



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **BAKALÁRSKA PRÁCA**

Robert Jurenka

# **Dáta z družíc Kepler a TESS: pulzující a zákrytové hvězdy**

Astronomický ústav UK

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Petr Zasche, Ph.D.

Študijný program: Fyzika (B0533A110001)

Študijný odbor: FP (0533RA110001)

Praha 2024

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov. Táto práca nebola využitá na získanie iného alebo rovnakého titulu.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Zb., autorského zákona v platnom znení, hlavne skutočnosť, že Univerzita Karlova má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dňa .....

Podpis autora

V prvom rade by som sa chcel poďakovať vedúcemu tejto práce, doc. RNDr. Petrovi Zaschemu, Ph.D., ktorý ma po celý čas vypracovania práce motivoval a poskytoval mi cenné rady a pripomienky. Ďakujem aj svojim rodičom, za ich neustálu podporu a za všetko, čo pre mňa v živote spravili. V neposlednom rade by som sa chcel poďakovať priateľke Laure za jej nekonečnú podporu celým bakalárskym štúdiom.

Názov práce: Dáta z družíc Kepler a TESS: pulzujúce a zákrytové hviezdy

Autor: Robert Jurenka

Katedra: Astronomický ústav UK

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Petr Zasche, Ph.D., Astronomický ústav UK

Abstrakt: Družice Kepler a TESS z dôvodu hľadania exoplanét poskytujú veľmi presné fotometrické dáta využívané na skúmanie premennosti hviezd. V tejto práci vykonávam analýzu zákrytovej dvojhviezdy KIC 3858884 s prítomnými pulzáciami. Z Kepler dát stanovujem  $P_{\text{orb}} = 25.95185$  d. Pomocou programu Phoebe fitujem svetelnú krivku a určujem hodnoty fyzikálnych parametrov spolu s chybami. Z reziduí fitu bola vykonaná pulzačná analýza pomocou programu Pyriod a získaná najsilnejšia perióda  $P_{\text{puls}} = 0.1383$  d. Pre TESS dáta bez zákrytov bola rovnako vykonaná pulzačná analýza. Na záver bol zostrojený diagram  $P_{\text{orb}} - P_{\text{puls}}$ .

Kľúčové slová: Kepler a TESS, zákrytová dvojhviezda, hviezdne pulzácie, Phoebe, periodová analýza

Title: The Kepler and TESS satellite data: pulsating and eclipsing stars

Author: Robert Jurenka

Department: Astronomical Institute of Charles University

Supervisor: doc. RNDr. Petr Zasche, Ph.D., Astronomical Institute of Charles University

Abstract: The Kepler and TESS satellites, in their search for exoplanets, provide highly accurate photometric data used to study stellar variability. This work analyzes the eclipsing binary star KIC 3858884, which exhibits pulsations. From Kepler data, the orbital period  $P_{\text{orb}} = 25.95185$  d is determined. Using the Phoebe program, the light curve is fitted, and the values of physical parameters along with their errors are identified. A pulsation analysis on the residuals of the fit is conducted using the Pyriod program, revealing the strongest period  $P_{\text{puls}} = 0.1383$  d. A similar pulsation analysis is performed on TESS data without eclipses. Finally, the  $P_{\text{orb}} - P_{\text{puls}}$  diagram is constructed.

Keywords: Kepler and TESS, eclipsing binary, stellar pulsations, Phoebe, period analysis

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
1.1	Misie Kepler a TESS . . . . .	2
1.2	Zákrytové dvojhviezdy . . . . .	5
1.3	Pulzujúce hviezdy . . . . .	9
1.3.1	Cefeidy . . . . .	11
1.3.2	Hviezdy typu $\beta$ Cephei . . . . .	11
1.3.3	Hviezdy typu RR Lyrae . . . . .	12
1.3.4	Hviezdy typu $\delta$ Scuti . . . . .	12
1.3.5	Miridy . . . . .	13
1.3.6	Vzťah periód $P_{\text{orb}}$ a $P_{\text{puls}}$ pri zákrytových dvojhviezdach s pulzátorom . . . . .	14
1.4	PHOEBE . . . . .	14
1.5	Periodogramy . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Dáta z Keplera</b>	<b>22</b>
2.1	Určenie periódy obehu systému . . . . .	23
2.2	Zbinovanie dát . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Modelovanie svetelnej krivky</b>	<b>26</b>
3.1	MCMC analýza . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Analýza pulzačných frekvencií</b>	<b>32</b>
<b>5</b>	<b>Dáta z družice TESS</b>	<b>36</b>
	<b>Diskusia</b>	<b>39</b>
	<b>Záver</b>	<b>42</b>
	<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>43</b>
	<b>Zoznam obrázkov</b>	<b>46</b>
	<b>Zoznam tabuliek</b>	<b>49</b>
<b>A</b>	<b>Prílohy</b>	<b>50</b>
A.1	Model svetelnej krivky . . . . .	50
A.2	3D sieťovinové grafy . . . . .	51
A.3	Model pulzácií oproti reálnym dátam - ďalšie časové úseky . . . . .	53

# 1. Úvod

Premenné hviezdy sú všetky pozorované hviezdy, ktoré vykazujú zmeny v množstve vyžiareného žiarenia v čase. Najčastejšie sa jedná o zákrytové dvojhviezdy alebo pulzujúce hviezdy. Analýza zákrytových dvojhviezd ponúka určenie hodnôt absolútnych hviezdnych a orbitálnych parametrov. Pulzujúcimi hviezdami sa zaoberá asteroseismológia, vedný odbor, vďaka ktorému analýzou pulzačných frekvencií vieme bližšie zistiť vnútornú štruktúru pulzátora. Podľa práce Zhang a kol. (2013), približne od roku 2000 pozorujeme s nástupom vysoko presných teleskopov dvojhviezdne systémy, kde aspoň jedna z komponent je pulzujúca. Takéto objekty majú široký astrofyzikálny význam, pretože ponúkajú nezávislé informácie z dvoch spomínaných vedných odborov, ktoré následne môžeme porovnávať s modelmi.

V tejto práci sa pozrieme na fotometrickú analýzu jedného dvojhviezdneho systému KIC 3858884, ktorého svetelná krivka vykazuje jasné znaky pulzácií a vykonáme aj ich analýzu. Pre tento dvojhviezdny systém boli zrealizované dve detailné štúdie, s ktorými budú porovnané výsledky tejto práce. Najprv Maceconi a kol. (2014) vykonal dôslednú spektroskopickú aj fotometrickú analýzu tejto dvojhviezdy, spolu s vyšetrením pulzácií, neskôr Manzoori (2020) spravil fotometrickú a veľmi detailnú analýzu pulzačných frekvencií.

## 1.1 Misie Kepler a TESS

Ďalekohľad Kepler bol vypustený na heliocentrickú dráhu agentúrou NASA 6. marca 2009. Úlohou tohto teleskopu bolo preskúmať a zozbierať fotometrické dáta z hviezd podobných Slnku v malom úseku oblohy v súhvezdí Labuť a Lýra, za účelom hľadania exoplanét pomocou tranzitnej fotometrie. Kepler tak poskytuje veľmi presné fotometrické dáta, používané aj na analyzovanie dvojhviezd a pulzujúcich hviezd. Ako uvádzajú Van Cleve a Caldwell (2016) v inštrumentálnej príručke ku Keplerovmu ďalekohľadu, hlavná časť je fotometer, ktorý má pri vstupe 95 cm Schmidtov korektor, odstraňujúci sférickú aberáciu 1.4 m primárneho guľového zrkadla naspođu, od ktorého je žiarenie odrazené do ohniskovej roviny v priestore medzi korektorom a zrkadlom. V ohniskovej rovine máme sústavu 42 CCD detektorov, každý s rozlíšením  $2200 \times 1024$  px, avšak tesne pred touto sústavou je ešte sústava tzv. **Field-Flattening Lenses**, čo je sada šošoviek, ktoré dávajú do roviny dopadajúce žiarenie z guľového primárneho zrkadla. Ako spomína Koch a kol. (2010), za účelom obmedzenia sa hlavne na hviezdy slnečného typu, v sústave FFL sú použité fotometrické filtre s odozvou od 423 nm do 897 nm. Kepler sa tak sústreďí hlavne na viditeľnú časť spektra. Tým sa obmedzuje rozsah prijatého žiarenia a určuje sa veľičina z anglického názvu Total Spectral Response, teda totálna spektrálna citlivosť/priepustnosť ako funkcia vlnovej dĺžky. Do nej sa započítavajú spomínané fotometrické filtre, no aj všetky ostatné časti fotometra ako napr. korektor, zrkadlo, ale aj kvantová účinnosť CCD detektorov (keďže ich je 42, tak sa berie priemerná hodnota kvantovej účinnosti<sup>1</sup>).

---

<sup>1</sup>Kvantová účinnosť je definovaná ako pomer počtu fotónov, ktoré sú detegované detektorom voči počtu všetkých dopadnutých fotónov. Je funkciou vlnovej dĺžky.

Normalizovaná krivka spektrálnej citlivosti Keplerovho ďalekohľadu je zobrazená na obrázku 1.1, vynormovaná na 1. V skutočnosti je táto spektrálna citlivosť preškálovaná priepustnosť, kde aj podľa Van Cleve a Caldwell (2016) dosahuje niečo vyše 70%.

Najdôležitejšou súčasťou Keplerovho ďalekohľadu je práve CCD detektor, ktorý meria a ukladá informácie o dopadajúcom žiarení. Sústava zariadení s dokopy takmer 95 miliónmi pixelov zachytáva za expozičný čas 6.02 s všetky dopadajúce fotóny. Podľa kvantovej účinnosti každého CCD detektora sa len zlomok dopadnutých fotónov deteguje. Hlavný princíp CCD detektora je vnútorný fotoelektrický jav, kedy dopadajúce fotóny s dostatočnou energiou vytvoria v pixeli, tvorenom polovodičovým materiálom, vodivostné elektróny a tie sa zhromažďujú pri anóde pod pixelom, Wolf (2010). Následne trvá cca 0.52 s než sa jednotlivé počty nazbieraných elektrónov pod každým pixelom vyčítajú a za celkový integračný čas 6.54 s sa dáta uložia a celý proces začína odznova. Aj podľa Kinemuchi a kol. (2012), dáta, ktoré sa ukladajú sú tzv. dlhá kadencia (DK), kedy sa sčíta 270 expozícií, čo po vynásobení integračným časom dáva dáta s časovým krokom každých 29.4 min. DK obsahuje FFI obrázky (**F**ull-**F**rame **I**mages), teda obrázky všetkých pixelov za každú dobu dlhej kadencie, TPF súbory (**T**arget **P**ixel **F**iles), teda súbory obsahujúce informácie len o pixeloch obsahujúcich prednastavené prioritné objekty a LCF súbory (**L**ight **C**urve **F**iles) zahŕňajúce časovú postupnosť fotometrie pre každý prioritný objekt, vyvedený z príslušného TPF súboru. Kinemuchi a kol. (2012) ďalej uvádza, že Keplerov ďalekohľad je v zornom poli schopný sledovať len do 170 000 prioritných objektov z celkových 10 miliónov objektov, ktoré sú viditeľné v rámci limitnej magnitúdy. Dáta z dlhej kadencie sú posielané na Zem raz za 93 dní, čo sa definuje ako kvartál. Keplerov ďalekohľad ponúka ešte aj krátkokadenčné dáta (KK) pre maximálne 512 objektov za kvartál. KK dáta sú tvorené sčítaním 9 expozícií, čo predstavuje frekvenciu každých cca 58.9 s a v podobe TPF a LCF súborov sú zbierané tretinu kvartálu. Všetky z týchto uvedených dát z družice Kepler pre vybrané objekty sú voľne dostupné v databázi Mikulski Archívu pre Vesmírne Ďalekohľady (MAST) <sup>2</sup>.

Keplerov ďalekohľad si pre jednoduchosť a efektívnosť v ukladaní dát zadefinoval vlastný čas, ktorý sa viaže k roku začiatku Keplerovej misie, tzv. Barycentrický Keplerov Juliánsky dátum (BKJD) a platí

$$\text{BKJD} = \text{BJD} - 2454833.0, \quad (1.1)$$

kde BJD je barycentrický juliánsky dátum, teda čas opravený o zmeny v polohe Zeme voči barycentru (hmotný stred) Slnecnej sústavy a konštanta 2454833.0 reprezentuje hodnotu Juliánskeho dátumu<sup>3</sup> na poludnie 1.1.2009, Van Cleve a kol. (2016). Keplerov ďalekohľad, spolu s rozšírením K2 v roku 2013, za celý prevádzkový čas preskúmal viac ako 500 000 hviezd a objektov a misiu završil až na jeseň roku 2018 <sup>4</sup>.

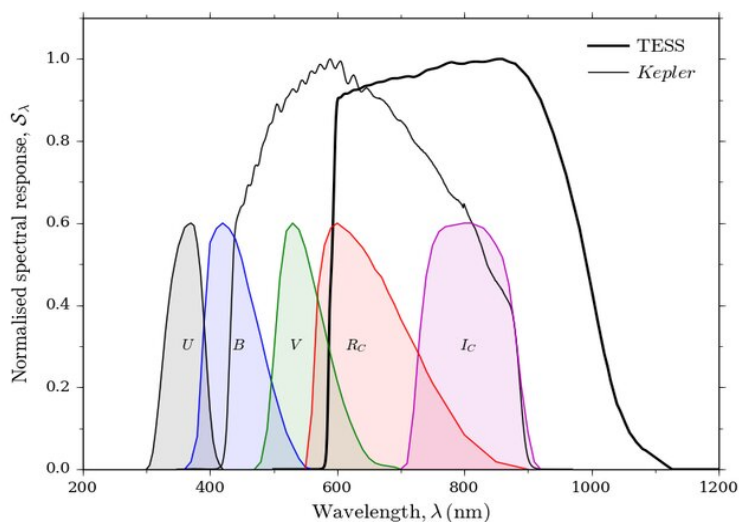
Následovník družice Kepler je TESS (**T**ransiting **E**xoplanet **S**urvey **S**atellite), v preklade satelit prieskumu tranzitných exoplanét, bol vypustený opäť agentúrou NASA v apríli 2018 s hlavným cieľom sledovať najbližšie a najjasnejšie hviezdy

<sup>2</sup><https://archive.stsci.edu/>

<sup>3</sup>Juliánsky dátum začína na poludnie 1.1. 4713 p.n.l. a hodnota 1 JD je rovná 24 hodín štandardného UTC času.

<sup>4</sup>Zdroj: NASA, Misia Kepler/K2

za účelom nájdenia viacerých exoplanét. Tentokrát príručka od Vanderspek a kol. (2018) uvádza, že satelit sa pohybuje po vysoko excentrickej dráhe okolo Zeme s periódou 13.7 dňa. TESS sa od Keplera líši najmä v tom, že preskúmava celú oblohu a nie len určitú prehustenú časť oblohy. Za jeden rok dokáže TESS prezrieť polovicu nebeskej sféry, rozdelenú na 13 sektorov<sup>5</sup>. TESS obsahuje 4 kamery, každá so 4 CCD detektormi vnútri komplikovanej šošovkovej sústavy, Vanderspek a kol. (2018), pričom jeden detektor obsahuje  $2048 \times 2048$  pixelov. Dokopy tak TESS narába s niečo vyše 67 miliónmi pixelov. Obdobne ako CCD detektory v družici Keplera, tak aj TESS obsahuje vlastný špeciálne navrhnutý širokopásmový filter od 600 do 1000 nm, aby lepšie snímal menšie planéty okolo slabších hviezd, ktoré vyžarujú viac do červena, ako popisuje Handberg a kol. (2021). Výsledná spektrálna citlivosť celého inštrumentálneho systému teleskopu TESS je zobrazená na obrázku 1.1. Na tomto obrázku vidíme aj tradičné filtre fotometrického systému Johnson Cousins a ich spektrálnu citlivosť nanormovanú na 0.6 autorom pre názornosť.



Obr. 1.1: Ukážka normalizovanej spektrálnej citlivosti známych filtrov v porovnaní s filtrom použitým Keplerm a TESSom. Zdroj: Lund a kol. (2016).

Na rozdiel od Keplera, integračný čas kamier v TESSe je len 2 sekundy. No rovnako tak si TESS ukladá dvojminútové kompozície 60-tich za sebou idúcich expozícií, čo ukladá obdobne ako predchodca do TPF súborov, teda do výseku pixelov pre vybrané prioritné ciele a ich blízke okolie. TESS produkoval aj FFI obrázky zložené z 900 celokamerových expozícií, teda tvorili 30 minútové kadencie, na zachovanie údajov o celej skúmanej oblohe, bez obmedzenia sa len na prioritné objekty ako TPF súbory. Aktuálne však už prebieha druhá rozšírená misia, kde FFI kadencia bola zmenená na 200 sekúnd z prvého rozšírenia, ktorého kadencia FFI bola 10 minút. Každých 13.7 dňa, pri prechode perigeom vysiela na Zem všetky nazbierané TPF a FFI súbory za posledný obeh. Za 2 vykonané orbity okolo Zeme sa TESS nastaví na sledovanie ďalšieho z 13 sektorov na nebeskej polsfére, teda za 2 roky dokáže TESS odpozorovať celú oblohu rozdelenú na 26 sektorov, Vanderspek a kol. (2018). Súbory so svetelnými krivkami sa v prípade

<sup>5</sup>Vanderspek a kol. (2018) uvádza, že 1 sektor je snímaný ako vertikálny pás od ekliptikálneho pólu až po ekliptiku.



TESSu generujú či už z FFI alebo TPF súborov rôznymi tímami vedcov ako napr. tím v Operačnom centre vedeckého spracovania TESS (TESS-SPOC <sup>6</sup>), ktorý sa venuje hlavne kalibrácii FFI obrázkov a generovaním svetelných kriviek z TPF, alebo tím z MIT s názvom QLP <sup>7</sup>, ktorý používa iný štýl extrahovania svetelných kriviek ako SPOC. Všetky potrebné FFI, TPF a jednotlivé LCF z viacerých zdrojov sú pre jednotlivé objekty uložené v spomínanej databáze MAST. Aj TESS si zdefinoval vlastný zjednodušený zápis času, podľa Vanderspek a kol. (2018) máme TJD a BTJD, teda Barycentrický TESS Juliánsky dátum začínajúci od poludnia 8.12.2014 a platí

$$\text{BTJD} = \text{BJD} - 2457000.0. \quad (1.2)$$

## 1.2 Zákrytové dvojhviezdy

Zákrytové dvojhviezdy sú zložené z dvoch hviezd, ktoré obiehajú okolo spoločného ťažiska. Zákrytové sú preto, že rovina ich obehu je naklonená tak, že sme schopní zo Zeme sledovať geometrické zákryty, teda prechody jednej hviezdy pred druhou. Tým pádom sledujeme pokles prijatého svetelného toku, keďže jedna zo zložiek je (čiastočne) zakrytá.

Fyzikálne sú dvojhviezdy praktickou ukázkou problému dvoch telies. Uvažujme hviezdy aproximáciou len na hmotné body s hmotnosťami  $M_1$  a  $M_2$ . Nech obecné polohové vektory oboch hmotných bodov sú  $\vec{R}_1$  a  $\vec{R}_2$ . Poloha ťažiska (alebo hmotného stredu) je definovaná ako  $\vec{R}_T = \frac{M_1\vec{R}_1 + M_2\vec{R}_2}{M_1 + M_2} \equiv \vec{0}$ , pričom týmto posledným krokom prechádzame do ťažiskovej sústavy.

Definuje sa relatívny vektor, ktorého veľkosť určuje okamžitú vzdialenosť medzi oboma hmotnými bodmi. Značíme ho  $\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$  a pomocou neho a nasledovných vzorcov sa vieme dostať naspäť k polohám  $\vec{R}_1$  a  $\vec{R}_2$ :

$$\vec{R}_1 = -\frac{M_2}{M_1 + M_2}\vec{r}, \quad (1.3)$$

$$\vec{R}_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2}\vec{r}. \quad (1.4)$$

Následne sa v tomto zjednodušenom systéme dá ľahko ukázať platnosť Keplerových zákonov (KZ), pričom 3. KZ, ktorý prepája hmotnosti zložiek, periódu obehu  $P_{\text{orb}}$  a hodnotu veľkej poloosi  $a$  má v prípade dvojhviezd nasledovný tvar:

$$\frac{a^3}{P_{\text{orb}}^2} = \frac{(a_1 + a_2)^3}{P_{\text{orb}}^2} = G \frac{M_1 + M_2}{4\pi^2}, \quad (1.5)$$

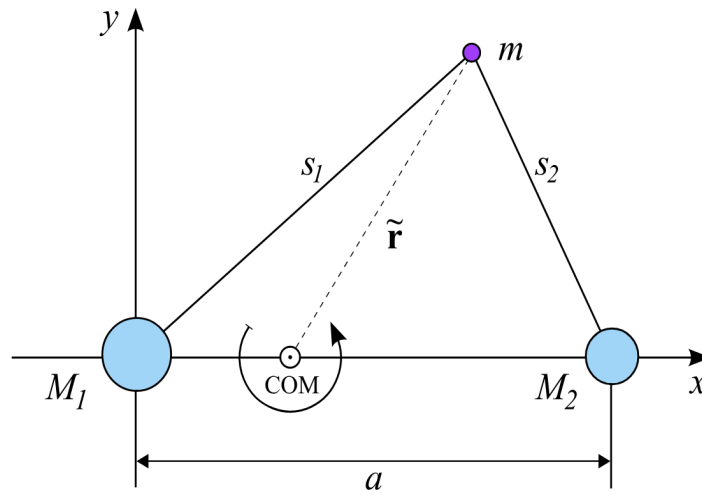
pretože sa po elipsách hýbu obidve hviezdy, platí pre hodnoty hlavných poloosí  $a = a_1 + a_2$ , pre hodnoty periód obehu  $P_{\text{orb}} = P_1 = P_2$ , aj pre hodnoty excentricity  $e = e_1 = e_2$ , pričom hodnoty bez indexu prislúchajú relatívnej orbite dvojhviezdy vzhľadom na ich ťažisko a indexy 1 a 2 prislúchajú absolútnym geometrickým elipsám oboch hviezd, ako popisuje Prša (2011).

V prípade zákrytových dvojhviezd by sme radi zo svetelnej krivky určili fyzikálne parametre jednotlivých hviezd, to však v prípade aproximácie na hmotné

<sup>6</sup>TESS Science Processing Operations Center

<sup>7</sup>TESS Lightcurves From The MIT Quick-Look Pipeline

body nebude možné. Najpoužívanejší spôsob ako pridať rozmery hviezdám je pomocou princípu ekvivalentných povrchov, riešením problému troch telies, kde teraz máme 2 hviezdy s hmotami sústredenými v ich centre a značenie je rovnaké ako v predošlej časti. Počítame však aj s tretím, testovacím telesom v podobe hmotného bodu, ktorého hmotnosť  $m \ll M_1, M_2$ . Chceme určiť potenciál, ktorý bude dobre popisovať správanie hmotných bodov reprezentujúcich povrch jednotlivých hviezd. Napríklad Prša (2011) uvádza všeobecnú veličinu, tzv. modifikovaný Kopalov potenciál, ktorý bol odvodený zo sústavy znázornenej na obrázku 1.2, teda počiatok sústavy je tentokrát v objekte 1. Vzďialenosť hmotného streda od objektu  $M_1$  je obdobou rovnice (1.3)  $x_{\text{COM}} = \frac{M_2}{M_1+M_2}a$ . Na obrázku máme rovnako tak vektory medzi telesom  $m$  a  $M_1$ , medzi hmotným stredom a  $m$ , medzi  $M_2$  a  $m$  postupne  $\vec{s}_1 = (x, y, z)$ ,  $\tilde{\mathbf{r}} = (x - x_{\text{COM}}, y, z)$  a  $\vec{s}_2 = (a - x, y, z)$ .



Obr. 1.2: Usporiadanie problému troch telies v kartézskej sústave súradníc. Z-ová os vedie kolmo na obrázok. COM znázorňuje polohu ťažiska. Zdroj: Prša (2011).

Prejdeme do sférických súradníc  $(r, \theta, \phi)$ , kde  $r$  je radiálna vzdialenosť,  $r = |\vec{s}_1|$ , takže berieme, že  $m$  je na povrchu,  $\theta \in (0, 180)^\circ$  je polárny uhol a  $\phi \in (0, 360)^\circ$  je azimutálny uhol, transformačnými vzťahmi

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi = \lambda r, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi = \mu r, \\ z &= r \cos \theta = \nu r, \end{aligned} \tag{1.6}$$

kde  $\lambda, \mu, \nu$  sú takzvané smerové kosíny. Celkový potenciál pôsobiaci na  $m$  získaný z pôsobiacich gravitačných síl od  $M_1$  a  $M_2$  a odstredivej sily, je prevedený do spomínaných sférických súradníc a prepísaný do bezrozmernej podoby. Nakoniec Prša (2011) ešte používa bezrozmernú premennú  $\rho = r/a$ , čo je vlastne číslo vyjadrujúce vzdialenosť tretieho telesa od primáru v jednotkách veľkej poloosi medzi primárom a sekundárom. Definuje sa ešte aj bezrozmerná hodnota aktuálnej vzdialenosti<sup>8</sup>  $M_1$  a  $M_2$  opäť v jednotkách  $a$  ako  $\delta = D/a$ . Dostávame tak všeobecný vzorec modifikovaného Kopalovho potenciálu pre eliptickú dráhu

<sup>8</sup>Kvôli excentrickej dráhe.

