

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Sebastian Lukavský

Světelné nekonečno v dalekohledu

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Rád bych vyjádřil své upřímné poděkování všem, kteří mě podporovali při psaní této bakalářské práce. Zejména bych chtěl poděkovat svému konzultantovi, Tomáši Ledvinkovi, za jeho odborné vedení, cenné rady a trpělivost, kterou mi věnoval během celého procesu tvorby této práce. Jeho podpora a znalosti byly pro mě neocenitelné.

Název práce: Světelné nekonečno v dalekohledu

Autor: Sebastian Lukavský

Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Tato práce se zaměřuje na studium efektů modelových gravitačních vln na trajektorie světelných paprsků přicházejících z dalekých hvězd. Zkoumáme linearizovanou teorii gravitace, zejména v kontextu Bondi-Sachsova a Newman-Penrosova formalismu. Výsledky ukazují, jakým způsobem jsou zdánlivé polohy dalekých hvězd ovlivněny gravitačními vlnami. Dále jsme identifikovali novou kalibračně invariantní veličinu, která je dána pohybem hvězd v závislosti na čase a úhlových souřadnicích.

Klíčová slova: Obecná teorie relativity, Linearizovaná teorie gravitace, Gravitační vlny, Asymptoticky ploché časoprostory, Světelné nekonečno

Title: Null infinity in the telescope

Author: Sebastian Lukavský

Institute: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: doc. Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: This thesis focuses on the study of the effects of model gravitational waves on the trajectories of light rays coming from distant stars. We examine the linearized theory of gravity, particularly in the context of the Bondi-Sachs and Newman-Penrose formalism. The results show how the apparent positions of distant stars are affected by gravitational waves. Additionally, we have identified a new gauge-invariant quantity given by the motion of stars as a function of time and angular coordinates.

Keywords: General theory of relativity, Linearized theory of gravitation, Gravitational waves, Asymptotically flat spacetimes, Null infinity

Obsah

Úvod	6
1 Linearizované gravitační vlny	8
1.1 Linearizovaná teorie gravitace	8
1.1.1 Stupně volnosti linearizované teorie	10
1.1.2 TT-kalibrace a TT-soustava	11
1.2 Poruchová teorie Schwarzschildova prostoru	13
1.2.1 Modelová skalární vlna	17
1.2.2 Modelové gravitační vlny	20
2 Světelné nekonečno	22
2.0.1 Modelová skalární vlna a její počáteční data	25
2.1 Modelová gravitační vlna v Bondi-Sachsově a Newman-Penrosově formalismu	26
2.1.1 Bondi-Sachsův formalismus	28
2.1.2 Newman-Penrosův formalismus	35
3 Světelné geodetiky ve slabých gravitačních vlnách	43
3.1 Pozorování dalekých hvězd skrz gravitační vlnění	43
Závěr	51
Literatura	52
Seznam obrázků	55
Seznam tabulek	57
Seznam použitých zkratk	58
A Přílohy	59
A.1 Symetrie plochého Minkowského časoprostoru	59
A.2 Symetrie na světelném nekonečnu	60
A.3 Tenzorové harmoniky	61

Úvod

Gravitační vlny, předpovězené Einsteinovou obecnou teorií relativity, představují oscilace časoprostoru šířící se rychlostí světla [1]. Tyto vlny vznikají při některých z nejenergetičtějších událostí ve vesmíru, jako jsou srážky černých děr, neutronových hvězd, nebo při explozích supernov [2]. Detekce těchto vln poskytuje nové způsoby studia vesmíru, nezávislé na elektromagnetickém spektru, což otevírá nové možnosti v astrofyzice a kosmologii [3].

Od prvního přímého pozorování gravitačních vln observatořemi LIGO a Virgo v roce 2015 se tato oblast výzkumu dynamicky rozvíjí [4]. Detekce gravitačních vln umožňuje studium extrémních podmínek gravitace a vlastností černých děr, což bylo dříve nepřístupné tradičními astronomickými metodami [4].

Gravitační vlny mají obrovský potenciál pro astrofyzikální výzkum, neboť umožňují přístup k informacím o událostech, které jsou jinak nedostupné. Například srážky černých děr, které jsou klíčovým zdrojem gravitačních vln, poskytují unikátní informace o extrémních stavech hmoty a zakřivení časoprostoru [3].

Linearizovaná teorie gravitace poskytuje nástroje pro analýzu slabých gravitačních polí, kde zakřivení časoprostoru je malé [2] a umožňuje nám popsat vliv gravitačních vln na pohyb těles, jako jsou vzdálené hvězdy. Použitím formalismu Bondi-Sachs [5] a Newman-Penrose [6] můžeme efektivně popisovat asymptoticky ploché časoprostory, které jsou relevantní v kontextu gravitačních vln.

Kalibrační volnost obecné teorie relativity hraje klíčovou roli při analýze gravitačních vln [7] a umožňuje nám identifikovat nové kalibračně invariantní veličiny, které jsou klíčové pro pochopení dynamiky hvězd na pozadí gravitačních vln [8].

V této bakalářské práci se zaměříme na studium vlivu gravitačních vln na světlo přicházející ze vzdálených hvězd. Analýza se soustředí na identifikaci nových kalibračně invariantních veličin, které mohou poskytnout nový náhled na dynamiku hvězd a strukturu časoprostoru ovlivněného gravitačními vlnami. Tento výzkum přispívá k lepšímu porozumění projevů gravitačních vln v asymptoticky plochých časoprostorech.

V kontextu asymptoticky plochých časoprostorů je důležité také zmínit koncept „světelného nekonečna“ (null infinity), který umožňuje studium vlastností časoprostoru v nekonečně vzdálených oblastech [9]. Tento koncept je klíčový pro pochopení struktury gravitačních vln a jejich efektů.

Gravitační vlny mohou mít významné dopady na pozorování hvězd. Vliv těchto vln na pohyb hvězd může být použit k detekci a analýze vlastností gravitačních vln samotných [10], [11]. Použití kalibračně invariantních veličin umožňuje přesnější analýzu a vede k lepšímu porozumění fyzikálním jevům spojeným s gravitačními vlnami.

Tato práce se soustředí na detailní studium vlivu gravitačních vln na pohyb hvězd a identifikaci kalibračně invariantních veličin. Využitím pokročilých teoretických nástrojů a metod, jako jsou Bondi-Sachsův a Newman-Penrosův formalismus, se snažíme přinést nový pohled na souvislosti mezi matematictějšími pojmy jako jsou počáteční data pro gravitační vlny na světelném nekonečnu a snáze představitelnými a pozorovatelnými efekty v asymptoticky plochých časoprostorech. Základní vlastnosti gravitačních vln (jako počet a význam polarizací, měřitelné

účinky) popisují již linearizované gravitační vlny. Další složitější pak mimo jiné popisuje Bondi-Sachsův a Penroseův formalismus.

1 Linearizované gravitační vlny

Obecná teorie relativity nabízí kompletní popis gravitačních jevů jako zakřivení časoprostoru způsobené hmotou a energií. V srdci celé teorie stojí Einsteinovy polní rovnice

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Ty udávají vztah mezi zakřivením časoprostoru, popsaným Einsteinovým tenzorem $G^{\mu\nu}$, a energií, popsanou tenzorem energie a hybnosti $T^{\mu\nu}$. Tento popis je však často velmi komplexní a řešení Einsteinových rovnic je možné nalézt jen ve speciálních případech nebo pomocí numerických metod. Pro studium slabých gravitačních polí, kde zakřivení časoprostoru není extrémní, se ukazuje být užitečnou linearizovaná teorie gravitace.

Linearizovaná teorie gravitace představuje přiblížení, ve kterém se zakřivení časoprostoru popisuje jako malé odchylky od plochého Minkowského prostoru. V tomto rámci lze Einsteinovy rovnice zjednodušit a analyzovat v podobě lineárních parciálních diferenciálních rovnic, které jsou mnohem snadněji řešitelné. Toto přiblížení je obzvláště užitečné při studiu gravitačních vln, které jsou oscilacemi v zakřivení časoprostoru šířícími se rychlostí světla.

V této kapitole se zaměříme na odvození a aplikace linearizované teorie gravitace. Začneme základními předpoklady a postupně odvodíme lineární rovnice. Celou kapitolu bude provázet motivace popsat gravitační vlnění a vystavět základní intuici o jejich fyzikálním významu. Pro zjednodušení notace volíme pro celou práci jednotky, ve kterých je rychlost světla c rovna jedné. Signaturu Minkowského metriky volíme $(-, +, +, +)$. Pro kompletnější výklad linearizované teorie odkazujeme čtenáře na [2], nebo také na [12], [13].

1.1 Linearizovaná teorie gravitace

Při teoretickém studování gravitačních vln je velice užitečné, uvažovat metriku obecné teorie relativity ve speciálním tvaru

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

kde pro rozdíl fyzikální metriky od ploché Minkowského metriky $h_{\mu\nu}$ (dále označovaný jako porucha nebo také pertubace) požadujeme

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (1.3)$$

Studujeme tedy případy, kdy je metrika popisující zakřivení časoprostoru lineárním porušením ploché Minkowského metriky. Výklad v této kapitole sleduje postupy z učebnic [10] a [13]. Jelikož numerické hodnoty prvků metriky záleží na pozorovateli, je nutné specifikovat, že přesněji uvažujeme takové fyzikální soustavy, kde rovnice (1.2) platí na dostatečně velké oblasti časoprostoru. Terminologie malé poruchy se projevuje prakticky tak, že při výpočtech zanedbáváme členy kvadratického a vyššího řádu v poruše nebo jejich derivacích. Jelikož omezujeme volbu souřadnicové soustavy rovnicí (1.2), ztrácíme symetrii lokální invariance z obecné teorie. Uvažujme však změnu souřadnic ve tvaru

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \quad (1.4)$$

kde $|\partial_\mu \xi_\nu|$ je rozměrem alespoň stejně malé jako $h_{\mu\nu}$. Metrika se v takovém případě transformuje

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu). \quad (1.5)$$

a její velikost není podstatně změněna a linearizovaná teorie tedy musí být invariantní vůči souřadnicovým transformacím typu (1.4). Vůči Lorentzovským transformacím se metrika transformuje

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} + \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma h_{\rho\sigma} \quad (1.6)$$

Tedy poruchu metriky můžeme skutečně považovat za tenzorový prostor nad plochým pozadím. Rotace pak nikdy neporuší vlastnost $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, u boostů je však třeba se limitovat pouze na takové, které ji neporuší. Vůči konečným translacím je $h_{\mu\nu}$ očividně invariantní. Linearizovaná teorie je za takových podmínek tedy Poincaré invariantní (viz Dodatek A).

