v R.

Tvrzení 33. *Uvažme krátkou exaktní posloupnost* $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\subseteq} P \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$ *v* $\text{Mod-}R$*, kde* P *je projektivní modul. Je-li* M *plochý modul, pro každý levý ideál* I *v* R *platí* $KI = K \cap PI$*.*

Abychom byli schopni dokázat tvrzení 33, budeme nejprve potřebovat vybudovat příslušný aparát. Začneme následující definicí.

Definice 25. *Nechť* I *je levý ideál v* R*. Definujme kontravariantní funktory* $G_I, F_I\colon \text{Mod-}R \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$ *následujícím způsobem*

(i) $G_I = \mathrm{Hom}_R(I, -) \circ (-)^+$*,*

(ii) $F_I\colon \text{Mod-}R \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$*, kde*

  (a) $F_I(M) = (MI)^+$*, pro* $M \in \text{Mod-}R$*,*

  (b) $F_I(\alpha) = (\alpha \restriction MI)^+$*, pro* $\alpha\colon M \to N$ *a uvažujeme* $\alpha \restriction MI\colon MI \to NI$*.*

Pozorování. *Pro každý levý ideál I v R je F_I funktor a G_I zleva exaktní funktor.*

Důkaz. G_I je složení exaktního a zleva exaktního funktoru. Proto jde o zleva exaktní funktor. F_I je nejprve restrikce, která respektuje skládání, s následnou aplikací funktoru $(-)^+$. □

Definice 26. *Nechť je I levý ideál v R a $M \in$ Mod-R. Definujme zobrazení $\tau^I_M\colon (MI)^+ \to \mathrm{Hom}_R(I, M^+)$ následujícím způsobem. Pro $g \in (MI)^+$ definujeme*

$$\begin{aligned}\tau^I_M(g)\colon I &\to M^+\\ i &\mapsto i \cdot g,\end{aligned}$$

kde $(i \cdot g)(m) = g(m \cdot i)$, kdykoliv $m \in M$. Položme $\tau^I = (\tau^I_M \mid M \in \mathrm{Mod}\text{-}R)$.

Poznámka. Je-li ideál I jasný z kontextu, budeme místo τ^I, τ^I_M, G_I a F_I užívat značení τ, τ_M, G a F.

Tvrzení 34. *Pro I levý ideál v R je soubor τ přirozená transformace $\tau\colon F \to G$ a každá její složka je prostá.*

Důkaz. Nejprve ověříme podmínky kompatibility pro τ, viz obr. 4.2. Uvažme proto libovolné $M, N \in$ Mod-R, $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ a $g \in F(N)$. Máme

$$\begin{aligned}&(\tau_M \circ F(\alpha))(g) = \tau_M((\alpha \restriction MI)^+(g)) = \tau_M(g \circ (\alpha \restriction MI)),\\ &(G(\alpha) \circ \tau_N)(g) = \alpha^+ \circ \tau_N(g).\end{aligned}$$

Z definic platí, že pro všechna $i \in I$ a $m \in M$ je

$$\begin{aligned}&\tau_M(g \circ (\alpha \restriction MI))(i)(m) = g((\alpha \restriction MI)(mi)) = (g \circ \alpha)(mi),\\ &\alpha^+(\tau_N(g)(i))(m) = \alpha^+(i \cdot g)(m) = i \cdot g(\alpha(m)) = (g \circ \alpha)(mi).\end{aligned}$$

Nakonec chceme ukázat, že každá složka τ je prostá. Vezměme proto $M \in$ Mod-R a $g \in F(M)$ takové, že $\tau_M(g) = 0$. Pak ale pro všechna $i \in I$ platí $\tau_M(g)(i) = 0$, tj. $i \cdot g = 0$. Proto

$$\forall i \in I, \forall m \in M\colon\ g(mi) = (i \cdot g)(m) = 0,$$

čili $g = 0$.

$$\begin{tikzcd} F(N) \arrow[r, "\tau_N"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & G(N) \arrow[d, "G(\alpha)"] \\ F(M) \arrow[r, "\tau_M"'] & G(M) \end{tikzcd}$$

Obrázek 4.2

□

Tvrzení 35. *Nechť $M \in$ Mod-R. Modul M je plochý právě tehdy, když pro každý levý ideál I v R je τ_M^I surjektivní.*

Důkaz. Nejprve si uvědomíme, že τ_M^R je surjektivní, tedy jde o izomorfismus. To plyne jednoduše z linearity zobrazení v $G_R(M)$. Ať $r \in R$ a $g \in G_R(M)$. Potom

$$g(r) = r \cdot g(1) = \tau_M^R(g(1))(r).$$

Ať I je levý ideál v R. Označme si $\mu_I \colon MI \to M$ a $\nu_I \colon I \to R$ identická vnoření. Uvažme diagram 4.3. Ukážeme, že je komutativní. Tím nahlédneme, že je τ_M^I epimorfismus právě tehdy, když je $\mathrm{Hom}_R(\nu_I, M^+)$ epimorfismus.

$$\begin{tikzcd}
(MI)^+ \arrow[d, "\tau_M^I"'] & & M^+ \arrow[ll, "\mu_I^+"'] \arrow[d, "\tau_M^R"] \\
\mathrm{Hom}_R(I, M^+) & & \mathrm{Hom}_R(R, M^+) \arrow[ll, "\mathrm{Hom}_R(\nu_I, M^+)"]
\end{tikzcd}$$

Obrázek 4.3

Nyní ke komutativitě diagramu 4.3. Ať $\alpha \in M^+$. Potom

$$(\tau_M^I \circ \mu_I^+)(\alpha) = \tau_M^I(\alpha \circ \mu_I),$$
$$(\mathrm{Hom}_R(\nu_I, M^+) \circ \tau_M^R)(\alpha) = \tau_M^R(\alpha) \circ \nu_I.$$

Pro všechna $i \in I$ platí

$$\tau_M^I(\alpha \circ \mu_I)(i) = i \cdot (\alpha \circ \mu_I) = i \cdot \alpha = \tau_M^R(\alpha)(\nu_I(i)),$$

kde druhá rovnost platí, neboť μ_I je identické vnoření. S touto přípravou už jsme schopni ukázat ekvivalenci ze znění věty.

