MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Libor Šabaka

Perturbace prostoročasů generovaných skalárním polem

Ústav teoretické fyziky (32-UTF)

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Otakar Svítek, Ph.D.
Studijní program: Fyzika (B0533A110001)
Studijní obor: FP (0533RA110001)

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

V rámci této práce bych chtěl věnovat poděkování mému vedoucímu práce doc. RNDr. Otakaru Svítkovi, Ph.D. za jeho trpělivost, ochotu pomoci s vypracováním a skvělo komunikaci.

Název práce: Perturbace prostoročasů generovaných skalárním polem

Autor: Libor Šabaka

Katedra: Ústav teoretické fyziky (32-UTF)

Vedoucí bakalářské práce:
doc. RNDr. Otakar Svítek, Ph.D., Ústav teoretické fyziky (32-UTF)

Abstrakt:
Tato bakalářská práce se zabývá možností eliminace singularity vyskytující se v JNW a Fisherově metrice pomocí metody perturbací. Práce je zaměřena hledání perturbací s radiální závislostí, prozkoumáno několik možností pro JNW metriku, včetně přeurčených soustav, pro Fisherovu metriku pouze jedno. Celkově nebyla nalezena žádná vhodná řešení.

Klíčová slova:
skalární pole|prostoročas|perturbace

Title: Perturbations of spacetimes sourced by a scalar field

Author: Libor Šabaka

Department: Department of theoretical physics (32-UTF)

Supervisor:
doc. RNDr. Otakar Svítek, Ph.D., Department of theoretical physics (32-UTF)

Abstract:
This bachelor's thesis deals with the possibilities of eliminating the singularity occurring in JNW and the Fisher metric using perturbation methods. The work is focused on the search for perturbation with radial dependence, several possibilities for the JNW metric, including overdetermined systems, are explored, for the Fisher metric just one. Overall, no suitable solutions were found.

Keywords:
scalar field|spacetime|perturbation

0.1 Teoretický Úvod

0.1.1 Historické Okénko

První známé řešení Einsteinových polních rovnic bylo odhaleno Schwarzchildem[1] již rok po publikaci Einsteinovy práce z obecné teorie relativity, což i samotného Einsteina překvapilo. Jednalo se však pouze o vakuové, sféricky symetrické, statické řešení. Jedno z prvních známých nevakuové, ovšem také statické, sféricky symetrické řešení bylo objeveno až roku 1947 I.Z.Fisherem[2] a později znovu objeveno v práci Janise, Neumanna a Wincoura[3](dále JNW) roku 1968.

Tato řešení jsou důležitá svým zahrnutím skalárního pole, které umožňuje studium vztahů mezi gravitačním a jinými poli, modelování různých fyzikálních scénářů, jako jsou kosmologická kvintesence, kde je temná energie vysvětlena pomocí dynamického skalárního pole, a modifikované teorie gravitace.

Řešení se skalárním polem obsahují také možnosti s nahou singularitou. Je dobré zmínit, že to je ve sporu s hypotézou kosmické cenzury Rogera Penrose[4], která tvrdí, že veškeré singularity vznikající v reálných fyzikálních procesech musí nutně vždy být obklopeny singularitou, která zabraňuje jejich pozorování, viz jméno cenzura. Dynamicky vznikající řešení se skalárním polem jsou ale nad rámec této práce a vhodnějším nástrojem na jejich studium je numerická relativita.

0.1.2 Horizont událostí a singularity

Jakožto singularitu v obecné teorii relativity označujeme, v jistém zjednodušení, bod v časoprostoru, kde dochází k divergenci křivosti gravitačního pole popsaného metrikou tohoto časoprostoru. Horizont událostí nazýváme hranici, pod kterou již není úniku gravitačnímu působení, jedná se tedy o světelnou nadplochu a hranici, zpoza které není možné dostávat informace. Ve statickém případě je to také tzv. statická mez, což je nejmenší vzdálenost od zdroje gravitace na které je možné být v klidu vůči pozorovateli v nekonečnu. A je také plochou nekonečného frekvenčního posunu. V našem sféricky symetrickém statickém případě koinciduje s Killingovým vektorovým polem s nulovou normou. Nahou singularitou pak nazýváme singularitu, která není obklopená horizontem událostí.

Singulární chování metriky nemusí nutně vzniknout patologií prostoru, může být také způsobena jednoduše volbou nevhodných souřadnic, klasickým příkladem tohoto úkazu je horizont ve Schwarzchildově řešení. Existence opravdové singularity, tj. nehledě na volbu souřadnicového systému, lze dokázat pomocí skalárního invariantu, který právě nehledě na volbu musí mít vždy stejné hodnoty. Pokud tedy v nějakém bodě diverguje a vyjadřuje například křivost, pak je zde singularita. Typickým příkladem takového invariantu je například Kretschmannův invariant, či Ricciho skalár.

JNW a Fisherova metrika(a další obdobná řešení) jsou z tohoto hlediska zajímavé tím, že právě možnosti s výskytem nahé singularity zahrnují. Souřadnice metriky jsou zde chytře voleny, tak že jsou "ztáhnuty", tak že horizont odpovídá přesně singularitě.

Dalším typem patologie mimo nahých singularit je degenerace horizontu, což je případ, kdy má horizont více než jednu vrstvu, nebo že se jeho různé části protínají, což vede k nekonzistentním fyzikálním předpovědím. Pomocí perturbačních metod lze zkoumat, chování těchto degenerovaných konfigurací při malých poruchách, například mohou ukázat, že určité degenerované horizonty jsou nestabilní a při zavedení libovolně malé poruchy přecházejí do stabilnějších konfigurací[5].

0.1.3 Perturbační metoda

Častou metodou analýzy řešení jsou perturbace, které poskytnou informace o robustnosti pozorovaných vlastností. Perturbační metoda je metoda umožňující hledání řešení problémů příbuzných již známému řešení. Obecně mějme:

$$F(f(x)) + \varepsilon F_{pert}(f(x)) = 0, \tag{1}$$

kde F a F_{pert} jsou obecné funkce a $\varepsilon << 1$ je malé, dále předpokládáme znalost řešení $f_0(x)$ jednodušší rovnice

$$F(f_0(x)) = 0. \tag{2}$$

Řešení rovnosti(1) pak hledáme ve tvaru perturbace známého řešení $f_0(x)$ rovnice (2)

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i(x), \tag{3}$$

$f_0(x)$ se pak nazývá nultým řádem. Dosazením (3) do (1) a použitím Taylorova rozvoje v prvním členu ($F(f(x))$) získáváme:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{F^{(n)}(f_0(x))}{n!}(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^n f_i(x)-f_0(x))^n\right)+\varepsilon F_{pert}(\sum_{i=0}^{\infty}f_i(x))=0, \tag{4}$$

odkud lze separovat nultý řád řešení:

$$F(f_0(x))+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{F^{(n)}(f_0(x))}{n!}(\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i f_i(x))^n\right)+\varepsilon F_{pert}(\sum_{i=0}^{\infty}f_i(x))=0, \tag{5}$$

jehož nulovost je známá z (2). Sečtením výrazů se stejnou mocninou ε tak obdržíme soustavu rovnic pro každou mocninu ε:

$$\begin{aligned}\varepsilon F_1(f_1(x),f_2(x),f_3(x),...)&=0\\ \varepsilon^2 F_2(f_1(x),f_2(x),f_3(x),...)&=0\\ \varepsilon^3 F_3(f_1(x),f_2(x),f_3(x),...)&=0\\ &.\\ &.\\ &.,\end{aligned} \tag{6}$$

kde F_i jsou nějaké funkce. Řešením těchto rovnic lze získat výrazy $f_i(x)$ a jejich dosazením do (3) tak kýžené řešení rovnice (1). Je ovšem nutno pohlídat konvergenci této řady. Obvykle vzhledem k předpokládané malosti ϵ nás však bude zajímat pouze několik prvních členů, v této práce dokonce pouze první, tj. lineární.