Jak tedy budou vypadat Einsteinovy rovnice v linearizované teorii? Jednoduše lze spočítat základní tenzory relativistické teorie do prvního řádu [10],[13]

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} (\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}), \quad (1.8)$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\rho \partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\nu\sigma}), \quad (1.9)$$

$$h = \eta^{\mu\sigma} h_{\sigma\mu}, \quad (1.10)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\sigma \partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}), \quad (1.11)$$

$$R = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h, \quad (1.12)$$

$$G_{\mu\nu} = \square H_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma H_{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\nu H_{\mu\rho} - \partial^\rho \partial_\mu H_{\nu\rho}, \quad (1.13)$$

kde $H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$. V následujících kapitolách budeme užívat také Weylův tenzor definovaný [2]

$$C_{\mu\nu\sigma\lambda} = R_{\mu\nu\sigma\lambda} + \frac{1}{2} (R_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - R_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda} + R_{\nu\sigma} g_{\mu\lambda} - R_{\nu\lambda} g_{\mu\sigma}) + \frac{1}{3} R (g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma}). \quad (1.14)$$

V linearizované teorii bude dán jednoduše nahrazením $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$. Weylův tenzor je přirozená veličina pro popis gravitačních vln, protože zachycuje volnou část křivosti prostoročasového kontinua, která je odpovědná za šíření gravitačních vln. V budoucí kapitole o Newman-dagramově formalismu uvidíme, jak konkrétní složky Weylova tenzoru, známé jako Newman-dagramovy skaláry, přímo popisují amplitudy a polarizace těchto vln.

Za použití symetrie (1.4) můžeme zvolit metriku $h_{\mu\nu}$ tak, aby platilo

$$\partial^\nu H_{\mu\nu} = 0. \quad (1.15)$$

Stačí si povšimnout transformační symetrie pro $H_{\mu\nu}$,

$$(\partial^\nu H_{\mu\nu})' = \partial^\nu H_{\mu\nu} - \square \xi_\mu \quad (1.16)$$

a zvolit pak

$$\square \xi_\mu = f_\mu = \partial^\nu H_{\mu\nu}. \quad (1.17)$$

Takové ξ_μ můžeme zvolit vždy, jelikož d'Alembertův operátor lze invertovat pomocí příslušné Greenovy funkce

$$\xi_\mu(x) = \int G(x-y) f_\mu(y) d^4y. \quad (1.18)$$

Einsteinovy linearizované rovnice tedy budou dány vlnovou rovnicí [2]

$$\square H_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.19)$$

1.1.1 Stupně volnosti linearizované teorie

Nahlédněme nyní z matematického hlediska na symetrie a stupně volnosti nalezené teorie. Následující přístup lze podrobněji nalézt v [13].

Formalizujme nejprve interpretaci poruchové metriky jakožto tenzorové pole. Nechť M_p je neporušený Minkowského prostor a M_f je fyzikální prostor s určitou metrikou $g_{\mu\nu}$ splňující Einsteinovy rovnice. Zvolíme-li libovolný difeomorfismus ϕ mezi těmito hladkými varietami, můžeme kanonicky definovat poruchu metriky

$$h_{\mu\nu} = (\phi^* g)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}. \quad (1.20)$$

Pomocí pull-backu můžeme převádět i samotné Einsteinovy rovnice a metrika $h_{\mu\nu}$ tak musí splňovat linearizované rovnice v případě, že difeomorfismus ϕ dává (1.3). Takových difeomorfismů je však velké množství a právě z této reality vychází symetrie souřadnicových transformací linearizované teorie. Zvolme si vektorové pole ξ^μ na M_p , to generuje jednoparametrickou množinu automorfismů ψ_ϵ . Pro dostatečně malé ϵ bude nový difeomorfismus $(\phi \circ \psi_\epsilon)$ také zachovávat malou velikost metriky. Matematicky bude dán nový pull-back vztahem

$$h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} = (\psi_\epsilon^*(\phi^* g))_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}. \quad (1.21)$$

Ten pak můžeme aplikovat na porušenou metriku z linearizované teorie a dostaneme

$$h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} = (\psi_\epsilon^*(h + \eta))_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \epsilon \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu}. \quad (1.22)$$

Tuto symetrii budu dále nazývat konfigurační symetrie.

Jak jsem zmínil už výše, je linearizovaná teorie invariantní vůči konečným transformacím z Poincarého grupy. V některých případech je vhodné znát ireducibilní reprezentace rotační grupy a vyjádřit metriku s jejich pomocí. Nalezení symetrizované báze je úlohou čistě matematickou, zde proto uvedu pouze poruchovou metriku $h_{\mu\nu}$ vyjádřenou v této bázi [13]

$$h_{00} = -2\Phi, \quad (1.23)$$

$$h_{0i} = w_i, \quad (1.24)$$

$$h_{ij} = 2s_{ij} - 2\Psi\delta_{ij}, \quad (1.25)$$

kde Φ je skalární a \mathbf{w} je vektorové pole vzhledem k akcím rotační grupy, a dále

$$\Psi = -\frac{1}{6}\delta^{ij}h_{ij}, \quad (1.26)$$

$$s_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} - \frac{1}{3}\delta^{kl}h_{kl}\delta_{ij}), \quad (1.27)$$

kde Ψ je podobně skalární pole a s_{ij} bezstopé symetrické pole. Více o symetriích linearizované teorie se může čtenář dozvědět například v [13] nebo v dodatku A.

1.1.2 TT-kalibrace a TT-soustava

Nalezené lineární rovnice platí při zvolené Lorentzově konfiguraci $\partial^\nu H_{\nu\mu} = 0$. Ta však ještě nefixuje zvolené souřadnice jednoznačně, změna souřadnic splňující $\square\xi_\mu = 0$ nezmění Lorentzovskou vlastnost a můžeme tedy infinitesimální transformací souřadnic řešení (1.1) ještě zjednodušit. Je jednoduchým cvičením pak ukázat, že existují souřadnice, ve kterých má porucha metriky následující velice jednoduchý tvar

$$h^{0\mu} = 0 \quad h_i^i = 0 \quad \partial^i h_{ij} = 0. \quad (1.28)$$

Poruchu v tomto tvaru označujeme jako poruchu v TT-konfiguraci $h_{\mu\nu}^{TT}$. Porucha splňující Einsteinovy linearizované rovnice má dva fyzikální stupně volnosti.

Soustavu, ve které má fyzika TT-tvar, budu označovat dále TT-soustava. Pro zadefinování této soustavy je vhodné analyzovat její vliv na hmotné body v klidu. Nejprve však ukáží jak je možné nalézt TT-soustavu k libovolnému řešení ve tvaru rovinné vlny matematicky. Necht je $h_{\mu\nu}$ rovinnou vlnou řešící linearizované rovnice (1.19) a necht se vlna pohybuje ve směru $\hat{\mathbf{n}}$. Vlna automaticky splňuje podmínku Lorentzovy kalibrace, aby plnila i podmínky TT-vlny, budeme hledat její projekci na rovinu kolmou k $\hat{\mathbf{n}}$. Nejprve zavedeme projekční tenzor vztahem

$$P_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) = \delta_{ij} - n_i n_j. \quad (1.29)$$

S jeho pomocí pak zavedeme takzvaný lambda tenzor pomocí

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = [P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl}](\hat{\mathbf{n}}). \quad (1.30)$$

Definujeme pak TT-projekci k metrice jako

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} h_{kl}. \quad (1.31)$$

Snadno zkontrolujeme, že tato projekce splňuje vlastnosti TT-vlny [10]. Výše uvedené projekční metody jsou podrobně používány a popsány v učebnici [10].

Pro nalezení fyzikálního významu TT-soustavy budeme uvažovat efekt TT-vlny na hmotný bod v klidu. Jednoduše nahlédneme, že pokud $U^0 = 1, U^i = 0$ pak bude rovnice geodetiky

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = -\Gamma_{\sigma\rho}^\mu U^\sigma U^\rho = -\Gamma_{00}^\mu = 2\partial_0 h_{0i} - \partial_i h_{00} = 0. \quad (1.32)$$

Pokud tedy uvažujeme poruchy metriky splňující TT kalibraci, představují světočáry konstantních souřadnic geodetické pozorovatele rozmístěné v prostoru. Účinky gravitačních vln se tak projevují tím, že vzdálenost mezi takovými pozorovateli se mění (jak uvidíme níže). To je také nejsnazší interpretace fungování interferometrických detektorů gravitačních vln [10],[11].