Ať je M plochý modul. Potom je M^+ injektivní, tedy je pro každý levý ideál I v R zobrazení $\mathrm{Hom}_R(\nu_I, M^+)$ epimorfismus. Z již dokázaného je proto τ_M^I rovněž epimorfismus.

Naopak, je-li pro každý levý ideál I v R zobrazení τ_M^I epimorfismus, pak je pro každý levý ideál I v R zobrazení $\mathrm{Hom}_R(\nu_I, M^+)$ epimorfismus a užitím Baerova testu injektivity dostaneme, že M^+ je injektivní. Proto je M plochý. □

Chceme se dostat k důkazu tvrzení 33. Uvažme tak situaci z jeho znění. Ve zbytku této sekce budou $\nu \colon K \to P$, $\alpha \colon KI \to K$ a $\beta \colon K \cap PI \to PI$ identická vnoření. Všimněme si, že $\nu \restriction KI = \beta \circ \alpha$. Nyní se podívejme na následující komutativní diagram.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (MI)^+ \arrow[r, "F(\pi)"] \arrow[d, "\tau_M"'] & (PI)^+ \arrow[r, "\beta^+"] \arrow[d, "\tau_P"'] & (K \cap PI)^+ \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\psi"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(I, M^+) \arrow[r, "G(\pi)"] & \mathrm{Hom}_R(I, P^+) \arrow[r, "G(\nu)"] & \mathrm{Hom}_R(I, K^+) &
\end{tikzcd}$$

Obrázek 4.4

Pozorování. *Diagram 4.4 má exaktní řádky.*

Důkaz. Podívejme se nejprve na první řádek diagramu 4.4. Z lemmatu 31 je $\operatorname{Im}(\pi \restriction PI) = MI$ a $\operatorname{Ker}(\pi \restriction PI) = K \cap PI$. Díky tomu je

$$0 \to K \cap PI \xrightarrow{\beta} PI \xrightarrow{\pi \restriction PI} MI \to 0$$

exaktní posloupnost. Jelikož je $(-)^+$ exaktní kontravariantní funktor, obraz této posloupnosti je opět exaktní. To je ale právě první řádek diagramu 4.4. Druhý řádek diagramu je obraz krátké exaktní posloupnosti $0 \to K \xrightarrow{\nu} P \xrightarrow{\pi} M \to 0$ funktorem G, který je zleva exaktní. $\square$

Tvrzení 36. *Uvažujme stejné předpoklady, jako v tvrzení 33. Potom pro každý levý ideál I v R existuje monomorfismus $\psi\colon (K \cap PI)^+ \to \operatorname{Hom}_R(I, K^+)$ takový, že $\psi \circ \beta^+ = G(\nu) \circ \tau_P$, tj. diagram 4.4 komutuje.*

Důkaz. Vezměme levý ideál I v R a označme $h = G(\nu) \circ \tau_P$. Komutativita levé části diagramu 4.4 a fakt $\operatorname{Im} \nu = \operatorname{Ker} \pi$ nám dává

$$h \circ F(\pi) = G(\nu) \circ \tau_P \circ F(\pi) = G(\nu) \circ G(\pi) \circ \tau_M = G(\pi \circ \nu) \circ \tau_M = 0,$$

čili $\operatorname{Ker} h \supseteq \operatorname{Im} F(\pi) = \operatorname{Ker} \beta^+$. Z věty o homomorfismu existuje jednoznačné $\psi\colon (K \cap PI)^+ \to G(K)$ takové, že $h = \psi \circ \beta^+$.

Nyní ukážeme, že je ψ prosté. Nechť je $\gamma \in \operatorname{Ker} \psi$. Jelikož je β^+ surjekce, existuje $\delta \in (PI)^+$ takové, že $\beta^+(\delta) = \gamma$. Máme tak, že

$$0 = (\psi \circ \beta^+)(\delta) = (G(\nu) \circ \tau_P)(\delta).$$

Tudíž $\tau_P(\delta) \in \operatorname{Ker} G(\nu) = \operatorname{Im} G(\pi)$. Díky tomu existuje $\eta \in \operatorname{Hom}_R(I, M^+)$ takové, že $G(\pi)(\eta) = \tau_P(\delta)$. Jelikož je M plochý, z tvrzení 34 je τ_M epimorfismus. Máme tak $\zeta \in (MI)^+$ takové, že $\tau_M(\zeta) = \eta$. Dohromady

$$\tau_P(\delta) = G(\pi)(\eta) = (G(\pi) \circ \tau_M)(\zeta) = (\tau_P \circ F(\pi))(\zeta).$$

Nakonec využijeme fakt, že je τ_P monomorfismus, čili $F(\pi)(\zeta) = \delta$. Proto máme z exaktnosti řádků diagramu 4.4 rovnost

$$\gamma = \beta^+(\delta) = (\beta^+ \circ F(\pi))(\zeta) = 0.$$

$\square$

S těmito prostředky se můžeme přesunout na důkaz tvrzení 33.