V obecné teorii relativity se řeší perturbované Einsteinovy polní rovnice, zkonstruované z perturbované metriky:

$$g_{\mu\nu}+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i h_{\mu\nu} \tag{7}$$

a případně dalších uvažovaných perturbací, například skalárního pole, či potenciálu

0.1.4 JNW metrika

V práci JNW[3] je hledáno řešení pro nehmotné, gravitačně vázané skalární pole φ splňující:

$$\Box\varphi=0. \tag{8}$$

Dále je uvažována nulovost kosmologické konstanty $\Lambda = 0$, tensor energie a hybnosti tedy nabývá tvaru:

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}, \tag{9}$$

kde $_{,\mu}$ značí parciální derivaci podle souřadnice. Obecný tvar, kde

$$\Box\varphi = -V_{,\varphi} \tag{10}$$

je pak:

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + g_{\mu\nu}(\Lambda + V - \frac{1}{2}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}). \tag{11}$$

Einsteinovy polní rovnice jsou tedy:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{12}$$

kde κ je konstanta určující sílu vazby.

Poznámka. : znaménko u κ je opačné, než ve článku JNW, bylo totiž zjištěno, že byla použita jiná konvence úžení Riemannova tensoru. Konkrétně s opačnou paritou pořadí indexů, kdežto my budeme používat úžení se shodnou paritou. V souřadnicích t, R, θ, ϕ byla nalezena metrika tvaru, v rámci zkrácení zápisu budeme používat $R_+ \equiv 2R + r_0(p+1)$ a $R_- \equiv 2R - r_0(p-1)$:

$$ds^2 = -\left(\frac{R_-}{R_+}\right)^{\frac{1}{p}} dt^2 + \left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}} dR^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{13}$$

$$\varphi = \frac{A}{p}\ln\left|\frac{R_-}{R_+}\right| \tag{14}$$

$$r^2 = \frac{1}{4}(R_+)^{1+\frac{1}{p}}(R_-)^{1-\frac{1}{p}}, \tag{15}$$

$$p \equiv \left(1 + \frac{4\kappa A^2}{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 1, \tag{16}$$

kde A je volný parametr, $r_0 = 2m$ a r je euklidovský poloměr koule o konstantním R.

Poznámka. : Platnost řešení se povedla ověřit v Mathematice pro $2A^2\kappa = p^2 - 1$, neboli(z rovnice (16))$r_0^2 = 2$, pokud by bylo znaménko v (12) minus, dostali bychom $2A^2\kappa = 1 - p^2$, což je ve sporu (16), odkud by plynulo $p < 1$. Takto bylo objeveno použití jiné konvence úžení Riemannova tensoru.

Problém tohoto řešení je ovšem, že v minimální hodnotě $R = \frac{1}{2} r_0 (p-1)$ nastává singularita, diverguje jak skalární pole φ, tak Ricciho tensor $R_{\mu\nu}$, Ricciho skalár R i Kretschmannův invariant K, konkrétně:

$$K = \frac{64 \left(\frac{R_-}{R_+}\right)^{\frac{2}{p}}}{(R_+)^4 (R_-)} \left((R_+)^2 (R_-)^2 - 8R^2 (2(r_0^2 - 1)) + 2((p^2-1) r_0^3 (r_0 (p^2-1)) - 4R) \right) \tag{17}$$

$$\begin{aligned} R_{tt} &= 0 \\ R_{RR} &= \frac{8 r_0^2 (p^2 - 1)}{(R_+)^2 (R_-)^2} \\ R_{\theta\theta} &= 0 \\ R_{\phi\phi} &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

$$R = \frac{8 \left(\frac{R_-}{R_+}\right)^{\frac{1}{p}}}{(R_+)^2 (R_-)^2} \left((R_+)(R_-) + 2(r_0^2 (p^2 - 1) - 2Rr_0 - 2r^2) \right) \tag{19}$$

0.1.5 Fisherova metrika

Fisher[2] na rozdíl od JNW[3] nevyužívá radiální souřadnice R rozdílné od euklidovského poloměru r. Což je pro naše účely výhodné, neboť nemusíme řešit jejich závislost.

Fisher hledal metriku ve tvaru:

$$ds^2 = -e^{\nu} dt^2 + e^{\lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2, \tag{20}$$

a pro skalární pole U(též pouze radiálně závislé) předpokládal splnění Klein-Gordonovy rovnosti:

$$(\Box - \chi^2) U = 0, \tag{21}$$

Odkud plyne:

$$U(r) = Q e^{-\chi r} / r, \tag{22}$$

kde Q je náboj zdroje. Tedy porovnáním s tvarem (10):

$$V = \int_U^{\infty} -\chi^2 \tilde{U} \, d\tilde{U} = \left[-\chi^2 \frac{\tilde{U}^2}{2} \right]_U^{\infty} = \frac{1}{2} \chi^2 U^2,$$

protože v nekonečnu předpokládáme vymizení skalárního pole. Odtud dostáváme tensor energie a hybnosti tvaru:

$$T_{\mu\nu} = U_{,\mu}U_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(U_{,\alpha}U^{,\alpha} - \chi^2 U^2 - 2\Lambda). \tag{23}$$

Einsteinovy polní rovnice jsou tvaru:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{24}$$

kde rovnou známe

$$\kappa = \frac{2G}{c^4}. \tag{25}$$

Poznámka. : v práci Fishera je také použita stejná konvence úžení Riemannova tensoru, jako v JNW a používá jiné konstanty v definici tensoru energie a hybnosti, ty jsou schovány v κ.

Řešení je nalezeno jako:

$$e^{\nu} = c^2\left(\frac{Z - Z_0}{Z + Z_1}\right)^p, \tag{26}$$

$$e^{\lambda} = \frac{c^2 r^2}{Z^2}\left(\frac{Z - Z_0}{Z + Z_1}\right)^p, \tag{27}$$

$$U(r) = \frac{c^2 Q}{2\sqrt{(Gm)^2 + QG^2}} \ln\left[\frac{Z + Z_1}{Z - Z_0}\right], \tag{28}$$

kde:

$$Z_0 = \frac{1}{c}(\sqrt{(km)^2 + GQ^2} - Gm), \tag{29}$$

$$Z_1 = \frac{1}{c}(\sqrt{(km)^2 + GQ^2} + Gm), \tag{30}$$

$$p = \frac{Gm}{\sqrt{(Gm)^2 + GQ^2}} < 1 \tag{31}$$

a funkce $Z(r)$ je zavedena implicitně:

$$(Z - Z_0)^{1-p}(Z + Z_1)^{1+p} = (cr)^2. \tag{32}$$

Tentokrát platí:

$$\lim_{r\to 0} e^{\nu} \to 0, \lim_{r\to 0} e^{\lambda} \to 0,$$

ale

$$\lim_{r\to 0} U \to C\ln(1/r).$$

V této práci se pokusíme pomocí perturbační metody tyto divergence odstranit.

0.2 Metodika

Perturbace metriky z hlediska kompletní teorie nelze zavádět, tak že budeme peturbovat funkci, kterou byla metrika vyřešena konzistentně všude, kde se vyskytuje. Poté bychom totiž získali Einsteinovy polní rovnice v původním tvaru, přičemž metrika je právě v tvaru jejich řešení plus část obsahující zavedenou perturbaci. Vyřešená pozaďová část se tak odečte a nezbývá jiná možnost, než že je perturbace triviální.

Dále také není možné zavádět perturbace pouze na místo potenciálu V. Tímto bychom dosáhli pouze přechodu od tvaru potenciálu (8) na (10), tj. obecnějšímu tvaru polních rovnic, jejichž řešení není známo. Nedává také smysl zavádět perturbaci na místě Λ v (11), opět totiž neznáme řešení pro nenulovou kosmologickou konstantu. Pokud bychom uvažovali $\Lambda + V$ v (11) jakožto jediný výraz, pak z právě zmíněných důvodů musí právě nulový.

Kvůli výše zmíněným úkazům je tedy nutno zavést perturbaci metriky jednak "nekonzistentně", co se výskytu nalezené funkce týče, či neuvažovat kompletní teorii, tj omezení se do určitého řádu perturbací. A navíc je třeba zavést perturbaci v tensoru energie a hybnosti, Kdybychom tak neučinili, nemohlo by docházet k interakci a perturbace by opět byla triviální.

V této práci bude uvažovat pouze lineární řád perturbací a konzistentností výskytu zavedení perturbací se proto nemusíme příliš zaobírat, ovšem pak vyvstává otázka, zda obdržené výsledky vůbec mají nějakou výpovědní hodnotu, protože jejich obdržení by právě z hlediska kompletní teorie nedávalo smysl.

0.3 Radiálně závislé perturbace

V první části se budeme zabývat perturbacemi s pouze radiální závislostí, jejich derivace podle radiální souřadnice R tak budeme značit čárkou. Integrační konstanty jsou značeny C_i, pokud s nimi dále pracovat nebudeme.