V TT konfiguraci můžeme konečně také nahlédnout na fyzikální význam gravitačních vln. Jak již bylo zmíněno zbudou v TT soustavě pouze dva stupně volnosti, ty už nemohou být dále sejmuty ani změnou kalibrace ani změnou souřadnic, jedná se tedy o stupně volnosti jistého fyzikálního významu. Na jejich význam nejlépe nahlédneme, zvolíme-li globální soustavu souřadnic tak, aby

$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$. Uvažujeme-li dále ještě řešení (1.19) ve tvaru harmonické rovinné vlny $h_{\mu\nu} \propto \cos(z\omega - \omega t)$, dostaneme

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(\omega z - \omega t), \quad (1.33)$$

kde h_+ a h_\times jsou nezávislé komponenty gravitační vlny. V TT-soustavě zůstávají pozorovatelé v klidu i po příchodu vlny, jedná se však o čistě souřadnicový efekt. Ukážeme nyní, že vlastní vzdálenost dvou blízkých hmotných bodů už je gravitační vlnou měněna s časem. Mějme čtyři hmotné body v xy-rovině ($z = 0$), jejichž orientace definuje x-ovou a y-ovou osu (tedy $h_\times = 0$) a jejich vzdálenost je dána veličinami x_0 a y_0 . Pro případ $h_\times = 0$ dostaneme pro jejich vlastní vzdálenost vztah

$$\Delta l_x \approx \sqrt{ds_x^2} = \sqrt{1 + h_{xx}}x_0 \approx \left(1 + \frac{1}{2}h_+ \cos(\omega t)\right) x_0, \quad (1.34)$$

$$\Delta l_y \approx \sqrt{ds_y^2} = \sqrt{1 + h_{yy}}y_0 \approx \left(1 - \frac{1}{2}h_+ \cos(\omega t)\right) y_0. \quad (1.35)$$

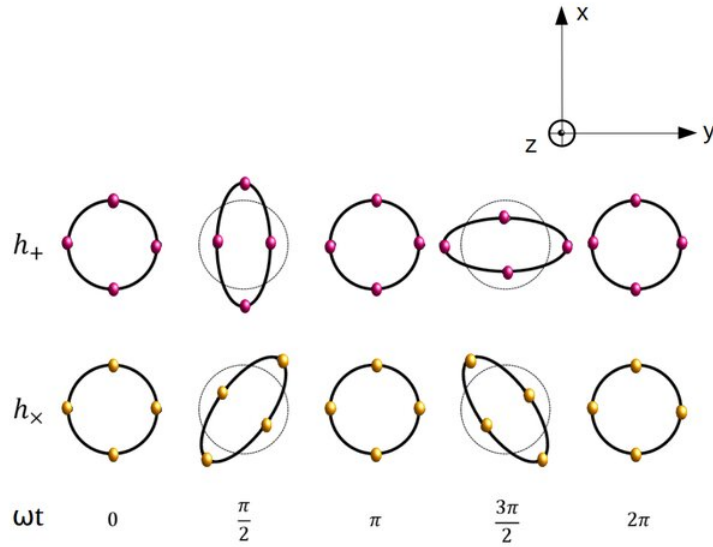
Podobně dostaneme vztah i pro případ $h_+ = 0$ (například rotací xy-roviny zvolené v prvním případě)

$$\Delta l_x^- \approx \left(1 + \frac{1}{2}h_\times \cos(\omega t)\right) x_0, \quad (1.36)$$

$$\Delta l_y^- \approx \left(1 - \frac{1}{2}h_\times \cos(\omega t)\right) y_0. \quad (1.37)$$

Vidíme tedy, že procházející gravitační vlna mění vlastní vzdálenost dvou hmotných bodů a má tedy i skutečný fyzikální efekt. Stupně volnosti gravitační vlny jsou pak její polarizace, které nazýváme $+$ a \times polarizace.

Kompletní informaci o gravitační vlně obdržíme, známe-li její polarizaci, energii a moment hybnosti. Ty slouží jako počáteční podmínky linearizovaných rovnic a můžeme s jejich pomocí určit kompletní vývoj gravitační vlny. Předmětem této práce je hlavně efekt gravitačních vln na geodetiky. Ten je můžeme plně určit z polarizace gravitační vlny, a proto bude právě informace o polarizaci hlavním předmětem studia v následujících kapitolách. Energie i moment hybnosti budou do hlavního modelu také vstupovat, pouze však ve formě okrajových podmínek. Na rozdíl od TT-vlny budeme uvažovat vlny přicházející z různých směrů a s konečným množstvím energie, na které můžeme aplikovat formalismus asymptoticky plochých časoprostorů. Konečná energie tedy zajistí rozumné okrajové podmínky v nekonečnu. Moment hybnosti bude zase volit takový, abychom dostali rozumné okrajové podmínky v počátku.



Obrázek 1.1 Efekt polarizací gravitační vlny na vlastní vzdálenost hmotných bodů. Obrázek je převzatý z [14].

1.2 Poruchová teorie Schwarzschildova prostoru

Schwarzschildovo řešení Einsteinových rovnic představuje popis statického, sféricky symetrického gravitačního pole kolem neotáčející se hmoty, jako je nebeské těleso či černá díra. Pro pochopení chování gravitačních vln v okolí těchto objektů je užitečné použít poruchovou teorii. Tato metoda umožňuje analyzovat malé odchylky od přesného Schwarzschildova řešení, což je klíčové pro studium dynamiky gravitačních vln šířících se v zakřiveném časoprostoru. Přelomová společná práce Tullio Reggeho a Johna A. Wheelera v oblasti gravitačních vln se nazývá „Stability of a Schwarzschild Singularity“ [15], což ukazuje na prvotní motivaci při zkoumání poruch Schwarzschildova prostoročasu.

Cílem celé této práce je intuitivní vybudování a popis modelu vesmíru vyplněného gravitačním zářením. Metody a kalibrace gravitačních vln popsány v předchozích kapitolách a jejich lineární kombinace však nejsou pro takový model ideální. Budeme i nadále předpokládat poruchu Minkowského časoprostoru ve tvaru (1.2) a uvažovat pouze lineární řád této poruchy a jejich derivací. Schwarzschildova metrika je nejznámějším a jedinečným řešením Einsteinových rovnic splňujících onu symetrii, proto je vhodné hledat poruchu pomocí pertubační teorie pro černé díry v limitě $q \rightarrow 0$ a $M \rightarrow 0$.

Abychom zjednodušili výpočty, je obvyklé předpokládat, že rozložení hmoty, které generuje gravitační záření, je omezeno na určitý objem (jako je tomu u kompaktních binárních systémů) a že náš zájmový prostor se nachází mimo tento objem. Samozřejmě, pokud chceme odvodit vlastnosti zdroje studiem vln generovaných tímto zdrojem, bude nutné propojit tyto vlny se samotným zdrojem. Nicméně pro všechny situace uvažované v této práci si vystačíme pouze s rovnicemi pro vakuum.

Oblíbenou kalibrací při studiu poruch v Schwarzschildově prostoru je Regge-Wheelerova kalibrace [15], ta eliminuje čtyři složky metriky, čímž se počet nezá-

vislých složek $h_{\mu\nu}$ sníží z deseti na šest. To může být zpočátku matoucí, protože i v této kalibraci dávají Einsteinovy rovnice deset diferenciálních rovnic, což se zdá jako přebytek. Naštěstí nás zachraňují Bianchiho identity. Ve vakuu se tyto redukují na tvrzení, že $\nabla^\alpha R_{\alpha\beta} = 0$. Tyto čtyři dodatečné vztahy poskytují omezení na deset diferenciálních rovnic získaných linearizací Einsteinových rovnic, což snižuje počet nezávislých rovnic na přesně šest.

Přestože jsme v linearizované teorii uvažovali pouze poruchu Minkowského časoprostoru, není těžké se přesvědčit, že po náhradě všech derivací jejich kovariantním analogem budou linearizované rovnice platit i pro obecnější zakřivené časoprostory. V zakřivených časoprostorech je samozřejmě obtížnější určit zda má porucha vůbec fyzikální význam a oddělit ji od zbytku časoprostoru, tím se však není třeba v této práci zabývat. Vystačili bychom sice i jen s poruchami Minkowského prostoročasu, ale pro náš problém je výhodné využít zavedeného formalizmu pertubací Schwarzschildova prostoročasu.

V této kapitole odvodíme základy poruchové teorie sféricky symetrických prostoročasů. Notace i postupy jsou značně inspirovány [16], pro podrobnější a rigoróznější přehled odkazujeme čtenáře právě na ně. V poruchové teorii se často vyplatí rozlišovat mezi radiální, časovou a úhlovými částmi veličin. Odtud budou tedy indexy značené malými latinskými písmeny značit radiální a časovou složku a indexy značené velkými latinskými písmeny zase uhlové složky. Uvažujme tedy poruchu metriky obdobnou s (1.2). Rozložíme poruchu do sumy sférických harmonik a jejich derivací. Za tímto účelem je vhodné rozložit poruchu pomocí ireducibilních reprezentací grupy rotací. Jednoduchou úvahou se lze přesvědčit, že můžeme metriku rozdělit na tři skalární funkce popisující čistě časové a radialní složky, dva vektory popisující smíšené radialně- a časově-úhlové složky a na jeden tenzor druhého řádu popisující úhlovou část poruchy. Rozklad skalárních polí je triviální. Vektory (kovektory) mají jeden index a tak je přirozené je rozvinout pomocí derivací sférických harmonických funkcí ve tvaru

$$Y_A^{lm} = \nabla_A Y^{lm}, \quad (1.38)$$

$$X_A^{lm} = -\epsilon_A^B \nabla_B Y^{lm}, \quad (1.39)$$

kde ϵ_{AB} je Levi-Civitův tenzor na dvoudimenzionálním úhlovém podprostoru. Kovariantní derivaci zde chápeme kovariantní derivaci na sféře o poloměru r . Pro symetrický tenzor druhého řádu máme také dvě obecné harmonické tenzorové funkce ve tvaru

$$Y_{AB}^{lm} = \left[\nabla_A \nabla_B + \frac{1}{2} l(l+1) g_{AB} \right] Y^{lm}, \quad (1.40)$$

$$X_A^{lm} B = -\frac{1}{2} (\epsilon_A^C \nabla_B + \epsilon_B^C \nabla_A) \nabla_C Y^{lm}, \quad (1.41)$$

kde g_{AB} značí úhlovou část Schwarzschildovy metriky (nebo prostě dvoudimenzionální metriku sféry). Y_{AB}^{lm} a X_{AB}^{lm} se liší svou paritou. Liché tenzorové harmonické funkce jsou antisymetrické s ohledem na inverzi souřadnic. Jsou často označovány jako „magnetické“ nebo „rotace“ harmonické funkce. Pro dané sférické harmonické funkce $Y^{lm}(\theta, \phi)$ jsou liché harmonické funkce konstrukce založené na rotaci těchto funkcí.