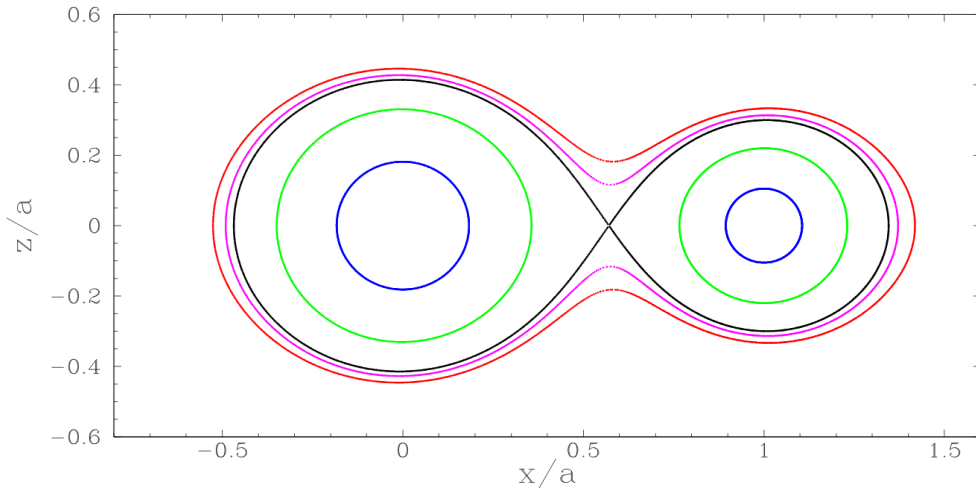
a asynchrónnu rotáciu popisujúci ekvivalentné plochy pre prvé teleso:

$$\Omega = \frac{1}{\rho} + q \left( \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \rho^2 - 2\rho\lambda\delta}} - \frac{\rho\lambda}{\delta^2} \right) + \frac{1}{2}F^2(1+q)\rho^2(1-\nu^2), \quad (1.7)$$

kde  $q = \frac{M_2}{M_1}$  je pomer hmôt sekundáru a primáru a  $F = \frac{P_{\text{rot}}}{P_{\text{orb}}}$  je parameter synchronicity (zladenosti), ktorý udáva pomer medzi periódou rotácie primáru okolo vlastnej osi k perióde obehu. Obdobný vzťah sa dá odvodiť aj pre druhé teleso, treba len začať zo sústavy sústredenej v centre sekundáru. Harmanec a kol. (2023) odvodili modifikovaný Kopalov potenciál pre sekundár

$$\Omega' = \frac{\Omega}{q} + \frac{q-1}{2q}. \quad (1.8)$$

Potenciál  $\Omega$  určuje hranice, ktoré rovnovážna hviezda môže vyplniť. Týmto hraniciam sa hovorí aj Hillove plochy nulovej rýchlosti. Zopár takýchto plôch je znázornených na obrázku 1.3.



Obr. 1.3: Znázornenie ekvipotenciálnych plôch pre 5 rôznych hodnôt Kopalovho potenciálu  $\Omega$  pre pomer hmotností  $q = 0.5$ . Zdroj: Prša (2011).

Ak povrch hviezdy vyplní čiernu ekvipotenciálnu plochu, vravíme, že hviezda dosiahla Rocheovu medzu a túto plochu nazývame Rocheov lalok, ktorý pripomína tvar kvapky. Bod, v ktorom sa spájajú Rocheove laloky, nazývame Lagrangeov libračný bod  $L_1$ . Ten je charakteristický tým, že ak sa v ňom nachádza testovacie teleso, tak celková sila naň pôsobiaca sa rovná nule, Harmanec a kol. (2023). Z toho vyplýva, že ak hviezda zaplní Rocheovu medzu, na materiál za bodom  $L_1$  začne pôsobiť gravitačná sila druhej hviezdy, a tak sa táto hmota môže začať „prelievať“ na druhú hviezdu.

Pomocou tvarov ekvipotenciálnych plôch dvojhviezd sa dostávame k prvej klasifikácii dvojhviezd. Podľa Rocheovho modelu delíme dvojhviezdy na:

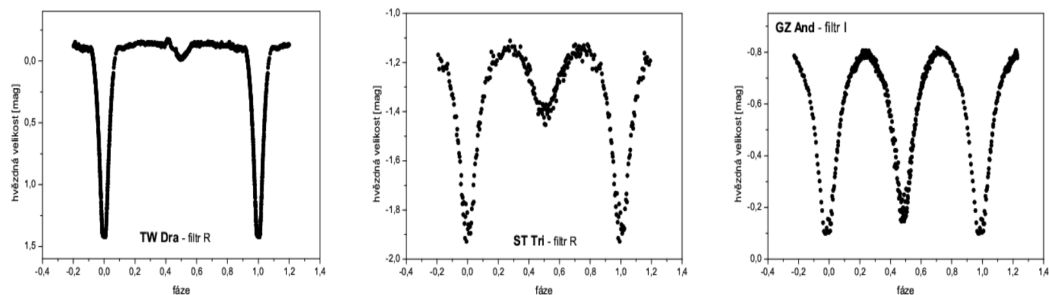
- **Oddelené systémy** - Ani jedna z hviezd nedosahuje Rocheovej medze. Na obr. 1.3 by to napríklad boli hviezdy, ktorých povrch odpovedá modrým alebo slabo zeleným krivkám.

- **Polodotykové systémy** - Len jedna z hviezd vyplní Rocheov lalok. Takýto systém je na obr. 1.3 napríklad povrch hviezdy vyplňajúcej Rocheov lalok naľavo a druhá hviezda s povrchom modrej ekvipotenciály napravo.
- **Kontaktné systémy** - Obidve hviezdy dosahujú, alebo aj presahujú Rocheove medze. Na obr. 1.3 sú to napríklad fialová a červená krivka.
- **Dvojdotykové systémy** - Typ veľmi špecifického systému, kedy obidve hviezdy práve vyplňajú Rocheovu medzu, ale ešte nie sú vo vyslovenom kontakte. Na obr. 1.3 je to ekvipotenciála čiernej farby.

Najčastejšie používaná klasifikácia je podľa vzhľadu svetelných kriviek dvojhviezdy. Podľa Harmanec a kol. (2023) sa historicky svetelné krivky dvojhviezd delia na tri typy:

- **Algol** - Svetelná krivka obsahuje úzke minimá, primárne je o dosť hlbšie ako sekundárne. Mimo zákryt je svetelná krivka viac menej konštantná. Ako uvádza Mikulášek a Zejda (2013), Algolidy typu I sú väčšinou oddelené systémy, vďaka čomu sa prejavujú celkom konštantnou fázou. No vyskytujú sa aj Algolidy typu II., kde sa jedná o polodotykové systémy.
- **$\beta$  Lyrae** - Svetelná krivka sa mení takmer v celej fáze, počas celej periódy, čo naznačuje, že sa jedná najčastejšie o veľmi blízke systémy, teda aj s krátkou periódou a prítomnými objemovými deformáciami jednej alebo aj oboch zložiek.
- **W Ursae Majoris** - Svetelná krivka tohto typu má takmer rovnaké primárne a sekundárne minimum. Jedná sa o veľmi rýchlo obiehajúcu dvojhviezdu s periódou pod 1 deň. Obe zložky sú deformované.

Všetky 3 typy sú zobrazené na troch ukázkových systémoch na obrázku 1.4. Na svetelnej krivke typu Algol môžeme vidieť, že zákryty sú v tvare „V“, čo značí že sa jedná o čiastočný zákryt, teda počas celého obehu sa nestane, že jedna hviezda úplne zakrýva alebo je úplne zakrytá tou druhou. Opakom toho je úplný alebo totálny zákryt, vtedy je najmä v prípade Algolidy I. typu krátky úsek konštantnosti svetla v úplnom minime zákrytu. Vtedy jedna hviezda úplne prekryje tú druhú.



Obr. 1.4: Typy dvojhviezd podľa tvaru svetelnej krivky. Z ľava do prava máme postupne TW Dra - typ Algol II., ST Tri - typ  $\beta$  Lyrae, GZ And - typ W UMa. Zdroj: Mikulášek a Zejda (2013).

Dôležitá pomôcka k riešeniu zákrytových dvojhviezd je previesť si časovú radu do fázy, inak povedané, vezmeme každú jednu periódu svetelnej krivky, preškálujeme a vložíme ju do fázového intervalu, kde začiatok periódy bude na pozícii  $\Phi = -0.5$  a koniec periódy svetelnej krivky na pozícii  $\Phi = 0.5$ . Na „poskladanie“ svetelnej krivky do fázy treba vedieť periódu obehu  $P_{\text{orb}}$  a mať nejaký referenčný čas  $t_0$ . Najčastejšie je to čas primárneho minima, resp. čas hornej kulminácie, ktorý je definovaný ako čas, kedy horúca hviezda prechádza za chladnejšou hviezdou, ako uvádza Southworth (2012). Potom bude mať vždy primárne minimum hodnotu fázy  $\Phi = 0$ . Prša a kol. (2016) popisuje jednoduchý vzťah na výpočet fázy:

$$\Phi(t) = \text{mod} \left[ \frac{t - t_0}{P_{\text{orb}}} \right], \quad (1.9)$$

pričom mod je operátor špeciálne modulo, ktorý premieňa hodnoty z argumentu do intervalu  $[-0.5, 0.5]$ . Táto rovnica neberie do úvahy časové zmeny hodnoty periódy, avšak Prša a kol. (2016) rozoberá aj taký prípad.

### 1.3 Pulzujúce hviezdy

Veľmi dôležité odvetvie premenných hviezd sú pulzujúce hviezdy, teda také hviezdne objekty, ktoré reálne fyzicky pulzujú. Pulzácie môžu byť buď radiálne, vtedy sa hviezda ako sféra „nafukuje“ a „scvrkuje“, alebo aj neradiálne, kedy hviezda rôznym spôsobom deformuje svoj základný guľový tvar. Vo väčšine prípadov sú pulzácie periodické, teda vieme určiť periódu, s akou hviezdy pulzujú. Napríklad Mikulášek a Zejda (2013) používajú jednoduchý model na odhad hlavnej radiálnej periódy, kedy sa pulzačná vlna prenesie z jednej časti hviezdy na druhú a hýbe sa rýchlosťou zvuku. Potom je perióda pulzácie úmerná odmocnine z prevrátenej hodnoty strednej hustoty hviezdy. Ako uvádza Cogan (1970), tento výsledok prvýkrát získal Eddington a určil takzvanú pulzačnú konštantu  $Q$  vzorcom:

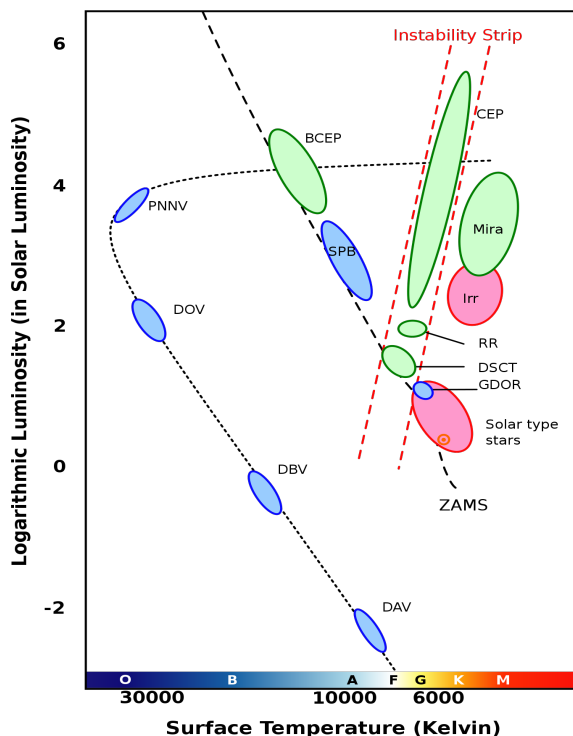
$$Q = P_{\text{puls}} \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho_{\odot}}}, \quad (1.10)$$

kde  $P_{\text{puls}}$  je pulzačná perióda,  $\bar{\rho}$  je stredná hustota hviezdy a  $\rho_{\odot}$  je stredná hustota Slnka.

Aby pulzujúce hviezdy mohli konštantne s určitou periódou meniť svoj tvar, musia sa nachádzať mimo hydrostatickej rovnováhy, teda mimo rovnosti dostredivej gravitačnej sily hviezdy s odstredivou silou gradientu tlaku. Pulzácie sú často spôsobené tzv. „ $\kappa$ -mechanizmom“, čo zapríčiňuje, že hviezde sú na jej pulzácie dodávané nové balíky energie. V názve tohto mechanizmu sa vyskytuje  $\kappa$ , alebo opacita, čo je miera nepriehľadnosti látky, či absorpcie svetla prechádzajúceho daným prostredím, kľúčová veličina mechanizmu zodpovedného za pulzovanie hviezd. Obyčajné nepulzujúce hviezdy sa riadia Kramerovým opacitným pravidlom, ktorý vraví, že ak hviezdu jemne adiabaticky stlačíme, tak sa zvýši aj hustota  $\bar{\rho}$ , aj teplota  $T$  hviezdy a tým pádom opacita klesne podľa vzťahu  $\kappa \propto \rho T^{-3.5}$ , ako uvádzajú Mikulášek a Zejda (2013). Pri pulzujúcich hviezdach  $\kappa$ -mechanizmus zapríčiňuje presný opak, teda pri kompresii hviezdy sa stredná opacita látky v hviezde zvýši. Najčastejšie je za radiálne pulzácie zodpovedná aktívna vrstva jedenkrát ionizovaného Héliu (He II) v hĺbke hviezdy s teplotou

približne 40 000K. He II má pomerne vysokú hodnotu opacity, takže je náročnejšie aby žiarenie cez ňu prechádzalo von, teda pod touto vrstvou sa hromadí energia, ktorá sa následne uvoľní a druhýkrát ionizuje hélium (He III). Dvakrát ionizované hélium má menšiu opacitu, teda vrstva sa spriehladní. Tlak žiarenia zvnútra začne túto vrstvu vyzdvihovať a celá hviezda sa tak „nafúkne“. Prejde do časti s nižšou teplotou a hélium sa ochladí. Následne rekombinuje He III späť na He II a znova sa tak zvýši opacita, vrstva je nepriehľadnejšia, takže znova preváži gravitačné pôsobenie atmosféry a hviezda sa zmršťuje a celý tento proces sa periodicky opakuje. Nie je to však jediná vrstva, ktorá takýmto štýlom pulzuje. Ako dávajú do pozornosti Mikulášek a Zejda (2013), tak vrstva H II v hĺbke s teplotou cca 15 000K je hlavne zodpovedná za pulzácie u červených obrov a trpaslíkov, no vyskytuje sa aj u iných. Napríklad pri veľmi teplých, jasných hviezdach hlavnej postupnosti hrá dôležitú rolu v oveľa väčšej hĺbke vrstva ionizovaného železa.

Pulzácie vidíme prítomné aj na svetelných krivkách, pomocou ktorých vieme určiť ich periódu. Na základe rozdielnosti v tvare svetelných kriviek,  $P_{\text{puls}}$ , či iných fyzikálnych vlastností rozdeľujeme pulzujúce hviezdy do niekoľkých skupín.



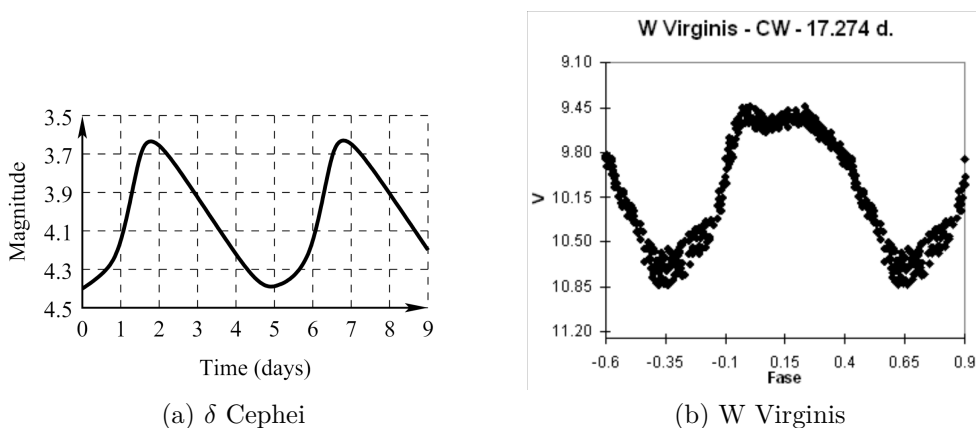
Obr. 1.5: Usporiadanie jednotlivých skupín pulzujúcich premenných hviezd na H-R diagrame. Zdroj obrázku: Wikipédia.

Na obrázku 1.5 vidíme Hertzsprung-Russellov diagram (H-R), znázorňujúci rozdelenie hviezd na základe ich povrchovej teploty (prípadne spektrálneho typu) v závislosti od svietivosti (resp. magnitúdy). Na obr. 1.5 máme na  $x$ -ovej osi aj povrchovú teplotu hviezd aj spektrálne typy, na  $y$ -ovej osi je svietivosť hviezdy v jednotkách svietivosti Slnka, obe osi v logaritmickú škále. Čiarkovaná krivka označuje hlavnú postupnosť nulového veku, hranicu hlavnej postupnosti. V oblasti hlavnej postupnosti sa napríklad nachádza aj naše Slnko a väčšina hviezd na nej

strávi väčšinu času svojho vývoja. Jednotlivé skupiny označené modrou, zelenou a červenou sú typy pulzujúcich hviezd.

### 1.3.1 Cefeidy

Pri popise  $\kappa$ -mechanizmu sme pracovali s hlavným aktérom vzniku pulzácií - aktívnou vrstvou He II v dostatočnej hĺbke pod povrchom hviezdy. Mikulášek a Zejda (2013) popisujú, že na to, aby táto vrstva vytvorila radiálne pulzácie, musí byť povrchová teplota hviezd od 5500 K do 7500 K, čo sú presne hodnoty vymedzujúce oblasť na H-R diagrame, tzv. pás nestability. Na obr. 1.5 sú to červené šikmé čiarkované čiary pod anglickým názvom Instability Strip. Každá hviezda, ktorá sa do tejto oblasti vo svojom vývoji dostane, bude prejavovať spomínané radiálne pulzácie. Najväčšiu oblasť pásu nestability zaberajú Cefeidy, na obr. 1.5 je to oblasť so skratkou CEP. Cefeidy sa delia na pulzujúce hviezdy typu  $\delta$  Cephei, alebo cefeidy I. typu a na hviezdy typu W Virginis, alebo cefeidy II. typu. Cefeidy I. typu sú veľmi hmotní a žiariví veleobri alebo nadobri, spektrálneho typu K-F. Perióda pulzácií sa nachádza v intervale [1, 135] dní. Napríklad na obr. 1.6 v časti (a) je modelová cefeida s periódou cca 5 dní. Pulzujúce hviezdy typu  $\delta$  Cephei sú veľmi dôležité na určovanie medzihviezdnych vzdialeností. Už na začiatku 20. storočia Leavittová odhalila pomerne presnú závislosť medzi absolútnou hviezdou veľkosťou cefeíd a ich pulzačnou periódou. Potom pomocou modulu vzdialenosti vieme určiť vzdialenosť k Cefeide. Rovnakú závislosť dokázali určiť aj pre druhý druh cefeíd. Hviezdy typu W Virginis sú rovnako tak veľmi veľké obry, ale na rozdiel od  $\delta$  Cefeíd sú oveľa staršie. Ich pulzačná perióda je z intervalu [1, 50] dní. Na obrázku 1.6 (b) je znázornená zfázovaná svetelná krivka originálnej W Virginis.

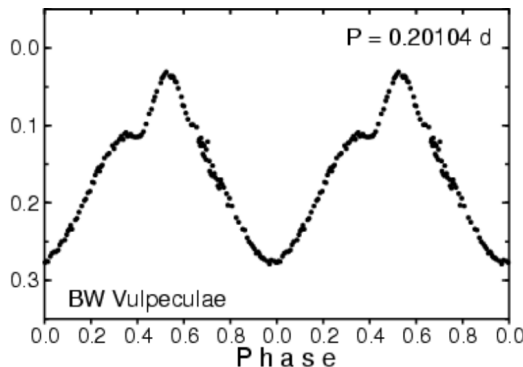


Obr. 1.6: Graf svetelnej krivky Cefeidy I. typu (vľavo, zdroj: Percy (2007)). Graf svetelnej krivky Cefeidy II. typu (vpravo, zdroj: Mikulášek a Zejda (2013)).

### 1.3.2 Hviezdy typu $\beta$ Cephei

Ako môžeme vidieť na obrázku 1.5, tak hviezdy typu  $\beta$  Cephei zaberajú oblasť so skratkou BCEP nad hornou časťou krivky hlavnej postupnosti. Sú to hviezdy spektrálneho typu B0 až B2, s povrchovými teplotami nad  $10^4$  K. Ako uvádzajú

Mikulášek a Zejda (2013), tak perióda pulzácií  $\beta$  Cephei hviezd je z rozmedzia [0.1, 0.6] dňa a amplitúda týchto pulzácií je pomerne malá, asi o rád nižšia ako amplitúda cefeíd I. a II. druhu. V hviezdach tohto typu sa často vyskytujú aj neradiálne pulzácie. Na obrázku 1.7 môžeme vidieť zfázovanú svetelnú krivku hviezdy BW Vulpeculae typu  $\beta$  Cephei s periódou pulzácií niečo cez 0.2 dňa.



Obr. 1.7: Graf svetelnej krivky hviezdy typu  $\beta$  Cephei. Zdroj: Mikulášek a Zejda (2013).

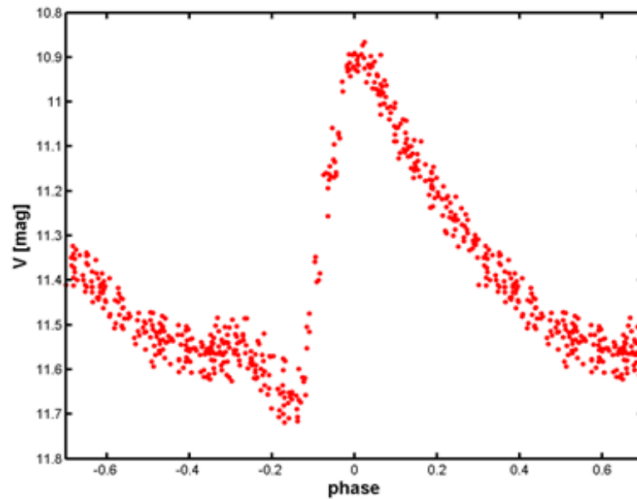
### 1.3.3 Hviezdy typu RR Lyrae

Hviezdy typu RR Lyrae sú označované ako krátkoperiodické cefeidy, ako píše Mikulášek a Zejda (2013). Na obrázku 1.5 sú to hviezdy v oblasti pod skratkou RR, teda na H-R diagrame zaberajú len malý úsek. Stále sa však nachádzajú v páse nestability, takže obsahujú radiálne pulzácie riadené  $\kappa$ -mechanizmom opísaným vyššie. RR Lyrae hviezdy sú spektrálneho typu A až F a ich periódy pulzácií sú z intervalu [0.2, 1.2] dňa. Amplitúdy sú porovnateľné s tými pri cefeidách, avšak drvivá väčšina hviezd typu RR Lyrae sú charakterizované veľmi rýchlym nárastom svietivosti pri prechode z minima. Obdobne ako pri cefeidách, aj tu existuje závislosť absolútnej magnitúdy a pulzačnej periódy a rovnako tak sa využívajú na určovanie vzdialeností. Na obrázku 1.8 je zobrazená zfázovaná svetelná krivka typickej hviezdy typu RR Lyrae.

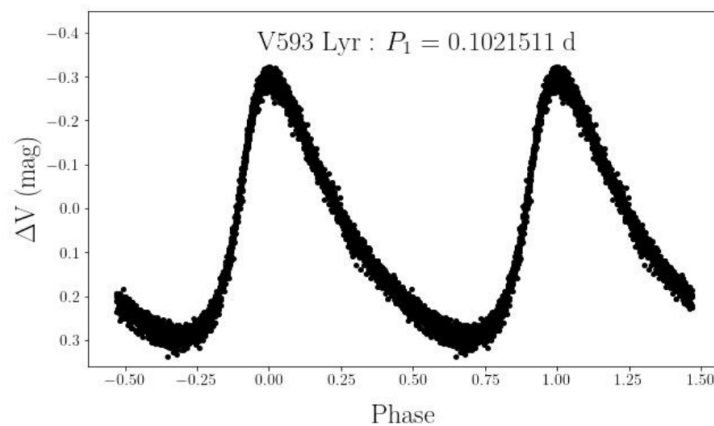
### 1.3.4 Hviezdy typu $\delta$ Scuti

Ďalšia významná skupina pulzujúcich hviezd, ktorá sa nachádza v páse nestability a zároveň pulzuje pomocou vyššie spomenutého  $\kappa$ -mechanizmu je skupina premenných hviezd typu  $\delta$  Scuti. Na obrázku 1.5 je to skupina blízko hlavnej postupnosti so skratkou DSCT. Mikulášek a Zejda (2013) uvádzajú, že hviezdy tohto pulzačného typu sú spomedzi hviezd pásu nestability najpočetnejšie zastúpené, keďže sa nachádzajú blízko hlavnej postupnosti, na ktorej ako už bolo spomenuté, hviezdy strávia väčšinu svojho „života“. Hviezdy typu  $\delta$  Scuti sú spektrálneho typu A0 až F6, rozmedzie povrchových teplôt je [6300, 8600] K, podľa Chehlaeh a kol. (2023). Hlavná pulzačná perióda je z intervalu [0.01, 0.3] dňa, avšak hviezdy tohto typu majú veľmi často viacero pulzácií radiálnych aj neradiálnych, s často-krát veľmi slabými amplitúdami. Na obrázku 1.9 je zfázovaná svetelná krivka hviezdy V593 Lyr, s periódou pulzácie  $P_1 = 0.1$  dňa.





