Posudek vedoucího bakalářské práce

Název: Cayleyovo kritérium pro řád bodu na eliptické křivce
Autor: Timea Jakubócyová

Shrnutí obsahu práce

Práce se zabývá interakcí mezi racionálními funkcemi na eliptické křivce a její grupovou strukturou. Konkrétně máme-li eliptickou křivku ve Weierstraßově tvaru, tj. zadanou rovnicí $y^2 = f(x)$, kde f je komplexní kubický polynom bez násobných kořenů a $f(0) \neq 0$, autorka dokazuje Cayleyovo kritérium pro to, kdy je n-násobek bodu tvaru $(a, 0)$ v grupě křivky nulový.

Ač působí kritérium na první pohled technicky, má velice přirozenou a dnes klasickou motivaci: Ponceletovo porisma. Jde o větu o n-úhlenících, do kterých jde vepsat jedna kuželosečka a kterým jde zároveň opsat jiná kuželosečka. Pokus charakterizovat dvojice kuželoseček, které přísluší v tomto smyslu nějakému n-úhelníku v rovině, vede přímo na problém v prvním odstavci. S trochou úsilí (které jde už nad rámec předložené práce) se totiž dostaneme k tomu, že pokud kuželosečky popíšeme v projektivní rovině pomocí dvojice symetrických matic C, D, musíme rozhodnout, jestli je řád bodu $(0, \sqrt{\det(Cx + D)})$ na eliptické křivce dané rovnicí $y^2 = \det(Cx + D)$ konečný.

Výsledkem je velice pěkný text, který na základě nesnadné práce s literaturou podává rigorózní důkaz Cayleyova kritéria. Ve skutečnosti předchozí věta práci dosti podceňuje – text je v mnoha ohledech pozoruhodný. Autorka věnovala značné úsilí tomu pochopit argument do posledního detailu. To je s mně známou literaturou komplikovaný úkol, protože se často odkazuje na různá standardní geometrická fakta. Značná část práce tedy vznikla tak, že jsem během konzultace nastínil způsob, jak se těmto černým skříňkám vyhnout, a autorka argumenty doplnila a velice pečlivě zpracovala. Nakonec se jí (za cenu delšího textu) povedlo relativně stručně od základů vysvětlit řadu věcí, včetně např. grupového zákona na eliptických křivkách. Některé náznaky důkazů naopak pocházejí z webových zdrojů, kde byly nastíněny asi nejsrozumitelněji. Tady bylo potřeba argumenty doplnit zcela jistě. Nakonec výrazným rysem práce je opravdu nesmírná pečlivost ve všem (argumenty, překlepy, konzistence značení). V tomto ohledu považuji text za vysoce nadstandardní.

Celkové hodnocení práce

Téma práce. Výchozí bod tématu souvisí s jednoduše vysvětlitelným geometrickým problémem (Ponceletovo porisma). Při upřesňování jsme se ovšem dostali spíše do oblasti algebraických křivek a základů algebraické geometrie vůbec, kde situaci trochu zkomplikovalo, že v nové akreditaci Bc. studia Obecné matematiky tyto základy na rozdíl od minulosti úplně chybí, i když přirozeně navazují na Bc. přednášku Úvod do komutativní algebry. V tomto smyslu tedy práce šla více nad rámec přednášek v bakalářském studiu, než by tomu bylo před několika lety, ale ukázalo se to jako zvládnutelný úkol.

Vlastní příspěvek. Jak bylo zmíněno ve shrnutí výše, příspěvek spočívá v dopracování řady argumentů, které buď ve zdrojích chyběly, nebo naopak umožnily některá známá fakta poměrně rychle dokázat od základů.

Matematická úroveň. Matematická úroveň práce je velice dobrá, důkazy jsou podrobné a rigorózní.

Práce se zdroji. Použité zdroje jsou řádně citovány.

Formální úprava. Formální úprava je výborná. Práce je velice přehledně a (jak bylo zmíněno) také velice pečlivě napsaná.

Závěr

Práci považuji za velice zdařilou a rozhodně **ji doporučuji uznat** jako bakalářskou práci.

Návrh klasifikace vedoucí sdělí předsedovi zkušební (sub)komise.

doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D.
Katedra algebry MFF UK
30. 6. 2024