Je důležité zmínit, že výše definované funkce jsou podobné těm definovaným ve výchozím článku [17] a těm definovaným Regge-Wheelerem [15] nebo Zerillim

[18], liší se však svou normalizací na sféře o poloměru r . Zatímco ve zmiňovaných člancích jsou funkce normovány

$$\int g^{AC} g^{BD} X_{CD}^{l'm'} X_{AB}^{lm} d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (1.42)$$

Výše zmíněné funkce splňují

$$\int g^{AC} X^{l'm'} X_A^{lm} = \frac{1}{r^2} l(l+1) \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (1.43)$$

$$\int g^{AC} g^{BD} X_{CD}^{l'm'} X_{AB}^{lm} d\Omega = \frac{1}{2r^4} l(l-1)(l+1)(l+2) \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (1.44)$$

Výše zmíněné funkce jsme zvolili pro jejich jednoduchost. Při porovnávání výsledků této práce s výsledky článku [17] však musíme mít rozdílné normalizace na paměti. Celou poruchu tak můžeme zapsat jako lineární kombinaci těchto funkcí

$$h_{ab} = \sum_{lm} \gamma_{ab}^{lm} Y^{lm}, \quad (1.45)$$

$$h_{aB} = \sum_{lm} [J_a^{lm} Y_B^{lm} + \gamma_a^{lm} X_B^{lm}], \quad (1.46)$$

$$h_{AB} = \sum_{lm} [r^2 K^{lm} g_{AB} Y^{lm} + r^2 G^{lm} Y_{AB}^{lm} + \gamma_2^{lm} X_{AB}^{lm}]. \quad (1.47)$$

Používané sférické harmonické tenzorové funkce jsou konkrétně vypsány v dodatku C. Doporučujeme je porovnat s rozvojem ve člancích [17], [15],[18]. Pro účely práce jsou důležité pouze členy s lichou paritou a tak se budu nadále zabývat pouze jejich příspěvkem. Ve výše uvedeném rozvoji jsou liché členy s X_A a X_{AB} . Sudé členy a jejich rovnice jsou pak mnohem složitější a jejich řešení bylo objeveno Zerillim [18] až mnoho let po objevení lichého řešení [15]. Zůstanou tedy tři nezávislé funkce r a t udávající kompletní informaci o poruše, nadále je budu značit

$$\gamma_p^{lm}(t,r) \quad p \in \{0,1,2\}.$$

Koeficienty l a m často nebudeme dále explicitně vypisovat, pokud tím nedojde k matoucí notaci. Pokud provedu kalibrační transformaci metriky

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + 2\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)}, \quad (1.48)$$

kde ξ^μ je nějaké vektorové pole, pak se budou členy γ_p transformovat

$$\gamma_0 \rightarrow \gamma'_0 = \gamma_0 + \partial_t c', \quad (1.49)$$

$$\gamma_1 \rightarrow \gamma'_1 = \gamma_1 + \partial_r c' - \frac{2}{r} c', \quad (1.50)$$

$$\gamma_2 \rightarrow \gamma'_2 = \gamma_2 + 2c', \quad (1.51)$$

kde funkce $c'_{lm}(t,r)$ pochází z rozvoje ξ^μ do sférických harmonik a udává její lichý člen v rozvoji do vektorových harmonik. Poznamenejme ještě, že v kalibrační rovnici (1.22) ponecháme v Lieovu derivaci pouze lineární členy. Můžeme tedy zvolit c'_{lm} tak, aby bylo $h_2 = 0$, to je právě Regge-Wheelerova kalibrace. Konečně můžeme převést Einsteinovy rovnice pro poruchu metriky na jednodušší rovnice

pro funkce γ_p . Ve vakuu přejdou Einsteinovy rovnice na $R_{\mu\nu} = 0$ a stačí tedy spočíst linearizovaný Ricciho tenzor s pomocí nalezeného rozvoje.

$$R_{tA} = \frac{1}{2} \left[f \left(-\partial_r^2 \gamma_0 + \left[\partial_r + \frac{2}{r} \right] \partial_t \gamma_1 \right) + \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{4M}{r^3} \right) \right] X_A, \quad (1.52)$$

$$R_{rA} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{f} \left(\partial_r - \frac{2}{r} \right) \partial_t \gamma_0 + \frac{(l-1)(l+2)}{r^2} \gamma_1 + \frac{1}{f} \partial_t^2 \gamma_1 \right] X_A, \quad (1.53)$$

$$R_{AB} = \left[-\frac{1}{f} \partial_t \gamma_0 + \partial_r [f \gamma_1] \right] X_{AB}. \quad (1.54)$$

kde $f = 1 - \frac{2M}{r}$. Z nalezených rovnic už pak jednoduše dostaneme

$$-\partial_t^2 \gamma_1 + \left(\partial_r - \frac{2}{r} \right) [f \partial_r (f \gamma_1)] - f \frac{(l-1)(l+2)}{r^2} \gamma_1 = 0. \quad (1.55)$$

Provedeme-li substituci

$$\psi_{\text{RW}} := \frac{f}{r} \gamma_1, \quad (1.56)$$

dostaneme konečně Regge-Wheelerovu rovnici

$$-\frac{1}{f} \partial_t^2 \psi_{\text{RW}} + \partial_r (f \partial_r \psi_{\text{RW}}) - \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right] \psi_{\text{RW}} = 0. \quad (1.57)$$

Ta slouží jako mistrovská rovnice poruchové teorie pro sféricky symetrické prostory. V následujících kapitolách budeme chtít tyto perturbace sféricky symetrického prostoru lépe studovat. Pro studium se budou také hodit různé souřadnice, přestože jsme se v této kapitole drželi výhradně Schwarzschildových souřadnic. Přepsat nalezené výsledky v kovariantní nebo kalibračně nezávislé formě však není nijak složité. Podrobně je tato problematika rozpracována článkem [19]. My zde uvedeme pouze nejdůležitější vztahy. Použijeme značení

$$r_a = \frac{\partial r}{\partial x^a}. \quad (1.58)$$

Je jednoduché nalézt kalibračně nezávislou kombinaci funkcí γ_p ,

$$\tilde{\gamma}_a = \gamma_a - \frac{1}{2} \nabla_a \gamma_2 + \frac{1}{r} r_a h_2, \quad (1.59)$$

kde ∇ je kovariantní derivace příslušející Schwarzschildově metrice. Regge-Wheelerovu rovnici pak můžeme přepsat

$$\left(g^{ab} \nabla_a \nabla_b - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{6M}{r^3} \right) \psi_{\text{RW}} := (\square_2 - V_{\text{odd}}) \psi_{\text{RW}} = 0, \quad (1.60)$$

kde tento vztah představuje definici \square_2 a V_{odd} , jak jsou používány v [16]. Tak dostáváme RW funkci

$$\psi_{\text{RW}} = \frac{1}{r} r^a \tilde{\gamma}_a. \quad (1.61)$$

Pro studium gravitačních vln se bude více hodit ještě jedna funkce řešící Regge-Wheelerovu rovnici,

$$\psi_{\text{odd}} = \frac{2r}{(l-1)(l+2)} \epsilon^{ab} \left(\nabla_a \tilde{\gamma}_b - \frac{2}{r} r_a \tilde{\gamma}_b \right), \quad (1.62)$$

kde ϵ_{ab} je Levi-Civitův tenzor. ψ_{odd} funkce se nazývá Cunninghamova-Priceova-Montcriefova (CPM) funkce a bude sloužit jako mistrovská funkce pertubační teorie v této práci. Její vztah k Regge-Wheelerově funkci určíme z Einsteinových rovnic

$$\psi_{\text{RW}} = -\frac{1}{2}\epsilon^{ab}r_b\nabla_a\psi_{\text{odd}}. \quad (1.63)$$

1.2.1 Modelová skalární vlna

Zaměříme se nyní na speciální řešení Regge-Wheelerovy rovnice, které nás bude provázet po zbytek práce. Pro účely této práce je podstatná její bezdrojová limita v lineárním řádu poruchy. Uvažujme nejprve v plné obecnosti vlnovou rovnici

$$\square\psi = -\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \Delta\psi = 0. \quad (1.64)$$

Z důvodů, které vyjdou najevo v kapitole o světelných geodetikách, zvolíme řešení vlnové rovnice ve tvaru použitým v článku [17]. Toto řešení je nalezeno pomocí metody separace

$$\psi_{lm} = \frac{1}{2}[Q_l(r,t)Y_{lm}(\theta,\phi) + \bar{Q}_l(r,t)\bar{Y}_{lm}(\theta,\phi)]. \quad (1.65)$$

Jednoduchým výpočtem dostaneme rovnice pro jednotlivé funkce

$$-\frac{\partial^2 Q_l}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 Q_l}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial Q_l}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2}Q_l = 0, \quad (1.66)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\phi^2} + l(l+1)Y_{lm} = 0. \quad (1.67)$$

Povšimněme si, že radiální rovnice odpovídá Regge-Wheelerove rovnici (1.60) pro $\psi_{\text{RW}} = rQ$ a $M = 0$. Řešení úhlové funkce je známé a hojně se ve fyzice vyskytuje. Jedná se o takzvané sférické harmonické funkce, které jsou dány pomocí asociovaných Legendrových polynomů [20]

$$Y^{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}. \quad (1.68)$$

Více informací o sférických harmonikách je možno nalézt například v [21].