Obr. 1.8: Graf svetelnej krivky hviezdy typu RR Lyrae. Zdroj: Mikulášek a Zejda (2013).

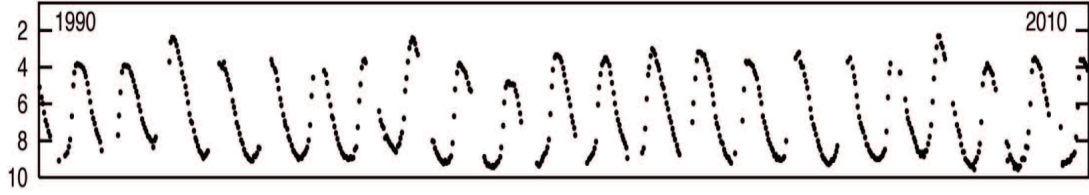


Obr. 1.9: Graf svetelnej krivky hviezdy typu  $\delta$  Scuti. Zdroj: Chehlaeh a kol. (2023).

### 1.3.5 Miridy

Skupina hviezd, ktorá je na H-R diagrame napravo od pásu nestability, a obsahuje spektrálne typy M-K sa nazýva podľa hviezdy o Ceti, Mira. Sú to chladné červené obry vo finálnej fáze svojho vývoja s hmotnosťami do  $10 M_{\odot}$ . Majú veľkú amplitúdu pulzácií, až do 10 magnítud a perióda ich pulzácií je v rozsahu [80, 1100] dní, takže sa právom nazývajú aj dlhoperiodické pulzujúce hviezdy. Na obrázku 1.10 môžeme vidieť, že za 20 rokov meraní určitej miridy prešlo len cca 22 periód.

Existujú ešte ďalšie skupiny pulzujúcich premenných hviezd, ako je vidieť na obrázku 1.5. Za zmienku ešte určite stoja pulzujúci bieli trpaslíci typu ZZ Ceti, ktorí sú na obr. 1.5 označení skratkou DAV. Ďalšia skupina hviezd, pretínajúca pás nestability, sa nazýva pulzátorov typu  $\gamma$  Doradus a na obr. 1.5 majú skratku DSCT. Tie sa vyznačujú existenciou hybridných pulzátorov, najmä pri hviezdach na rozhraní oblastí  $\gamma$ -Dor a  $\delta$ -Scu, a tak obsahujú pulzačné frekvencie oboch typov. Oblať označená Irr zahŕňa polopravidelné a nepravidelné pulzujúce hviezdy.



Obr. 1.10: Graf svetelnej krivky hviezdy typu Mira. Zdroj: Mikulášek a Zejda (2013).

### 1.3.6 Vzťah periód $P_{\text{orb}}$ a $P_{\text{puls}}$ pri zákrytových dvojhviezdach s pulzátorom

Zhang a kol. (2013) odvodili teoretickú závislosť medzi periódou obehu a periódou pulzácií pre dvojhviezdne systémy s jednou pulzujúcou hviezdou. Vychádzajú z Rocheovho modelu 1.7, odkiaľ sa určí ekvivalentný polomer kritickej situácie, keď hviezda vyplní Rocheov lalok  $R_{\text{cr},1}$ . Potom sa stanoví relatívny vyplňovací faktor cez rovnicu

$$f_1 = \frac{R_{\text{eq},1}}{aR_{\text{cr},1}}, \quad (1.11)$$

kde  $R_{\text{eq},1}$  je ekvivalentný polomer pulzátora,  $a$  je veľká poloos relatívnej dráhy. Prepíšeme 3. Keplerov zákon 1.5 pomocou pomeru hmotností  $q = M_2/M_1$  a z rovnice 1.10 vyjadríme pomer hustôt. Ten následne zrovnáme s pomerom hustôt vyjadreným cez hmotnosti a polomery, známym vzorcom  $\rho = M/V$ , kde  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  je objem gule. Dosadíme za polomer z rovnice 1.11 a potom namiesto veľkosti hlavnej poloosi dosadíme prepísaný 3. Keplerov zákon. Potom máme

$$\frac{\rho}{\rho_{\odot}} = \frac{Q^2}{P_{\text{puls}}^2} = \frac{4\pi R_{\odot}^3}{f_1^3 R_{\text{cr},1}^3 G(1+q)P_{\text{orb}}^2}. \quad (1.12)$$

Preusporiadaním, vyjadrením veličín  $Q$ ,  $P_{\text{orb}}$ ,  $P_{\text{puls}}$  v jednotkách deň, hmotnosti a polomery v jednotkách Slnka a aplikovanie logaritmu na obe strany máme finálny vzťah

$$\log P_{\text{puls}} = \log P_{\text{orb}} + \log \left( \frac{Q}{0.112} \sqrt{1+q} f_1^{\frac{3}{2}} R_{\text{cr},1}^{\frac{3}{2}} \right). \quad (1.13)$$

Tento teoretický záver platí pre prípad, že hviezda s indexom 1 je pulzujúca. Zhang a kol. (2013) pomocou tohto teoretického modelu zistili závislosť pre vyše 50 systémov s  $\delta$  Scuti pulzátorom a získali vzťah

$$\log P_{\text{puls}} = \log P_{\text{orb}} - 1.70(\pm 0.16). \quad (1.14)$$

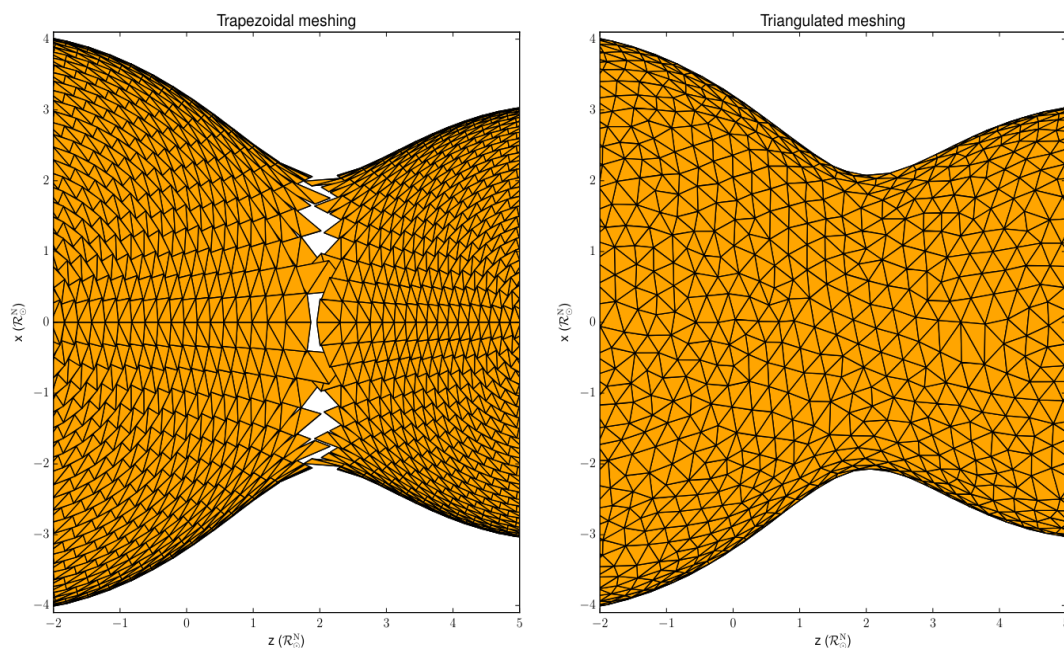
## 1.4 PHOEBE

Program PHOEBE (**P**hysics **O**f **E**clipsing **B**inaries) je voľne dostupný softvér na modelovanie zákrytových dvojhviezd, vyvíjaný už takmer 20 rokov slovinským vedcom Andrejom Pršom. Najprv vznikol program Phoebe 1.0, ktorý bol len nadstavbou programu od Wilsona a Devinneyho (WD) zo 70. rokov. Program Phoebe 1.0 popísaný v článku Prša a Zwitter (2005), pridáva k WD kódu pár vedeckých rozšírení a numerických inovácií. Je stále pomerne často používaný

ako jednoduchá, užívateľsky prívetivá aplikácia písaná v jazyku Fortran, pomocou ktorej fitovaním modelu na experimentálne svetelné krivky a krivky radiálnych rýchlostí vieme určiť fyzikálne a orbitálne parametre dvojhviezdy.

Podľa Prša a kol. (2016), update programu na Phoebe 2 priniesol zásadné zmeny hlavne v redizajnovaní backendu - teda programovej časti, ktorá je písaná v jazyku C pre výpočetnú rýchlosť. Novinka je aj použitie jazyka Python vo fronte - teda v používateľskej časti, najmä kvôli obrovskému využitiu a dlhodobej vysokej celosvetovej popularite a atraktivite.

Program Phoebe je rovnako ako kód WD založený na fyzike Rocheovho modelu. Pomocou rovnice 1.7 modeluje tvar dvojhviezdy. Častokrát sa problém nachádza mimo Rocheových deformácií a vtedy sa dá nastaviť menej fyzikálne presná metóda skreslenia<sup>9</sup> z plného modelu (roche) na rotujúcu hviezdu (rotstar) alebo obyčajnú sféru (sphere), teda bez slapových aj odstredivých vplyvov. Pomocou príslušného potenciálu sa určuje povrch dvojhviezdy. Veľký upgrade oproti Phoebe 1 je modelovanie povrchu dvojhviezd trojuholníkovou sieťou, ktorá, ako je vidieť na obrázku 1.11, presnejšie zaplní povrch a dokonca vie zaplniť hocikjaký povrch, ako uvádza Prša a kol. (2016).



Obr. 1.11: Porovnanie siete používanej programom Phoebe 1 (lichobežníková, naľavo) a Phoebe 2 (trojuholníková, napravo). Zdroj: Prša a kol. (2016).

Pre každý trojuholník sa určujú rôzne lokálne fyzikálne veličiny, ako napríklad efektívna teplota  $T_{\text{eff}}$  a rozloženie lokálneho toku žiarenia  $F$  pomocou lokálnej teploty a koeficientu gravitačného stemnenia  $\beta$ . Koeficient gravitačného stemnenia popisuje sploštenie hviezdy v prípade rýchlejšej rotácie, kedy kvôli odstredivej sile bude na póle menší polomer ako na rovníku, tým je hviezda jasnejšia na pólach. Ďalšie efekty, ktoré môžu hrať rolu v celkovom modelovaní intenzity žiarenia sú použitie príslušného modelu okrajového stemnenia a stanovenie príslušných kon-

<sup>9</sup>Z angl. distortion method.

štánt. Okrajové stmavenie (LD<sup>10</sup>) je jav, kedy pozorujeme stmavnutie okrajov hviezdy oproti centru, pretože vidíme do menšej absolútnej hĺbky hviezdy, kde je nižšia teplota. Ak sa pozeráme rovnobežne s normálou k povrchu hviezdy, tak vidíme tú najhlbšiu a najteplejšiu možnú vrstvu, ako píše Prša a kol. (2016). Efekt odrazu, tretie teleso a povrchová škrvna sú ďalšie možné použiteľné fyzikálne efekty zahrnuté v modeli.

Zostavovanie modelovej svetelnej krivky sa môže diať buď v čase, ktorý je daný v dátach z pozorovania, alebo ak poznáme periódu obehu, tak vo fáze podľa rovnice 1.9, pričom si vieme navoliť, aký bude časový, resp. fázový krok, pre ktorý bude vždy modelovať tok žiarenia dvojhviezdy, ako je spomenuté vyššie. Rovnako tak bude počítat s fázovým posunom na obežnej dráhe, teda veľkú rolu hrajú aj samotné orbitálne parametre. Parametre dostupné vo Phoebe 2 sa delia na tie prislúchajúce primáru, sekundáru a dvojhviezde dokopy. Primárne a sekundárne parametre sú napríklad: veľká poloos eliptickej dráhy komponenty  $a_i$ , hmotnosť komponenty  $M_i$ , LD koeficienty  $x_i, y_i$ , koeficient gravitačného stmavenia  $\beta_i$ , pomer celkového a odrazeného svetla  $F_{\text{refl},i}$ , perióda rotácie, parameter synchronicity, povrchová teplota  $T_{\text{eff},i}$ , ekvivalentný polomer  $R_{\text{eq},i}$ , počet trojuholníkov  $n_i$ . Veľa z nich je prepojených cez takzvané obmedzenia<sup>11</sup>, teda ak je parameter obmedzený, tak sa jeho hodnota nedá manuálne meniť, ale vždy sa zmení, ak sa zmení parameter v argumente obmedzenia. Parametre dvojhviezdy sú napríklad perióda obehu systému  $P_{\text{orb}}$ , zmena periódy  $\frac{dP_{\text{orb}}}{dt}$ , argument pericentra  $\omega_0$ , aj jeho časová zmena  $\frac{d\omega_0}{dt}$ , excentricita  $e$ , čas primárneho zákrytu  $t_0$ , inklinácia roviny obehu s rovinou pozorovateľa  $i$ , pomer hmotností  $q$ , pomer efektívnych teplôt, pomer ekvivalentných polomerov, súčet zlomkových relatívnych polomerov<sup>12</sup>  $R_{\text{sf}} = \frac{R_{\text{eq},1} + R_{\text{eq},2}}{a}$ , veľká poloos relatívnej dráhy  $a$ , a pomocné kombinácie  $a \sin i$ ,  $e \cos \omega_0$ ,  $e \sin \omega_0$ .

Phoebe 2 ponúka rôzne nástroje na určenie globálnych hodnôt parametrov dvojhviezdy a aj chýb týchto parametrov. Najprv je dobré využiť nástroj s názvom Estimátor. Phoebe 2 pri svetelných krivkách ponúka 2 užitočné odhadovače/estimátory niektorých parametrov. Ako uvádza Conroy a kol. (2020), sú to LC Geometry (geometria svetelnej krivky) a EBAI (umelá neurónová sieť dvojhviezd). Phoebe 2 obsahuje aj estimátory orbitálnej periódy v podobe LC a RV periodogramov, a estimátor RV geometrie, ktorý odhaduje parametre z dát kriviek radiálnych rýchlostí.

## LCG estimátor

Odhadovač geometrie svetelných kriviek je výhodný na určenie parametrov, ktoré sa týkajú tvaru dráhy dvojhviezd, bez toho aby sa zostrojovala modelová krivka. Využívajú 2-Gaussiánsky model uvedený v článku od Mowlavi a kol. (2017). Treba vedieť orbitálnu periódu, aby sme pomocou rovnice 1.9 mohli prejsť do fázy, kde následne modelovú funkciu estimátor fituje na zfázované dáta. Potom LCG estimátor fituje modelovú funkciu, ktorá pozostáva z jednej Gaussovej krivky fitujúcej na jeden zákryt, druhej na druhý zákryt, kosínusoidu na ako také fitnutie elipsoidálnych variácií a fituje aj konštantu, teda kalibrácia osi  $y$ . Pričom

<sup>10</sup>Z angl. Limb Darkening.

<sup>11</sup>Z angl. Constraints.

<sup>12</sup>Z angl. Sum of Fractional Equivalent Radii.

fituje dokopy 7 modelov, tvorených z kombinácií 2 Gaussoviek, konštanty a kosínusovky, a pomocou nákladovej funkcie<sup>13</sup> BIC (Bayesovo informačné kritérium), určí, ktorý z modelov najlepšie odpovedá dátam. Potom z parametrov najlepšieho modelu ľahko určíme informácie o zákrytoch. Mowlavi a kol. (2017) uvádza, že fázová hodnota minima zákrytov je rovná strednej hodnote Gaussiánu  $\varphi_i = \mu_i$ , pričom sa štandardne (ako je spomenuté vyššie) udáva stred primárneho minima ako  $\varphi_1 = \mu_1 = 0$ . Šírka zákrytov sa udáva ako  $w_i = 5.6\sigma_i$ , kde  $\sigma_i$  je štandardná odchýlka Gaussovej krivky. Hĺbka zákrytu  $d_i = C - \text{flux}(\varphi_i)$ , tu  $C$  je spomínaný konštantný člen, od ktorého odpočítavame hodnotu svetelného toku v minime zákrytu. Conroy a kol. (2020) udáva vzťahy, pomocou ktorých sa z  $\varphi_i$ ,  $w_i$ ,  $d_i$  dajú určiť parametre  $t_0$ ,  $e$ ,  $\omega_0$ . V novej verzii Phoebe 2.4 zo začiatku roku 2022 sa k LCG modelu pridali aj výpočty na odhad parametrov  $T_{\text{eff},2}/T_{\text{eff},1}$  a  $R_{\text{sf}}$  rovnicami

$$\begin{aligned} \frac{T_{\text{eff},2}}{T_{\text{eff},1}} &= \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{\frac{1}{4}}, \\ \frac{R_{\text{eq},2} + R_{\text{eq},1}}{a} &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{w_1(1 - e^2)}{1 + e \sin(\omega_0)} + \frac{w_2(1 - e^2)}{1 - e \sin(\omega_0)} \right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

### Nelder-Mead Simplexový Optimalizátor (NMS)

Keď už máme získané hodnoty parametrov z estimátorov, resp. ak niektoré hodnoty veličín poznáme z iného zdroja, tak ich môžeme prijať a nechať ponechané ako fixné hodnoty. Ostatné hodnoty parametrov však bude treba nejak presne určiť/nájsť najlepšiu pravú kombináciu hodnôt parametrov aby modelová krivka, ktorú pomocou týchto parametrov zostrojíme, najlepšie vystihovala experimentálne dáta. Nástroj na stanovenie vhodnosti modelu je okrem vizuálnej zhody modelu s dátami aj takzvaná meritná funkcia. Vo Phoebe je to primárne  $\chi^2$ , alebo „chí kvadrát“, ktorý vyjadruje rozdiel medzi experimentálnymi dátami a modelom podľa Conroy a kol. (2020)

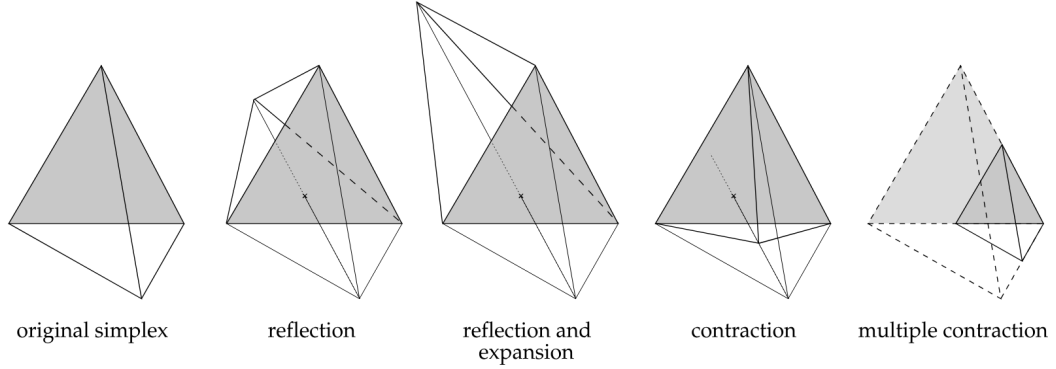
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i^{(o)} - y_i^{(m)})^2}{\sigma_i^2} + \ln(\sigma_i^2), \quad (1.16)$$

kde  $N$  je počet experimentálnych dát, index  $o$  je pre experimentálne dáta, index  $m$  je určená hodnota modelom a  $\sigma_i$  sú neistoty merania.

Každý optimalizátor pracuje tak, že sa snaží minimalizovať túto meritnú funkciu, teda prepočítavať tak parametre, aby model minimalizoval rozdiel od meraných dát. Phoebe 2 ponúka viacero optimalizátorov, ale na prácu s náročným nelineárnym problémom je najlepšie použiť dostupný<sup>14</sup> simplexový optimalizátor od Nelder a Meada (1965). NMS optimalizátor pracuje s  $n$ -dimenzionálnym hyperpriestorom parametrov a ako popisuje Gavin (2023), snaží sa minimalizovať funkciu  $\chi^2(\mathbf{x})$  pre vektor z hodnôt  $x_i$  parametrov  $i$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Definuje sa simplex ako objekt na  $\mathbb{R}^{n+1}$ , ktorý berie  $n + 1$  kombinácií parametrov, teda  $\mathcal{S} = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n+1)})$ , ktoré charakterizujú vrcholy simplexu v hyperpriestore parametrov. Ďalej sa zavádzajú 4 operácie, ktoré iteratívne menia vrcholy simplexu, tak, že sa približujú k minimálnej hodnote funkcie  $\chi^2$ . Všetky 4 operácie sú zobrazené na obrázku 1.12.

<sup>13</sup>Z angl. cost function.

<sup>14</sup>Z angl. downhill.



Obr. 1.12: Ukážka simplexu v 3D a jeho transformácií. Zdroj: Prša a Zwitter (2005).

Algoritmus jednej iterácie sa riadi možnými transformáciami simplexu ako je na obrázku 1.12, postupne je však: (1) Triedenie podľa funkčných hodnôt  $\chi^2(\mathbf{x}^{(i)}) < \dots < \chi^2(\mathbf{x}^{(j)}) < \chi^2(\mathbf{x}^{(k)})$ , kde  $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \neq j \neq k$ , ďalej algoritmus rieši „najvzdialenejší“ bod  $\mathbf{x}^{(k)}$ . (2) Zrkadlenie najhoršieho vrcholu  $\mathbf{x}^{(k)}$  cez ťažisko zostávajúcich  $n$  vrcholov do nového vrcholu  $\mathbf{r}$  (druhý obrázok zľava na obr. 1.12), zároveň ak je  $\chi^2(\mathbf{x}^{(i)}) < \chi^2(\mathbf{r}) < \chi^2(\mathbf{x}^{(j)})$ , skontroluje konvergenciu, inak (3) skontroluje, či  $\chi^2(\mathbf{r}) < \chi^2(\mathbf{x}^{(i)})$  a zrkadlený vrchol ešte predĺži, ako je to na prostrednom obrázku 1.12, alebo (4) ak neplatí ani (2) ani (3), tak  $\chi^2(\mathbf{x}^{(j)}) < \chi^2(\mathbf{r}) < \chi^2(\mathbf{x}^{(k)})$  a nastane kontrakcia (2. obrázok zprava v 1.12). V určitom prípade môže nastať mnohonásobná kontrakcia, ak napríklad už sme blízko minima vo všetkých vrcholoch simplexu. Nakoniec sa overí konvergencia simplexov, či už rozdielom vrcholov alebo funkčných hodnôt vrcholov

$$2 \max \left( \left| \frac{\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}}{\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}} \right|, \left| \frac{\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(3)}}{\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{x}^{(3)}} \right|, \dots, \left| \frac{\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n+1)}}{\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{x}^{(n+1)}} \right| \right) < \epsilon_x, \quad (1.17)$$

$$\left| \frac{\chi^2(\mathbf{x}^{(n+1)}) - \chi^2(\mathbf{x}^{(1)})}{\chi^2(\mathbf{x}^{(1)}) + 10^{-9}} \right| < \epsilon_\chi,$$

tu  $\epsilon_x$  a  $\epsilon_\chi$  sú vstupné parametre vo Phoebе pod názvom `xatol` a `fatol` a ich predvolená hodnota je  $10^{-4}$ . V rovniciach 1.17 sa berú už vytriedené, zoradené hodnoty vrcholov finálneho simplexu  $\mathcal{S}_{\text{optim}}$ . Týmto štýlom dostaneme optimalizované hodnoty  $n$  fitujúcich parametrov nášho modelu.

## Markovov Reťazec Monte Carlo (MCMC)

MCMC vzorkovač je primárne používaný na preskúmanie lokálneho priestoru zvolených parametrov, zistiť ich vzájomné korelácie a neistoty. Phoebе 2 používa MCMC algoritmus v podobe Python knižnice `emcee` od Foreman-Mackey a kol. (2013). Vzorkovač MCMC pracuje s dobre definovanými distribúciami parametrov, napríklad a najčastejšie s Gaussovými distribúciami. Ako píše Conroy a kol. (2020), vstupné distribúcie parametrov, ktoré chceme cez algoritmus pustiť, sú Gaussove rozdelenia so strednou hodnotou, ktorou je riešenie z optimalizátora. Môžeme ešte pridať aj apriorné rozdelenia pre určité parametre, ak poznáme nejakú bližšiu vstupnú informáciu pre tieto parametre. MCMC pracuje s meritnou funkciou, ktorá je rovná  $-0.5\chi^2$ , ak nie sú prítomné priory. Algoritmus vykonáva

náhodný výber z rozdelení parametrov a buď tento výber príjme, alebo odmietne v závislosti na meritnej funkcii pre daný výber. Automaticky sa odmietajú aj vzorky, ktoré spôsobujú nefyzikálne riešenie pre daný problém. Vzorkovanie sa vykonáva na viacerých úrovniach naraz, každé však nezávisle. Tieto úrovne sa nazývajú reťaze alebo chodci. Parametrom  $n_{\text{walkers}}$  určujeme, koľko reťazí má paralelne vykonávať vzorkovanie. Títo chodci majú možnosť počítačovej paralelizácie, teda ideálne každý chodec pôsobí sám na jednom jadre procesorov. Nastavením parametra  $n_{\text{iters}}$  určíme, koľko iterácií má MCMC algoritmus vykonať, pred ukončením. Ak sa dosiahne finálnej iterácie, algoritmus skončí a vzorkovanie zo všetkých chodcov sa zhrnie do koncovej posteriórnej distribúcie jednotlivých parametrov a ich korelácií. Následne môžeme určiť neistoty parametrov z posteriórnych rozdelení, ak ich fitneme Gaussovou krivkou, potom je chyba parametrov  $1\sigma$  štandardná odchýlka Gaussiánu.