Důkaz tvrzení 33. Inkluze $KI \subseteq K \cap PI$ je triviální, neboť $KI \subseteq K$ a zároveň $KI \subseteq PI$. Naopak máme z tvrzení 36 a diagramu 4.4, že

$$\begin{aligned} \psi \circ \beta^+ &= G(\nu) \circ \tau_P = \\ &= \tau_K \circ F(\nu) = \\ &= \tau_K \circ (\nu \restriction KI)^+ = \\ &= \tau_K \circ (\beta \circ \alpha)^+ = \\ &= \tau_K \circ \alpha^+ \circ \beta^+, \end{aligned}$$

kde druhá rovnost jsou podmínky kompatibility pro $\tau\colon F \to G$, viz obr. 4.5. Protože je β^+ epimorfismus, dostaneme $\psi = \tau_K \circ \alpha^+$, tedy je α^+ monomorfismus. Z věrnosti funktoru $(-)^+$ tak získáme, že je identické vnoření $\alpha\colon KI \to K \cap PI$ epimorfismus, tj. $KI = K \cap PI$. $\square$

$$\begin{tikzcd}
(PI)^+ \arrow[r, "F(\nu)"] \arrow[d, "\tau_P"'] & (KI)^+ \arrow[d, "\tau_K"] \\
\mathrm{Hom}_R(I, P^+) \arrow[r, "G(\nu)"] & \mathrm{Hom}_R(I, K^+)
\end{tikzcd}$$

Obrázek 4.5: Podmínky kompatibility pro τ

S dokázaným tvrzením 33 jsme schopni ukázat implikaci z (*2*) do (*3*) ve větě 10. Důkaz je přitom shrnutím myšlenky popsané dříve v této sekci.

(*2*) $\Rightarrow$ (*3*). Nechť je R zprava perfektní okruh a $M \in \text{Mod-}R$ je plochý. Potom existuje $\pi\colon P \twoheadrightarrow M$ projektivní pokrytí modulu M, jehož jádro označíme K. Z pravé perfektnosti R získáme $\rho\colon Q \twoheadrightarrow K$ projektivní pokrytí modulu K. Kdyby byl K netriviální, máme z lemmatu 32, že $K\,\mathrm{J}(R) \subsetneq K$. Jelikož je ale $\mathrm{J}(R)$ oboustranný ideál, obdržíme z tvrzení 33 a lemmatu 31, že

$$K\,\mathrm{J}(R) = K \cap P\,\mathrm{J}(R) = K.$$

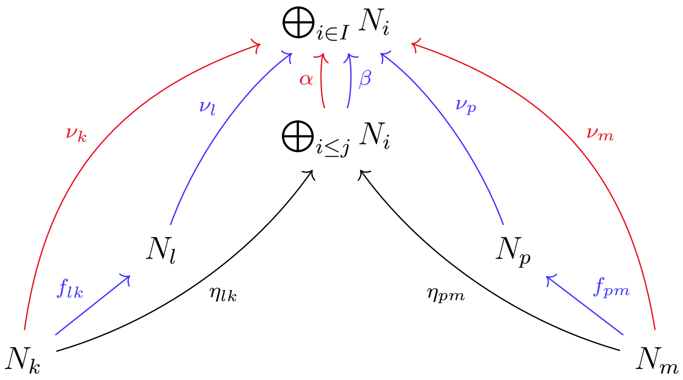
To je spor, tedy $K = 0$. Máme tak, že π je izomorfismus, a proto je M projektivní. $\square$

4.2 Implikace z (3) do (4)

Nejprve připomeňme, že se každá direktní limita dá sestrojit pomocí kosoučinů a kojádra. Ať je $\mathcal{D} = (M_i, f_{ji} \mid i \le j \in I)$ nahoru usměrněný systém pravých R-modulů. Uvažme kosoučin $\bigoplus_{i \le j} M_i$ s injekcemi $\eta = (\eta_{ji} \mid i \le j \in I)$ a kosoučin $\bigoplus_{i \in I} M_i$ s injekcemi $\nu = (\nu_i \mid i \in I)$. Z univerzálnosti kosoučinu existují $\alpha, \beta\colon \bigoplus_{i \le j} M_i \to \bigoplus_{i \in I} M_i$ taková, že $\alpha \circ \eta_{ji} = \nu_i$ a $\beta \circ \eta_{ji} = \nu_j \circ f_{ji}$ pro všechna $i \le j \in I$. Využili jsme kokužely, viz obrázek 4.6.

Nyní definujme $f = \alpha - \beta$ a dále $(M, \pi) = \operatorname{coker}(f)$. Polož $\iota_i = \pi \circ \nu_i$ pro $i \in I$ a označ $\iota = (\iota_i \mid i \in I)$. Potom pro všechna $i \le j \in I$ platí $f \circ \eta_{ji} = \nu_i - \nu_j \circ f_{ji}$ a $\varinjlim \mathcal{D} = (M, \iota)$. Máme tak exaktní posloupnost

$$\bigoplus_{i \le j} M_i \xrightarrow{f} \bigoplus_{i \in I} M_i \xrightarrow{\pi} \varinjlim \mathcal{D} \to 0. \tag{4.1}$$



Obrázek 4.6

Tvrzení 37. *Ať je $(I, \leq)$ nahoru usměrněná množina a $\mathcal{D} = (M_i, f_{ji} \mid i \leq j \in I)$ je nahoru usměrněný systém pravých R-modulů. Mějme exaktní posloupnost (4.1) z poznámky nad zněním a označme* $\operatorname{Ker} \pi$ *jako K. Potom pro každé $k \in K$ existuje $h_k \colon \bigoplus_{i \in I} M_i \to K$ takové, že $h_k(k) = k$.*

Důkaz. Uvažme $\bigoplus_{i \leq j} M_i$ s injekcemi $\eta = (\eta_{ji} \mid i \leq j \in I)$, $\bigoplus_{i \in I} M_i$ s injekcemi $\nu = (\nu_i \mid i \in I)$ a $f \colon \bigoplus_{i \leq j} M_i \to \bigoplus_{i \in I} M_i$ z poznámky výše. Dále označme kolimitní injekce modulu $\varinjlim \mathcal{D}$ jako $\iota = (\iota_i \mid i \in I)$.