Zabývejme se dále částí $Q_l(t,r)$. Naším cílem je namodelovat časoprostor, který nám umožní studovat efekt gravitačních vln na světlo přicházející z daleké hvězdy. Je tak rozumné použít řešení [17] ve formě vlnových balíčků složených z mnoha různých frekvencí. Začneme popisem jednoduché gravitační harmonické vlny. Jednoduchou substitucí spolu s předpokladem harmoničnosti

$$Q_l(t,r) = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{r}}u_l(\omega,r) \quad (1.69)$$

dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_l}{\partial r} - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2}u_l + \omega^2 u_l = 0, \quad (1.70)$$

což je Besselova rovnice s $\nu = l + \frac{1}{2}$. Její nezávislá řešení jsou dána Besselovými a Henkelovými funkcemi, které je možné nalézt například v [22]. Pouze Besselovy funkce J_ν jsou však regulární v počátku, což je zcela jistě pravdou i pro hledaný fyzikální model. Zobecnění na vlnové balíky s reálnou amplitudou B_l a charakteristickou šířkou a pak dostaneme superpozicí

$$Q_l(t,r) = B_l \sqrt{\frac{\pi a^3}{2r}} \int_0^\infty (a\omega)^{l+\frac{1}{2}} e^{-a\omega} e^{-i\omega t} J_{l+\frac{1}{2}}(\omega r) d\omega. \quad (1.71)$$

Řešení integrálu uvedu bez konkrétního výpočtu s odkazem na řešení v [17].

$$Q_l(t,r) = B_l 2^l l! \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^l}{\left(\frac{(a+it)^2+r^2}{a^2}\right)^{l+1}} = B_l 2^l l! \frac{\rho^l}{((1+i\tau)^2 + \rho^2)^{l+1}}. \quad (1.72)$$

Máme tak důležité řešení rotující skalární vlny, které je stěžejní pro článek [17] a bude stěžejní pro celý zbytek práce. Fyzikální řešení je jednoduše dáno reálnou částí nalezené funkce. Tu jednoduše určíme rozkladem jmenovatele pomocí Eulerova vzorce a dostaneme

$$\psi_{lm}(t,r,\theta,\phi) = \frac{B_l 2^l l! N_l^m P_l^m(\cos\theta) \rho^l}{[(1+\rho^2-\tau^2)^2 + 4\tau^2]^{\frac{l+1}{2}}} \cos[m\phi - \chi(t,r)], \quad (1.73)$$

kde N_l^m jsou koeficienty u sférických harmonik a

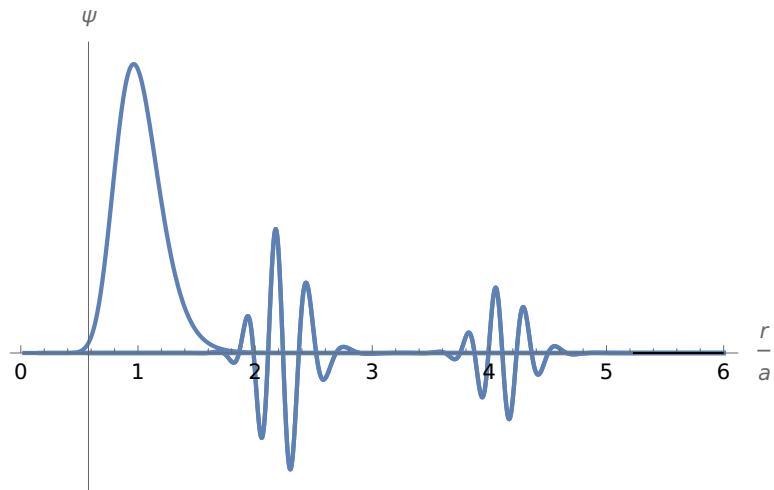
$$\chi(t,r) = \arg [(\rho + (1+i\tau)^2)^{l+1}]. \quad (1.74)$$

Označení $\rho = \frac{r}{a}$ a $\tau = \frac{t}{a}$ se bude často hodit pro zjednodušení notace. Fyzikální interpretace nalezeného řešení je tímto jasná. Jedná se o vlnový balík s délkou a , jehož rotace je dána faktorem v cosinové funkci.

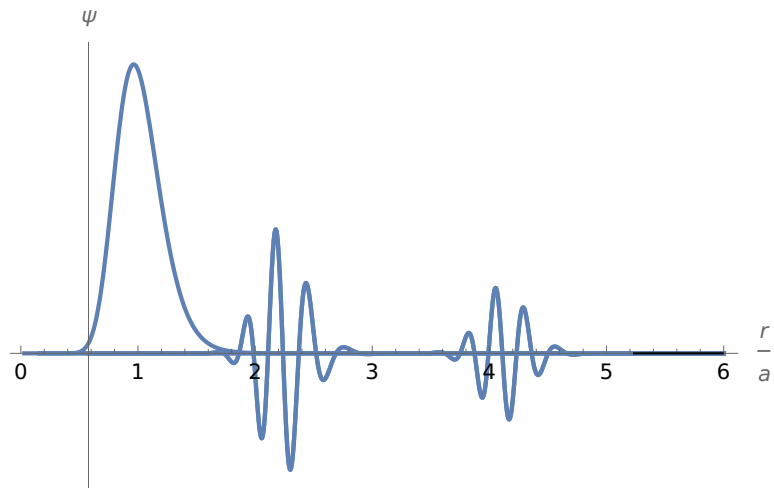
Než se v následujících kapitolách budeme zabývat analyzováním gravitačních vln generovaných výše převzatou skalární funkcí ψ_{lm} [17], je dobré nahlédnout na některé vlastnosti této funkce. Jedná se o komplexní funkci čtyř proměnných. Jedná se o lineární kombinaci harmonických skalárních vln. V článku [17] je funkce často označována jako funkce skalární rotující vlny, přívlastek rotující pochází z funkce $\lambda(t,r)$, která způsobuje rotaci vlnového balíku. Skalární funkce má „pěkné“ chování v počátku i v nekonečnu (zatím se myslí ve smyslu souřadnicového nekonečna $r \rightarrow \infty$), jelikož v libovolném čase pro $l \neq 0$ vymizí a podobně i v limitě $r \rightarrow \infty$ jde k nule. Oba případy se budou hodit v podrobnější analýze následujících kapitol a umožní nám spočítat perturbaci světelných geodetik. Vlny (1.73) tedy tvoří vlnový balík, který se odráží v bodě počátku, přičemž tloušťka tohoto balíku se s rostoucím l zmenšuje. Funkce mizí v počátku jako r^l , takže pro dostatečně vysoké hodnoty l je blízko počátku menší než by byly perturbace metriky druhého řádu (ty v této práci stejně zanedbáváme, přesto je dobré zmínit validitu zanedbání efektů ve vyšším řádu [23][17]). Asymptoticky je vlna (1.73) rovna r^{-l-2} pro $r \rightarrow \infty$. Prakticky se tím vlastně nosič (oblast, kde je funkce nenulová) funkce limituje na určitý interval kolem světlu podobné světočáry $r \approx \sqrt{a^2 + t^2}$. Tloušťku vlnového balíku můžeme zapsat jako

$$\Delta r \approx \sqrt{8 \ln 2} a l^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.75)$$

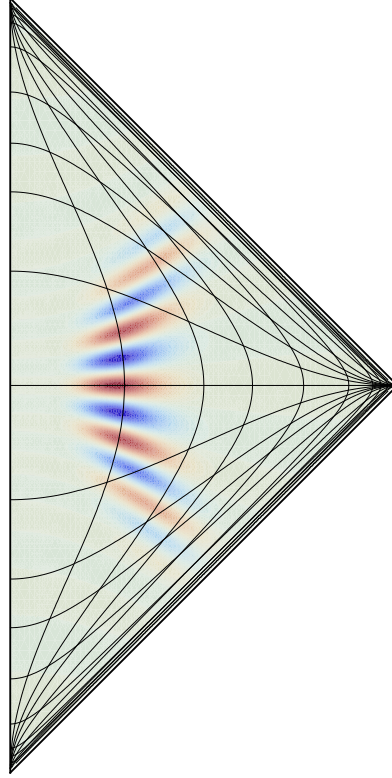
Vztah (1.75) nám umožňuje popis libovolně tenkého balíku zvyšováním hodnoty l . Podrobnější vlastnosti funkce je možné nalézt v článcích [17] a [23]. Pro ilustraci zde uvedeme několik nákrešů skalární rotující vlny převzatých z [17], [23]. Pod každým obrázkem bude ještě zdůrazněno, odkud byl případně převzat.



Obrázek 1.2 Závislost funkce $Q_l(r,t)$ pro $l = 26$ na souřadnici r . Funkce je vykreslena v časech $t \in \{-4a, -2a, 0, +2a, +4a\}$, aby byl zdůrazněn pohyb vlnového balíku. Vlnový balík se v rostoucím čase pohybuje zprava doleva, kde se pak v počátku odráží a vrací symetricky zpět.



Obrázek 1.3 Obraz funkce psi_{lm} v rovině $\theta = \frac{\pi}{2}$ (nahore) a v rovině $\phi = 0$ (dole). Obrázek je převzat z [23].