0.3.1 JNW mertika

Perturbace δF a $\delta\varphi$

Nejprve se pokusíme perturbovat metriku a skalární pole, kde zavedeme potenciál $\delta\varphi$ jakožto perturbaci v tensoru energie a hybnosti. Nejprve budeme předpokládat metriku tvaru:

$$ds^2 = -Fdt^2 + F^{-1}dR^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{33}$$

tj. stejného tvaru, jako (13), kde

$$F = \left(\frac{R_-}{R_+}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{34}$$

a perturbaci metriky $h_{\mu\nu}$ chápeme jakožto perturbaci způsobenou perturbací δF, pak platí:

$$h_{tt} = -\delta F, \tag{35}$$

$$h^{RR} = \delta F \implies h_{RR} = -(g_{RR})^2\delta F, \tag{36}$$

kde jsme využili $h_{RR} = -g_{R\mu}g_{R\nu}h^{\mu\nu}$, protože další členy by obsahovaly vyšší, než lineární perturbace, a $g_{R\alpha} = 0$ pro všechna $\alpha \neq R$. Ostatní perturbace metriky jsou nulové. Naprosto zásadní je použití správného tvaru perturbace metriky v horních indexech, tj. s minus, což je vidět z $(g_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu})(g^{\mu\nu} - \varepsilon h^{\mu\nu}) = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Dostaneme tak perturbovaný tensor energie a hybnosti v diagonálním tvaru se členy na diagonále:

$$\frac{1}{2}F^2(\varphi')^2 + \varepsilon F^2\varphi'\delta\varphi', \tag{37}$$

$$\frac{1}{2}(\varphi')^2 + \varepsilon\left(\varphi'\delta\varphi' + \frac{1}{2}(\varphi')^2\left(F + \frac{1}{F}\right)\delta F\right) \tag{38}$$

$$-\frac{1}{2}Fr^2(\varphi')^2 + \varepsilon\left(-Fr^2\varphi'\delta\varphi' + \frac{1}{2}r^2(\varphi')^2\delta F\right), \tag{39}$$

$$-\frac{1}{2}Fr^2\sin^2\theta(\varphi')^2 + \varepsilon\sin^2(\theta)\left(-Fr^2\varphi'\delta\varphi' + \frac{1}{2}r^2(\varphi')^2\delta F\right). \tag{40}$$

Odtud porovnáním tvaru neperturbovaného tensoru energie momentu hybnosti(s nenulovým potenciálem) se členy na diagonále:

$$\frac{1}{2}F^2(\varphi')^2 - FV, \tag{41}$$

$$\frac{1}{2}(\varphi')^2 + \frac{V}{F}, \tag{42}$$

$$-\frac{1}{2}Fr^2(\varphi')^2 + r^2V, \tag{43}$$

$$-\frac{1}{2}Fr^2\sin^2\theta(\varphi')^2 + r^2\sin^2\theta V, \tag{44}$$

je vidět, že pozaďová část se opravdu objevuje v perturbovaném tensoru a lze ji tak odečíst. Je také vidět, že perturbace skalárního pole nelze zcela identifikovat jako potenciál jím způsobený, kvůli prvnímu členu rovnice (9) a nenulovosti derivace skalárního pole podle radiální souřadnice R, což požadujeme. Konkrétně porovnáním dvojic (37),(39),(40) a (41),(43),(34) bychom dostali $V = -\varepsilon F\delta\varphi'\varphi'$, kdežto z dvojice (38) a (42) $V = \varepsilon F\delta\varphi'\varphi'$.

Zperturbováním Einsteinova tensoru $G_{\mu\nu}$ a uvedením do rovnosti (5) s perturbovaným tensorem energie a hybnosti dostaneme novou sadu čtyř rovností, po odečtení pozadí, dosazení z (14),(15),(34) a $2A^2\kappa = p^2 - 1$, zjištěné ověřením platnosti neperturbovaných Einsteinových polních rovnic, a zjednodušení zjišťujeme, že složky $\theta\theta$ a $\phi\phi$ kvůli symetrii systému vedou na stejné rovnice. Dostáváme tak v obecném tvaru:

$$\begin{aligned} &2\left(-4A^2((1+p)R_- - R_+)(R_- + (p-1)R_+) + p^2(p^2-1)R_+^2R_-^2\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}(\Lambda + V)\right)\delta F + \\ &+ 2A^2R_+R_-(R_- - R_+)\delta F' + A^2p^2R_+^2R_-^2\delta F'' + \\ &4Ap(p^2-1)R_+R_-(R_- - R_+)\left(\frac{R_-}{R_+}\right)^{\frac{1}{p}}\delta\varphi' + 2p^2(p^2-1)R_+^2R_-^2\delta V = 0 \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} &2\left(-4A^2((1+p)R_- - R_+)(R_- + (p-1)R_+) + p^2(p^2-1)R_+^2R_-^2\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}(\Lambda + V)\right)\delta F + \\ &+ 2A^2R_+R_-((3+2p)R_-(3-2p)R_+)\delta F' + A^2p^2R_+^2R_-^2\delta F'' + \\ &+ 4Ap(p^2-1)R_+R_-(R_- - R_+)\left(\frac{R_-}{R_+}\right)^{\frac{1}{p}}\delta\varphi' - 2p^2(p^2-1)R_+^2R_-^2\delta V = 0 \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} &\left(4A^2((1+p)R_- - R_+)(R_- + (p-1)R_+) + p^2R_+2R_-\right)\delta F + \\ &+ 2A^2R_+R_-((1+p)R_- - (1-p)R_+)\delta F' + A^2p^2R_+^2R_-^2\delta F'' - \\ &- 4Ap(p^2-1)R_+R_-(R_- - R_+)\left(\frac{R_-}{R_+}\right)^{\frac{1}{p}}\delta\varphi' - 2p^2(p^2-1)R_+^2R_-^2\delta V = 0 \end{aligned} \tag{47}$$

Hned na první pohled je zřejmé, že jsou si rovnice navzájem velice podobné a při neuvážení žádných dalších perturbací tak pravděpodobně nedostaneme žádné vhodné výsledky. I přesto však tuto možnost prozkoumáme. Jejich tvar pro nulovou kosmologickou konstantu Λ, potenciál V a tedy i jeho perturbaci δV lze získat jednoduše jejich vynulováním, $\Lambda, V, \delta V \to 0$.

Zjevným problémem je ovšem přeurčenost soustavy, máme tři Einsteinovy polní rovnice, ale dvě neznáme δF a $\delta\varphi$. Je tak možné, že nedostaneme konzistentní výsledky, jak se skutečně stane. Využijeme-li pouze první dvě rovnice (45) a (46) dostaneme:

$$ApR_+R_-((p+1)R_- + (p-1)R_+)\delta F' = 0, \tag{48}$$

s jediným možným konstantním řešením:

$$\delta F = C_1. \tag{49}$$

Což je pro naše využití ale naprosto zbytečné. I přes zatím nezmíněné druhy divergencí jednotlivých veličin v R_{min} v tomto případě uvažovaného tvaru perturbace je zřejmé, že konstatní perturbací nemůžeme ničemu pomoci.

Použijeme-li ale rovnice (45) a (47), či (46) a (47), dostaneme parciální diferenciální rovnice druhého řádu pro δF, konkrétně:

$$\begin{aligned}&2A(R_- - R_+)((p+1)R_- + (p-1)R_+)\delta F - \\ &- pR_+R_-(((p+2)R_- + (p-2)R_+)\delta F' + pR_+R_-\delta F'') = 0\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}&2A(R_- - R_+)((p+1)R_- + (p-1)R_+)\delta F - \\ &- pR_+R_-(((3p+4)R_- + (3p-4)R_+)\delta F' + pR_+R_-\delta F'') = 0\end{aligned} \tag{51}$$

respektive. Obě rovnice mají velice dlouhá řešení ve tvaru komplexní funkce obsahující hypergeometrické funkce ${}_2F_1$ s argumentem $\frac{R-R_{min}}{\frac{1}{2}r_0(p+1)-R_{min}}$, jejichž reálnost jsme tak schopni zajistit minimálně na $R_{min}+\frac{1}{2}r_0(p+1)$ okolí R_{min} (doopravdy jsme to schopni zařídit všude), ale nikoli řešení celkově různým prefaktorům. Obě také obsahují prefaktor $\exp\left(-\frac{\mathrm{ArcTanh}\,\frac{2R+0}{pr_0}}{p}\right)$ a $\exp\left(-\frac{2\,\mathrm{ArcTanh}\,\frac{2R+0}{pr_0}}{p}\right)$ respektive, které způsobují nulovost obou řešení v R_{min}. Funkce ArcTanh je na celý obor rozšířena komplexně, jako $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, mimo reálný argument na intervalu $[-1,1]$ má tedy jak reálnou, tak i komplexní složku. To je také proč nelze řešení učinit reálnými. Je také zajímavé poznamenat, že funkce obsahují obě po dvou členech jejichž chování v okolí R_{min} závisí na volbě p. V tomto případě bychom si zde přáli chování $x^{1/p}$, jak je viditelné z (36), ale v obou případech první člen zde vždy diverguje a pro druhý v prvním případě vychází $p=1$, v druhém případě pak $p = 1/3$. Manipulací integračních konstant jsme pouze schopni dosáhnout konvergence v nekonečnu pro první z případů, druhý konverguje v nekonečnu automaticky. Pro obě tyto řešení tedy nelze zařídit na pro nás zajímavém intervalu jejich reálnost a proto nebudeme dále jejich chování zbytečně rozebírat. Ani tato řešení nejsou navzájem konzistentní.