Vezměme libovolné $k \in K = \operatorname{Im} f$. Existuje $x \in \bigoplus_{i \leq j} M_i$ takové, že $f(x) = k$. Jelikož je $x \in \bigoplus_{i \leq j} M_i$, existuje $n \in \mathbb{N}$, konečně indexů $i_1 \leq j_1, \dots, i_n \leq j_n$ a dále $x_{i_l} \in M_{i_l}$ pro každé $l \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $x = \sum_{l=1}^{n} \eta_{j_l i_l}(x_{i_l})$. Můžeme tak rozepsat k jako

$$k = f(x) = f\Big(\sum_{l=1}^{n} \eta_{j_l i_l}(x_{i_l}) \Big) = \sum_{l=1}^{n} (f \circ \eta_{j_l i_l})(x_{i_l}) = \sum_{l=1}^{n} \nu_{i_l}(x_{i_l}) - (\nu_{j_l} \circ f_{j_l i_l})(x_{i_l}).$$

Z usměrněnosti množiny I nalezneme $m \in I$ takové, že platí $i_l \leq m$ pro všechna $l \in \{1, \dots, n\}$. Zadefinujme podmodul D modulu $\bigoplus_{i \in I} M_i$ následovně:

$$D = \bigoplus_{i \in I} D_i, \text{ kde } D_i = \begin{cases} M_i, & \text{pokud } i \leq m; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nyní definujme $\rho \colon D \to M_m$ na kolimitních injekcích jako $\rho \circ \nu_i = f_{mi}$, pro $i \leq m$. Všimněme si, že platí $k \in \operatorname{Ker} \rho$. To proto, že $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots j_n \leq m$, tedy díky vyjádření k výše máme $k \in D$ a dále platí

$$\begin{aligned} \rho(k) &= \sum_{l=1}^{n} (\rho \circ \nu_{i_l})(x_{i_l}) - (\rho \circ \nu_{j_l} \circ f_{j_l i_l})(x_{i_l}) = \\ &= \sum_{l=1}^{n} f_{m i_l}(x_{i_l}) - (f_{m j_l} \circ f_{j_l i_l})(x_{i_l}) = \\ &= \sum_{l=1}^{n} f_{m i_l}(x_{i_l}) - f_{m i_l}(x_{i_l}) = 0. \end{aligned}$$

Navíc je $\rho \circ \nu_m = f_{mm} = \mathrm{id}_{N_m}$, čili je ρ štěpitelný epimorfismus. Krátká exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \rho \xrightarrow{\subseteq} D \xrightarrow{\rho} M_m \longrightarrow 0$$

proto štěpí, speciálně štěpí i identické vnoření $\operatorname{Ker} \rho$ do D. Díky tomu existuje epimorfismus $\sigma \colon D \to \operatorname{Ker} \rho$ splňující $\sigma \restriction \operatorname{Ker} \rho = \mathrm{id}_{\operatorname{Ker} \rho}$. Tím získáváme, že $\sigma(k) = k$. Zbývá si tak uvědomit, že $\operatorname{Ker} \rho \subseteq K$, což nám dovolí zadefinovat h_k. Označme $\theta = \pi \restriction D$. Potom je $\operatorname{Ker} \theta \subseteq K$ a navíc pro $i \leq m$ platí

$$\iota_m \circ \rho \circ \nu_i = \iota_m \circ f_{mi} = \iota_i = \pi \circ \nu_i = \theta \circ \nu_i.$$

Jelikož jde o rovnost na kolimitních injekcích, platí $\iota_m \circ \rho = \theta$, což nám dává $\operatorname{Ker} \rho \subseteq \operatorname{Ker} \theta \subseteq K$. Nyní zadefinujme $h_k \colon \bigoplus_{i \in I} M_i \to K$ na kolimitních injekcích

$$h_k \circ \nu_i = \begin{cases} \sigma \circ \nu_i & \text{pokud } i \leq m; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Očividně pak platí, že $h_k \restriction D = \sigma$, čili je $h_k(k) = \sigma(k) = k$.

$\square$

Tvrzení 38. *Nechť je* $0 \to K \xrightarrow{\subseteq} P \xrightarrow{\pi} M \to 0$ *krátká exaktní posloupnost v* Mod-R*, kde* P *je projektivní modul. Jestliže pro každý levý ideál* I *v* R *platí, že* $KI = K \cap PI$*, pak je* M *plochý.*

Důkaz. Označme si $\nu\colon K \to P$ identické vnoření. Chceme ukázat, že je pro každý levý ideál I v R zobrazení τ_M^I z definice 26 surjektivní. Potom totiž z tvrzení 35 získáme, že je M plochý. Zvolme I levý ideál v R. Jelikož je $\nu \restriction KI$ prosté a $\operatorname{Im}(\pi \restriction PI) = MI$, uvažme následující posloupnost abelovských grup

$$0 \to KI \xrightarrow{\nu \restriction KI} PI \xrightarrow{\pi \restriction PI} MI \to 0.$$