Obrázek 1.4 Skalární vlnová funkce ψ_{lm} na pozadí Minkowského časoprostoru zakreslená v Penroseově diagramu. Čáry v grafu znázorňují konstantní souřadnice r a t

1.2.2 Modelové gravitační vlny

V předchozí kapitole jsme si představili řešení vlnové rovnice ve tvaru rotující skalární vlny převzaté z článku [17]. Ta v článku [17] slouží jako generující funkce poruchy a analyzují se její fyzikální efekty. Naším cílem je některé výsledky zreprodukovat. Potřebujeme tedy využít této skalární funkce pro namodelování samotného vesmíru vyplněného gravitačním vlněním, tedy nalézt odpovídající model poruchy.

Jak již bylo řečeno, budu uvažovat pouze vlny liché. V Regge-Wheelerově kalibraci bude $h_2(t,r) = 0$ a funkce $h_0(t,r)$ a $h_1(t,r)$ extrahujeme pomocí vztahů nalezených při odvozování Regge-Wheelerovy rovnice. Nenulové prvky poruchy jsou pak dány pomocí nalezené skalární funkce vztahy [17]

$$h_{t\phi} = -\sin\theta \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r^2 \psi), \quad (1.76)$$

$$h_{t\theta} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} (r^2 \psi), \quad (1.77)$$

$$h_{r\phi} = -\sin\theta \frac{\partial^2}{\partial t \partial \theta} (r^2 \psi), \quad (1.78)$$

$$h_{r\theta} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi} (r^2 \psi). \quad (1.79)$$

$$(1.80)$$

Vztahy uvedené výše přebíráme z [17] a konkrétněji se jimi budeme zabývat v

následující kapitole a to hlavně v podkapitole o Bondiho-Sachsově formalismu. V kontextu již uvedené látky je můžeme interpretovat následujícím způsobem. Vynásobíme-li skalární funkci z článku [17] sférickou souřadnicí r , řeší tato nová funkce skalární Regge-Wheelerovu rovnici (1.60). Fyzikálně odpovídá řešení Regge-Wheelerovy rovnice (1.60) Regge-Wheelerova nebo CPM funkce, ty souvisejí vztahem (1.63). Einsteinovy rovnice (1.52) je pak dále dávají do vztahu k funkcím γ_p , které již plně určují poruchu sféricky symetrického časoprostoru. Dává tedy smysl položit jednu z těchto funkcí rovnu násobku skalární funkce z [17] a následně studovat vesmír, kde je porucha dána právě tímto způsobem. Zatím jsme pouze zmiňovali, že vhodnější funkcí pro popis gravitačních vln je právě CPM funkce, nepředstavili jsme však ještě žádný příklad, kde by byla konkrétní znalost CPM vhodnější oproti znalosti Regge-Wheelerovi funkce, to se ukáže až v následujících kapitolách. Přesto však již teď položíme definici modelového vesmíru této práce. Uvažujeme vesmír vyplnění právě takovými gravitačními vlnami, které jsou určeny volbou CPM funkce pomocí skalární funkce rotující vlny [17]. Vztahy (1.76) tedy slouží jako definice takového vesmíru v Regge-Wheelerově kalibraci. Časové a radiální parciální derivace v rovnicích (1.76) pochází z Einsteinových rovnic (1.52) a úhlové parciální derivace pochází z rozvoje do vektorových harmonických funkcí.

Extrahovat skutečné fyzikální gravitační záření z nalezeného pole je však stále netriviální úlohou. Víceru způsoby se pokusím úlohu řešit v kapitole o světelném nekonečnu. Zatím tedy nedokážeme například graficky ilustrovat (podobně jako jsme to učinili pro ψ_{lm} výše na obrázcích 1-3), jak tato gravitační vlna „vypadá“.

2 Světelné nekonečno

Rovnice obecné teorie relativity jsou v plné obecnosti velice matematicky složité, proto se ve výpočtech většinou využívá aproximací a pertubační teorie. Ve fyzikálních teoriích také často s velkým zájmem studujeme takzvané izolované soustavy. V takové soustavě totiž nedochází k energetické interakci s okolím a můžeme tak definovat pojem celkové energie a příslušný zákon zachování. V realitě skutečné izolované systémy neexistují, přesto dává v mnoha případech smysl při studiu gravitačních systémů zanedbat křivost způsobenou hmotou nacházející se ve velké vzdálenosti od systému. Tedy studovat takové časoprostory, které se stávají v nekonečnu asymptoticky ploché. Tato kapitola se zabývá problematikou takových prostorů v obecné relativitě.

Inspirace pochází z klasických nebo i relativistických teorií pole, kde můžeme definovat globální soustavu souřadnic. Asymptotičnost je pak spojena s dostatečně rychlým klesáním efektů pole v nekonečné vzdálenosti od jeho zdrojů. Například v elektromagnetické teorii se zabýváme izolovanými hustotami náboje nebo v klasické teorii gravitace se zabýváme izolovaným rozložením hmoty, v takových případech má pak izolovaný systém přesně danou a matematicky korektní definici. V obecné teorii relativity však narážíme hned na několik komplikací. Obecně neexistuje žádný globální souřadný systém s jehož pomocí bychom mohli definovat klesání fyzikálních veličin. Nemáme pole definované na Minkowského prostoru s plochou metrikou v pozadí, ale máme gravitačně zakřivený prostor určený nějakou fyzikální metrikou určující lokální strukturu časoprostoru. Nestudujeme tedy chování fyzikálních polí na prostoru na plochem prostoru s dobře definovanou soustavou souřadnic, ale chování samotného časoprostoru. Definice nekonečna na obecné varietě už není triviální.

Dále se tedy budeme zabývat definicí nekonečna na takzvaných asymptoticky plochých prostorech, tedy prostorech, které jsou v nějakém smyslu v nekonečnu popsány Minkowského metrikou. V následujícím textu použiji přístup převzatý z [12]. Některé postupy a notace jsou také inspirovány výkladem z [2]. Pro kompletně rigorózní matematický přístup také dále odkazujeme na [24], [25], [26] nebo [27].

Pro motivaci se zabývejme popisem slabých gravitačních vln šířících se na pozadí Minkowského metriky ve sférických souřadnicích.

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.1)$$

Pro popis radiace se hodí použít souřadnice ve tvaru

$$v = t + r, \quad (2.2)$$

$$u = t - r. \quad (2.3)$$

Tyto souřadnice se nazývají světelné souřadnice (anglicky double null coordinates), konkrétně se v nazývá pokročilý čas (anglicky advanced time) a u opoždění čas (anglicky retarded time). Jak uvidíme později jedná se v jistém smyslu o kanonické souřadnice pro popis minulého a budoucího světelného nekonečna. Metrika pak dostane tvar

$$ds^2 = du dv + \frac{1}{4}(v - u)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.4)$$

Chceme popsat radiaci, která unikne do nekonečna. O to se můžeme pokusit limitou $v \rightarrow \infty$ pro konstantní u . Taková limita nemusí být vůbec matematicky

triviální a nebo dokonce nedefinovaná na zakřivených prostorech. Dále se tedy budeme snažit zaměnit limitní nekonečno za nějaký dobře definovaný bod, ve kterém můžeme studované veličiny jednoduše vyčíslit. Okamžitě se nabízí možnost zaměnit souřadnici v za $V = v^{-1}$ a definovat nekonečno v bodě $V = 0$. Takový přístup však okamžitě vede na problém, který je zřetelný po přepsání metriky na

$$ds^2 = \frac{1}{V^2} dudV + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{V} - u \right)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.5)$$

Ta je v bodě $V = 0$ singulární. Analýza nekonečna jako nějakého normálního bodu časoprostoru je tak nemožná. Nabízí se tedy otázka, zda je možné fyzikální metriku spojitě prodloužit na nějakou nefyzikální metriku, která však bude v takových bodech popisujících nekonečno dobře definována. To by bylo možné vynásobením metriky funkcí V^2 , tedy pomocí takzvané konformní (úhly zachovávající) transformace. Nefyzikální metrika prodlužuje původní fyzikální metriku a definuje novou varietu \hat{M} , jejíž hranice je reprezentací nekonečna v původním prostoru. Abych lépe zdůraznil tento výsledek, definuji ještě nové souřadnice na \hat{M} jako

$$T = \arctan v + \arctan u, \quad (2.6)$$

$$R = \arctan v - \arctan u. \quad (2.7)$$

$$(2.8)$$

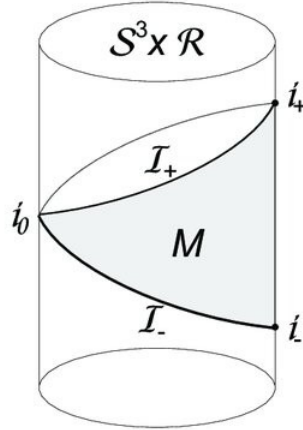
Časoprostorový diagram v těchto souřadnicích je zobrazen na obrázku . Prostor je popsán metrikou

$$ds^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.9)$$

To je přesně přirozená Lorentzovská metrika na prostoru, který také nazýváme Einsteinův statický vesmír. Podařilo se nám tedy pomocí pouhé konformní transformace dobře popsat fyzikální časoprostor pomocí vnoření do Einsteinova statického vesmíru. Geometrická hranice tohoto vnoření reprezentuje nekonečno fyzikálního prostoru. Výsledek můžeme přesně zformulovat následovně:

Teorém 1. *Existuje konformní izometrie Minkowského časoprostoru $(\mathcal{R}^4; \eta_{\mu\nu})$ do otevřeného podprostoru Einsteinova statického vesmíru $(S^3 \times \mathcal{R})$ daného na množinách*

- $-\pi < T + R < \pi$,
- $-\pi < T - R < \pi$,
- $0 \leq R$.