Perturbace δF, $\delta\varphi$ a jiné

Přeurčenost předchozího pokusu nás motivuje k zavedení dalších perturbací, avšak v metrice již není kde jinde perturbovat, krom jiného tvaru perturbace F, nebo $r(R)$ před angulární částí, tyto možnosti budou prozkoumány v následujících sekcích.

V úvahu tak připadá zavést perturbaci tensoru energie a hybnosti jakožto $\delta\Lambda$ na místě V v (4), tj za pozadí stále považujeme řešení JNW, nikoli obecnější řešení zahrnující nenulový potenciál, jedná se tak vlastně o perturbaci odpovídající Λ. Jelikož složky $\theta\theta$ a $\phi\phi$ opět vedou na stejnou rovnost a roli poslední neznámé bude hrát $\delta\Lambda$. Perturbovanou část Einsteinových polních rovnice získáme jednoduše z (45),(46) a (47) limitou $V, \delta V \to 0, \Lambda \to \delta\Lambda$. Pak ale, jak je vidět z (45) a (46) se požadavek na konstantnost δF (49) nemění. δF je tak i pro tuto možnost konstantní a není tak vhodný, požadujeme-li alespoň, že C_1 není nulové, pak musí nutně platit:

$$\delta\Lambda = -\frac{16A^2 R r_0 \left(\frac{R_-}{R_+}\right)^{\frac{1}{p}}}{(p^2-1)R_+^2 R_-^2} \tag{52}$$

Další poněkud zvláštní možností je zavést perturbaci potenciálu vycházejícího z Klein-Gordonovy rovnosti (21) pro potenciál φ, přičemž ale stále uvažujeme $\chi = 0$ a perturbaci chápeme zavedenou v nederivovaném skalárním poli, zde rovnice získáme z (45)-(47) limitou $\Lambda, V \to 0$.

Tentokrát máme pro δF rovnici:

$$Ap(16r_0 R\delta F - R_+R_-(2(r_0-2R)\delta F' - R_+R_-\delta F'')) = 0. \tag{53}$$

Jejíž řešení je identické, jako rovnice (50), není tedy vhodné.

Perturbace $\delta Farg$ a $\delta\varphi$

Z důvodu problémů nastíněných v předchozích dvou podsekcích se tedy pokusíme provést perturbaci metriky $h_{\mu\nu}$ v jiném tvaru. Namísto perturbace F daném rovnicí (34) se pokusíme uvažovat perturbaci argumentu F, tj $Farg = \frac{R_-}{R_+}$. pak máme:

$$\delta(F_{arg}^{1/p}) = \frac{F_{arg}^{\frac{1}{p}-1}\delta F_{arg}}{p} = \frac{\left(\frac{R_-}{R_+}\right)^{\frac{1}{p}-1}\delta F_{arg}}{p}. \tag{54}$$

Díky konzistentnosti výskytu F s F_{arg} v metrice (13), přeci jenom F_{arg} je argumentem funkce F, lze získat perturbace Einsteinových polních rovnic jednoduše z (45)-(47) pomocí substituce:

$$\delta F = \frac{\left(\frac{R_-}{R_+}\right)^{\frac{1}{p}-1}\delta F_{arg}}{p}, \tag{55}$$

ty jsou(složky $\theta\theta$ a $\phi\phi$ zjevně opět vedou na stejné rovnice, je dosazeno $2A^2\kappa = p^2-1$):

$$\begin{aligned}
&2\Bigg(-4A^2((1+p)R_-^2+(2p^2-p-2)R_+R_-+(1-p^2)R_-^2)+\\
&+p^2(p^2-1)R_+^2R_-^2\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}(\Lambda+V)\Bigg)\delta F_{arg}+2A^2p(2p-1)R_+R_-(R_--R_+)\delta F'_{arg}+\\
&+A^2p^2R_-^2R_+^2\delta F''_{arg}+4Ap^2(p^2-1)R_-^2(R_--R_+)\delta\varphi'+\\
&+2p^3(p^2-1)R_-^3R_+\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}\delta V=0
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
&2\Bigg(-4A^2((1+p)R_--R_+)((p-2)R_--2(p-1)R_+)-\\
&p^2(p^2-1)R_+^2R_-^2\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}(\Lambda+V)\Bigg)\delta F_{arg}-2A^2pR_+R_-((4p+1)R_-+R_+)\delta F'_{arg}-\\
&-A^2p^2R_-^2R_+^2\delta F''_{arg}+4Ap^2(p^2-1)R_-^2(R_+-R_-)\delta\varphi'+\\
&+2p^3(p^2-1)R_-^3R_+\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}\delta V=0
\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}&-4A^2((p^2+1)R_-^2+2(p-1)R_+R_-+(p^2-1)R_+^2)\delta F_{arg}-\\&-2A^2pR_+R_-((3p-1)R_--(p-1)R_+)\delta F'_{arg}-\\&-A^2p^2R_+^2R_-^2\delta F''_{arg}-4Ap^2(p^2-1)R_-^2(R_+-R_-)\delta\varphi'+\\&+2p^3(p^2-1)R_-^3R_+\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}\delta V=0\end{aligned}\tag{58}$$

Kvůli této konstrukci také očekáváme stejnou strukturu výsledků, jako v případě pro δF, tj nekonzistentnost výsledků pro přeurčenou soustavu, shodu řešení při použití prvních dvou rovnic z ní a výsledku se zavedeným $\delta\Lambda$ a výsledku při použiti první a třetí rovnice s výsledkem se zavedeným δV. I zde přes přeurčenost soustavy prozkoumáme řešení pro jedinou perturbaci v tensoru energie hybnosti $\delta\varphi$. Rovnosti pro tuto variantu, jako v předchozích sekcích získáme limitním přechodem (57)-(59): $\Lambda, V, \delta V \to 0$.

Při použití prvních dvou rovnic (57) a (58) dojdeme k parciální diferenciální rovnici prvního řádu pro δF_{arg}:

$$A((p+1)R_-+(p-1)R_+)(2(p-1)(R_--R_+)\delta F_{arg}+pR_+R_-\delta F'_{arg})=0\tag{59}$$

S řešením v nám již známém tvaru prefaktoru z předchozích řešeních tvaru:

$$\delta F_{arg}=C_1\exp\left(-\frac{2(p-1)\,\mathrm{ArcTanh}\,\frac{2R+r_0}{pr_0}}{p}\right),\tag{60}$$

Ta je definována reálnou hodnotou do R_{min} a dále je ji nutno dodefinovat komplexně, není tak jako stejně jako v předchozích případech možné dosáhnout reálnosti řešení, ani manipulací integrační konstanty nedosáhneme chování $x^{1/p}$ na okolí R_{min}. Opět jako v předchozím, použití jiné kombinace rovnic tj. (57) a (58), nebo (58) a (59) vede na parciální diferenciální rovnice druhého řádu:

$$\begin{aligned}&A(2(R_--R_+)((p^2-2r-1)R_-+R_++(2-3p)pR_+)\delta F_{arg}+\\&+pR_+R_-(((5p-2)R_-+(2-3r)R_+)\delta F'_{arg}+pR_+R_-\delta F''_{arg})=0\end{aligned}\tag{61}$$

$$\begin{aligned}&A(2(R_--R_+)((-3+p(3p-2))R_--(3+p)(p-1)R_+)\delta F_{arg}+\\&+p^2R_+R_-((7R_--R_+)\delta F'_{arg}+R_+R_-\delta F''_{arg})=0\end{aligned}\tag{62}$$

respektive. V prvním z případů dostaneme dlouhý výsledek obsahující ${}_2F_1$ se stejným argumentem jako v předchozích sekcích, tentokrát bez prefaktoru s $\exp(-\mathrm{ArcTanh})$, dokonce je čistě reálná na malém okolí R_{min}, ne ale všude navíc se sestává ze dvou členů, jejichž chování na okolí R_{min} závisí na volbě p. Pro oba členy je možné volit p, tak aby bylo dosaženo požadovaného chování

$x^{1/p}$(viditelné z (54)) ne ale zároveň, konkretně $p = \frac{1}{6}(7-\sqrt{13})$ a $p = \frac{1}{6}(7+\sqrt{13})$. Řešení druhé z rovnic má stejné vlastnosti, s tím rozdílem, že p je naleznutelné pouze pro jeden z členů, a to sice $p = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ a ani toto řešení nelze učinit reálné.