Ta je exaktní, neboť platí $\operatorname{Im}(\nu \restriction KI) = KI = K \cap PI = \operatorname{Ker}(\pi \restriction PI)$. Následnou aplikací funktoru $(-)^+$ tak znovu dostaneme exaktní posloupnost. Ta je ale obraz posloupnosti $0 \to K \xrightarrow{\nu} P \xrightarrow{\pi} M \to 0$ funktorem F_I. Navíc je funktor G_I zleva exaktní, díky čemuž máme následující komutativní diagram s exaktními řádky.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (MI)^+ \arrow[r, "F_I(\pi)"] \arrow[d, "\tau_M^I"'] & (PI)^+ \arrow[r, "F_I(\nu)"] \arrow[d, "\tau_P^I"'] & (KI)^+ \arrow[r] \arrow[d, "\tau_K^I"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(I, M^+) \arrow[r, "G_I(\pi)"] & \operatorname{Hom}_R(I, P^+) \arrow[r, "G_I(\nu)"] & \operatorname{Hom}_R(I, K^+) &
\end{tikzcd}$$

Obrázek 4.7

Jakožto projektivní modul je P plochý, tedy je τ_P^I díky tvrzení 35 izomorfismus.

Nyní ukážeme, že je τ_M^I surjektivní. Uvažme $\gamma \in \operatorname{Hom}_R(I, M^+)$. Jelikož je τ_P^I izomorfismus, existuje $\delta \in (PI)^+$ takové, že $\tau_P^I(\delta) = G_I(\pi)(\gamma)$. Nyní ověříme, že je $\delta \in \operatorname{Im} F_I(\pi) = \operatorname{Ker} F_I(\nu)$. Komutativita diagramu 4.7 nám dává

$$(\tau_K^I \circ F_I(\nu))(\delta) = (G_I(\nu) \circ \tau_P^I)(\delta) = (G_I(\nu) \circ G_I(\pi))(\delta) = 0.$$

Z tvrzení 34 ale máme, že je τ_K^I monomorfismus, tedy získáváme $F_I(\nu)(\delta) = 0$. Existuje proto $\eta \in (MI)^+$ takové, že $F_I(\pi)(\eta) = \delta$. Nakonec tak máme

$$(G_I(\pi) \circ \tau_M^I)(\eta) = (\tau_P^I \circ F_I(\pi))(\eta) = \tau_P^I(\delta) = G_I(\pi)(\gamma).$$

Díky tomu, že je $G_I(\pi)$ monomorfismus obdržíme $\tau_M^I(\eta) = \gamma$.

$\square$

Poznámka. Všimněme si, že tvrzení 38 nám dává opačnou implikaci k tvrzení 33. Máme-li krátkou exaktní posloupnost $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\subseteq} P \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$ v Mod-R takovou, že P je projektivní, platí že M je plochý právě tehdy, když pro každý levý ideál I v R platí $KI = K \cap PI$.

Nyní se můžeme přesunout k důkazu implikace z *(3)* do *(4)* ve větě 10.

(3) $\Rightarrow$ *(4)*. Ať je $(J, \leq)$ nahoru usměrněná množina. Mějme nahoru usměrněný systém pravých R-modulů $\mathcal{D} = (M_i, f_{ji} \mid i \leq j \in J)$ takový, že pro každé $j \in J$ je modul M_j projektivní. Cílem je ukázat, že $\varinjlim \mathcal{D}$ je projektivní modul. Označme $\iota = (\iota_j \mid j \in J)$ kolimitní injekce do $\varinjlim \mathcal{D}$. Označme $M = \varinjlim \mathcal{D}$ a uvažme modul $P = \bigoplus_{j \in J} M_j$ spolu s jeho kosoučinovými injekcemi $\nu = (\nu_j \mid j \in J)$.

Potom je P projektivní. Dále uvažme epimorfismus $\pi\colon \bigoplus_{j\in J} M_j \to M$ z exaktní posloupnosti (4.1). Ten nám dává krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to K \xrightarrow{\subseteq} P \xrightarrow{\pi} M \to 0.$$

Je-li $M = 0$, máme hotovo. Nyní ať je $M \neq 0$. Ukážeme-li, že pro každý levý ideál I v R platí $KI = K \cap PI$, dostaneme z tvrzení 38, že je M plochý, speciálně nám dá podmínka (*3*) projektivitu M. Mějme dán libovolný levý ideál I v R. Inkluze $KI \subseteq K \cap PI$ platí triviálně. Na stranu druhou uvažme $k \in K \cap PI$. Z tvrzení 37 máme existenci $h_k\colon P \to K$ takového, že $h_k(k) = k$. Navíc máme, že $h_k \restriction PI\colon PI \to KI$, tedy $k = h_k(k) = (h_k \restriction PI)(k) \in KI$. □

Kapitola 5

Příklady a vztahy s dalšími okruhovými vlastnostmi

V této kapitole se budeme soustředit na příklad okruhu, který je perfektní zleva, ale nikoliv zprava. Dualizací pak dostaneme příklad okruhu, který je perfektní zprava, ale není perfektní zleva. Znění příkladu je převzato z [2, str. 322]. Dále se podíváme na vztah perfektnosti s artinovskosti a noetherovskosti a na perfektní obory.

5.1 Okruhy perfektní z právě jedné strany

Nejprve se podívejme na příklady okruhů perfektních pouze z jedné strany.