Parametre sú rôzne prepojené cez spomínané fyzikálne vzťahy Constraints. Ak budeme vedieť chybu veličín  $x_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , kde  $n$  je počet parametrov, vstupujúcich do funkcie  $f(\mathbf{x})$ , pomocou ktorej sú prepojené. Potom neistota funkcie  $f(\mathbf{x})$  sa dá spočítať cez všeobecnú rovnicu prenosu chýb ako

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2. \quad (1.18)$$

## 1.5 Periodogramy

Periodogram je nástroj na získanie periód periodického signálu. Periodický signál sa vyskytuje vo väčšine svetelných kriviek zákrytových dvojhviezd a takisto aj vo väčšine svetelných kriviek pulzujúcich hviezd. Ak pulzujúce hviezdy obsahujú veľké množstvo radiálnych aj neradiálnych pulzácií, periodogram dokáže rozložiť zložitý signál a určiť jednotlivé pulzačné frekvencie.

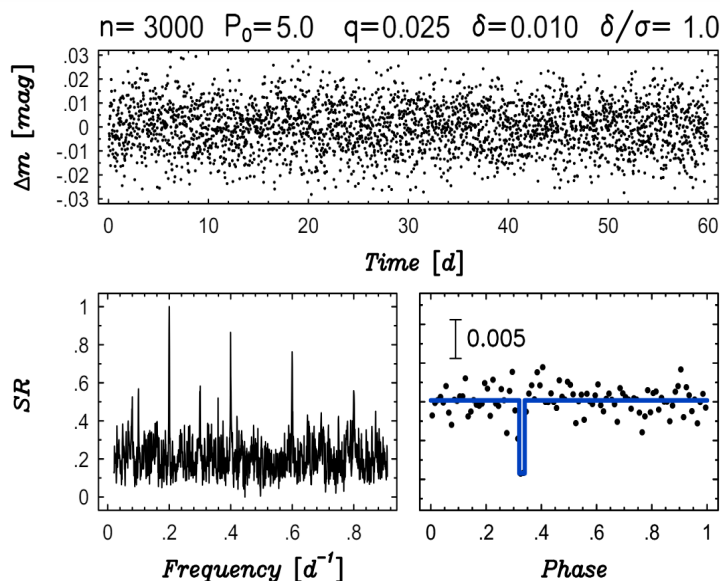
### Box-Least-Squares Periodogram (BLS)

Kovács a kol. (2002) popisuje vo svojom článku periodogram, ktorý je vhodný na určenie obežnej periódy exoplanét okolo ich materských hviezd, resp. aj na určenie presnej hodnoty periódy zákrytových dvojhviezd, ktorých svetelné krivky nevykazujú nesínusoidový tvar, napr. dvojhviezdy typu Algol, na prvom obrázku zľava 1.4. Používajú k tomu skokovú funkciu, ako je vidieť na obrázku 1.13 modrou, ktorá fituje experimentálne dáta.

Skoková funkcia je popísaná hĺbkou skoku, šírkou minima skoku (tranzitu) a referenčným časom určeným v strede skoku. Na vstup periodogramu sa môže zadať minimálna a maximálna hodnota periódy, trvanie/šírka tranzitu a frekvenčný faktor, ktorý spolu s  $P_{\text{max}}$  a  $P_{\text{min}}$  udáva frekvenčný krok  $df$ , ktorý udáva počet frekvencií (obrátených hodnôt periódy), pre ktoré bude BLS periodogram zostrojovať amplitúdy (power). Tie sú určené ako logaritmická pravdepodobnosť, podľa kódu v Python knižnici Astropy

$$\log \mathcal{L}(P, \tau, t_0) = -\frac{1}{2} \sum_{\text{in}} \frac{(y_n - y_{\text{in}})^2}{\sigma_n^2} - \frac{1}{2} \sum_{\text{out}} \frac{(y_n - y_{\text{out}})^2}{\sigma_n^2}, \quad (1.19)$$

kde  $P$  je daná perióda,  $\tau$  je trvanie tranzitu,  $t_0$  je referenčný čas,  $y_n$  sú hodnoty toku/jasnosti,  $\sigma_n$  sú príslušné (Gaussovsky rozložené) chyby k  $y_n$  a  $y_{\text{in}} = \frac{\sum_{\text{in}} y_n / \sigma_n^2}{\sum_{\text{in}} 1 / \sigma_n^2}$ ,



Obr. 1.13: Ukážka použitia BLS periodogramu. Horný obrázok: časové dáta jasnosti v magnitúdach. Dolný ľavý obrázok: frekvenčné spektrum. Dolný pravý obrázok: zfázované dáta cez získanú periódu. Zdroj: Kovács a kol. (2002).

$y_{\text{out}} = \frac{\sum_{\text{out}} y_n / \sigma_n^2}{\sum_{\text{out}} 1 / \sigma_n^2}$  sú maximálne pravdepodobné hodnoty toku v tranzite a mimo tranzitu. Členy napravo v rovnici 1.19 sú dôvod, prečo sa tento periodogram volá po metóde najmenších štvorcov. Hodnoty amplitúdy periodogramu  $A_{\text{BLS}}(P)$  sa počítajú pre všetky príslušné hodnoty  $\tau$  a  $t_0$  a tie čo dávajú maximálne hodnoty sa nakoniec ponechajú pre všetky prítomné hodnoty periód.

### Lombov-Scarglov Periodogram (LS)

Na vyšetrenie komplikovaného signálu, ktorý obsahuje sínusoidové signály sa používa Lombov-Scarglov periodogram. Je veľmi výhodný na pracovanie s nerovnomerne rozloženými dátami, teda presne takými, aké máme k dispozícii z teleskopov. Ako odvodzuje VanderPlas (2018), tak z diskkrétnej Fourierovej transformácie (DFT) sa dá odvodiť zdĺhavý vzorec na výpočet  $A_{\text{LS}}(f)$  periodogramu pre každú z testovacích frekvencií. Ďalej popisuje, že platí ekvivalencia medzi prístupom odvodenia LS periodogramu z DFT a pomocou metódy najmenších štvorcov (MNS). V MNS sa pre každú frekvenciu berie sínusovka, ktorá sa následne fituje na experimentálne dáta pomocou spomínanej MNS

$$y(t; f) = A_f \sin(2\pi f(t - \phi_f)) , \quad (1.20)$$

tu  $A_f$  je amplitúda sínusoidy, fáza ako funkcia frekvencie  $\phi_f$ . Zkonštruujeme  $\chi^2$  pre dáta  $y_n$  s neistotami  $\sigma_n$

$$\chi^2(f) \equiv \sum_n \left( \frac{y_n - y(t_n; f)}{\sigma_n} \right)^2 , \quad (1.21)$$

kde index  $n$  značí počet dát. Potom hodnota amplitúdy periodogramu sa spočíta minimalizovaním 1.21 vzhľadom na  $A_f$  a  $\phi_f$  pre každú frekvenciu a rovnako ako



VanderPlas (2018) môžeme označiť túto minimalizovanú hodnotu ako  $\hat{\chi}^2$  a spolu s posunutím o nemenný referenčný model  $\hat{\chi}_0^2$  je hodnota amplitúdy periodogramu

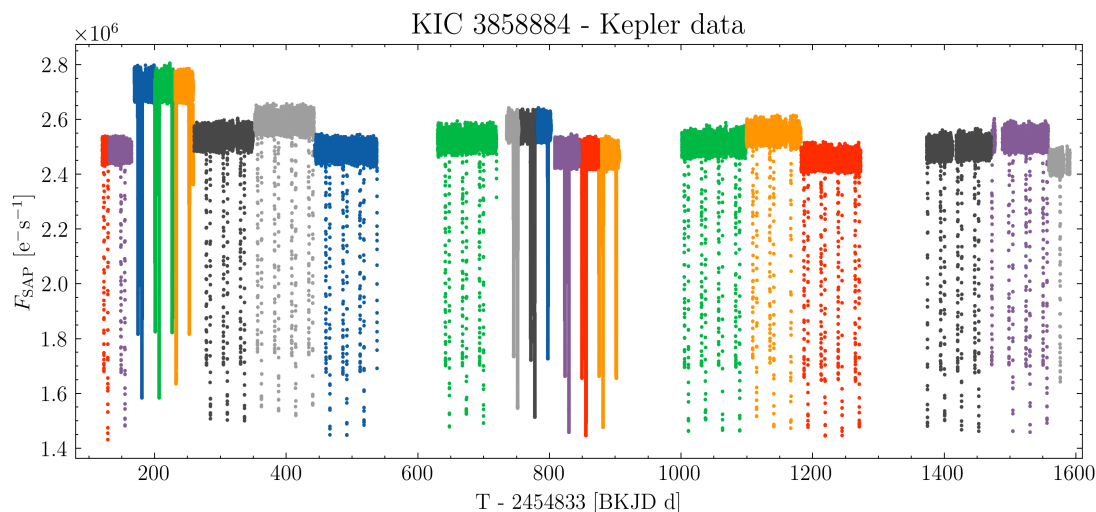
$$A_{\text{LS}} = P(f) = \frac{1}{2} (\hat{\chi}_0^2 - \hat{\chi}^2(f)) . \quad (1.22)$$

Knižnica Pyriod v jazyku Python používa LS periodogram na motívy staršej aplikácie Period04. Po vložení experimentálnych dát sa automaticky vygeneruje periodogram, v ktorom si môžeme vyberať jednotlivé frekvencie. Po adoptovaní frekvencie sa vygeneruje model ako spomínaný MNS model sínusoidy. Následne sa môžu zobraziť napríklad reziduá medzi modelom a dátami. Takže aj tam sa aplikujú obe metódy LS periodogramu, najprv DFT a následne manuálne MNS.

## 2. Dáta z Keplera

Vytipovanie si hviezdneho systému KIC 3858884 bolo jednoduché. Už na prvý pohľad to bola klasická svetelná krivka typu Algol, ale s pomerne výrazne excentrickou dráhou a dlhou periódou obehu, približne 25 dní. Avšak veľmi výrazné pulzácie, ktoré sú vidieť na obrázku 2.2 tvoria pulzačné „vlnové balíky“ a tým mi poskytli možnosť analyzovať multiperiodický systém pulzácií, ktorý rozoberám v kapitole č. 4 a v kapitole Diskusia.

Najskôr som sa rozhodol pracovať s fotometrickými dátami z družice Kepler, pretože databáza obsahovala oveľa viac dostupných dát, ako z družice TESS. Dáta sú dostupné v databázi MAST, kde si je možné stiahnuť fotometrické dáta z jednotlivých pozorovacích kvartálov ako .fits súbor. Existuje však priame prepojenie medzi archívom MAST a pythonovskou knižnicou lightkurve, takže bolo jednoduché priamo používať dostupné svetelné krivky. Mal som k dispozícii dáta zo 14 kvartálov, ako je to vidieť na obrázku 2.1. Je tam vidieť prejav použitej krátkej a dlhšej kadencie Keplera. Dlhá kadencia obsahuje riedke zastúpenie dát a v jednom kvartáli je reprezentovaná jednou farbou. Krátka kadencia je na obr. 2.1 s oveľa hustejšími dátami a ich kvartál sa delí na 3 farby, pre každý mesiac jednu. Je vidieť, že mimozákrytový medián toku je v každom kvartáli rozdielny. To je preto, že ďalekohľad Kepler sa každý kvartál otáča o  $90^\circ$ , aby bol protisľnečný štít natočený smerom k Slnku. Z tohto dôvodu dopadajú fotóny z cieľovej hviezdy na inú časť CCD sústavy, s inou citlivosťou. Takže je zrejmé, že dáta z každej sezóny (určitý kvartál každého roku) majú viac menej rovnaký medián. Jedna sezóna každého roku okrem prvého neobsahuje žiadne dáta, čoho dôvod môže byť napríklad výpadok danej série pixelov. Medzi kvartálmi sú krátke medzery kvôli prenosu dát na Zem a občasné prázdne miesta medzi dátami môžu byť z dôvodu bezpečnostného módu, ako uvádza Van Cleve a kol. (2016).

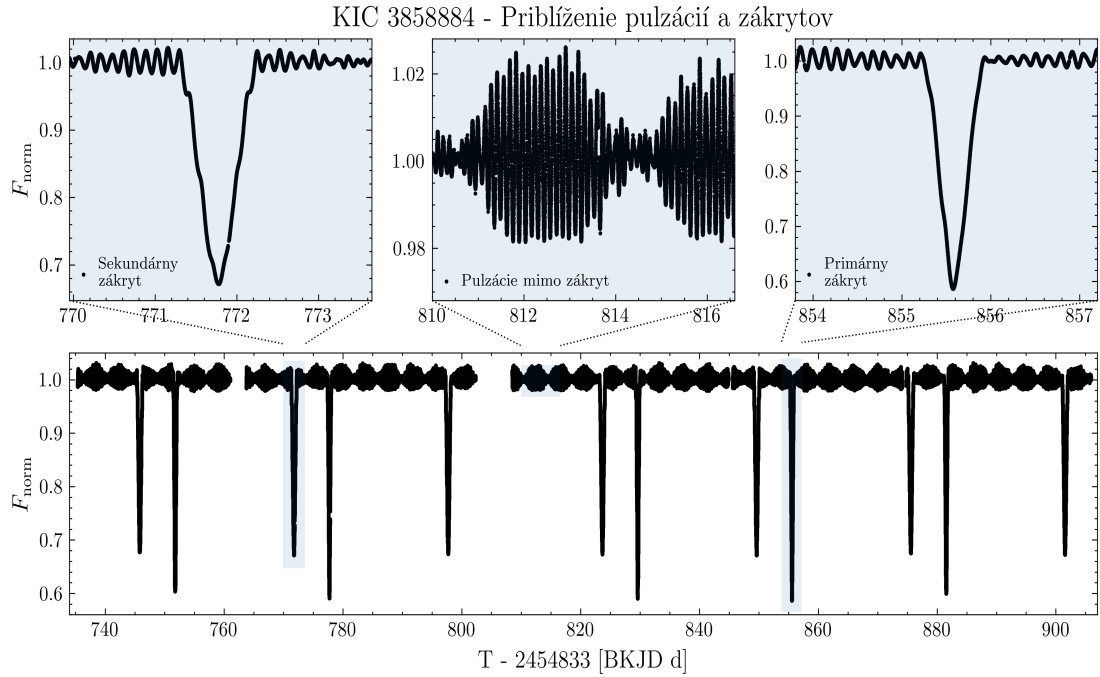


Obr. 2.1: Časové fotometrické dáta z družice Kepler pre objekt KIC 3858884 dostupné z archívu MAST.

Svetelné krivky z družice Kepler ponúkajú dva typy tokov v jednotkách elektrón za sekundu, ktorý sa viaže k detekovaným fotónom na CCD detektore. Tok jednoduchej apertúrnej fotometrie  $F_{\text{SAP}}$  je získaný z TPF súborov použitím aper-

túry na niekoľko pixelov, z ktorých vysčíta prijaté signály, dokonca ponúka aj chyby toku ako  $1\sigma$  odchýlku zo štandardného prenosu chýb z TPF súborov, ako píše Kinemuchi a kol. (2012). LCF súbory ponúkajú aj tok PDCSAP, ktorý je opravený  $F_{\text{SAP}}$  o započítané jasnosti okolitých telies a rôzne prítomné (aj technické) systematické chyby. V tomto prípade, keď som porovnal tok SAP a PDCSAP, tak dáta z prvých 5 mesiacov, sa takmer úplne zhodovali pre oba typy tokov, avšak v ďalších kvartáloch sa v PDCSAP toku prejavovali trendy, ktoré pri SAP toku nie sú. Preto som sa rozhodol použiť SAP tok.

Tým, že kvartály majú odlišné hodnoty mediánov toku, zároveň je tok uvedený v nefyzikálnych jednotkách a k riešeniu svetelnej krivky treba primárne relatívne merania toku, rozhodol som sa ho znormalizovať. Normalizáciu som spravil štandardnou metódou používanou napríklad aj spomínanou knižnicou lightkurve vydelením toku mediánom toku pre každý kvartál. Tým som dostal  $F_{\text{norm}}$  v relatívnych jednotkách. Ukážka dvoch kvartálov KK v okolí dňa 800 BKJD z obr. 2.1 spolu s priblíženiami na jeden primárny a sekundárny zákryt a priblíženie pulzačného balíka mimo zákrytov je na obr. 2.2.



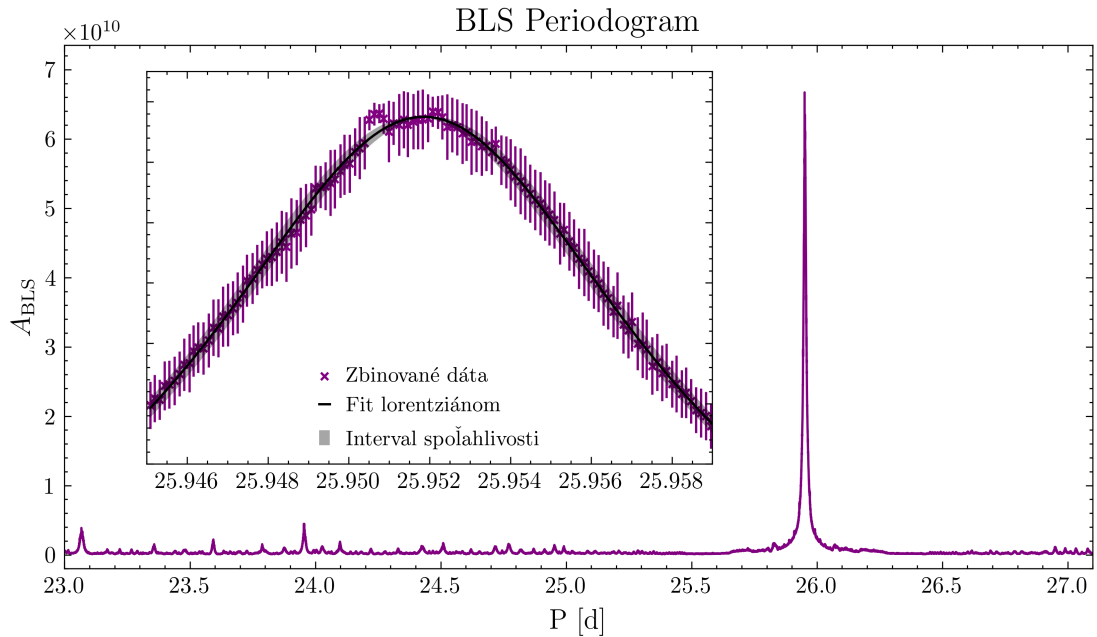
Obr. 2.2: Graf s priblížením na určité časové obdobie krátkej kadencie normalizovaného toku. Ukážky sekundárneho zákrytu, pulzácií mimo zákryt a primárneho zákrytu.

## 2.1 Určenie periódy obehu systému

Po úspešnom znormalizovaní dát je treba vyriešiť jeden dôležitý problém, a to čo najpresnejšie určenie orbitálnej periódy  $P_{\text{orb}}$  systému. Z obrázku 2.2 je jasne vidieť, že perióda bude približne 26 dní, no na jej presné určenie je dobré použiť BLS periodogram, ako je popísaný v teoretickom úvode. Knižnica lightkurve má priame prepojenie na BLS periodogram od Astropy, kde som najprv ako vstupné dáta zadal  $P_{\text{min}} = 23$  dní,  $P_{\text{max}} = 28$  dní,  $\tau = 0.05$  je šírka tranzitu a  $\mathcal{F}_{\text{freq}} = 8$

je frekvenčný faktor. Časť periodogramu takto získaného je na obrázku 2.3 v pozadí. Je na ňom jasne vidieť ohromnú silu špicu (peaku) v okolí periódy 26 dní, v porovnaní so silami okolitých periód. Ako už bolo povedané, vstupné hodnoty periodogramu sú  $\tau$  a  $\mathcal{F}_{\text{freq}}$ , na ktorých veľmi závisí výsledné krokovanie testovacích periód a tým aj samotné určovanie  $A_{\text{BLS}}$ , pričom sa vyprodukuje zašumenie v peakoch a teda perióda, ktorá má maximálnu hodnotu  $A_{\text{BLS}}$  je iná ako perióda odpovedajúca stredu peaku.

Na vyriešenie tohto problému, teda odstránenie vplyvu zašumenia spôsobeného citlivosťou periodogramu na vstupné parametre som určil dokopy 589 peakov v okolí kandidátskej periódy pre  $P_{\text{min}} = 25.92$  dní,  $P_{\text{max}} = 25.98$  dní,  $\tau \in [0.02, 0.20]$  s krokom 0.01 a  $\mathcal{F}_{\text{freq}} \in [5, 35]$  s krokom 1. Všetky takto získané periodogramy obsahovali len jeden a ten istý peak, mali však rozdielne hodnoty  $A_{\text{BLS}}^{\text{max}}$  a tak som ich nanormoval podelením týmito maximálnymi hodnotami. Následne som spravil zbinovanie/zpriemerovanie hodnôt  $A_{\text{BLS}}$  v bine o šírke  $1.2 \cdot 10^{-4}$  dňa<sup>1</sup> a takto zbinované dáta  $\bar{A}$  sú v samostatnom okne grafu 2.3 ako fialové body. Sú tam zaznačené aj chyby  $\sigma_A$  (vertikálne úsečky) určené ako štandardná odchýlka z každého binu  $\sigma_A = \sqrt{(\sum_i^N (A_i - \bar{A})^2) / N}$ ,  $N$  je počet dát v bine.



Obr. 2.3: BLS Periodogram spolu s výškom znormovaného zbinovaného peaku s fitom lorentziánu, ktorého stred stanovuje hodnotu  $P_{\text{orb}}$ , ktorá je následne akceptovaná.

Na vrchnú časť zbinovaných dát<sup>2</sup> som nafitoval Lorentzovu funkciu v tvare

$$f_{\text{Lor}}(x) = a_0 + \frac{b_0^2}{b_0^2 + (x - c_0)^2}, \quad (2.1)$$

<sup>1</sup>Inak povedané interval  $P_{\text{max}} - P_{\text{min}}$  som rozdelil na 500 binov.

<sup>2</sup>Periodogramový peak nie je dokonale popisateľný Lorentziánom, pretože sa trochu viac rozchádzajú v krídlach a zároveň bolo treba určiť len stred peaku, tak preto bola vybratá len vrchná cca polovica peaku zbinovaných dát.

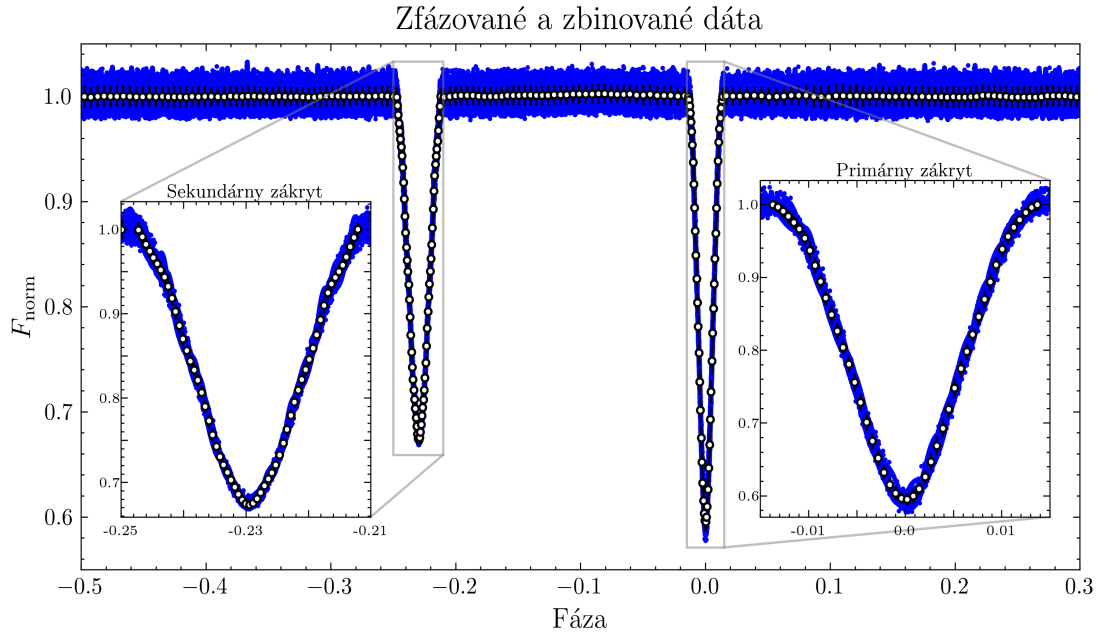
kde  $a_0$  je vertikálne posunutie,  $b_0$  je šírka Lorentziánu a  $c_0$  je hľadaná hodnota centra Lorentziánu, ktorým charakterizujem výslednú hodnotu  $P_{\text{orb}}$ . Pomocou Python knižnice Scipy a funkcie `optimize.curve_fit` som metódou najmenších štvorcov nafitoval funkciu  $f_{\text{Lor}}(P)$  ako je to vidieť na obrázku 2.3. Chyba parametra je získaná tradične z odmocniny diagonálnych členov kovariančnej matice, ktorá je ale pre hodnotu chyby periódy veľmi podcenená (iba  $1.1 \cdot 10^{-5}$  dňa  $\sim 1$  s.), preto som určil odhad chyby periódy min-max metódou, čo je znázornené na grafe 2.3 ako interval spoľahlivosti. Nakoniec výsledná hodnota parametra  $c_0$ , resp.  $P_{\text{orb}}$  bola stanovená na hodnotu

$$P_{\text{orb}} = (25.95185 \pm 0.00022) \text{ d}, \quad (2.2)$$

pričom táto chyba odpovedá presnosti asi 20 sekúnd.