Perturbace $\delta Farg$, $\delta\varphi$ a jiné

Vyzkoušíme ještě perturbace v F_{arg} společně s perturbací tensoru momentu a hybnosti ve formě $\delta\Lambda$ a δV jako v jedné z předešlých podsekcí, polní rovnice v těchto případech dostaneme limitou (57)-(59) $V, \delta V \to 0, \Lambda \to \delta\Lambda$ a $\Lambda, V \to 0$, respektive. Při zavedení perturbace $\delta\Lambda$ je stála platné (59), jak je vidět ze shodného výskytu $\delta\Lambda$ v (56) a (57), pro δF tedy platí (60), pro δV po dosazení a předpokladu nenulovosti δF máme:

$$pC_1 \exp\left(-\frac{(p-1)\,\mathrm{ArcCoth}\left(\frac{pr_0}{r_0+2R}\right)}{p}\right)\left(16A^2Rr_0 + (p^2-1)R_+^2R_-^2\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}\delta\Lambda\right) = 0, \tag{63}$$

s řešením identickým jako (60). Pro druhou z možností(s δV) dostaneme diferenciální rovnici:

$$\begin{aligned} &Ap(8r_0(2rR + r_0(p-1)(2p+1))\delta F_{arg} - \\ &- R_+R_+((4R - 8pr_0 + 6r_0)\delta F'_{arg} + R_+R_-\delta F - arg'')) = 0, \end{aligned} \tag{64}$$

jejíž řešením je opět dlouhá komplexní funkce obsahující hyperbolické ${}_2F_1$ se stejným argumentem jako ve všech předchozích situacích, nelze jí výběrem integračních konstant učinit reálnou, a to ani na okolí R_{min}. Na tomto okolí je chování identické jako v případě (61), tj. nelze volit p, tak aby měla námi chtěné vlastnosti v obou.

Perturbace δF_1, δF_2

Po předchozích neúspěších se zaváděním prapodivných perturbací v tensoru energie a hybnosti se nyní konečně pokusíme obejít problém přeurčenosti soustavy pomocí zavedení více perturbací metriky. V této části předpokládáme, že perturbace δF v prostorové a časové složce jsou přeci jenom jiné, značeno δF_1 a δF_2 respektive. Tj zavádíme perturbaci skalární funkce F stejně jako v předchozích případech, ale při jeho výskytu ve složce tt pokládáme jeho perturbaci rovnu δF_1 a při výskytu ve složce RR rovnu δF_2. Neboli:

$$h_{tt} = -\delta F_1, \tag{65}$$

$$h_{RR} = -(g_{RR})^2 \delta F_2 = -\frac{\delta F_2}{F^2} \tag{66}$$

a ostatní perturbace metriky jsou nulové.

Dojde tedy k rozdělení metrických perturbací a očekáváme tak, že jedna z perturbací (δF_2) se bude v rovnicích vyskytovat v nižším maximálním řádu derivace než druhá a coupling těchto dvou perturbací vyjadřující závislost té s nižším řádem derivací v nederivované a druhé nederivované a prvním řádem její derivace. Což bohužel ale asi povede na řešení diferenciální rovnice třetího řádu.

Rovnice pertubací Einsteinových polních rovnic jsou následující(opět je již dosazeno $\kappa = \frac{p^2-1}{2A^2}$ složky $\theta\theta$, $\phi\phi$ vedou na stejné rovnice):

$$\begin{aligned}
&2\left(2A^2(R_- - R_+)^2 + p^2(p^2-1)R_+^2R_-^2\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}(\Lambda + V)\right)\delta F_1 + \\
&+ A^2 pR_+R_-((5+2p)R_- + (2p-5)R_+)\delta F_1' + A^2 p^2 R_+^2 R_-^2 \delta F_1'' - \\
&- 4A^2((3+2p)R_-^2 + 2(p^2-3)R_+R_- + (3-2p)R_+^2)\delta F_2 + \\
&+ A^2 pR_+R_-((3+2p)R_- + (2p-3)R_+)\delta F_2' + 4Ap(p^2-1)R_+R_-\left(\frac{R_-}{R_+}\right)^{\frac{1}{p}}\delta\varphi' + \\
&+ 2p^2(p^2-1)R_+^2R_-^2\delta V = 0,
\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
&4A^2p(R_+^2 - R_-^2)\delta F_1 + A^2pR_+R_-((2p+5)R_- + (2p-5)R_+)\delta F_1' + A^2p^2R_+^2R_-^2\delta F_1'' + \\
&+ 2\Bigg((-2A^2((p+2)R_-^2 + 2(p^2-2)R_+R_+ - (p-2)R_+^2) + \\
&+ p^2(p^2-1)R_+^2R_-^2\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}(\Lambda + V)\Bigg)\delta F_2 + A^2pR_+R_-((2p+1)R_- + (2p-1)R_+)\delta F_2' + \\
&+ 4Ap(p^2-1)R_+R_-(R_- - R_+)\left(\frac{R_-}{R_+}\right)^{\frac{1}{p}}\delta\varphi' - \\
&- 2p^2(p^2-1)R_+^2R_-^2\delta V = 0,
\end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
&2A^2(R_- - R_+)((p+2)R_- + (p-2)R_+)\delta F_1 + A^2pR_+R_-((2p+3)r_- + (2p-3)R_+)\delta F_1' + \\
&+ A^2p^2R_+^2R_-^2\delta F_1'' + 2A^2pR_+R_-\left(4 + \frac{R_-}{R_+} - \frac{R_+}{R_-}\right)\delta F_2 - A^2pR_+R_-(R_- - R_+)\delta F_2'' - \\
&- 4Ap(p^2-1)R_+r_-(R_- - R_+)\left(\frac{R_-}{R_+}\right)^{\frac{1}{p}}\delta\varphi' - 2p^2(p^2-1)R_+^2R_-^2\delta V = 0,
\end{aligned} \tag{69}$$

jak je vidět skutečně se v rovnicích nevyskytuje $\delta F_2''$, kdežto $\delta F_1''$ ano. Jelikož již máme dostatečný počet neznámých k řešení systému rovnou se zbavíme nyní zbytečné dodatečné perturbace tensoru energie a hybnosti $\delta V \to 0$ a nebudeme již uvažovat nenulovost kosmologické konstanty a potenciálu.