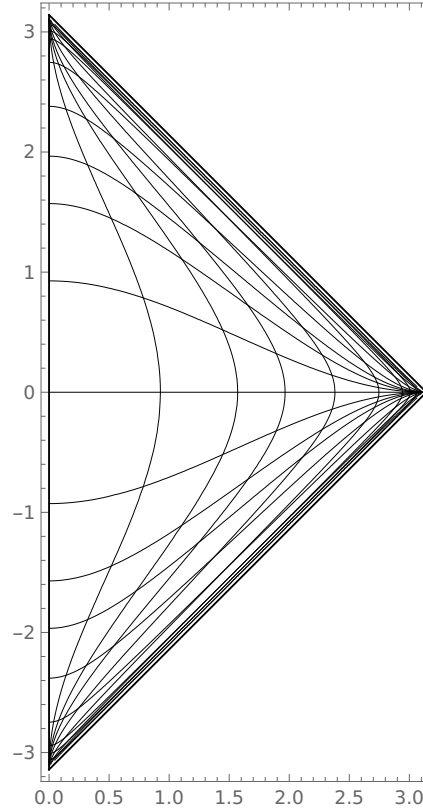


Obrázek 2.1 Časoprostorový diagram Einsteinova statického vesmíru. Na válcovém zobrazení je vidět přirozené rozdělení hranice na jednotlivé části: i^- , i^+ , \mathcal{I}^- , \mathcal{I}^+ a i^0 . Obrázek je převzatý z [28]

Teď už jsem schopen přesně zadefinovat nekonečno na Minkowského časoprostoru. Definuji konformní nekonečno Minkowského prostoru jako hranici Einsteinova statického vesmíru. Hranici můžeme pak dále dělit na následujících pět částí pomocí jejich fyzikálního významu:

1. časopodobné minulé nekonečno i^-
2. časopodobné budoucí nekonečno i^+
3. světelné minulé nekonečno \mathcal{I}^-
4. světelné budoucí nekonečno \mathcal{I}^+
5. prostorové nekonečno i^0

Na obrázku 2.1 vidíme, že jsme ve vhodných souřadnicích schopni zakreslit hranici časoprostoru v konečném časoprostorovém diagramu. Obrázek samozřejmě není ideální a pro vytvoření nákresu musely být některé dimenze potlačeny. V praxi se nejvíce setkáme s kompaktním zakreslením časoprostoru pomocí takzvaných Penroseových diagramů. Pro jejich nákres kompletně potlačíme úhlové souřadnice a pracujeme s takzvaných kompakťovaných světelných souřadnicích. Jedná se o arkustangens jednotlivých světelných souřadnic. Pro Minkowského prostor je Penroseův diagram k nahlédnutí na obrázku 2.2. Čas je v takovém diagramu reprezentován vertikálním směrem a souřadnice r směrem horizontálním. Podrobněji budeme Penroseův diagram v rámci konformního nekonečna diskutovat v následující kapitole.



Obrázek 2.2 Časoprostorový Penroseův diagram Minkowksého prostoru. Čáry uvnitř diagramu reprezentují nadplochy konstantního času nebo konstantního r

2.0.1 Modelová skalární vlna a její počáteční data

Než se o to pokusím pomocí pokročilejších technik a formalismů, je užitečné pokusit se popsat nalezené skalární pole rotující vlny (1.73) v minulém světelném nekonečnu pomocí světelných souřadnic používaných výše (2.2). Jelikož je vlnová rovnice lineární, můžu postupovat v komplexní reprezentaci. Ve světelných souřadnicích však nahradím čas t a poloměr r proměnnými τ a ρ a faktor převrácené hodnoty a pak jednoduše doplním na konci výpočtu. Aby nedošlo k matoucí notaci budu tyto přeskálované světelné souřadnice značit velkými písmeny. Triviální úpravou dostanu

$$Q_l(U,V) = B_l! \frac{(V-U)^l}{(1+iU+iV-VU)^{l+1}}. \quad (2.10)$$

Pro analýzu chování skalárního pole v minulém světelném nekonečnu je potřeba asymptoticky rozložit radiálně časovou složku pro $u \rightarrow \infty$ a v konstantní. Faktor klesající s $\frac{1}{u}$ pak přiřadíme gravitační radiaci. Výsledku lze dosáhnout jednoduše Taylorovým rozkladem v $x = \frac{1}{U}$,

$$\begin{aligned} Q_l(x,V) &= B_l! \frac{(Vx-1)^l}{x^l (1 + \frac{i}{x} + iV - \frac{V}{x})^l \cdot (1 + \frac{i}{x} + iV - \frac{V}{x})} \\ &= B_l! \frac{(Vx-a)^l \cdot x}{[(1+iV)x+i-V]^{l+1}} = B_l! (-1)^l \frac{x}{(i-V)^{l+1}} + \mathcal{O}(x^2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Celkově je

$$\psi_{lm}(u, v, \theta, \phi) = B_l l! \frac{(-1)^l a^{l+2}}{(ai - v)^{l+1}} Y^{lm}(\theta, \phi) \frac{1}{v} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{v^2}\right). \quad (2.12)$$

Stejným postupem můžeme dosáhnout i limity ve světelném budoucím nekonečnu. Pro úplnost zde uvedu pouze výsledek

$$\psi_{lm}(u, v, \theta, \phi) = B_l l! \frac{a^{l+2}}{(ai - u)^{l+1}} Y^{lm}(\theta, \phi) \frac{1}{u} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^2}\right). \quad (2.13)$$

Povšimněme si, že faktor stojící před $\frac{1}{u}$ (2.12) závisí na souřadnicích (v, θ, ϕ) tedy souřadnicích na světelném nekonečnu. V tomto smyslu jsou tedy počáteční data vlnové rovnice pro naši modelovou vlnu daná právě tímto faktorem.

Konformní přístup toto ještě více objasňuje – v prostoročase s Ricciho skalárem $R = 0$ je funkce $\hat{\psi} = \Omega^{-1}\psi$ řešením vlnové rovnice na nefyzikální varietě (viz [9]). Ta samozřejmě není plochá a tak má vlnová rovnice tvar [9]

$$\hat{\square}\hat{\psi} = \hat{\nabla}^\mu \hat{\nabla}_\mu \hat{\psi}. \quad (2.14)$$

A tedy $\hat{\psi}$ na \mathcal{S}^- (které zjednodušeně můžeme chápat právě jako faktor stojící před $\frac{1}{u}$ v (2.12)) přímo představuje počáteční data na světelné nadploše \mathcal{S}^- . Rovnice (2.14) je do podrobnosti rozebrána v [9], konkrétně odkazujeme na první dvě rovnice publikace.

2.1 Modelová gravitační vlna v Bondi-Sachsově a Newman-Penrosově formalismu

Cílem této kapitoly je analyzovat podrobněji chování poruchy utvořené z rotující sféricky symetrické skalární vlny na minulém světelném nekonečnu. Analýzu gravitačního záření provedeme za pomoci Bondiho-Sachsova a Newman-Penrosova formalismu. Jedná se o poměrně rozsáhlé disciplíny a tak se budeme zabývat hlavně pochopením jejich základních myšlenky a konkrétním výpočtem členů odpovídajících gravitačním vlnám. Již jsme nastínili jakým postupem je možno chápat světelné nekonečno pomocí limit vhodných souřadnic. Takový postup byl použit Bondim v jeho popisu gravitačního záření. Newman-Penrosův přístup je naopak geometrické podstaty. Považuji však za vhodné nejprve začít obecnější geometrickou definicí světelného nekonečna vycházející z Penrosova postupu. Bondi-Sachsův formalismus se ukáže být ekvivalentní této geometrické definici a poslouží jako dobrý základ pro fyzikální interpretace.

Světelné nekonečno a kompaktifikace

Inspirován nalezenou definicí pro Minkowského prostor převezmu Ashtekarovu definici, popisující i prostorové nekonečno, převzaté z [12]. V definici níže značí \mathcal{S}^\pm budoucí a minulé prostorové nekonečno.

Definice 1. *Prázdný časoprostor $(M, g_{\mu\nu})$ se nazývá asymptoticky plochý ve světelném a prostorovém nekonečnu, pokud existuje varieta $(\hat{M}, \hat{g}_{\mu\nu})$ s metrikou hladkou všude, mimo maximálně bod i^0 . Vnitřek variety \hat{M} je difeomorfní k fyzikální varietě M a $\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$. \hat{M} dále splňuje:*

1. $\overline{J^+(i^0)} \cup \overline{J^-(i^0)} = \hat{M} - M$, kde $\overline{J^\pm}$ značí uzávěr kauzální budoucnosti a minulosti
2. Existuje otevřené okolí $V \subset \hat{M} = i^0 \cup \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^-$ takové, že časoprostor $(V, \hat{g}_{\mu\nu})$ je silně kauzální
3. Ω může být jako funkce rozšířena na celé \hat{M} , kde je hladká mimo i^0 a C^2 v i^0
4. (a) Na \mathcal{I}^+ a \mathcal{I}^- je $\Omega = 0$ a $\hat{\nabla}_\mu \Omega$
(b) $\Omega(i^0) = 0$; $\lim_{i^0} \hat{\nabla}_\mu \Omega = 0$; $\lim_{i^0} \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu \Omega = 2\hat{g}_{\mu\nu}(i^0)$
5. Zobrazení ze všech světlupodobných směrů v i^0 do prostoru integrálních křivek vektorového pole $n^\mu = \hat{g}^{\mu\lambda} \hat{\nabla}_\lambda \Omega$ v \mathcal{I}^+ a \mathcal{I}^- je difeomorfismus

Výše uvedená definice je matematickým přepisem intuitivního fyzikálního prodloužení diskutovaného výše. K fyzikálnímu časoprostoru M , jehož polní rovnice jsme vyřešili, přiřadíme nový časoprostor s hranicí \hat{M} a požadujeme, aby oba prostory byly stejné mimo hranici (tedy difeomorfní). Výše uvedená definice platí pouze pro prázdné časoprostory, přesto však pro dostatečně rychle klesající tenzor energie bude definici možno rozšířit i na prostory neprázdné. Budu tedy pro další účely požadovat, aby mělo ve světelném nekonečnu hladkou vlastní limitu. Díky zvolenému poklesu tenzoru energie bude na 'okolí' nekonečna platit i pro neprázdné časoprostory a definice 1 tak zůstane platná. Je dobré analyzovat stupně volnosti při volbě konformního faktoru. Pokud Ω je rozšířením fyzikálního prostoru z naší definice, pak je jím zcela jistě i $\omega\Omega$, za předpokladu, že ω je ryze kladná hladká funkce a $\omega(i^0) = 1$.