## 2.2 Zbinovanie dát

Pomocou rovnice 1.9 som zfézoval všetky znormované dáta z družice Kepler. Čas  $t_0$  som manuálne nastavil, aby bol primárny zákryt vo fáze 0. Kvôli tomu, že program Phoebe pracuje neefektívne so stovkami tisíc dátových bodov, bolo treba zredukovať tieto dáta na pár stoviek. Využil som obdobnú zbinovaciu metódu ako v predošlej sekcii, lenže tentokrát som si fázové hodnoty rozdelil a binoval rozdielne pre dáta mimo zákrytov a pre dáta v zákrytoch, ktorých hranice som len odhadol. Mimo zákryty som použil fázovú šírku binu 0.005 a vnútri zákrytu fázovú šírku binu 0.0006. Tým som dostal 296 bodov a tie sú zobrazené na obrázku 2.4. Jednoduchým spôsobom som odstránil prejav pulzácií hlavne mimo zákrytov.



Obr. 2.4: Zfézované a zbinované dáta normovaného toku s priblížením na oba zákryty vo fáze. Modrou farbou sú zfézované všetky dáta z Keplera. Bielou farbou sú zbinované dáta určené dvojkrokovou metódou.

### 3. Modelovanie svetelnej krivky

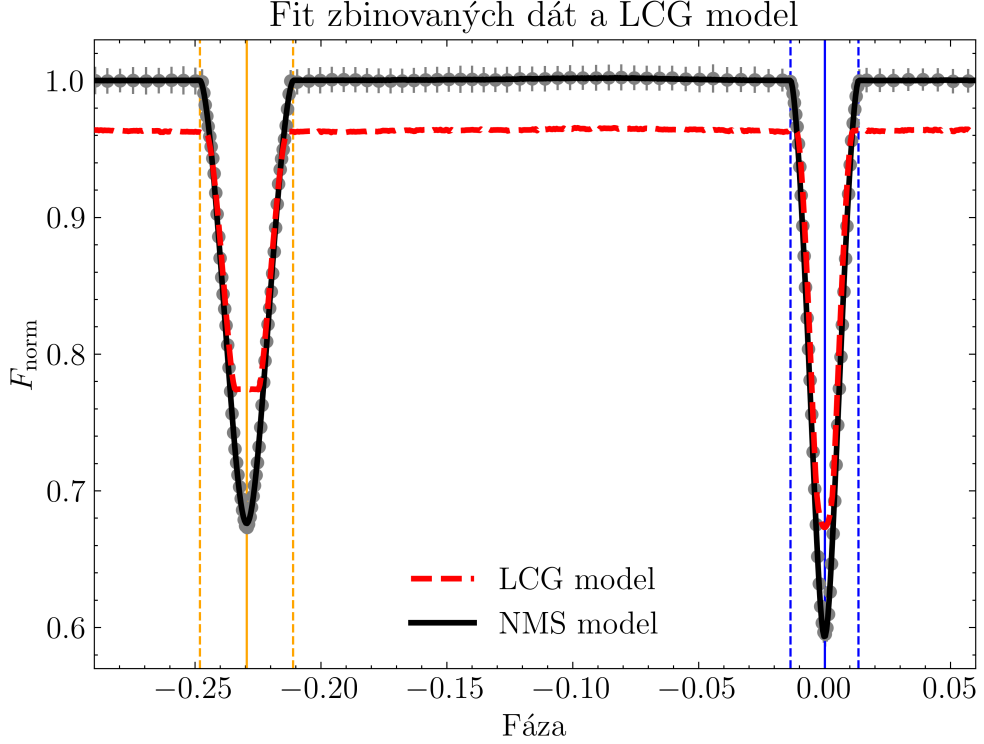
Po určení periódy obehu systému a získaní znormovaných a zbinovaných dát spolu s nepresnosťami určenými tak, ako v sekcii 2.1 som mohol finálne prejsť do programu Phoebe. Cieľom tejto kapitoly je stanovenie najlepšieho možného riešenia kombinácie parametrov určením modelovej svetelnej krivky. Keďže cieľom tejto práce vôbec nie je riešiť spektroskopickú analýzu tohto systému, tak som nemal k dispozícii možnosť určiť veľkú časť parametrov, ako to uvádza Harmanec a kol. (2023) v tabulke č. 1. Preto som si musel požičať a ponechať fixnými zopár parametrov, získaných pomocou spektroskopickkej analýzy. Používam tak rovnaké hodnoty pre  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $R_1$  a  $T_1$  ako Maceroni a kol. (2014). Hodnoty týchto parametrov spolu s periódou a  $t_0$  z predošlej sekcii rovno akceptujem a ponechám ich fixné (okrem  $t_0$ ) po celý čas modelovania. Hneď na to bez ďalších zmien zbehnem estimátor LC Geometry na úvodný odhad parametrov  $T_{\text{eff},2}/T_{\text{eff},1}$ ,  $t_0$ ,  $e$ ,  $\omega_0$  a  $(R_{\text{eq},1} + R_{\text{eq},2})/a$ . Model s takto odhadnutými hodnotami parametrov je zobrazený na obrázku 3.1.

Hneď po použití LCG estimátora je na rade začať s optimalizovaním vybraných parametrov a tým určiť najlepšie globálne riešenie. Použitý bol spomínaný Nelder Mead simplexový (NMS) optimalizátor. Keďže beh stoviek iterácií optimalizátora bez počiatkových úprav môže byť veľmi časovo a výpočetne náročný, bolo treba upraviť pár všeobecných parametrov, spomínaných v úvode a zároveň popísaných v jednom tutoriáli na stránkach Phoebe. Upravil som počet trojuholníkov povrchovej siete pre obe hviezdy  $n_{\Delta,1} = n_{\Delta,2} = 120$ , metódu deformácie som prenastavil z 'roche' na 'sphere', teda Kopalov potenciál na zostrojenie povrchov hviezd sa počíta oveľa jednoduchším vzorcom ako 1.7 a je to krok, ktorý veľmi urýchľuje chod optimalizátora a pre dvojhviezdu, ktorá je pomerne ďaleko od Rocheových lalokov to je uspokojujivý predpoklad. Ďalej bola prenastavená metóda ožarovania z 'horvat' na 'none' a nakoniec som použil parameter `compute_phases` s obmedzením sa len na zákryty a ich blízke okolie, aby sa pri zostrojovaní modelu dobre nafitovali hlavne minimá zákrytu. Týmito krokmi som bol schopný časovo náročný optimalizátor zmeniť z 30s/iteráciu na cca 3s/iteráciu.

Vykonával som viacero rôznych behov, fitoval som rôzne parametre, hlavne teda tie relatívne ako pomery polomerov, teplôt alebo  $R_{\text{sf}}$  a ďalej tie geometrické ako  $i$ ,  $e \cos \omega_0$ ,  $e \sin \omega_0$ ,  $t_0$ . Nastavoval som pri každom behu rôzne hodnoty maximálneho počtu iterácií a z teoretického úvodu z rovníc 1.17 som nastavoval parametre `xatol` a `fatol` najčastejšie na 0.005, neskôr aj 0.001. Na záver som ešte fitoval aj koeficienty okrajového ztemnenia, ktorých úvodné hodnoty som vzal z tabuliek od van Hamme (1993), pre logaritmické pravidlo okrajového ztemnenia pre obe hviezdy po 2 parametre. Pomocou optimalizátora som dokázal znížiť hodnotu  $\chi^2$  z hodnoty  $\sim 10500$  pri LCG modeli na  $\sim 18$  pri finálnom NMS modeli. Finálne hodnoty parametrov spolu s ich neurčitostami sú v tabulke 3.1 v ďalšej sekcii.

Na obr. 3.1 sú oba spomínané získané modely. Pre názornosť som tam pridal aj minimá zákrytov spolu s vstupmi a výstupmi do/zo zákrytov.

Model získaný z optimalizátora na obrázku 3.1 bol nakoniec vygenerovaný pre  $n_{\Delta,1} = n_{\Delta,2} = 800$ , a metódy 'roche' aj 'horvat'. Rovnako tak aj `compute_phases` som prenastavil na celú fázu.



Obr. 3.1: Model svetelnej krivky získaný z optimalizátora (čiernou) spolu s ukážkou modelovej krivky z estimátora (červenou). Šedé body sú zbinované dáta z Keplera, oranžové vertikály označujú zľava začiatok, stred a koniec sekundárneho zákrytu. Modré vertikály obdobne pre primárny zákryt.

### 3.1 MCMC analýza

Vyskúšal som aj MCMC vzorkovač na určenie neurčitosti niekoľkých parametrov. Globálne riešenie parametrov som určil v predchádzajúcej sekcii pomocou optimalizátora, takže teraz už nehľadám číselné riešenie hodnôt parametrov, ide skôr o stanovenie neistôt. Na začiatok používam rovnaké predpoklady pre tých zopár všeobecných parametrov, aby som zefektívnil chod algoritmu. Najlepšie by bolo brať do MCMC hodnoty všetkých relevantných voľných, nefixovaných parametrov. Lenže čím viac parametrov, tým viac časovo náročný chod programu, rovnako tak pridanie apriórnych informácií znásobilo časovú náročnosť asi päťkrát. Pre predstavu, použitie priorov a nastavenie siedmich parametrov malo bežať 9 hodín pre len 500 iterácií. Ideálne je vykonávať MCMC analýzu pre behy s mnohotisícovými iteráciami.

Robil som 3 rôzne chody MCMC vzorkovača. Najskôr som skúmal lokálny priestor parametrov  $t_0$ ,  $e \cos \omega_0$  a  $e \sin \omega_0$ , počet chodcov, resp. Markovových reťazí by mal byť minimálne  $n_{\text{walkers}} = 4 \cdot n_{\text{params}}$ , kde  $n_{\text{params}}$  je počet skúmaných parametrov. 1500 iterácií bežalo 3 hodiny. Výsledné aposteriórne distribúcie a ich korelácie sú zobrazené na obr. 3.2a. Nad distribúciami sú určené stredné hodnoty, ale hlavne aj asymetrické hodnoty chýb z distribúcií určené ako  $1\sigma$  štandardná odchýlka, ako som spomínal v teoretickom úvode. Následne som vykonal 5000 iterácií pre parametre  $i$ ,  $R_{\text{sf}}$ ,  $R_{\text{eq},2}$  a  $T_{\text{ratio}}$ , čo bežalo cca 12 hodín. Nanešťastie walkere zachádzali do úplne iných priestorov a nakoniec som z tohto behu akceptoval iba hodnoty neistôt pre  $R_{\text{sf}}$ . Posledný chod som spravil pre  $i$ ,  $R_{\text{ratio}}$  a  $T_{\text{ratio}}$ ,

Parameter	Hodnota
$P_{\text{orb}}$ [d]	$25.95185 \pm 0.00022$
$t_0$ [BKJD]	$128.9314 \pm 0.0014$
$e \sin \omega_0$	$0.167 \pm 0.005$
$e \cos \omega_0$	$0.4331 \pm 0.0004$
$R_{\text{eq},2}/R_{\text{eq},1}$	$0.883 \pm 0.014$
$T_{\text{eff},2}/T_{\text{eff},1}$	$0.978 \pm 0.002$
$i$ [°]	$88.16 \pm 0.05$
$(R_{\text{eq},2} + R_{\text{eq},1})/a$	$0.1134 \pm 0.0008$
$x_1$	0.746
$y_1$	0.425
$x_2$	0.726
$y_2$	0.428
$M_1$ [ $M_{\odot}$ ]	$1.88 \pm 0.03$
$M_2$ [ $M_{\odot}$ ]	$1.86 \pm 0.04$
$R_{\text{eq},1}$ [ $R_{\odot}$ ]	$3.45 \pm 0.02$
$T_{\text{eff},1}$ [K]	$6810 \pm 150$
$q$	$0.989 \pm 0.027$
$R_{\text{eq},2}$ [ $R_{\odot}$ ]	$3.05 \pm 0.05$
$T_{\text{eff},2}$ [K]	$6662 \pm 147$
$e$	$0.464 \pm 0.002$
$\omega_0$ [°]	$21.07 \pm 0.01$
$a$ [ $R_{\odot}$ ]	$57.3 \pm 0.7$

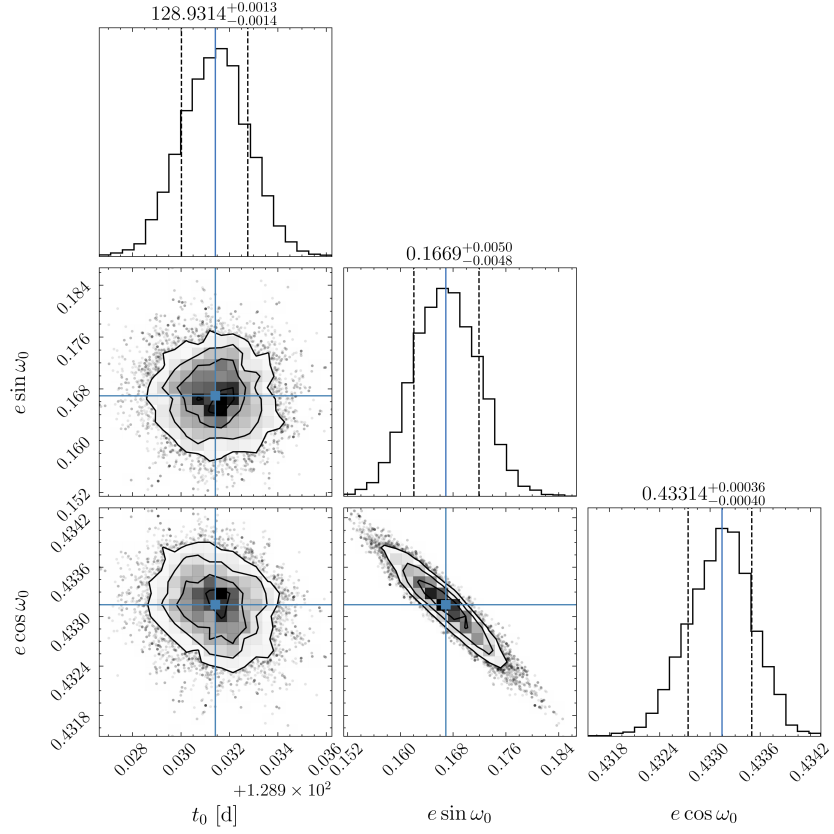
Tabuľka 3.1: Výsledné hodnoty fitovaných, fixných a odvodených parametrov.

500 iterácií čo trvalo hodinu. Posteriórne distribúcie tohto chodu sú zobrazené na obr. 3.2b.

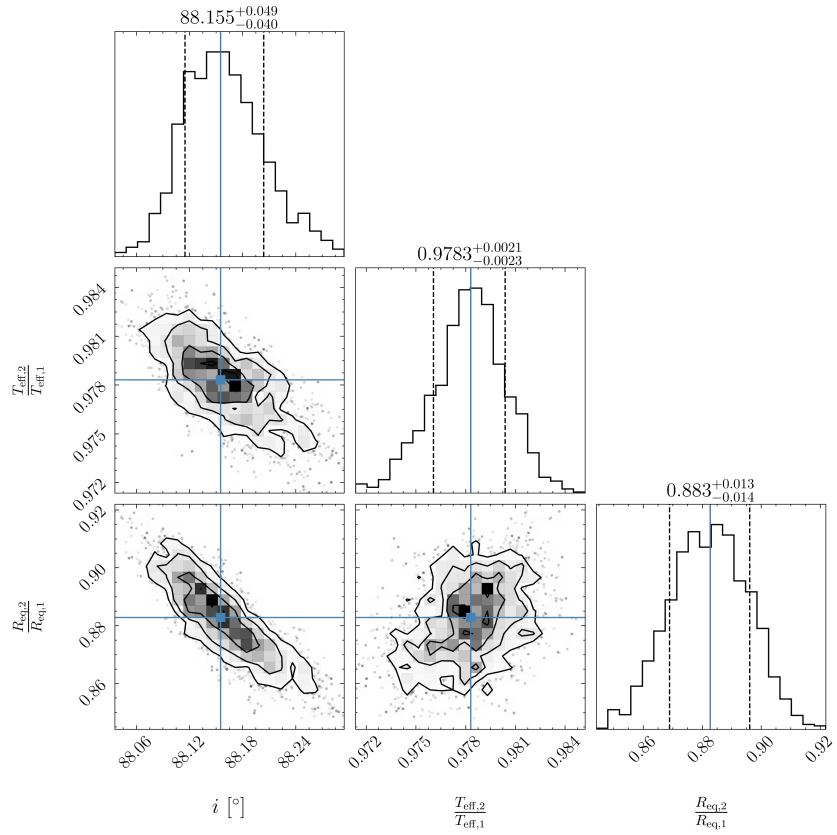
Na rohových grafoch 3.2 som aplikoval odporúčané hodnoty vyhorenia úvodných iterácií (burnin), ktoré sa pri vzorkovaní nakoniec nebrali do posteriórnej distribúcie. Na obrázku 3.3 je zobrazené ako sa pre jednotlivé chody vyvíjali jednotlivé walkere pre každý jeden parameter. Obrázky som vygeneroval pre burnin=0, aby bolo pekne viditeľné, že na začiatku väčšina walkerov preskúmala väčšie okolie, ale všetky pekne zkonvergovali do okolia nájdeného globálneho riešenia. Modré a čierne horizontálne čiary sú  $\mu$  a  $1\sigma$  pre parametre ako v rohových grafoch 3.2, takže môžeme vidieť, že všetci chodci všetkých parametrov sa pohybovali v rámci  $2\sigma$  neistoty od stredných hodnôt. Šedá vertikálna čiara znázorňuje spomínaný burnin faktor, ktorý MCMC algoritmus na záver ponúkol. Pre Chod 1 to bolo prvých 159 iterácií a pre Chod 3 to bolo prvých 94 iterácií.

Tabuľka 3.1 je rozdelená na tri časti. Na začiatku prvej časti je zobrazená hodnota periódy spolu s neurčitostou, ako bola určená v sekcii 2.1. Ostatné parametre v tejto časti boli upravované optimalizátorom,  $x_i$  a  $y_i$  sú spomínané koeficienty okrajového stemnenia, ktorých neurčitosti som neurčoval. Ostatné parametre v tejto časti, spolu s chybami boli určené MCMC analýzou. Druhá časť obsahuje hodnoty parametrov z článku Maceroni a kol. (2014), ktoré zostali po celý čas fitovania zafixované. Neurčitosti týchto parametrov som ponechal pre  $M_1$  a  $M_2$



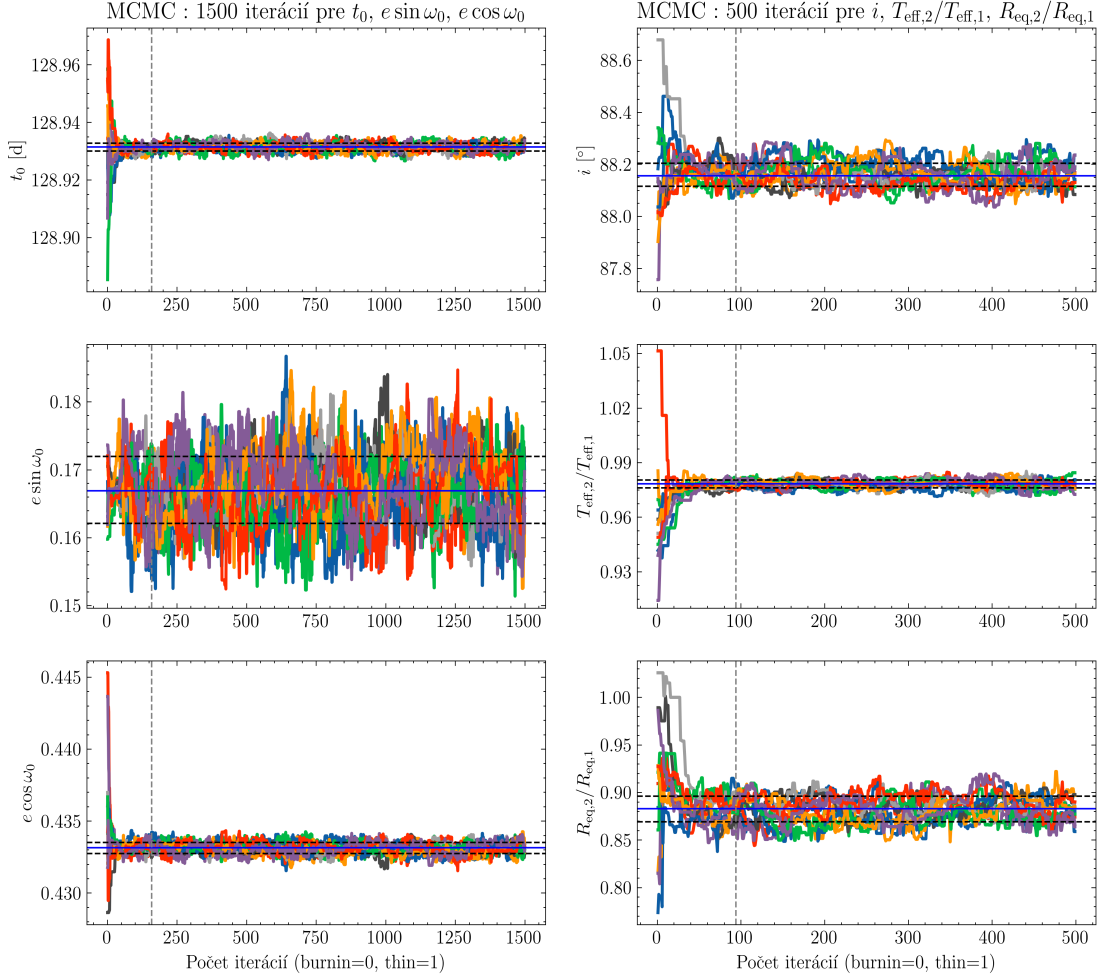


(a) Chod 1



(b) Chod 3

Obr. 3.2: Rohové grafy pre 2 chody MCMC vzorkovača.



Obr. 3.3: Stopové grafy pre všetkých 6 parametrov z 2 MCMC chodov. Každá jedna farba popisuje jedného chodca a jeho náhodný vývoj.

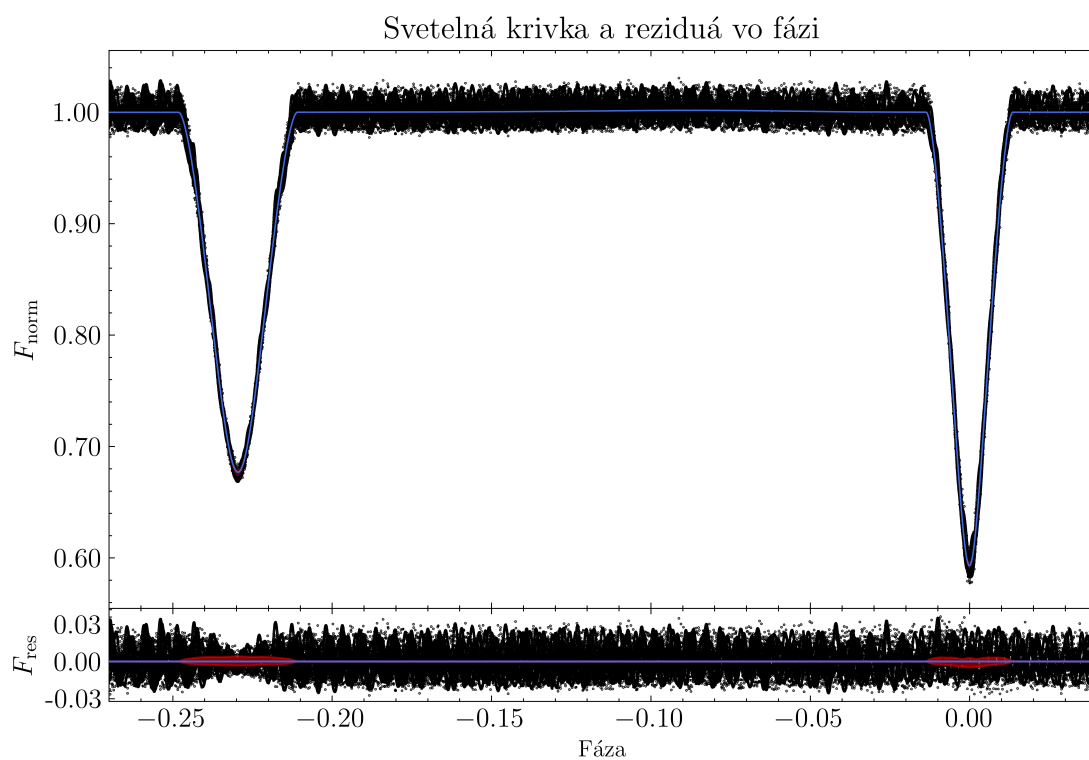
a pre ostatné dve som ich určil subjektívne<sup>1</sup> s ohľadom na iné hodnoty týchto parametrov v článku od Manzoori (2020). Nakoniec v tretej časti sú hodnoty parametrov, ktoré boli priamo odvodené z parametrov z prvých dvoch častí. Chyby týchto parametrov boli určené na základe prítomných vzťahov uvedených cez Constraints a spočítané pomocou rovnice prenosu chýb 1.18, napríklad hodnotu neurčitosti parametru  $e$  som mohol spočítať rovnicou

$$\sigma_e = \sqrt{\left(\frac{e \sin \omega_0}{e} \sigma_{e \sin \omega_0}\right)^2 + \left(\frac{e \cos \omega_0}{e} \sigma_{e \cos \omega_0}\right)^2}, \quad (3.1)$$

ktorá sa ľahko získala zo spomínanej rovnice 1.18.

Na obrázku 3.4 vidíme zřázované nezbinované dáta, teda všetkých vyše 400 000 dátových bodov z družice Kepler. Modrou farbou je znázornený NMS model a červená oblasť najmä v oblasti minim zřakrytov je interval spoľahlivosti so započítanými  $1\sigma$  nepresnosťami parametrov z prvej časti tabuľky 3.1. Pomocou rovnice  $F_{\text{res}} = F_{\text{norm}} - F_{\text{model}}$ , ako to uvádza napr. Conroy a kol. (2020) som dostal hodnoty reziduí, znázorňujúcich zväčša čistý vplyv pulzácií. Aj tieto reziduá sú zobrazené na obr. 3.4 v spodnej časti.