Odečtem prvních dvou rovnic (67) a (68) získáme slibovanou rovnici svazující perturbace:

$$\delta F_1 = \delta F_2 + \frac{pR_+R_-\delta F_2'}{R_- - R_+}. \tag{70}$$

Nyní vyjádřením $\delta\varphi'$ z první rovnice (67), dosazením do třetí (69) a převedením perturbací δF_1 na δf_2 pomocí (70) dostaneme diferenciální rovnici třetího řádu pro δF_2:

$$\begin{aligned}
&2(R_- - R_+)^2((p+1)R_- + (p-1)R_+)\delta F_2 - \\
&- pR_+R_-(2(p+1)(2p+3)R_-^2 + 4(4p^2-3)R_+R_- + 2(p-1)(2p-3)R_+^2)\delta F_2' - \\
&- p^2R_+^2R_-^2((6p+5)R_- + (6p-5)R_-)\delta F_2'' - p^3R_+^3R_-^3\delta F_2''' = 0.
\end{aligned} \tag{71}$$

Ta má řešení, které ale není vyjádřitelné v uzavřené formě, tj. pomocí elementárních a speciálních funkcí a integrační konstanty zde hrají roli hodnot δF_2 a jejích derivací v určitém bodě a na reálné ose je čistě reálná. Nastavíme-li tento bod na R_{min}, pak bychom chtěli určit konstanty následovně: Jak je vidět z (66) požadujeme, aby chování δF_2 na okolí R_{min} bylo $x^{1/p}$, protože chování $g_{RR} = 1/F$ je zde $\frac{1}{x^{1/p}}$ a $-\frac{\delta F_2}{F^2}$, které přičítáme je tudíž $\frac{1}{x^{2/p}}$. A hodnota δF_2 v R_{min} tedy musí být 0, jednoduchým derivováním zjistíme hodnoty derivací $\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}x^{1/p} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{p}x^{1/p-1} = \infty$, $\lim_{x\to 0}\frac{d^2}{dx^2}x^{1/p} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{p}-1\right)\frac{1}{p}x^{1/p-2} = -\infty$, pro $p > 1$, což jak víme je pravda z (16). Kvůli nekonečnosti derivací v tomto bodě je nutné v Mathematice nastavovat hodnoty pouze v blízkosti tohoto bodu, dostaneme-li se ale příliš blízko, řešení se zhroutí na lineární funkci, která určitě řešením (71) není. Pokusíme-li se alespoň dosáhnout relativního přiblížení pomocí zvyšování hodnoty p, řešení začne na okolí R_{min} nepředvídatelně oscilovat. Ve všech případech nehledě na hodnotu p a integračních konstant(s výjimkou všech nulových) řešení divoce diverguje v nekonečnu. Nelze tak říci, zda je vůbec něčemu vhodné, čemuž pokud bychom ignorovali chování R_{min} sama o sobě brání divergence v nekonečnu.

Perturbace δF_{arg1}, δF_{arg2}

Nyní se pokusíme analogicky, jako v předchozí sekci předpokládat jiný tvar perturbace skalární funkce F dle jejího výskytu, tentokrát ve formě perturbace argumentu. Používáme $\delta F_{arg}1$ a $\delta F_{arg}2$ pro složky tt a RR respektive.

Perturbaci F danou zavedenou perturbací v argumentu spočteme stejným způsobem, jako (54), opět je možné z získání Einsteinových polních rovnic použít substituci (55) v rovnicích (67)-(68) jednotlivě pro δF_1 a δF_2, neboli:

$$h_{tt} = -\frac{1}{p} F^{\frac{1}{p}-1} \delta F_{arg1}, \tag{72}$$

$$h_{RR} = -(g_{RR})^2 \frac{1}{p} F^{\frac{1}{p}-1} \delta F_{arg2} = -\frac{1}{p} F^{-\frac{1}{p}-1} \delta F_{arg2} \tag{73}$$

a ostatní metrické perturbace jsou nulové. Opět tak očekáváme stejnou strukturu, co se do výskytu derivací perturbací týče, tj. že jedna z nich se bude objevovat s derivací do druhého řádu, zatímco druhá jen do prvního, vedoucí na řešení diferenciální rovnice třetího řádu. Einsteinovy polní rovnice po dosazení $\kappa = \frac{p^2-1}{2A^2}$ nabývají tvaru(složky $\theta\theta$ a $\phi\phi$ vedou na stejné rovnice):

$$\begin{aligned}
&2\left(A^2(2p^2+p-1)(R_- - R_+)^2 + p^2(p^2-1)R_+^2 R_-^2 \left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}} (\Lambda + V)\right)\delta F_{arg1} + \\
&+ A^2 p R_+ R_-((6p+1)R_- - (2p+1)R_+)\delta F'_{arg1} + A^2 p^2 R_+^2 R_-^2 \delta F''_{arg1} + \\
&+ 2A^2(-(3+2p)(p+1)R_-^2 + 2(p(3-2p)+3)R_+ R_- + (p+1)(2p-3)R_-^2)\delta F_{arg2} - \\
&- A^2 p R_+ R_-((2p+3)R_- + (2p-3)R_+)\delta F'_{arg2} + \\
&+ 4A^2 p R_-^2((p^2-1)R_- - (p^2-1)R_+)\delta\varphi' + 2p^3(p^2-1)R_-^3 R_+ \left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}} \delta V = 0,
\end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned}
&-2A^2(R_- - R_+)((p+1)R_- - (p(2p+3)-3)R_+)\delta F_{arg1} - \\
&- A^2 p R_+ R_-((6p+1)R_- - (2p+1)R_+)\delta F'_{arg1} - A^2 p^2 R_+^2 R_-^2 \delta F''_{arg1} + \\
&2\big(A^2(p(2p-5)+5)r_+^2 + 2A^2(2p^2+p-5)R_+ R_- + \\
&+(p+1)R_-^2\left(A^2(5-2p) - p^2(p-1)R_+^2\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}(\Lambda+V)\right)\Bigg)\delta F_{arg2} - \\
&- A^2 p R_+ R_-((2p+1)R_- + (2p-1)R_+)\delta F'_{arg2} - 4Ap^2(p^2-1)R_-^2(R_- - R_+)\delta\varphi' + \\
&+ 2p^3(p^2-1)R_-^3 R_+ \left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}} \delta V = 0,
\end{aligned} \tag{75}$$

$$-2A^2(R_- - R_+)((2p^2+1)R_- - (2p(p-1)+1)R_+)\delta F_{arg1} -$$
$$-A^2pR_+R_-((6p-1)R_- + (2p-1)R_+)\delta F'_{arg1} - A^2p^2R_+^2R_-^2\delta F''_{arg1} -$$
$$-2A^2(R_-^2 + 2(2p^2+p-1)R_+R_- - (2p-1)R_+^2)\delta F_{arg2} + A^2pR_+R_-(R_- - R_+)\delta F'_{arg2} +$$
$$+4Ap^2R_-^2(p^2-1)(R_- - R_+)\delta\varphi' + 2p^3(p^2-1)R_-R_+\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}\delta V = 0. \tag{76}$$

Opět dále dodatečnou perturbaci potenciálu, kosmologickou konstantu a samotný potenciál, ze stejných důvodů pokládáme rovny nule $\Lambda, V, \delta V \to 0$. Součtem prvních dvou rovnic (74) a (75) získáme vztah mezi perturbacemi:

$$\delta F_{arg1} = (2p-1)\delta F_{arg2} + \frac{pR_+R_-\delta F_{arg2}}{R_- - R_+}. \tag{77}$$

Stejně, jako v předchozí sekci vyjádříme derivaci pertubace skalárního pole z první rovnice (74), dosadíme do třetí (76) a převedeme za použití (77) na diferenciální rovnici třetího řádu pro δF_{arg2} tvaru:

$$4(R_- - R_+)^2((p(4p^2-2p-3)-1)R_- - (4p^3-2p^2-p-1)R_+)\delta F_{arg2} +$$
$$+pR_+R_-((28p^2-6p-2)R_-^2 - (8p(p-1)-4)R_+R_- + 2(2p+1)(p-1)R_+^2)\delta F'_{arg2} +$$
$$+p^2R_+^2R_-^2((12p-1)R_- + R_+)\delta F''_{arg2} + p^3R_+^3R_-^3\delta F'''_{arg2} = 0. \tag{78}$$

Řešení opět není vyjádřitelné v uzavřené formě, pomocí elementárních a speciálních funkcí, je reálné na reálné ose a plně určeno hodnotami δF_{arg2} a jeho derivací do druhého řádu v určitém bodě. V tomto případě chceme na okolí R_{min} chování jako x, protože jak již bylo zmíněno chování problematického g_{RR} je zde $\frac{1}{x^{1/p}}$ a stejný typ potřebujeme tedy i od přičítané perturbace h_{RR}, která jej má kompenzovat. Jak je vidět z (73) chování h_{RR} je zde $\frac{\delta F_{arg2}}{x^{1/p+1}}$, odkud plyne požadovaná lineárnost δF_{arg2} na okolí R_{min}. Stejně jako v předchozí variantě není možné nastavit hodnoty přímo v bodě R_{min}, je tedy nutno je odhadnout v nějaké ε vzdálenosti, zde jednoduše spočteme $x\big|_{x=\varepsilon} = \varepsilon$, $\left(\frac{d}{dx}x\right)_{x=\varepsilon} = 1$, $\left(\frac{d^2}{dx^2}x\right)_{x=\varepsilon} = 0$. Bohužel i zde narazíme na stejný problém jako v předchozím, přiblížíme-li se příliš blízko, řešení se zhroutí na lineární funkci, která jistě neřeší (78) a pokud se pokusíme přiblížit relativně pomocí zvětšování p, funkce okolo R_{min} nepředvidatelně osciluje, navíc pro libovolné nastavené hodnoty(krom všech nulových) funkce diverguje, nelze jí tedy použít.