Příklad 4. Označme R okruh všech $\mathbb{N}$-čtvercových dolních trojúhelníkových matic nad $\mathbb{Q}$, které mají konstantní diagonálu a pouze konečně mnoho nenulových prvků mimo diagonálu.

V následující části bude R označovat okruh z příkladu 4. Nyní si definujme dvě důležité podmnožiny okruhu R.

1) $I = \{A \in R \mid A \text{ má nulovou diagonálu}\}$
2) $S = \{A \in R \mid A \text{ je nulová všude mimo diagonálu}\}$.

Poznámka. Protože jsou prvky S právě diagonální matice z R, tak jsou jednoznačně určeny racionálním číslem, které mají na diagonále. Takovéto matice proto budeme značit $\mathrm{diag}(\lambda)$, kde $\lambda \in \mathbb{Q}$, to je $S = \{\mathrm{diag}(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{Q}\}$.

Tvrzení 39. *I je maximální ideál v R a S je podokruh okruhu R izomorfní s $\mathbb{Q}$.*

Důkaz. Očividně platí, že $R = S + I$ a $S \cap I = 0$. Není těžké ověřit, že I je oboustranný ideál v R a S je okruh. Navíc je $S \simeq \mathbb{Q}$ přes izomorfismus $\iota\colon \mathrm{diag}(\lambda) \mapsto \lambda$. To je očividně okruhový homomorfismus, neboť násobení diagonálnách matic je pouze násobení prvků na diagonále. Máme tak

$$R/I = (S + I)/I \simeq S/(S \cap I) \simeq S \simeq \mathbb{Q},$$

tedy je R/I těleso. Díky tomu je I maximální. $\square$

Důsledek. *R/I je jednoduchý R-modul.*

Definice 27 (subdiagonály). *Nechť $A \in R$. Ať $n \in \mathbb{N}_0$. Pak n-tou subdiagonálou matice A nazveme posloupnost $(a_{i+n,i} \mid i \in \mathbb{N})$ prvků matice A. Řekneme, že n-tá subdiagonála je nulová, pokud jde o posloupnost nul. Matice A má nulové subdiagonály až do n-té subdiagonály, pokud má nulovou i-tou subdiagonálu pro všechna $i \leq n$.*

Lemma 40. *Nechť $A, B \in I$. Ať existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že B má nulové subdiagonály až do n-té subdiagonály. Potom mají matice AB i BA nulové subdiagonály až do $(n+1)$-ní subdiagonály.*

Důkaz. Označme $C = BA = (c_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$. Ať $0 \leq m \leq n+1$. Podívejme se na prvky m-té subdiagonály matice C. Pro $i \in \mathbb{N}$ je $c_{i+m,i} = \sum_j b_{i+m,j} \cdot a_{j,i}$. Platí ale, že

$$\begin{cases} a_{j,i} = 0 & \text{pro } j \leq i \\ b_{i+m,j} = 0 & \text{pro } j > i, \end{cases}$$

tedy jde o součet nul. Obdobně u matice $D = AB = (d_{ij})_{ij=1}^{\infty}$ jsou prvky m-té subdiagonály tvaru $d_{i+m,i} = \sum_j a_{i+m,j} \cdot b_{j,i}$, ale

$$\begin{cases} a_{i+m,j} = 0 & \text{pro } j \geq i+m \\ b_{j,i} = 0 & \text{pro } j < i+m, \end{cases}$$

čili jde opět o součet nul. Obě dvě matice tak mají nulové subdiagonály, až do $(n+1)$-ní subdiagonály. □

Lemma 41. *I je zleva T-nilpotentní, ale není zprava T-nilpotentní ideál.*

Důkaz. Uvažme posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ Definovanou následujícím způsobem. Polož

$$a_{n,i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } i = n+1,\ j = n; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \qquad A_n = (a_{n,i,j})_{i,j=1}^{\infty}.$$

Potom pro všechny $n \in \mathbb{N}$ je $A_n \cdots A_1 \neq 0$, neboť má na pozici $(n+1, 1)$ jedničku. To můžeme nahlédnout tak, že se budeme na násobení matic zleva dívat jako na elementární řádkové úpravy.

Nyní mějme danou posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ v I, kde $A_n = (a_{n,i,j})_{i,j=1}^{\infty}$. Chceme ukázat, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A_1 \cdots A_n = 0$. Nejdříve si povšimněme následující vlastnosti násobení matic z I libovolnou jinou maticí z I zprava.

Mějme dvě matice $A, B \in I$. Protože má $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ na diagonále nuly a mimo ni pouze konečně nenulových prvků, existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{i,j} = 0$, kdykoliv $i > k$ a $j \in \mathbb{N}$. To získáme například jako

$$k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \forall j \in \mathbb{N}, \forall i > n \colon a_{i,j} = 0\}.$$

Díky tomu můžeme zapsat matice A a B blokově jako

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad\qquad B = \left(\begin{array}{c|c} B_0 & 0 \\ \hline B_1 & B_2 \end{array}\right),$$

kde matice A_0 a B_0 jsou řádu k a horní pravé bloky A a B jsou nulové, neboť jde o dolní trojúhelníkové matice. Z blokového násobení je pak vidět, že

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B_0 & 0 \\ \hline B_1 & B_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_0 B_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

tedy řádky AB budou od k-tého řádku dále nulové, stejně jako u matice A. Tato vlastnost neplatí pro násobení z levé strany.