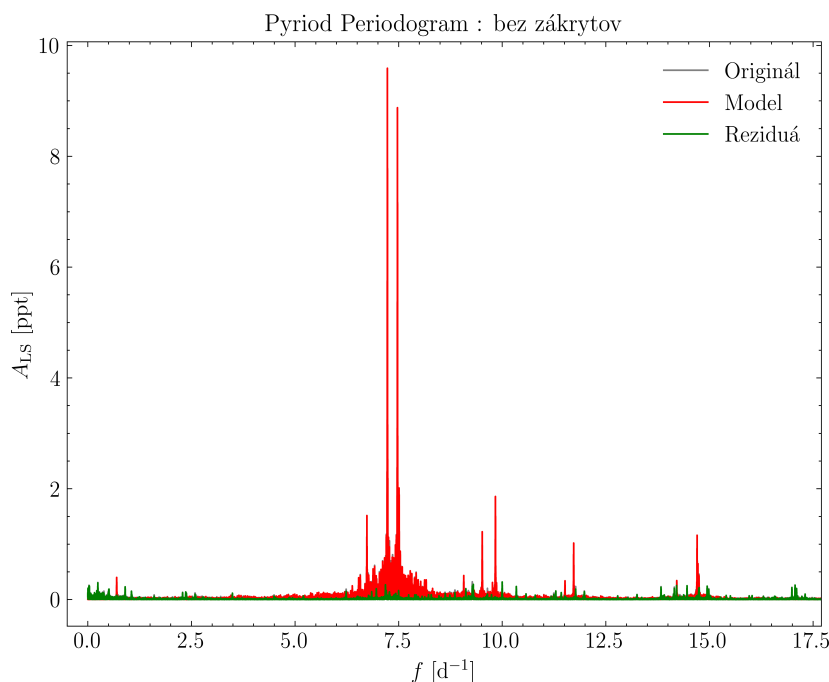
<sup>1</sup>Približne dvojnásobok neurčitosti, ktorú pre ne uvádza Maceroni a kol. (2014).



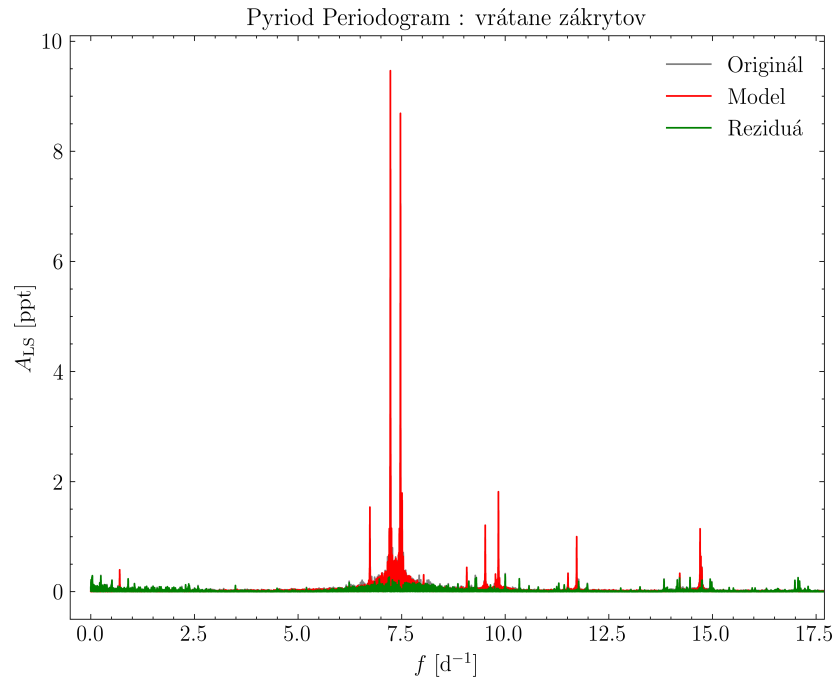
Obr. 3.4: Všetky zfézované Kepler dáta s výsledným modelom spolu s  $1\sigma$  intervalom spoľahlivosti charakterizovaným červenou oblasťou najlepšie viditeľnou v minimách zákrytov. V dolnej časti sú zobrazené reziduá dát od modelu.

## 4. Analýza pulzačných frekvencií

Reziduá svetelnej krivky, ktoré je vidieť na obr. 3.4 vo fáze som rozdelil na 2 časti analýzy. Prvá analýza pulzácií prebiehala s odstránením rezidiú v zákrytoch, druhá brala všetky hodnoty  $F_{\text{res}}$ . Najskôr som vykonal analýzu pulzácií systému bez započítania zákrytov a túto metódu som bral za presnejšiu, pretože sú odstránené rušivé vplyvy v reziduách spôsobené zákrytmi. Na analýzu som použil spomínaný Lombov-Scarglov periodogram, ktorý je veľmi výhodný na analýzu komplexných signálov s nerovnomerne rozloženými dátami. Použil som spomínanú knižnicu Pyriod v jazyku Python. Pyriod je jednoduchý klikací program, kde v periodograme sám navrhuje jednotlivé frekvencie s najsilnejšími amplitúdami. Ako vstupný parameter som nastavil jednotku frekvencie na  $\text{d}^{-1}$  a škálu amplitúdy  $A_{\text{LS}}$  na hodnotu 'časť na tisíc' (ppt), ktorá určovala hodnotu amplitúdy frekvencie ako 1000 násobok reálnej amplitúdy  $A_f$  sínusového modelu z rovnice 1.20. Obdobne som vykonal aj Pyriod analýzu na všetky reziduá toku aj so zákrytmi. Z oboch analýz som dostal hodnoty amplitúd, frekvencií a fáz, ktoré dokopy ako suma  $\sum_i y(t; f_i)$ , kde  $y(t; f_i)$  je sínusový model z 1.20, najlepšie vystihujú dáta rezidiú z  $F_{\text{norm}}$ , pretože parametre sú určené spomínanou metódou najmenších štvorcov. Bral som len 20 najsilnejších frekvencií, pretože rozdiel amplitúd medzi najsilnejšou a najslabšou frekvenciou bol až skoro 30-násobný, takže vplyv slabších frekvencií bol minimálny. Na obrázkoch 4.1 a 4.2 sú znázornené periodogramy pre oba prípady. Na každom je červenou znázornený model vzniknutý z akceptovania najsilnejších dvadsiatich peakov. Šedou farbou (ktorá nie je dobre viditeľná, čo je fajn) je znázornený periodogram všetkých frekvencií vygenerovaných Pyriod programom. Zelenou farbou sú znázornené zbytkové frekvencie získané opäť rozdielom originálu a modelu.



Obr. 4.1: Lombov-Scarglov periodogram programu Pyriod na reziduá z  $F_{\text{norm}}$  bez započítania zákrytov.



Obr. 4.2: Lombov-Scarglov periodogram programu Pyriod na reziduá z  $F_{\text{norm}}$  aj so započítaním zákrytov.

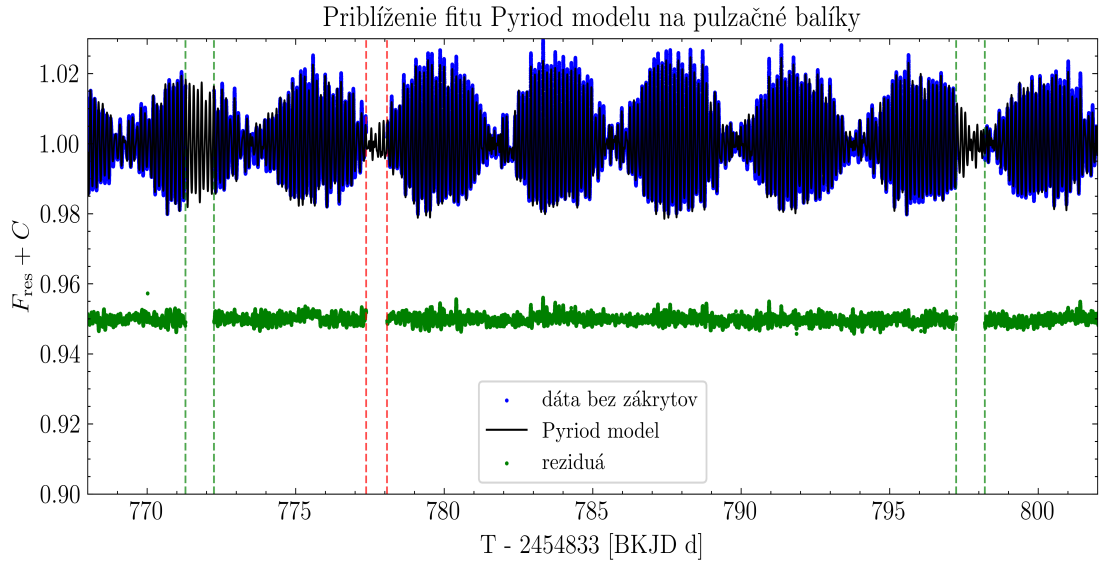
Obidva obrázky vyššie vyzerajú takmer rovnako, možno až na viditeľné väčšie zbytkové zašumenie v okolí frekvencie  $\sim 7.5 \text{ d}^{-1}$  v prípade periodogramu aj so zákrytmi. Výsledných 20 najvýraznejších frekvencií spolu s amplitúdami a fázami prípadu bez zákrytov je spísaných v tabuľke 4.1. Nie sú tam uvedené frekvencie z prípadu so zákrytmi, pretože hodnoty takto získaných frekvencií vyšli takmer úplne rovnako ako v predošlom prípade, s chybou maximálne  $10^{-4} \text{ d}^{-1}$ , čo v prepočte na dni dáva chybu menej ako 1 sekunda. Amplitúdy sa už však viac menili, hlavne poradie posledných 7 frekvencií bolo v druhom prípade rozhádzaných, avšak top 20 frekvencií z 1. prípadu bolo obsiahnutých aj v 2. prípade v rámci spomenutej chyby.

V tabuľke 4.1 som určil neistoty frekvencií tak, že som bral chybu v prepočte na periódu ako  $\sigma_P = 1$  sekunda. Pomocou rovnice prenosu chýb 1.18 som stanovil chybu frekvencie pre chybu periódy 1 sekunda cez  $\sigma_f = \sigma_P \cdot f^2$ . Viac o tomto v diskusii.

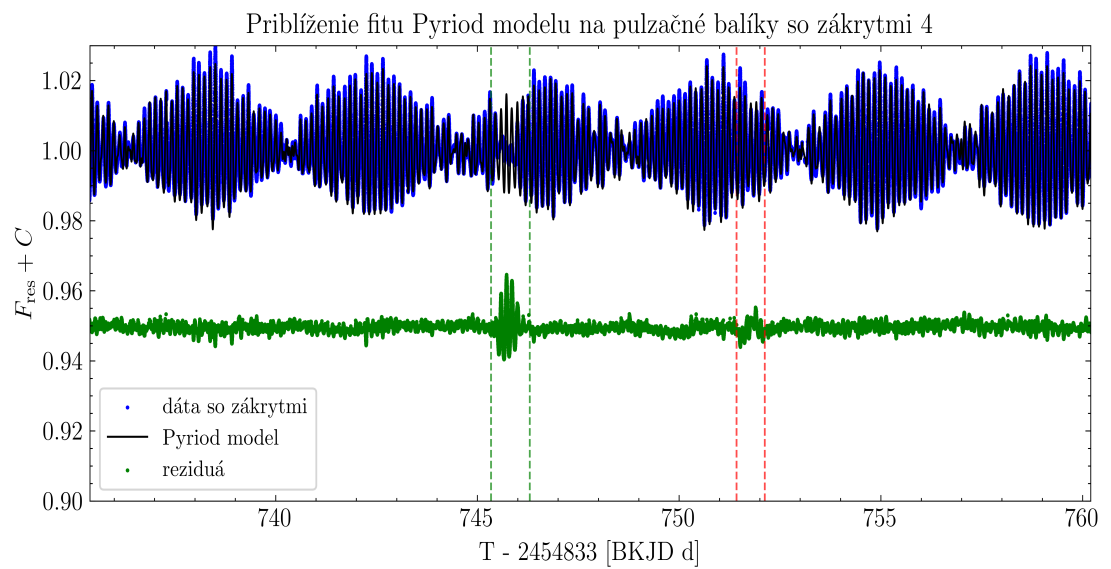
Po akceptovaní 20 najsilnejších frekvencií som si mohol zobrazit tento Pyriod model, čo je len súčet sínusoid v tvare 1.20 pre každý riadok tabuľky 4.1. Preloženie tohto modelu na dáta reziduí z toku bez zákrytov je zobrazené na obrázku 4.3. Oveľa dôležitejšie je však pozrieť sa na Pyriod model pri všetkých dátach ako na obr. 4.4. Tu je veľmi pekne vidieť, že pri sekundárnom zákryte nastáva veľmi veľké utlmenie pulzácií, čo pri primárnom je takmer nebadateľné. Ďalšie časové vzorky Pyriod modelu s dátami vrátane zákrytov sú v prílohe na obrázkoch A.6, A.7 a A.8. Na týchto obrázkoch zelené vertikálne čiary charakterizujú hranice sekundárnych miním a červené vertikálne čiary zase hranice primárnych miním.

#	Frekvencia [d <sup>-1</sup> ]	Amplitúda [ppt]	Fáza [rad/(2 $\pi$ )]
$f_1$	7.23067 $\pm$ 0.00061	9.765	0.29306
$f_2$	7.47341 $\pm$ 0.00065	9.052	0.04986
$f_3$	9.83755 $\pm$ 0.00112	1.869	0.26463
$f_4$	7.51248 $\pm$ 0.00065	1.757	0.37131
$f_5$	6.73582 $\pm$ 0.00053	1.552	0.77369
$f_6$	9.51913 $\pm$ 0.00105	1.234	0.40258
$f_7$	14.70408 $\pm$ 0.00250	1.150	0.14888
$f_8$	11.72573 $\pm$ 0.00159	1.006	0.99040
$f_9$	14.72534 $\pm$ 0.00251	0.595	0.33547
$f_{10}$	7.36266 $\pm$ 0.00063	0.556	0.28542
$f_{11}$	7.24224 $\pm$ 0.00061	0.486	0.29143
$f_{12}$	7.46184 $\pm$ 0.00064	0.484	0.55849
$f_{13}$	14.74863 $\pm$ 0.00252	0.447	0.29572
$f_{14}$	9.07403 $\pm$ 0.00095	0.420	0.57963
$f_{15}$	0.69783 $\pm$ 0.00001	0.403	0.01558
$f_{16}$	7.26692 $\pm$ 0.00061	0.379	0.77034
$f_{17}$	8.03366 $\pm$ 0.00075	0.366	0.45147
$f_{18}$	9.76644 $\pm$ 0.00110	0.361	0.40921
$f_{19}$	14.21365 $\pm$ 0.00234	0.355	0.61702
$f_{20}$	11.51708 $\pm$ 0.00154	0.355	0.97023

Tabuľka 4.1: Výsledné hodnoty frekvencií, amplitúd a fáz získaných z programu Pyriod.



Obr. 4.3: Prejav Pyriod modelu na určitom časovom úseku dát  $F_{\text{res}}$  bez zákrytov. V prípade  $F_{\text{res}}$  je vertikálne posunutie  $C = 1.00$  a v prípade zbytkových reziduá rozdiel Pyriod modelu a  $F_{\text{res}}$  je  $C = 0.95$ .



Obr. 4.4: Prejav Pyriod modelu na určitom časovom úseku (značením 4) dát  $F_{\text{res}}$  so zákrytmi. V prípade  $F_{\text{res}}$  je vertikálne posunutie  $C = 1.00$  a v prípade zbytkových reziduí rozdielu Pyriod modelu a  $F_{\text{res}}$  je  $C = 0.95$ .

## 5. Dáta z družice TESS

TESS dáta sú v rôznej podobe dostupné v archíve MAST. Obdobne ako v prípade extrahovania dát z družice Kepler, aj v tomto prípade som na získanie dát z TESSu použil knižnicu `lightkurve` s prístupom do MAST databázy.

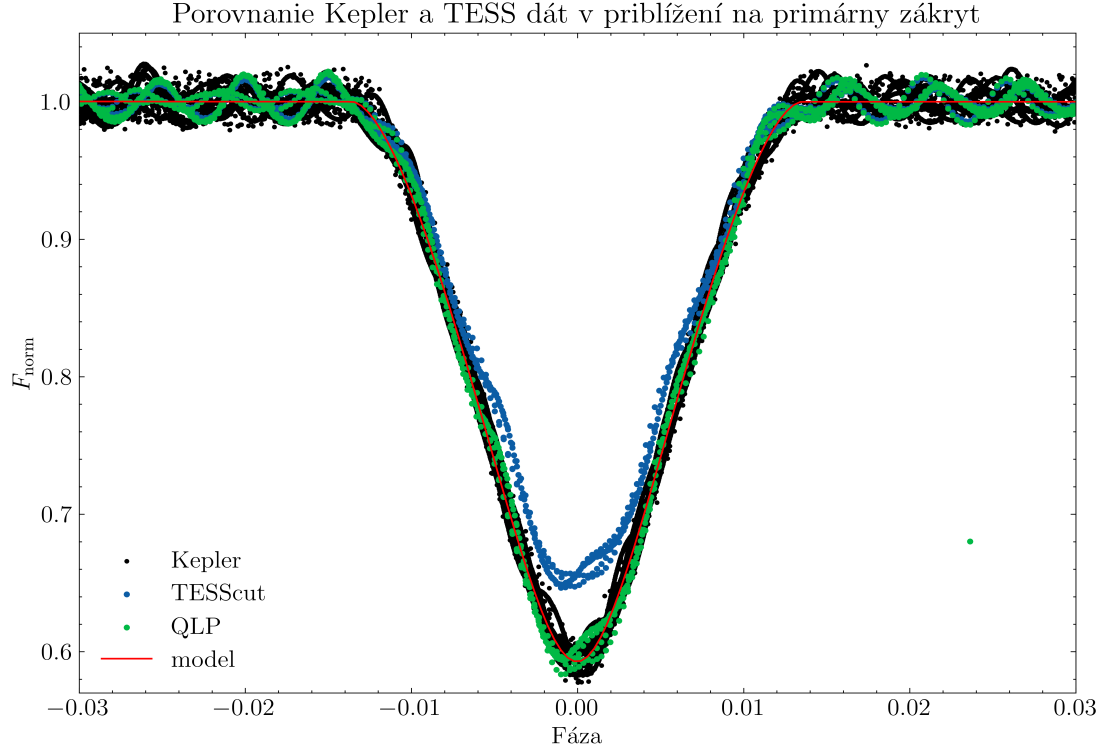
Ako je spomenuté v úvode, tak je veľa rôznych vedeckých tímov, ktoré generujú svetelné krivky z FFI a TPF súborov, ktoré poskytuje TESS. Vyskúšal som si jednoduché extrahovanie svetelnej krivky z FFI obrázkov, ktoré sú cez `lightkurve` dostupné pod názvom `TESScut`, teda „vystrihnutie“ oblasti FFI na výrez  $20 \times 20$  pixelov. Ďalej používam metódu jednoduchej apertúrnej fotometrie (SAP)<sup>1</sup>, kde cez jasnú oblasť okolo pixelov cieľového objektu preložím ľubovoľnú apertúru/clonu, ktorá signalizuje oblasť pixelov, ktorých tok meriam. Hneď na to zmeriam tok pozadia a ten odčítam od zmeraného toku vybraného cieľa a nakoniec znormujem tok cez mediánovú hodnotu. Prejdem z času do fázy pomocou periódy z predošlých kapitol a dostávam svetelnú krivku s označením `TESScut` na obrázkoch 5.1 a 5.2, ktoré ukazujú priblíženie na primárne a sekundárne zákryty. Keďže je vidno, že aj hĺbky miním aj pulzácie sú utlmené, skúšal som si zobrazit svetelné krivky z pajplajny QLP pre tie isté časové úseky. K dispozícii boli dokopy 4 TESS sektory, prvé 3 s kadenciou 10 minút z rokov 2021 a 2022 a 4. s kadenciou 200 sekúnd z roku 2024. Z úvodu viem, že 1 sektor obsahuje časový zber 27 dní. Ako píše Huang a kol. (2020), QLP používa trochu komplikovanejší spôsob extrakcie svetelnej krivky spôsobom rozdielového zobrazovania. Najprv odstráni rozptýlené svetlo z pozadia, vytvorí referenčný obrázok, od ktorého odčítaním ostatných obrázkov vytvárajú rozdielové obrázky odčítaním od referenčného. Potom z rozdielových obrázkov vytvorí 5 rôznych svetelných kriviek za pomoci 5 rôznych kruhových clon, ktoré sú sústredné so stredom v cieľovom objekte. Nakoniec zmerané diferenčné toky prevedú na absolútne toky aj s odčítaním vplyvu od okolitých blendovaných objektov, teda nastane rozlíšenie tokov v rámci jedného pixelu všetkých prítomných lokálnych objektov. QLP ponúka len nanormované hodnoty toku na medián 1.0. Na grafoch 5.1 a 5.2 sú takto získané svetelné krivky opäť pomenované ako tok SAP, no keďže porovnávame viacero SAP tokov v týchto obrázkoch, tak sú značené QLP. Je vidieť, že týmto poctivejším extrahovaním svetelnej krivky sú zfázované dáta z QLP podobné tým z Keplera. V prípade TESS dát sú k dispozícii len 4 periódy a v počte dát asi 20x menej ako v prípade dát z Keplera. Model určený analýzou v kapitole 3 z dát z Keplera celkom dobre odpovedá aj QLP dátam z TESSu. Stále sa prejavujú celkom výrazné pulzácie, avšak vyzerá to tak, hlavne na mimozákrytových pulzáciách QLP dát TESSu, že nie sú také silné ako v prípade Keplera. Vykonal som preto Pyriod analýzu rovnako ako v predošlej kapitole a hodnoty desiatich najvýraznejších pulzačných frekvencií sú zobrazené v tabuľke 5.1.

Aj pri dátach z TESSu som sa pozrel na porovnanie dát z TESSu bez akceptovania zákrytov s fitom od Pyriod modelu, spolu s hodnotou reziduí  $F_{\text{res}} = F_{\text{TESS}} - F_{\text{PM}}$ , kde  $F_{\text{TESS}}$  sú dáta bez zákrytov a  $F_{\text{PM}}$  sú hodnoty toku z Pyriod Modelu. Toto porovnanie je pre 2 zo 4 TESS sektorov zobrazené na obrázku 5.3.

---

<sup>1</sup>Inšpirovaná tutoriálom na stránkach dokumentácie knižnice `lightkurve`.

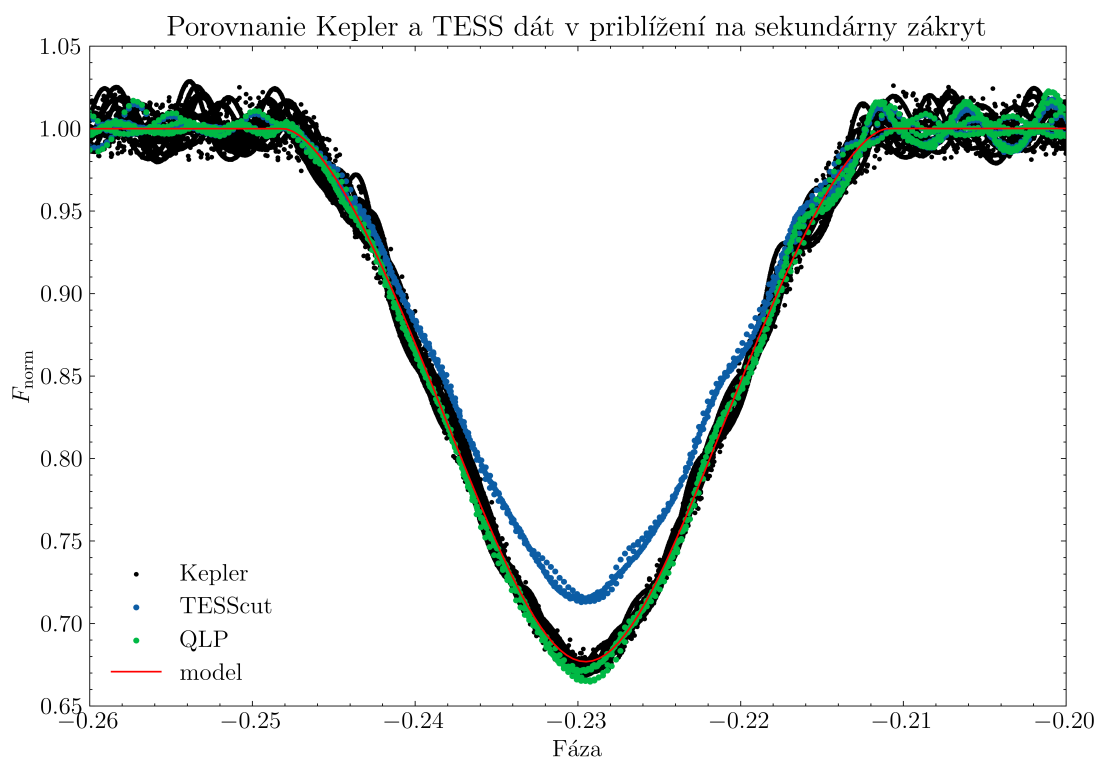




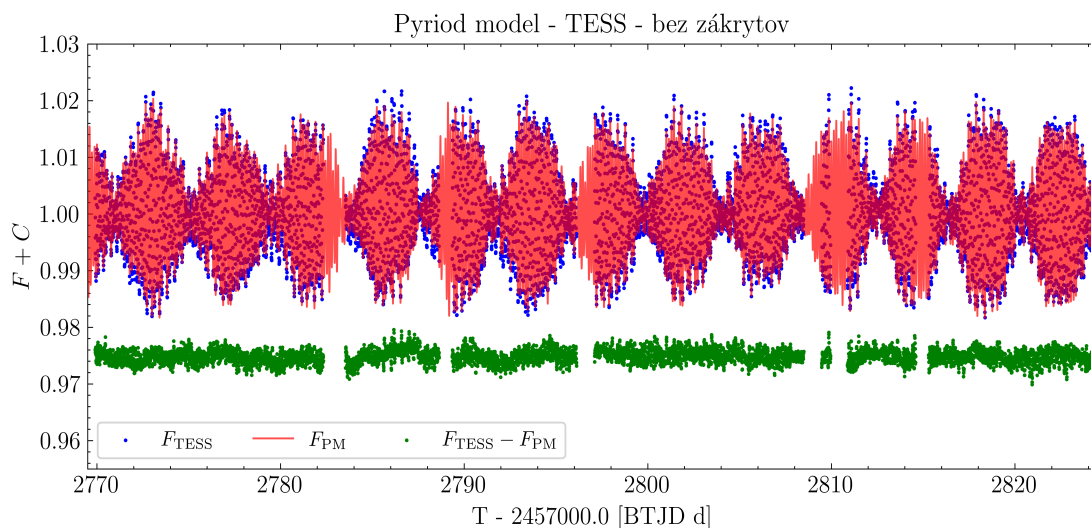
Obr. 5.1: Ukážka dát z družice Kepler, spolu s modelom svetelnej krivky z Keplera, samostatná extrakcia dát z TESScutu a dáta z QLP. Priblížení na primárny zákryt vo fáze.