Perturbace δF, δr

Poté, co jsme prozkoumali možnost zavedení nutné další metrické perturbace pomocí předpokladu jiné pertubace stejné funkce (F, nebo F_{arg}), dle jejího výskytu, se pokusíme konečně zavést perturbaci r, tj. euklidovské vzdálenosti vystupující v kvadrátu před angulárními členy. Od toho si slibujeme decouplování singularity a perturbovaného $r = 0$, tj. vlastně se snažíme posunout singularitu za $r = 0$, pak se totiž v prostoru definovaném na $r \geqslant 0$ vůbec nevyskytuje.

Zde používáme již známou perturbaci δF způsobující metrické perturbace popsané rovnicemi (35) a (36), perturbace ve složkách $\theta\theta$ a $\phi\phi$ již díky perturbaci r nulové nejsou a platí pro ně:

$$h_{\theta\theta} = 2r\delta r, \tag{79}$$

$$h_{\phi\phi} = 2r\sin^2\theta\delta. \tag{80}$$

Díky jejich existenci již není perturbace Einsteinova tensoru diagonální a vyskytují se v ní členy:

$$(G_{\text{pert}})_{R\theta} = \frac{\cot\theta}{2r^3}(r(h_{\theta\theta,R} - \csc^2\theta h_{\phi\phi,R}) + r'(\csc^2\theta h_{\phi\phi} - h_{\theta\theta})), \tag{81}$$

$$(G_{\text{pert}})_{\theta R} = \frac{r'}{2r^3}(\cot\theta h_{\theta\theta} + \csc^2\theta(\cot\theta h_{\phi\phi} - h_{\phi\phi,\theta})), \tag{82}$$

což na první pohled vypadá, že perturbace Einsteinova tensoru není symetrická, to by ale byl problém, vzhledem k tomu, že tento tensor symetrický je a pokud bychom tak perturbovali každou jeho složku zvlášť i perturbace by musely být symetrické. Povšimneme-li si ale vztahu $h_{\theta\theta}$ a $h_{\phi\phi}$ daného tvarem metriky $h_{\phi\phi} = \sin^2\theta h_{\theta\theta}$ po dosazení do (81) a (82) zjišťujeme, že

$$(G_{\text{pert}})_{R\theta} = (G_{\text{pert}})_{\theta R} = 0. \tag{83}$$

Perturbace je tak symetrická a nulová mimo diagonálu, pokud by zde nulová nebyla, musela by nutně perturbace r, která je jediná zde vystupující, být triviální. Co se výskytu řádů derivací perturbací v tomto případě týče nemůžeme nic říci a pravděpodobně bude u obou perturbací stejný. Perturbované Einsteinovy polní rovnice jsou tvaru:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{R_+R_-\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}}\left(2\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}\left(-4A^2((p+1)R_--R_+)(R_-+(p-1)R_+)+\right.\right.\\
&\left.+p^2(p^2-1)R_+^2R_-^2\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}(\Lambda+V)\right)\delta F+pR_+R_-\left(\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}(A^2(2(R_--R_+)\delta F'+\right.\\
&\left.\left.+pR_+R_-\delta F'')+2p(p^2-1)R_+R_-\delta V)+4A(p^2-1)(R_--R_+)\delta\varphi'\right)\right)-\\
&-8A^2(2(R_--R_+)((p+1)R_-+(p-1)R_+)\delta r+\\
&+pR_+R_-(((p+1)R_-+(p+1)R_+)\delta r'+pR_+R_-\delta r''))=0,
\end{aligned}
\tag{84}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{R_+R_-\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}}\left(2\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}\left(-4A^2((p+1)R_--R_+)(R_-+(p-1)R_+)+\right.\right.\\
&\left.+p^2(p^2-1)R_+^2R_-^2\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}(\Lambda+V)\right)\delta F+pR_+R_-\left(\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}(A^2(2((2p+3)R_-+\right.\\
&\left.\left.+(2p-3)R_+)\delta F'pR_+R_-\delta F'')+2p(p^2-1)R_+R_-\delta V)+4A(p^2-1)(R_--R_+)\delta\varphi'\right)\right)-\\
&-8A^2p(2(R_--R_+)((p+1)R_--(p-1)R_+)\delta r+\\
&+R_+R_-(-((p+3)R_-+(p-3)R_+)\delta r'+pR_+R_-\delta r''))=0,
\end{aligned}
\tag{85}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{R_+R_-\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}}\left(-4A^2\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}((p+1)R_-^2+2(p^2-1)R_+R_--(p-1)R_+^2)\delta F+\right.\\
&+pR_+R_-\left(\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}(A^2(-2(p+1)R_-+(p-1)R_+)\delta F'-pR_+R_-\delta F''+\right.\\
&\left.\left.+2p(p^2-1)R_+R_-\delta V)+4A(p^2-1)(R_--R_+)\delta\varphi'\right)\right)+8\left(A^2((p+1)^2R_-^2-\right.\\
&\left.-2(p^2+1)R_+R_-+(p-1)^2R_+^2)+p^2(p^2-1)R_+^2R_-^2\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}(\Lambda+V)\right)\delta r-\\
&-8A^2pR_+R_-((p+1)R_-+(p-1)R_+)\delta r'=0.
\end{aligned}
\tag{86}
$$

Opět stejně, jako v předchozích případech vynulujeme již nepotřebné proměnné, tj. kosmologickou konstantu, potenciál a jeho perturbaci $\Lambda, V, \delta V \to 0$. Tento systém vede na:

$$\begin{aligned} &8AR_+R_-(R_- - R_+)((p+1)R_- + (p-1)R_+)\delta r = \\ &= A\sqrt{R_+R_-\left(\frac{R_+}{R_-}\right)^{\frac{1}{p}}}(2(R_+ - R_-)((p+1)R_- + (p-1)R_+)\delta F + \\ &+ pR_+R_-(((2p+3)R_- + (2p-3)R_+)\delta F') + pR_+R_-\delta F''), \end{aligned} \tag{87}$$

která i ve spojení s ostatními rovnicemi (84)-(86) nemá naleznutelné řešení(Mathematica ani jsme žádné našli), zde je myšleno při použití libovolné kombinace (87) předchozích rovnic, či jiných vyjádření.

0.3.2 Fisherova metrika

Na závěr se ještě pokusíme nahlédnout na možné řešení formulované ve Fisherově metrice. Ve Fisherově metrice (20) na rozdíl od JNW metriky (13) nevystupuje euklidovská vzdálenost závislá na nějaké radiální souřadnici, ale je sama o sobě brána za souřadnici. Perturbování v r tedy není dobré. Zde se proto pokusíme zavést perturbace ve funkcích $\nu(r)$ a $\lambda(r)$ vystupujících v metrice, označované jako $\delta\nu$ a $\delta\lambda$ respektive. Dostaneme tak Einsteinovy polní rovnice ve tvaru(zde $'$ značí derivaci podle r a p je zde jiné než v případě JNW, složky $\theta\theta$ a $\phi\phi$ vedou na stejné rovnice):

$$\begin{aligned} &\big(-16 + 8\exp(\lambda)(2 + \kappa r^2(2\Lambda + \chi^2 U^2)) + r\lambda'(16 + 3r\nu') - \\ &- r(8\kappa r(U')^2 + \nu'(12 + 5r\nu') + 6r\nu'')\big)\delta\nu + \\ &+ 2r(4 - r\lambda')\delta\nu' + 4r^2\delta\nu'' + (8 - 3r\lambda'(4 + r\nu') + r^2(8\kappa(U')^2 + 5(\nu')^2 + 6\nu''))\delta\lambda + \\ &+ 2r(4 - r\nu')\delta\lambda' + 16\exp(\lambda)\kappa\chi^2 r^2 U\delta U = 0, \end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned} &r(4\nu' + r(-3\lambda'\nu' + 5(\nu')^2 + 6\nu''))\delta\nu + 2r(r\lambda' - 4)\delta\nu' - 4r^2\delta\nu'' + \\ &+ (-24 + 8\exp(\lambda)(2 + \kappa r^2(2\lambda + \chi^2 U^2)) + 3r\lambda'(4 + r\nu') - r(\nu'(8 + 5r\nu') + 6r\nu''))\delta\lambda + \\ &+ 2r\delta\lambda' + 16\kappa r^2(\exp(\lambda)\chi^2 U\delta U + U'\delta U') = 0, \end{aligned} \tag{89}$$

$$\begin{aligned} &(8r\nu' + r^2\nu'(\nu' - \lambda') + 2r^2\nu'')\delta\nu + 2r(r\lambda' - 2r\nu' - 4)\delta\nu' + -4r^2\delta\nu'' + \\ &(8 + r(8\kappa r(U')^2 + 4\nu' + 3r(\nu')^2 - 3\lambda'(4 + r\nu') + 6r\nu''))\delta\lambda + 2r^2\nu'\delta\lambda' + \\ &+ 16\exp(\lambda)\kappa\chi^2 r^2 U\delta U = 0. \end{aligned} \tag{90}$$