Nyní uvažme takové $k \in \mathbb{N}$ pro matici A_1. Iterací lemmatu 40 získáme, že matice $A_1 \cdots A_m$ má nulové subdiagonály až do k-té subdiagonály. Speciálně má nulových prvních k řádků. Iterací pozorování získáme, že řádky od k-tého dále musí být také nulové. Proto je $A_1 \cdots A_m = 0$. $\square$

Lemma 42. *Pro okruh R platí, že $\mathrm{J}(R) = I$, tj. R je lokální okruh.*

Důkaz. Z lemmatu 39 je I maximální v R, pročež $\mathrm{J}(R) \subseteq I$. Můžeme si všimnout, že I obsahuje právě všechny nilpotentní prvky okruhu R. To proto, že I je z lemmatu 41 zleva T-nilpotentní, tedy nil ideál. Naopak kdykoliv $A \notin I$, tak má nenulovou diagonálu. Díky tomu má pro všechny $n \in \mathbb{N}$ matice A^n nenulovou diagonálu.

Nyní ukážeme, že každá matice A splňující $A \notin I$ je invertibilní, tedy nemůže být v žádném maximálním ideálu. Z toho už plyne, že $I \subseteq \mathrm{J}(R)$. BÚNO ať má A na diagonále jedničku. Má-li A na diagonále $a \in \mathbb{Q}$ a matice $A \cdot \mathrm{diag}(a^{-1})$ má inverz B, tak je $B \cdot \mathrm{diag}(a^{-1})$ inverz matice A.

Označme $\mathbb{I} \in R$ jednotkovou matici. Potom $A - \mathbb{I} \in I$, tedy existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $(A - \mathbb{I})^n = 0$. Protože $-\mathbb{I}$ komutuje se všemi maticemi z R, můžeme použít binomickou větu. Dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}(-\mathbb{I})^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} A^{n-k} = (-1)^{n+1}\mathbb{I}$$

$$A\Big(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k+1} \binom{n}{k} A^{n-k-1}\Big) = \mathbb{I}$$

$$\Big(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k+1} \binom{n}{k} A^{n-k-1}\Big) A = \mathbb{I}.$$

Našli jsme tak inverz k matici A, a to matici $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k+1} \binom{n}{k} A^{n-k-1}(-1)^k$. $\square$

Tvrzení 43. *R je zleva perfektní, ale není zprava perfektní.*

Důkaz. Z důsledku za tvrzením 39 a lemmatu 42 máme, že $R/\mathrm{J}(R)$ je totálně rozložitelný. Dále máme z lemmatu 41, že $\mathrm{J}(R)$ je zleva T-nilpotentní, ale není zprava T-nilpotentní. Díky tomu je z věty 10 okruh R zleva perfektní, ale není zprava perfektní. $\square$

Příklad 5. Nechť T je okruh všech $\mathbb{N}$-čtvercových horních trojúhelníkových matic nad $\mathbb{Q}$, které mají konstantní diagonálu a pouze konečně mnoho nenulových prvků mimo diagonálu.

Tvrzení 44. *T je zprava perfektní, ale není zleva perfektní.*

Důkaz. Můžeme si všimnout, že transpozice matic nám dává okruhový izomorfismus mezi T a R^{op}. Stačí tak ukázat, že R^{op} je zprava perfektní, ale není zleva perfektní. Nejprve si uvědomíme, že z definice násobení v opačném okruhu odpovídají pravé ideály v R právě levým ideálům v R^{op}. Stejně si odpovídají levé ideály v R a pravé ideály v R^{op}. Navíc nám tato korespondence zachová maximální ideály. To platí, neboť R a R^{op} sdílí společnou nosnou množinu. Proto máme z vlastností radikálu

$$\mathrm{J}(R^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Rad}({}_{R^{\mathrm{op}}}R^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Rad}(R_R) = \mathrm{J}(R).$$

Jde o rovnost nosných množin, neboť formálně jde o ideály v jiných okruzích. Protože je $\mathrm{J}(R)$ maximální v R, musí být $\mathrm{J}(R^{\mathrm{op}})$ maximální v R^{op}. Z toho důvodu je $R^{\mathrm{op}}/\mathrm{J}(R^{\mathrm{op}})$ těleso, tedy i jednoduchý R^{op} modul. Speciálně je totálně rozložitelný. Nakonec nám definice násobení v R^{op} spolu s faktem, že $\mathrm{J}(R)$ je zleva T-nilpotentní, ale není zprava T-nilpotentní dává, že $\mathrm{J}(R^{\mathrm{op}})$ je zprava T-nilpotentní, ale není zleva T-nilpotentní. Z věty 10 je pak R^{op} zprava perfektní, ale není zleva perfektní. $\square$

5.2 Artinovskost, noetherovskost a perfektnost, perfektní obory

Nyní se podíváme na perfektní obory a vztah artinovskosti a noetherovskosti s perfektností. Budeme přitom využívat Hopkinsovy–Levitzkého věty, jejíž důkaz je k nalezení v [2, str. Theorem 15.20].