#	Frekvencia [d <sup>-1</sup> ]	Amplitúda [ppt]	Fáza [rad/(2 $\pi$ )]
$f_1$	$7.23067 \pm 0.00061$	7.655	0.12444
$f_2$	$7.47342 \pm 0.00065$	7.528	0.92032
$f_3$	$9.83757 \pm 0.00112$	2.028	0.08414
$f_4$	$7.51246 \pm 0.00065$	1.576	0.91007
$f_5$	$6.73583 \pm 0.00053$	1.332	0.27843
$f_6$	$14.70407 \pm 0.00250$	0.981	0.88539
$f_7$	$9.51911 \pm 0.00105$	0.866	0.35654
$f_8$	$4.73286 \pm 0.00026$	0.718	0.79061
$f_9$	$11.72561 \pm 0.00159$	0.598	0.83199
$f_{10}$	$7.36267 \pm 0.00063$	0.448	0.16323

Tabuľka 5.1: Výsledné hodnoty top 10 frekvencií, amplitúd a fáz získaných z programu Pyriod pre TESS QLP dáta.



Obr. 5.2: Ukážka dát z družice Kepler, spolu s modelom svetelnej krivky z Keplera, samostatná extrakcia dát z TESScutu a dáta z QLP. Priblížení na sekundárny zákryt vo fáze.



Obr. 5.3: Pyriod model aplikovaný na TESS QLP dáta bez zákrytov. Pre  $F_{\text{TESS}}$  a  $F_{\text{PM}}$  je vertikálne posunutie  $C = 0$ , pre  $F_{\text{res}}$  je  $C = 0.975$ .

# Diskusia

V kapitole 2 v sekcii 2.1 som určil pomocou min-max metódy chybu periódy obehu dvojhviezdneho systému KIC 3858884 na hodnotu približne 20 sekúnd. Nastavoval som hodnotu periódy o nižšie a vyššie hodnoty a pozeral som sa, či ešte sedí fit takéhoto lorentziánu na zbinovaný peak z BLS periodogramu. V rámci tejto chyby sa veľmi dobre zhodujem s Manzoori (2020) a tesne za hranicou mojej  $1\sigma$  nepresnosti aj s Maceroni a kol. (2014).

Ďalej som fitoval pomocou programu Phoebe zbinované dáta z družice Kepler. V prvej časti kapitoly 3 som podrobne popísal spôsob, akým som fitoval modelovú svetelnú krivku na dáta. Vďaka oddelenému systému s takmer žiadnymi variáciami svetelnej krivky (po zbinovaní a teda odstránení mimozákrytových pulzácií) som mohol spraviť viacero aproximácií na zefektívnenie časovej náročnosti programu, ktorá je závislá na počte fitujúcich parametrov, ale zároveň aj na správnom nastavení previazaných vzťahov Constraints<sup>2</sup>. Všetky programy boli spúšťané na notebooku značky Lenovo, Intel Core i5, 8GB RAM so 4 jadrami. Kvôli časovej náročnosti som nefitoval viac ako 8 parametrov naraz. Zoznam parametrov, ktorých hodnoty som fitoval optimalizátorom sú zobrazené v prvej časti tabuľky 3.1. Pre niektoré hodnoty parametrov som používal ich prednastavenú/odporúčanú hodnotu. Napríklad koeficient gravitačného stemnenia  $\beta = 0.32$  som nechal po celý čas fixovaný. Túto hodnotu nastavuje samotný program Phoebe pre hviezdy s  $T_{\text{eff}} \in [6600, 8000]$  K. Rovnako tak  $F_{\text{refl},i}$  som nechal na prednastavenej hodnote 0.6. Parametre synchronicity som ponechal na hodnote 1, teda som celý čas predpokladal, že medzi zložkami prebiehajú viazané rotácie. Nefitoval som ani možnú prítomnosť tretieho telesa a hviezdnych škvŕn, resp. po zbinovaní zfázovaných dát neprejavovala svetelná krivka žiadne známky prítomnosti škvŕny. Pri MCMC analýze som púšťal maximálne 4 fyzikálne parametre, no aj napriek spomínaným aproximáciám sa dosiahla efektivita tak 5-10 s/iteráciu. V online materiáloch a návodoch pre Phoebe MCMC vzorkovanie sa odporúča vzorkovať čo najviac parametrov, aby sa dobre preskúmal lokálny priestor týchto parametrov a ich vzájomné vzťahy. Oporúča sa vykonať niekoľko tisíc iterácií, aby boli dosiahnuté robustné posteriórne distribúcie a konvergencia. Z tohto dôvodu by bolo najlepšie púšťať aj fitovanie desiatok parametrov, aj MCMC analýzu desiatok parametrov na vysoko výpočetnom clusteri (HPC). Zobrazenie finálneho modelu na všetky dáta z Keplera vo fáze sú zobrazené na obrázku 3.4 a porovnanie modelu s dátami v čase sú zobrazené v prílohe na obrázku A.1, kde sú aj priblíženia na 3 rôzne primárne a 3 rôzne sekundárne zákryty. Výsledné hodnoty parametrov z tabuľky 3.1 v porovnaní s tabelovanými hodnotami od Maceroni a kol. (2014) sú okrem parametra  $\omega_0$  v dobrej zhode v rámci  $1\sigma$  chyby, pričom im vyšlo  $\omega_0 = 21.61^\circ$ . Hodnoty parametrov od Manzoori (2020) sa poväčšine nezhodujú s mojimi, až na hodnoty hmotností a polomerov, ktoré sa v rámci chyby zhodujú.

Používanie programu Pyriod bolo veľmi priamočiare. Z dát bez zákrytov, ale aj so zákrytmi som vyčítal z periodogramu 20 frekvencií s najväčším peakom, ktoré sú spísané v tabuľke 4.1. Hodnoty frekvencií sú väčšina s presnosťou lepšou

---

<sup>2</sup>Napríklad ak je Constraint vzťah na spočítanie  $R_{\text{eq},2}(R_{\text{ratio}}, R_{\text{sf}}, a)$  a fituje sa  $R_{\text{ratio}}$  je to časovo masívne náročnejšie ako keď fitujeme ten istý parameter pre Constraint nastavený na  $R_{\text{eq},2}(R_{\text{ratio}}, R_{\text{eq},1})$ .

ako  $10^{-4} \text{ d}^{-1}$  zhodné s tými uvedenými v Maceroni a kol. (2014), všetky však lepšie ako  $10^{-3} \text{ d}^{-1}$ . Prvých 12 frekvencií sa aj s poradím zhoduje s publikovanými. Ďalších 8 frekvencií je tiež tabelovaných, avšak ich poradie je už iné, kvôli iným amplitúdam. Chyby uvedené programom Pyriod sú veľmi podhodnotené, rádovo  $10^{-6}$  až  $10^{-7} \text{ d}^{-1}$ . Maceroni a kol. (2014) určoval chyby vlastným spôsobom, rádovo ich zvýšil na  $10^{-4} \text{ d}^{-1}$ , avšak v prepočte je to vo väčšine frekvencií chyba menšia ako 1 sekunda. Preto som stanovil chybu frekvencií v prepočte na 1 sekundu konštantne, pomocou rovnice získanej z prenosu chýb, uvedenej v texte pod obrázkom 4.2 je to jednoznačne určené.

Phoebe ponúka zostrojenie 3D modelov hviezd vo fáze a pre 4 oblasti orbity som určil tieto modely, zobrazené v prílohe na obrázkoch A.2 až A.5. Porovnaním obrázkov Pyriod modelu spolu s reziduami toku 4.4, A.6, A.7, či A.8 s obrázkami 3D modelu hviezd je veľmi dobre vidieť, že pulzačné balíky sú vnútri sekundárneho minima utlmené aspoň o polovicu amplitúdy. Pri primárnych minimách to nie je ani zďaleka také výrazné. Z toho vyplýva, že s najväčšou pravdepodobnosťou je sekundár veľmi zložitý pulzátor s multiperiodickými pulzáciami. Ako uvádza Maceroni a kol. (2014), je to hybridný  $\delta$  Scuti pulzátor, čo znamená, že má dve veľmi výrazné frekvencie pulzácií a obe spadajú pod definíciu  $\delta$  Scuti pulzácií. Záver k tomuto systému od Manzoori (2020) nesedí do výsledkov získaných z tejto práce, pretože v tomto článku sa uvádza, že systém je tvorený dvoma pulzátormi typu  $\delta$  Scuti, jeden s frekvenciou  $f_1$  a druhý s  $f_2$  z tabuľky 4.1. Jednoduchou simuláciou zákrytu som spočítal, že keď prebieha sekundárne minimum, tak sekundár je zakrytý tak, že vytŕča spoza primára len cca 25% plochy, ako je vidieť na obrázku A.3. Pri primárnom minime je odokrytá len cca 33% časť primára, viď A.5. Teda ak by každá z 2 najsilnejších frekvencií patrila jednotlivej hviezde, mali by sa dať pozorovať aspoň trochu podobné utlmenia pulzácií aj v prípade primárneho zákrytu. Nič také však nenastáva, preto sa prikláňam skôr k riešeniu od Maceroni a kol. (2014), že sa jedná o dvojhviezdny systém typu Algol so sekundárnou hviezdou pulzujúcou ako hybridný  $\delta$  Scuti pulzátor, ktorý ale nevyklučuje neprítomnosť pulzácií aj u primárnej hviezdy. Obe frekvencie  $f_1$  a  $f_2$  prepisom na periódy  $P_{\text{puls},1} = 0.1383$  dňa a  $P_{\text{puls},2} = 0.1338$  dňa sa nachádzajú takmer v strede intervalu pulzačných periód z úvodu pre hviezdy typu  $\delta$  Scuti 1.3.4.

Z definície luminozity hviezdy<sup>3</sup>  $L/L_{\odot} = (R_{\text{eq}}/R_{\odot})^2 \cdot (T_{\text{eff}}/T_{\odot})^4$  máme svietivosť primára  $L_1 = 1.36 L_{\odot}$  a sekundáru  $L_2 = 1.21 L_{\odot}$ . Zaznačením komponent do H-R diagramu 1.5, vidíme, že sa obe nachádzajú v oblasti  $\delta$  Scuti pulzátorov a sú spektrálneho typu F. Veľké polomery oboch hviezd naznačujú pokročilejšiu etapu evolučného vývoja na hlavnej postupnosti, možno až v oblasti podobrov.

V kapitole 5 som si vyskúšal extrahovanie svetelnej krivky z FFI obrázku ďalekohľadu TESS. Nakoniec som použil svetelnú krivku od QLP, ktorá bola dostupná v archíve MAST. Na obrázkoch 5.1 a 5.2 je zjavné, že dáta získané pomocou Keplera a pomocou TESSu nie sú úplne totožné. To preto, že ani tieto teleskopy nie sú rovnaké, s rovnakými technickými parametrami, cieľom a orbitou. Na obrázku 1.1 je vidieť, že filtre použité Keplerom a TESSom nie sú rovnaké. Kepler prepúšťa viac viditeľné svetlo, TESS zase viac do červena až infračervena. Rôzne parametre môžu na tomto závisieť. Napríklad, aj keď QLP dáta majú pomerne rovnako hlboké zákryty ako Kepler, tak pulzačné amplitúdy sú utlmené

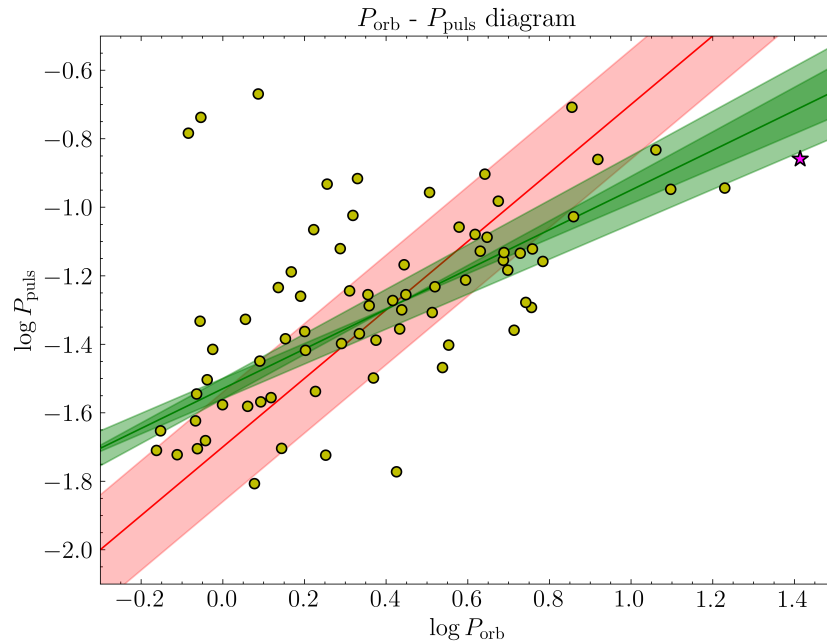
<sup>3</sup>S aproximáciu hviezdy ako absolútne čierne teleso.

o takmer 20%<sup>4</sup>. Ďalší faktor, ktorý môže hrať určitú rolu je veľkosť pixelov. Kepler má oveľa viac menších pixelov ako TESS, takže sa môže stať, že ak v Keplerovi pripadá hviezda sama na 1 pixel, tak v 1 pixeli TESSu môže byť tých hviezd viac. Tomuto javu sa hovorí preplnenie, alebo crowding. QLP sa stará o odstránenie tohto efektu, a ako je vidieť v TESS tutoriáli od NASA k odstráneniu crowdingu, tak vzťah medzi krivkou neopravenou o crowding a krivkou opravenou o crowding je ako vzťah kriviek TESScut a QLP na obrázku 5.1.

Ako je spomenuté v teoretickom úvode, Zhang a kol. (2013) odvodili vzorec, ktorý dáva do vzťahu periódu obehu a pulzačnú periódu pulzátora, ktorý je súčasťou dvojhviezdy. Určili aj experimentálny vzťah, ktorý je v úvode ako rovnica 1.14. Obdobný experimentálny vzťah určil aj Liakos a kol. (2012) pri skúmaní hviezd typu  $\delta$  Scuti vnútri zákrytových dvojhviezd:

$$\log P_{\text{puls}} = -1.53(3) + 0.58(7) \log P_{\text{orb}} . \quad (5.1)$$

Hodnota v zátvorke pri číselných koeficientoch vyjadruje chybu ( $\sigma$ ) =  $\pm\sigma$ . Na základe dát (žlté body) z článku Liakos a kol. (2012) som zostrojil diagram  $P_{\text{orb}}-P_{\text{puls}}$  spolu so skúmanou KIC 3858884 pre  $P_{\text{puls},1}$  (fialová hviezdička) na obr. 5.4. Na tomto grafe sú aj znázornené spomínané závislosti 1.14 a 5.1 spolu s intervalmi spoľahlivosti určenými ako  $1\sigma$  nepresnosť uvedená v daných rovniciach. Je vidieť, že KIC 3858884 viac zapadá do experimentálne zistenej závislosti od Liakos a kol. (2012). Rozdielnosť od oboch trendov môže byť spôsobená tým, že sekundár je hybridný  $\delta$  Scuti pulzátor a zároveň má dvojhviezda veľkú obežnú periódu, čo predstavuje pomerne výnimočný prípad dvojhviezdy s pulzátorom.



Obr. 5.4: Závislosť obežnej a pulzačnej periódy pulzátora v systéme zákrytovej dvojhviezdy. Fialová hviezdička je KIC 3858884. Červená závislosť je od Zhang a kol. (2013). Zelená závislosť je od Liakos a kol. (2012).

<sup>4</sup>Sčítaním prvých 10 amplitúd v tabuľkách 4.1 a 5.1.

# Záver

Využitím dát z družice Kepler bola určená perióda obehu zákrytovej dvoj-hviezdy s pulzátorom KIC 3858884 na hodnotu  $P_{\text{orb}} = (25.95185 \pm 0.00022)$  d.

S využitím optimalizátora v programe Phoebe bol vytvorený syntetický model svetelnej krivky na zbinované dáta z družice Kepler. Tým sa určilo globálne riešenie hodnôt fyzikálnych parametrov primáru aj sekundáru, spolu s parametrami geometrie dráhy. Pomocou vzorkovača MCMC boli preskúmané lokálne priestory 6 parametrov a určené posteriórne distribúcie. Z nich sa následne určili neistoty týchto parametrov. Vďaka metóde prenosu chýb bolo možné určiť hodnoty neistôt aj ostatných parametrov, previazaných na tie vzorkované. Hodnoty parametrov sa v rámci chyby zhodovali s tabelovanými hodnotami ako v Maceroni a kol. (2014).

Vykonala sa aj pulzačná analýza pomocou programu Pyriod, pomocou ktorej bolo identifikovaných 20 najvýraznejších frekvencií. Tie sa tiež dobre zhodovali s hodnotami v spomínanom článku.

Pomocou Pyriod modelu použitého na TESS QLP dátach boli potvrdené najvýraznejšie frekvencie pulzácií.

Pomocou jednoduchej metódy utlmenia pulzácií v zákrytoch boli priradené najsilnejšie pulzačné frekvencie menšiemu, chladnejšiemu sekundáru, ktorý bol identifikovaný ako hybridný  $\delta$  Scuti pulzátor s periódami pulzácie  $P_{\text{puls},1} = 0.1383$  dňa a  $P_{\text{puls},2} = 0.1338$  dňa.

Nakoniec bol zostrojený graf  $P_{\text{orb}} - P_{\text{puls}}$  pre  $\delta$  Scuti pulzátory z článku Liakos a kol. (2012), spolu s bodom získaným z tejto práce pre maximálnu hodnotu pulzačnej periódy  $P_{\text{puls},1}$ .

# Zoznam použitej literatúry

- CHEHLAEH, N., PROMFU, T. a MASAE, N. (2023). Frequency Analysis of High Amplitude  $\delta$  Scuti Star V593 Lyr by American Association of Variable Stars Observers International Database. *ASEAN Journal of Scientific and Technological Reports*, **26**, 32–39. doi: 10.55164/ajstr.v26i1.247847.
- COGAN, B. C. (1970). Pulsation Constants for Models of Cepheids. *The Astrophysical Journal*, **162**, 139–144.
- CONROY, K. E. A KOL. (2020). Physics of Eclipsing Binaries. V. General Framework for Solving the Inverse Problem. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **250**(2), 34. URL <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4365/abb4e2>.
- FOREMAN-MACKEY, D., HOGG, D. W., LANG, D. a GOODMAN, J. (2013). emcee: The MCMC Hammer. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, **125**(925), 306–312. ISSN 1538-3873. URL <http://dx.doi.org/10.1086/670067>.
- GAVIN, H. P. (2023). The Nelder-Mead Simplex Algorithm in Two Dimensions. URL <https://people.duke.edu/~hpgavin/cee201/Nelder-Mead-2D.pdf>.
- HANDBERG, R. A KOL. (2021). TESS Data for Asteroseismology: Photometry. *The Astronomical Journal*, **162**(4), 170. URL <https://dx.doi.org/10.3847/1538-3881/ac09f1>.
- HARMANEC, P., MAYER, P. a ZASCHE, P. (2023). Dvojhvězdy. URL <https://astro.mff.cuni.cz/vyuka/AST019/ast019.pdf>.
- HUANG, C. X., VANDERBURG, A., PÁL, A., SHA, L., YU, L., FONG, W., FAUSNAUGH, M., SHPORER, A., GUERRERO, N., VANDERSPEK, R. a RICKER, G. (2020). Photometry of 10 Million Stars from the First Two Years of TESS Full Frame Images: Part I. *Research Notes of the American Astronomical Society*, 4(11):204. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2020RNAAS...4..204H>.
- KINEMUCHI, K. A KOL. (2012). Demystifying Kepler Data: A Primer for Systematic Artifact Mitigation. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, **124**(919), 963–984. ISSN 1538-3873. URL <http://dx.doi.org/10.1086/667603>.
- KOCH, D. G. A KOL. (2010). Kepler Mission Design, Realized Photometric Performance, and Early Science. *The Astrophysical Journal*, **713**(2), L79–L86. ISSN 2041-8213. URL <http://dx.doi.org/10.1088/2041-8205/713/2/L79>.
- KOVÁCS, G., ZUCKER, S. a MAZEH, T. (2002). A box-fitting algorithm in the search for periodic transits. *Astronomy and Astrophysics*, **391**(1), 369–377. ISSN 1432-0746. URL <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20020802>.

- LIAKOS, A., NIARCHOS, P., SOYDUGAN, E. a ZASCHE, P. (2012). Survey for  $\delta$  Sct components in eclipsing binaries and new correlations between pulsation frequency and fundamental stellar characteristics:  $\delta$  Sct components in binary systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **422** (2), 1250–1262. ISSN 0035-8711. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20704.x>.
- LUND, M. A KOL. (2016). Data preparation for asteroseismology with TESS. *EPJ Web of Conferences*, **160**. URL <https://doi.org/10.1051/epjconf/201716001005>.
- MACERONI, C., LEHMANN, H., DA SILVA, R., MONTALBÁN, J., LEE, C.-U., AK, H., DESHPANDE, R., YAKUT, K., DEBOSSCHER, J., GUO, Z., KIM, S.-L., LEE, J. W. a SOUTHWORTH, J. (2014). KIC 3858884: a hybrid  $\delta$  Scuti pulsator in a highly eccentric eclipsing binary. *Astronomy and Astrophysics*, **563**, A59. ISSN 1432-0746. URL <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201322871>.
- MANZOORI, D. (2020). Linear and non-linear tidal oscillations and mode identification in the eccentric binary system KIC 3858884. *mnras*, **498**(2), 1871–1890. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2020MNRAS.498.1871M>.
- MIKULÁŠEK, Z. a ZEJDA, M. (2013). *Úvod do studia proměnných hvězd*. 1. vyd. Masarykova univerzita, Brno. ISBN 978-80-210-6241-2. URL <https://www.physics.muni.cz/~zejda/PHV.pdf>.
- MOWLAVI, N. A KOL. (2017). Gaia eclipsing binary and multiple systems. Two-Gaussian models applied to OGLE-III eclipsing binary light curves in the Large Magellanic Cloud. *Astronomy and Astrophysics*, 606:A92.
- PERCY, J. R. (2007). *Understanding Variable Stars*. Cambridge University Press. ISBN 978-0-511-28514-1.
- PRŠA, A. a ZWITTER, T. (2005). A Computational Guide to Physics of Eclipsing Binaries. I. Demonstrations and Perspectives. *The Astrophysical Journal*, **628** (1), 426–438.
- PRŠA, A., CONROY, K. E. A KOL. (2016). Physics of Eclipsing Binaries. II. Toward the Increased Model Fidelity. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **227**(2), 29. ISSN 1538-4365. URL <http://dx.doi.org/10.3847/1538-4365/227/2/29>.
- PRŠA, A. (2011). PHOEBE: Scientific Reference. Villanova University. URL [http://phoebe-project.org/static/legacy/docs/phoebe\\_science.pdf](http://phoebe-project.org/static/legacy/docs/phoebe_science.pdf). PHOEBE version 0.30.
- SOUTHWORTH, J. (2012). Eclipsing Binary Stars: the Royal Road to Stellar Astrophysics. URL <https://arxiv.org/abs/1201.1388>.
- VAN CLEVE, J. E. a CALDWELL, D. A. (2016). Kepler Instrument Handbook. Kepler Science Document KSCI-19033-002, id.1. Edited by Michael R. Haas and Steve B. Howell. URL <https://archive.stsci.edu/kepler/manuals/>



KSCI-19033-002.pdf. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.

VAN CLEVE, J. E. A KOL. (2016). Kepler Data Characteristics Handbook. Kepler Science Document KSCI-19040-005, id. 2. Edited by Doug Caldwell, Jon M. Jenkins, Michael R. Haas and Natalie Batalha. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2016ksci.rept....2V>. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.

VAN HAMME, W. (1993). New Limb-Darkening Coefficients for Modeling Binary Star Light Curves. *The Astronomical Journal*, **106**, 2096. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1993AJ....106.2096V>.