Kde $\kappa = 2G/c^4$, jak víme z předchozích sekcích, budeme uvažovat nulovou kosmologickou konstantu a potenciál, včetně jeho perturbace $\Lambda, \chi \to 0$. Ze součtu prvních dvou rovnic (88) a (89) vyjádříme vztah perturbací:

$$\delta\nu = -\frac{2r\delta\lambda' + (2 - 2\exp(\lambda) + r(-\kappa r(U')^2 + \nu'))\delta\lambda}{2(\exp(\lambda)) + 2r\lambda' - r(\kappa r(U')^2 + \nu')}. \tag{91}$$

Dále, jako vždy vyjádříme $\delta U'$ z první rovnice (88), dosadíme do třetí (90) a poté převedeme pomocí (91) všechny perturbace na perturbace $\delta\lambda$. Zde ovšem máme problém v tom, že zde vystupující funkce jsou dány svou závislostí na $Z(r)$, které je samo o sobě závislé na r, jeho závislost je ale dána implicitně. Tento problém vyřešíme přepisem do závislostí na Z, $r(Z)$ vyjádříme z (32), jako:

$$r = \sqrt{(Z + Z_1)(Z - Z_0)\left(\frac{Z + Z_1}{Z - Z_0}\right)}, \tag{92}$$

ν a λ z (26) a (27) respektive a derivace podle r převedeme na derivace podle Z postupně, jako:

$$\frac{d\delta\lambda}{dr} = \frac{dZ}{dr}\frac{d\delta\lambda}{dZ}, \tag{93}$$

$$\frac{d^2\delta\lambda}{dr^2} = \frac{dZ}{dr}\left(\frac{d^2Z}{dZdr}\frac{d\delta\lambda}{dZ} + \frac{dZ}{dr}\frac{d^2\delta\lambda}{dZ^2}\right), \tag{94}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3\delta\lambda}{dr^3} = &\left(\left(\frac{dZ}{dr}\frac{d^3Z}{dZ^2dr} + \left(\frac{d^2Z}{dZdr}\right)^2\right)\frac{df}{dZ} + \right.\\ &+ \left(\frac{d^2Z}{dZdr}\left(1 + \frac{dZ}{dr}\right)\right)\frac{d^2\delta\lambda}{dZ^2} + \\ &\left. + \frac{dZ}{dr}\frac{d^3\delta\lambda}{dZ^2}\right),\end{aligned} \tag{95}$$

kde jednotlivé derivace vyjádříme ze vztahu (92). Dostaneme tak velice dlouhou diferenciální rovnici třetího řádu pro $\delta\lambda$, která nepřekvapivě nemá řešení(nebo se ho nepodařilo nalézt).

0.4 Perturbace ve formě sférických harmonik

Dále bychom mohli prozkoumat, zdali zavedení perturbací ve formě sférických harmonik nepovede k řešení, tj. u zavedených perturbací již nebudeme předpokládat pouze radiální závislost.

Na toto rozšíření bohužel již nezbyl čas.

0.5 Závěr

Bylo prozkoumány možnosti řešení singularit JNW metriky pomocí perturbační metody do prvního řádu. Byla vyzkoušena možnost zavedení perturbace metriky způsobené perturbací funkce F v ní vystupující a také argumentu funkce F, oba případy vedou na řešení přeurčené soustavy rovnic. Ani v jednom případě nejsou výsledky získané libovolnými kombinacemi "konzistentní". Bylo zjištěno, že pro případ perturbace F buď obdržíme konstantní řečení pro perturbaci δF, nebo je komplexní, kvůli obsažení komplexně dodefinované funkce ArcTanh, byla zjištěna vysoká náchylnost řešení v závislosti na parametru p v obou případech. Pro možnost perturbace v argumentu F se scénář opakoval, s tím rozdílem, že namísto konstantního řešení obdržíme také komplexní funkci obsahující komplexně dodefinovaný ArcTanh. Přeurčenost těchto soustav nás následně motivovala k zavedení dodatečných pertubací tensoru energie a hybnosti, byly vyzkoušeny možnosti zavedení perturbace δV a δV. Pro variantu s perturbací F obdržíme výsledky shodující se těmi pro nezavedené dodatečné perturbace, a to sice konstantní δF pro možnost s $\delta\Lambda$ a komplexní funkci odpovídající řešení za použití první a poslední rovnice, s nezavedenými dodatečnými pertubacemi, pro případ s δV. V případě s perturbací argumentu F pro zavedené $\delta\Lambda$ opět dostaneme řešení odpovídající první z variant řešení přeurčené soustavy pro perturbaci argumentu F, pokud uvážíme perturbaci δV obdržíme nové řešení, které ovšem opět komplexní a jeho chování není o nic lepší.

Dále byla prozkoumána možnost zavedení odlišných perturbací F a argumentu F, dle výskytu této funkce. v obou vyzkoušených případech není řešení vyjádřitelné pomocí elementárních, či speciálních funkcí. Pro případ s perturbací F není možné nastavit, kvůli jejich nekonečnosti, požadované hodnoty přímo v bodě R_{min}, místo toho se musíme spokojit se zadáním nějaké blízké hodnotě, při dostatečném přiblížení se navíc řešení zhroutí. V případě perturbace argumentu F jsme schopni hodnoty nastavit přímo v bodě R_{min}, nicméně se řešení také zhroutí. V obou případech byla zaznamenána extrémní náchylnost na volbu parametru p, pro jeho vysoké hodnoty zaznamenáváme v okolí R_{min} divoké oscilace, které mohou býti numerickými artefakty způsobené řešením v Mathematice, nebo selháním perturbační metody jako takové. V žádném případě nejsme schopni zařídit konvergenci řešení v nekonečnu.

Nakonec pro JNW metriku, opět pro případy s perturbací F a jeho argumentu, bylo prozkoumáno řešení se zavedením perturbace angulárního r, v těchto případech řešení nebylo nalezeno vůbec.

Pro Fisherovu metriku jsme vyzkoušeli pouze jednu variantu zavedení perturbací, a to sice ve funkcích λ a ν, zde bylo řešení hledané v závislosti na funkci Z a nebylo nalezeno.

Celkově pro všechny prozkoumané možnosti nebylo nalezeno vhodné řešení, nebo nebylo nalezeno vůbec. Vzhledem k přímočarosti perturbační metody by pravděpodobně již někým nalezeno bylo, pokud by existovalo. Grafy všech řešení jsou k nahlédnutí v přiloženém dokumentu.

Bibliografie

[1] K. Schwarzschild. *On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory*. 1999. arXiv: physics/9905030 [physics.hist-ph].

[2] I. Z. Fisher. *Scalar mesostatic field with regard for gravitational effects*. 1999. arXiv: gr-qc/9911008 [gr-qc].

[3] Allen I. Janis, Ezra T. Newman a Jeffrey Winicour. „Reality of the Schwarzschild Singularity". In: *Phys. Rev. Lett.* 20 (16 1968), s. 878–880. DOI: 10.1103/PhysRevLett.20.878. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.20.878.

[4] Klaas Landsman. „Singularities, Black Holes, and Cosmic Censorship: A Tribute to Roger Penrose". In: *Foundations of Physics* 51.2 (břez. 2021). ISSN: 1572-9516. DOI: 10.1007/s10701-021-00432-1. URL: http://dx.doi.org/10.1007/s10701-021-00432-1.

[5] O. Semerák. „General Theory of Relativity". In: *Unpublished* (2003). URL: http://utf.mff.cuni.cz/~semerak/GTR.pdf.