Definice 28 (artinovský okruh)**.** *Okruh R je zprava artinovský, pokud neobsahuje ostře klesající řetězec pravých ideálů. Obdobně pro levou artinovskost.*

Definice 29 (noetherovský okruh)**.** *Okruh R je zprava noetherovský, pokud neobsahuje ostře rostoucí řetězec pravých ideálů. Obdobně pro levou noetherovskost.*

Věta 45 (Hopkins–Levitzky)**.** *Okruh R je zprava artinovský právě tehdy, když je zprava noetherovský, $\mathrm{J}(R)$ je nilpotentní a $R/\mathrm{J}(R)$ je totálně rozložitelný.*

Tvrzení 46. *Je-li R zprava perfektní obor, pak je R nekomutativní těleso.*

Důkaz. Nechť $0 \neq a \in R$. Najdeme jeho inverzní prvek v R. Uvažme řetězec

$$Ra \supseteq Ra^2 \supseteq \cdots \supseteq Ra^n \supseteq \cdots .$$

Z věty 10 máme, že R neobsahuje nekonečné ostře klesající řetězce levých hlavních ideálů. Proto existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $Ra^n = Ra^{n+1}$. Dále existuje nenulové $r \in R$ takové, že $a^n = ra^{n+1}$. Protože je R obor, tak $a^n \neq 0$ a můžeme ho zkrátit. Získáváme $1 = ra$, čili je r levý inverz prvku a. Jelikož musí být r nenulové, identickým způsobem získáme $t \in R$ levý inverz prvku r. Protože má r oba jednostranné inverzy, jsou si nutně rovny a jde o oboustranný inverz, tj. $ra = ar = 1$. Našli jsme tak inverzní prvek k a. $\square$

Tvrzení 47. *Nechť je R zleva nebo zprava artinovský. Potom je zprava i zleva perfektní.*

Důkaz. Z Hopkinsovy–Levitzkého věty máme, že $\mathrm{J}(R)$ je nilpotentní ideál a okruh $R/\mathrm{J}(R)$ je totálně rozložitelný. Z nilpotence radikálu ale vyplývá jeho levá i pravá T-nilpotence. To protože existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathrm{J}(R)^n = 0$. Pro libovolnou posloupnost $\{a_k\}$ v $\mathrm{J}(R)$ tak platí, že $a_1 \cdots a_n = a_n \cdots a_1 = 0$. Z věty 10 je proto R zprava i zleva perfektní. □

Tvrzení 48. *Nechť je R zprava noetherovský a zároveň zleva perfektní okruh. Potom je zprava artinovský.*

Důkaz. Kdyby $R = 0$, máme hotovo. Uvažujme tak, že $R \neq 0$. Zkonstruujeme kompoziční řadu modulu R_R, čímž získáme, že jde o zprava artinovský modul. Z levé perfektnosti a věty 10 dostáváme, že existuje S_1 jednoduchý podmodul modulu R_R. Nyní uvažme, že existuje řada

$$0 = S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq S_2 \subsetneq \cdots \subsetneq S_n$$

taková, že S_i/S_{i-1} je jednoduchý pravý R-modul pro $i \in \{1, \dots, n\}$. Uvažme pravý modul R/S_n. Pokud $R/S_n = 0$, platí $R = S_n$ a našli jsme tak kompoziční řadu. Pokud $R/S_n \neq 0$, existuje z věty 10 jednoduchý podmodul $\hat{S}_{n+1}$ modulu R/S_n. Pro ten ale existuje pravý modul $S_{n+1} \subseteq R$ takový, že $\hat{S}_{n+1} = S_{n+1}/S_n$. Našli jsme tak další člen řady.

Díky pravé noetherovskosti okruhu R se tato konstrukce zastaví, tj. existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $S_k = R$. □

Pro důkaz následujícího tvrzení využijeme argument s řetězcem anihilátorů pravých ideálů, který je převzat z [4, Proposition 1].

Tvrzení 49. *Nechť je R zprava noetherovský a zároveň zprava perfektní okruh. Potom je zprava artinovský.*

Důkaz. Z věty 10 máme, že je $R/\mathrm{J}(R)$ totálně rozložitelný. Jelikož je R zprava noetherovský, zbývá ukázat nilpotence $\mathrm{J}(R)$. Hopkinsova–Levitzkého věta nám pak dá, že je R artinovský okruh. Označme si $J = \mathrm{J}(R)$. Z definice anihilátoru máme

$$\mathrm{Ann}(J) \subseteq \mathrm{Ann}(J^2) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Ann}(J^n) \subseteq \cdots .$$

Z pravé noetherovskosti R existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $A = \mathrm{Ann}(J^k) = \mathrm{Ann}(J^{k+1})$. Protože je A oboustranný ideál, je R/A okruh. Kdyby R/A triviální okruh, tj. $\mathrm{Ann}(J^k) = R$, platí $J^k = 0$. Kdyby $R/A \neq 0$, podívejme se na R/A jako na levý R-modul. Z věty 10 existuje jednoduchý levý podmodul S modulu R/A. Pak je S tvaru $S = I/A$ pro nějaký levý ideál I v R. Dále nám jednoduchost S dává, že $JS \subseteq \mathrm{Rad}(S) = 0$, čili je $JS = 0$. Máme tak $JI \subseteq A = \mathrm{Ann}(J^k)$, speciálně

$$0 = J^k \cdot J \cdot I = J^{k+1} \cdot I.$$

Proto je $I \subseteq \mathrm{Ann}(J^{k+1}) = \mathrm{Ann}(J^k) = A$, tj. $S = I/A = 0$, což je spor. □

Alternativně můžeme obě tvrzení sloučit do jednoho a využít Levitzkého věty, která nám dává, že v zprava noetherovských okruzích jsou jednostranné nil ideály nilpotentní. Naleznete ji například v [2, Theorem 15.22].

Literatura

[1] H. Bass. Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 95:466–488, 1960.

[2] F.W. Anderson and K.R. Fuller. *Rings and Categories of Modules*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1992.

[3] R. Göbel and J. Trlifaj. Pure-injective modules. In *Approximations and Endomorphism Algebras of Modules*, volume 41, pages 22–46. DE GRUYTER, Berlin, Boston, 2nd rev. and exp. ed. edition, 2012.

[4] C. C. Faith. Rings with ascending condition on annihilators. *Nagoya Mathematical Journal*, 27:179–191, 1966.