VANDERPLAS, J. T. (2018). Understanding the Lomb–Scargle Periodogram. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **236**(1), 16. ISSN 1538-4365. URL <http://dx.doi.org/10.3847/1538-4365/aab766>.

VANDERSPEK, R. A KOL. (2018). TESS Instrument Handbook. URL [https://archive.stsci.edu/missions/tess/doc/TESS\\_Instrument\\_Handbook\\_v0.1.pdf](https://archive.stsci.edu/missions/tess/doc/TESS_Instrument_Handbook_v0.1.pdf).

WOLF, M. (2010). Základy astronomie a astrofyziky II. URL [https://astro.mff.cuni.cz/vyuka/AST007/ZAA2\\_mz6.pdf](https://astro.mff.cuni.cz/vyuka/AST007/ZAA2_mz6.pdf).

ZHANG, X. B., LUO, C. Q. a FU, J. N. (2013). On the Pulsational–Orbital-Period Relation of Eclipsing Binaries with  $\delta$ -Sct Components. *The Astrophysical Journal*, **777**(1), 77. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/777/1/77>.

# Zoznam obrázkov

1.1	Ukážka normalizovanej spektrálnej citlivosti známych filtrov v porovnaní s filtrom použitým Keplerom a TESSom. Zdroj: Lund a kol. (2016).	4
1.2	Usporiadanie problému troch telies v kartézskej sústave súradníc. Z-ová os vedie kolmo na obrázok. COM znázorňuje polohu ťažiska. Zdroj: Prša (2011).	6
1.3	Znázornenie ekvipotenciálnych plôch pre 5 rôznych hodnôt Kopalovho potenciálu $\Omega$ pre pomer hmotností $q = 0.5$ . Zdroj: Prša (2011).	7
1.4	Typy dvojhviezd podľa tvaru svetelnej krivky. Z ľava do prava máme postupne TW Dra - typ Algol II., ST Tri - typ $\beta$ Lyrae, GZ And - typ W UMa. Zdroj: Mikulášek a Zejda (2013).	8
1.5	Usporiadanie jednotlivých skupín pulzujúcich premenných hviezd na H-R diagrame. Zdroj obrázku: Wikipédia.	10
1.6	Graf svetelnej krivky Cefeidy I. typu (vľavo, zdroj: Percy (2007)). Graf svetelnej krivky Cefeidy II. typu (vpravo, zdroj: Mikulášek a Zejda (2013)).	11
1.7	Graf svetelnej krivky hviezdy typu $\beta$ Cephei. Zdroj: Mikulášek a Zejda (2013).	12
1.8	Graf svetelnej krivky hviezdy typu RR Lyrae. Zdroj: Mikulášek a Zejda (2013).	13
1.9	Graf svetelnej krivky hviezdy typu $\delta$ Scuti. Zdroj: Chehlaeh a kol. (2023).	13
1.10	Graf svetelnej krivky hviezdy typu Mira. Zdroj: Mikulášek a Zejda (2013).	14
1.11	Porovnanie siete používanej programom Phoebe 1 (lichobežníková, naľavo) a Phoebe 2 (trojuholníková, napravo). Zdroj: Prša a kol. (2016).	15
1.12	Ukážka simplexu v 3D a jeho transformácií. Zdroj: Prša a Zwitter (2005).	18
1.13	Ukážka použitia BLS periodogramu. Horný obrázok: časové dáta jasnosti v magnitúdach. Dolný ľavý obrázok: frekvenčné spektrum. Dolný pravý obrázok: zfázované dáta cez získanú periódu. Zdroj: Kovács a kol. (2002).	20
2.1	Časové fotometrické dáta z družice Kepler pre objekt KIC 3858884 dostupné z archívu MAST.	22
2.2	Graf s priblížením na určité časové obdobie krátkej kadencie normalizovaného toku. Ukážky sekundárneho zákrytu, pulzácií mimo zákryt a primárneho zákrytu.	23
2.3	BLS Periodogram spolu s výsekom znormovaného zbinovaného peaku s fitom lorentziánu, ktorého stred stanovuje hodnotu $P_{orb}$ , ktorá je následne akceptovaná.	24
2.4	Zfázované a zbinované dáta normovaného toku s priblížením na oba zákryty vo fáze. Modrou farbou sú zfázované všetky dáta z Keplera. Bielou farbou sú zbinované dáta určené dvojkrokovou metódou.	25

3.1	Model svetelnej krivky získaný z optimalizátora (čiernou) spolu s ukážkou modelovej krivky z estimátora (červenou). Šedé body sú zbinované dáta z Keplera, oranžové vertikály označujú zlava začiatok, stred a koniec sekundárneho zákrytu. Modré vertikály obdobne pre primárny zákryt. . . . .	27
3.2	Rohové grafy pre 2 chody MCMC vzorkovača. . . . .	29
3.3	Stopové grafy pre všetkých 6 parametrov z 2 MCMC chodov. Každá jedna farba popisuje jedného chodca a jeho náhodný vývoj. . . . .	30
3.4	Všetky zřázované Kepler dáta s výsledným modelom spolu s $1\sigma$ intervalom spoľahlivosti charakterizovaným červenou oblasťou najlepšie viditeľnou v minimách zákrytov. V dolnej časti sú zobrazené reziduá dát od modelu. . . . .	31
4.1	Lombov-Scarglov periodogram programu Pyriod na reziduá z $F_{\text{norm}}$ bez započítania zákrytov. . . . .	32
4.2	Lombov-Scarglov periodogram programu Pyriod na reziduá z $F_{\text{norm}}$ aj so započítaním zákrytov. . . . .	33
4.3	Prejav Pyriod modelu na určitom časovom úseku dát $F_{\text{res}}$ bez zákrytov. V prípade $F_{\text{res}}$ je vertikálne posunutie $C = 1.00$ a v prípade zbytkových reziduí rozdielu Pyriod modelu a $F_{\text{res}}$ je $C = 0.95$ . . .	34
4.4	Prejav Pyriod modelu na určitom časovom úseku (značením 4) dát $F_{\text{res}}$ so zákrytmi. V prípade $F_{\text{res}}$ je vertikálne posunutie $C = 1.00$ a v prípade zbytkových reziduí rozdielu Pyriod modelu a $F_{\text{res}}$ je $C = 0.95$ . . . . .	35
5.1	Ukážka dát z družice Kepler, spolu s modelom svetelnej krivky z Keplera, samostatná extrakcia dát z TESScutu a dáta z QLP. Priblíženie na primárny zákryt vo fáze. . . . .	37
5.2	Ukážka dát z družice Kepler, spolu s modelom svetelnej krivky z Keplera, samostatná extrakcia dát z TESScutu a dáta z QLP. Priblíženie na sekundárny zákryt vo fáze. . . . .	38
5.3	Pyriod model aplikovaný na TESS QLP dáta bez zákrytov. Pre $F_{\text{TESS}}$ a $F_{\text{PM}}$ je vertikálne posunutie $C = 0$ , pre $F_{\text{res}}$ je $C = 0.975$ . . . . .	38
5.4	Závislosť obežnej a pulzačnej periódy pulzátoru v systéme zákrytovej dvojhviezdy. Fialová hviezdička je KIC 3858884. Červená závislosť je od Zhang a kol. (2013). Zelená závislosť je od Liakos a kol. (2012). . . . .	41
A.1	Ukážka fitu modelu získaného z Phoebe na úsek nanormovaných krátkokadenčných Keplerových dát. V hornej časti sú priblíženia fitu na sekundárne zákryty, v spodnej časti primárne zákryty. . . .	50
A.2	3D model hviezd zachytený pre fázu $\Phi = -0.47$ . . . . .	51
A.3	3D model hviezd zachytený pre fázu $\Phi = -0.23$ . Táto fáza charakterizuje blízky sekundárny zákryt. . . . .	51
A.4	3D model hviezd zachytený pre fázu $\Phi = -0.11$ . . . . .	52
A.5	3D model hviezd zachytený pre fázu $\Phi = 0.0$ . Táto fáza charakterizuje primárny zákryt. . . . .	52

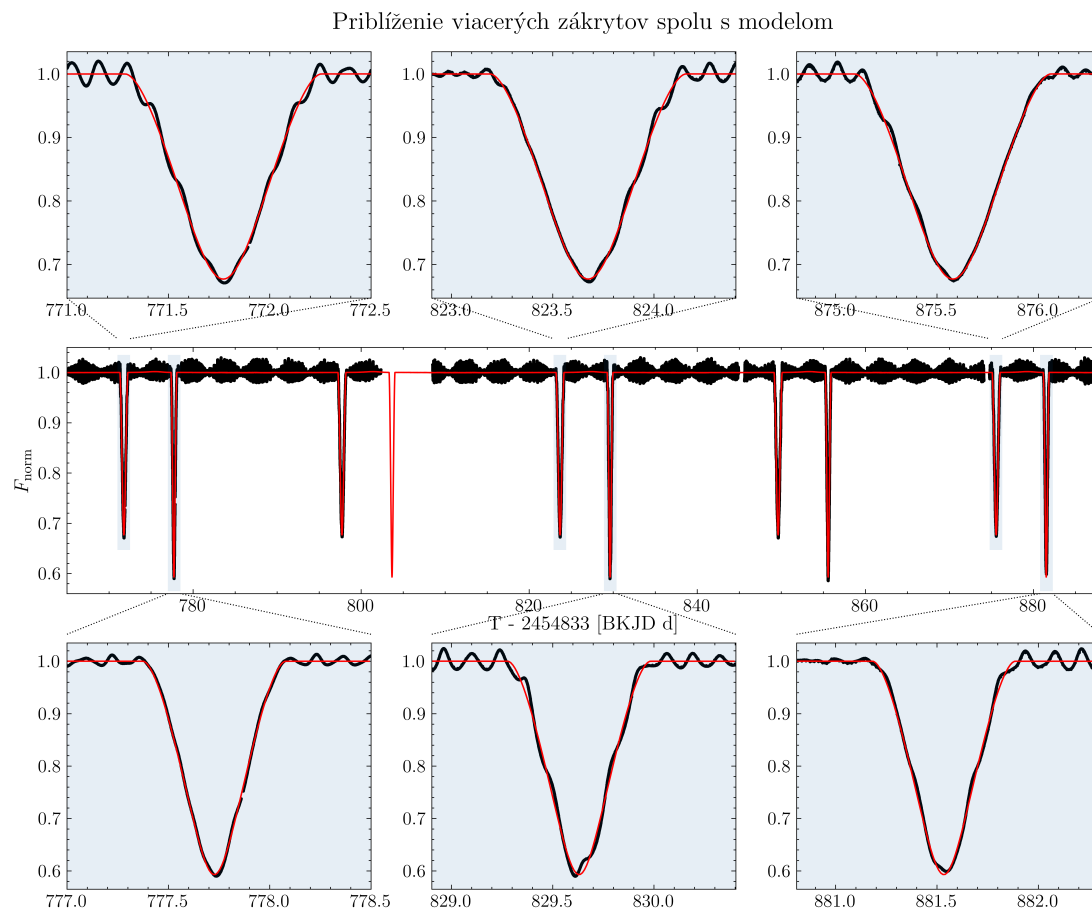
A.6	Prejav Pyriod modelu na určitom časovom úseku (značením 2) dát dlhej kadencie $F_{\text{res}}$ so zákrytmi. V prípade $F_{\text{res}}$ je vertikálne posunutie $C = 1.00$ a v prípade zbytkových reziduí rozdielu Pyriod modelu a $F_{\text{res}}$ je $C = 0.95$ . . . . .	53
A.7	Prejav Pyriod modelu na určitom časovom úseku (značením 6) dát $F_{\text{res}}$ so zákrytmi. V prípade $F_{\text{res}}$ je vertikálne posunutie $C = 1.00$ a v prípade zbytkových reziduí rozdielu Pyriod modelu a $F_{\text{res}}$ je $C = 0.95$ . . . . .	53
A.8	Prejav Pyriod modelu na určitom časovom úseku (značením 7) dát $F_{\text{res}}$ so zákrytmi. V prípade $F_{\text{res}}$ je vertikálne posunutie $C = 1.00$ a v prípade zbytkových reziduí rozdielu Pyriod modelu a $F_{\text{res}}$ je $C = 0.95$ . . . . .	54

# Zoznam tabuliek

3.1	Výsledné hodnoty fitovaných, fixných a odvodených parametrov. .	28
4.1	Výsledné hodnoty frekvencií, amplitúd a fáz získaných z programu Pyriod. . . . .	34
5.1	Výsledné hodnoty top 10 frekvencií, amplitúd a fáz získaných z programu Pyriod pre TESS QLP dáta. . . . .	37

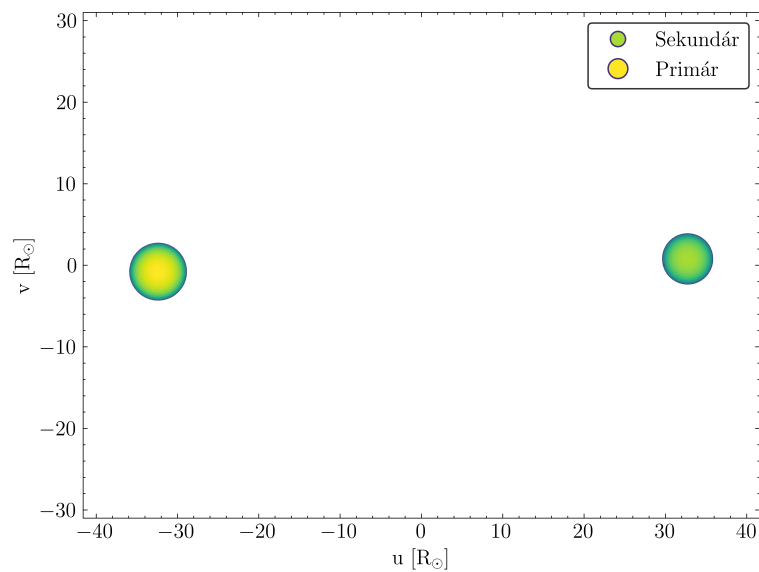
# A. Prílohy

## A.1 Model svetelnej krivky

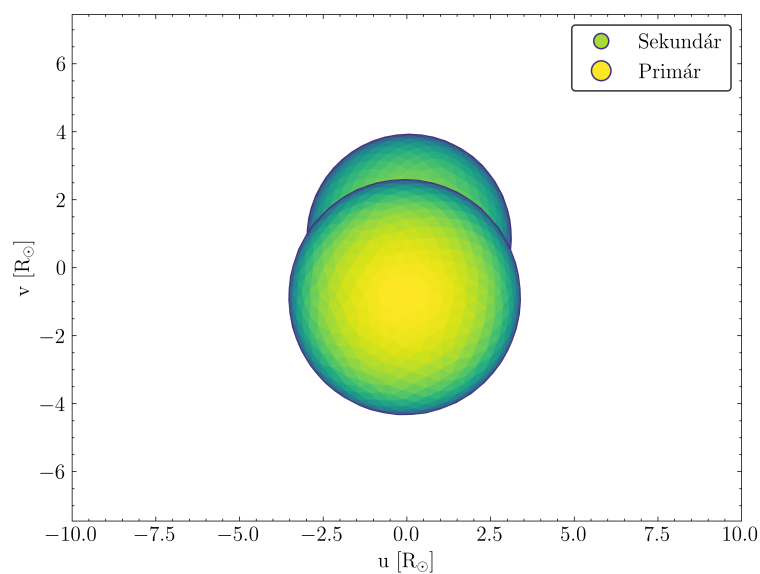


Obr. A.1: Ukážka fitu modelu získaného z Phoebe na úsek nanormovaných krátkokadenčných Keplerových dát. V hornej časti sú priblíženia fitu na sekundárne zákryty, v spodnej časti primárne zákryty.

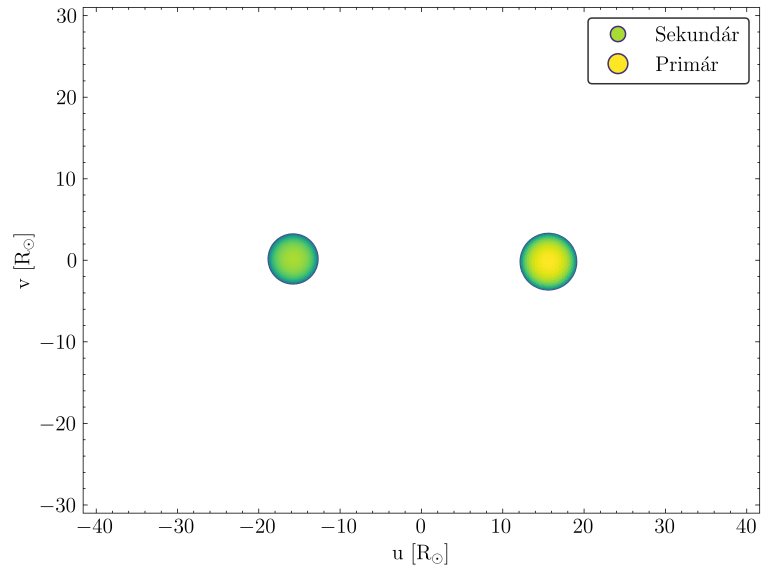
## A.2 3D sieťovinové grafy



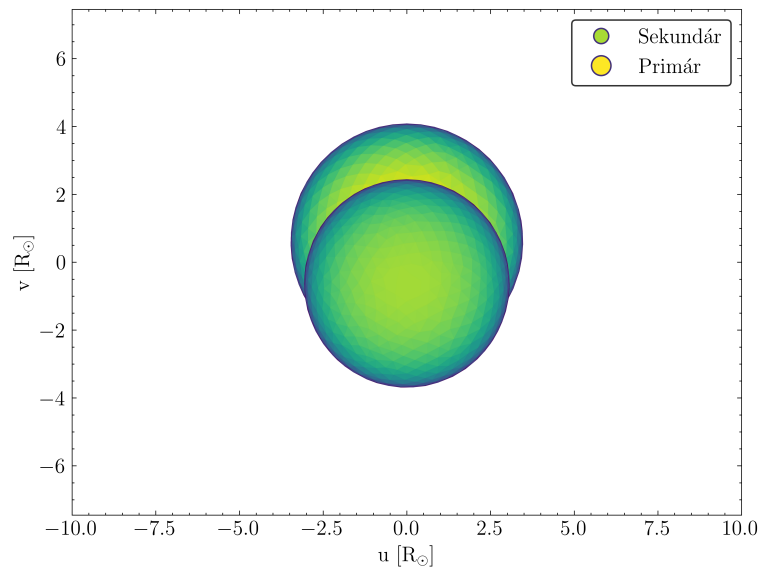
Obr. A.2: 3D model hviezd zachytený pre fázu  $\Phi = -0.47$ .



Obr. A.3: 3D model hviezd zachytený pre fázu  $\Phi = -0.23$ . Táto fáza charakterizuje blízky sekundárny zákryt.



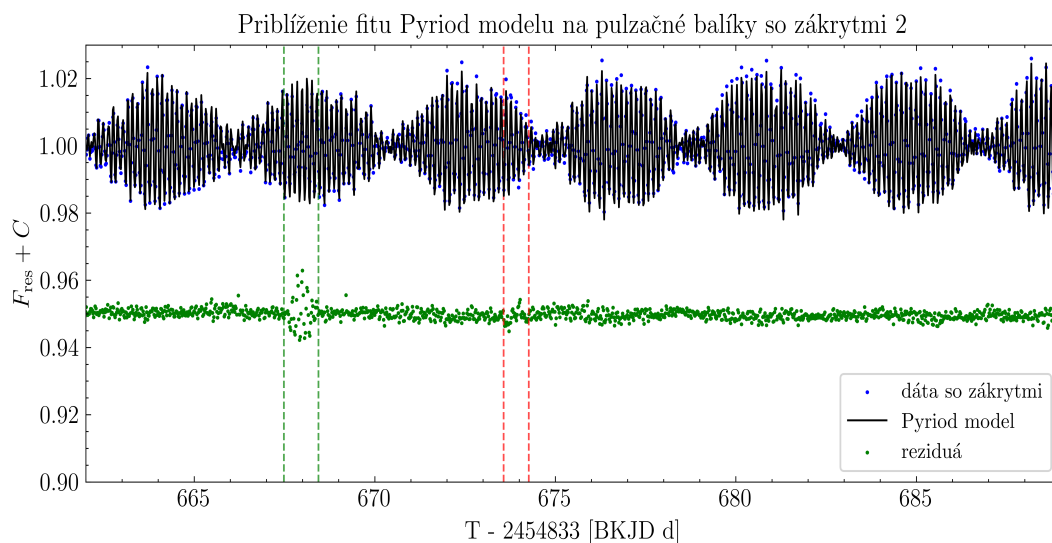
Obr. A.4: 3D model hviezd zachytený pre fázu  $\Phi = -0.11$ .



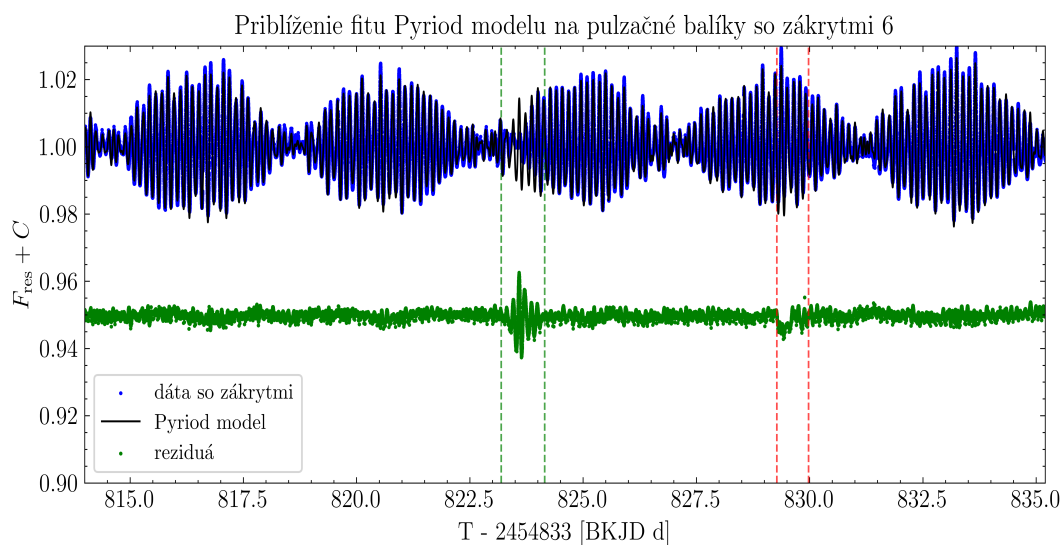
Obr. A.5: 3D model hviezd zachytený pre fázu  $\Phi = 0.0$ . Táto fáza charakterizuje primárny zákryt.



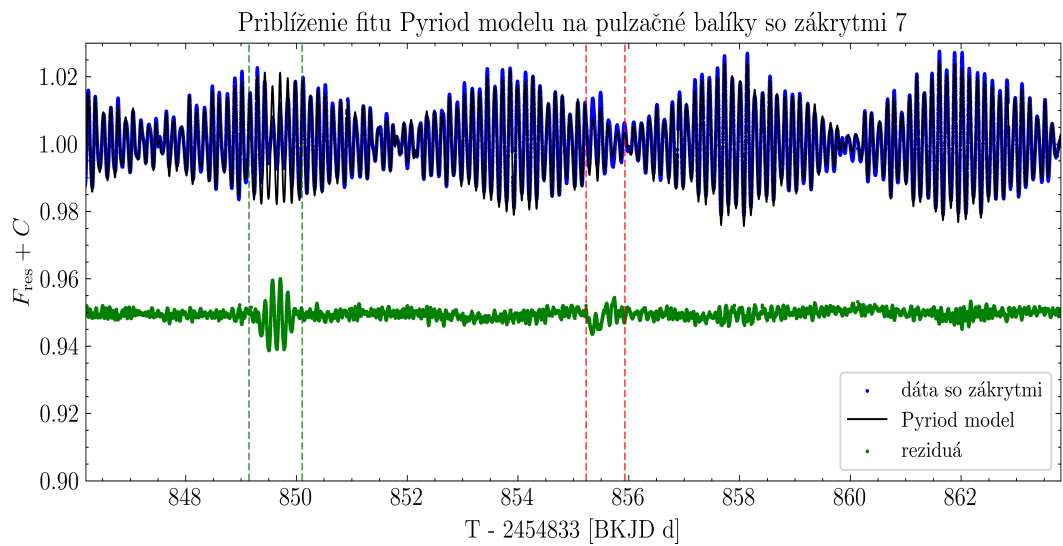
### A.3 Model pulzácií oproti reálnym dátam - ďalšie časové úseky



Obr. A.6: Prejav Pyriod modelu na určitom časovom úseku (značením 2) dát dlhej kadencie  $F_{\text{res}}$  so zákrytmi. V prípade  $F_{\text{res}}$  je vertikálne posunutie  $C = 1.00$  a v prípade zbytkových reziduá rozdielu Pyriod modelu a  $F_{\text{res}}$  je  $C = 0.95$ .



Obr. A.7: Prejav Pyriod modelu na určitom časovom úseku (značením 6) dát  $F_{\text{res}}$  so zákrytmi. V prípade  $F_{\text{res}}$  je vertikálne posunutie  $C = 1.00$  a v prípade zbytkových reziduá rozdielu Pyriod modelu a  $F_{\text{res}}$  je  $C = 0.95$ .



Obr. A.8: Prejav Pyriod modelu na určitom časovom úseku (značením 7) dát  $F_{\text{res}}$  so zákrytmi. V prípade  $F_{\text{res}}$  je vertikálne posunutie  $C = 1.00$  a v prípade zbytkových reziduí rozdielu Pyriod modelu a  $F_{\text{res}}$  je  $C = 0.95$ .