Jak tedy matematická definice přechází do fyzikálního světa? Čtvrtá podmínka zaručuje, že metrika vymizí na světelném nekonečnu a dochází na něm ke konformní izometrii s nekonečným „roztážením“ fyzikálního prostoru. Světelné i prostorové nekonečno tedy skutečně souhlasí s intuitivním fyzikálním nekonečnem.

Světelné nekonečno tvoří hranici nefyzikální variety difeomorfní s fyzikálním časoprostorem. Okamžitě tedy můžeme říct, že \mathcal{I}^\pm je trojdimenzionální varieta a také světlupodobná plocha. Zkusme blíže popsat její strukturu. Stále vycházíme z [12]. Fyzikální Ricciho tenzor je dán ve vztahu k tenzoru k tenzoru nefyzikálnímu

$$R_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\nu} + 2\Omega^{-1} \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu \Omega + \hat{g}_{\mu\nu} \hat{g}^{\lambda\sigma} (\Omega^{-1} \hat{\nabla}_\lambda \hat{\nabla}_\sigma \Omega - 3\Omega^{-2} \hat{\nabla}_\lambda \hat{\nabla}_\sigma \Omega). \quad (2.15)$$

Jelikož Ω , $\hat{g}_{\mu\nu}$ a $\hat{R}_{\mu\nu}$ mají hladkou limitu v \mathcal{I}^\pm , musí být i $\Omega^{-1} \hat{\nabla}^\lambda \hat{\nabla}^\sigma \Omega$ hladké v \mathcal{I}^\pm a tedy i n^μ . Jak ovlivní tento faktor, transformace metriky pomocí konformního faktoru ω uvedeného výše? Nový faktor bude

$$(\Omega^{-1} \hat{\nabla}^\lambda \hat{\nabla}^\sigma \Omega)' = \omega^{-3} \hat{g}^{\mu\nu} [\Omega \hat{\nabla}_\mu \omega \hat{\nabla}_\nu \omega + 2\omega \hat{\nabla}_\mu \Omega \hat{\nabla}_\nu \omega + \omega^2 \Omega^{-1} \hat{\nabla}_\mu \Omega \hat{\nabla}_\nu \Omega]. \quad (2.16)$$

Zvolíme-li ω tak, aby řešilo rovnici

$$n^\mu \hat{\nabla}_\mu \ln \omega = -\frac{1}{2} \Omega^{-1} \hat{g}^{\lambda\sigma} \hat{\nabla}_\lambda \Omega \hat{\nabla}_\sigma \Omega, \quad (2.17)$$

pak faktor $\Omega^{-1} \hat{\nabla}^\lambda \hat{\nabla}^\sigma \Omega$ vymizí na \mathcal{I}^\pm a Einsteinovy rovnice ve vakuu budou celkově

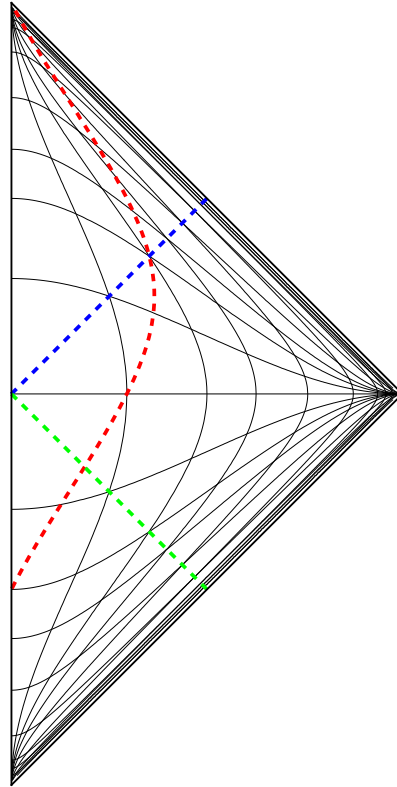
$$2\hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu \Omega + \hat{g}_{\mu\nu} \hat{g}^{\lambda\sigma} \hat{\nabla}_\lambda \hat{\nabla}_\sigma \Omega = 0 \text{ na } \mathcal{I}^\pm \quad (2.18)$$

a tedy platí $\hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu \Omega = 0$ na \mathcal{S}^\pm . Vektor n^μ tak splňuje rovnici geodetiky

$$n^\mu \hat{\nabla}_\mu n^\nu = 0. \quad (2.19)$$

Nazýváme tyto vektory generátory \mathcal{S}^\pm . Pro podrobnější rozbor výše uvedené definice světelného nekonečna odkazujeme čtenáře na [12], [24], [25] nebo [26]

Jak již bylo zmíněno, dobrou ilustrací časoprostorů je jejich kompaktifikace do Penroseova diagramu. Ukažme si nyní jak v takovém diagramu vypadají některé geodetiky. Penroseův diagram plochého časoprostoru má tvar trojúhelníku. Svislá strana trojúhelníku představuje $r=0$. Souřadnice jsou zvoleny tak, že plochy konstantního v a u jsou přímky svírající s vodorovnou osou úhel 45. Zbylé strany trojúhelníku tak představují budoucí a minulé světelné nekonečno a jejich průsečík pak prostorové nekonečno. Vrchol u stran představujících budoucí (minulé) světelné nekonečno se stranou představující počátek jsou pak obrazem časupodobného budoucího (minulého) nekonečna. Na obrázku 2.3 jsou v Penroseově diagramu některé geodetiky zakresleny.



Obrázek 2.3 Časoprostorový Penroseův diagram Minkowksého prostoru. Zelená a modrá čára představují geodetiky světelného paprsku. Červená geodetika představuje časupodobnou geodetiku (v tomto případě pozorovatele vzdalujícího se z počátku konstantní rychlostí)

2.1.1 Bondi-Sachsův formalismus

Bondi-Sachsův formalismus je význačnou metodou pro analýzu gravitačního záření v obecné teorii relativity, která umožňuje podrobný popis asymptotických vlastností prostoročasu. Tato metoda, vyvinutá H. Bondim a R. K. Sachsem, se

opírá o konkrétní volbu souřadnicového systému. V těchto, tzv. Bondiho souřadnicích totiž nabývají Einsteinovy rovnice mimořádně přehledného tvaru. My v následujícím využijeme zejména to, že je možné jejich řešení rozvinout v okolí světelného nekonečna do podoby řady s jasně identifikovaným stupněm volnosti v podobě gravitačních vln.

Bondi-Sachsův formalismus se zaměřuje na tzv. retardační souřadnice, které jsou přirozené pro popis prostoročasu ovlivněného pohybem hmoty a energií. Tento přístup využívá nulových povrchů, které představují trajektorie světelných paprsků, a poskytuje nástroje pro výpočet klíčových veličin charakterizujících gravitační pole, jako jsou Bondiho hmotnost a ztráty energie způsobené vyzařováním gravitačních vln.

Jedním z hlavních přínosů Bondi-Sachsova formalismu je jeho schopnost explicitně popsat gravitační záření a jeho vliv na asymptotickou strukturu prostoročasu. V tomto formalismu jsou gravitační vlny analyzovány prostřednictvím tzv. Bondiho zprávy, která poskytuje kvantitativní měření vyzařované energie a hybnosti. Tento formalismus také umožňuje sledovat změny v geometrii prostoročasu způsobené dynamickými procesy, jako jsou kolize černých děr nebo supernovy.

Jak již zmíněno výše, v Bondi-Sachsově formalismu definujeme světelné nekonečno souřadnicově. Tyto souřadnice pak rozšíříme do okolí \mathcal{I} a pracujeme s fyzikální metrikou právě v těchto souřadnicích. Asymptoticky ploché prostory pak definujeme jako právě takové časoprostory, jejichž metrika v Bondi-Sachsově tvaru přechází limitně v plochou metriku. Tato souřadnicová definice asymptoticky plochých prostorů je s geometrickou definicí uvedenou výše ekvivalentní. Pro účely této práce budu představovat formalismus pro minulé světelné nekonečno, pro budoucí světelné nekonečno je však postup zcela analogický. Notace a odvozený formalismus použitý v této kapitole je z velké části převzatý z [16]. Podobný přístup k Bondiho formalismu nalezneme také v [19].

Začneme volbou souřadnic na \mathcal{I}^- . Necht v je takový parametr světlupodobných geodetik generujících \mathcal{I}^- , že $n^\mu \hat{\nabla}_\mu v = 1$ a označím S_v průřez \mathcal{I}^- a nadplochy konstantního v . Na nějakém S_{v_0} zvolíme dodatečné dvě souřadnice $x^A, A \in \{2,3\}$ a paralelním přenosem je rozneseme na všechny S_v . Tyto souřadnice mohou být libovolné, ale kanonickou volbou jsou očividně sférické souřadnice θ a ϕ . (v, x^A) tedy slouží jako souřadnice na \mathcal{I}^- . Očividně jsme tímto způsobem odvodily stejné souřadnice jako kdybychom definovali světelné nekonečno prostě jako limitu světelných souřadnic pouze obecnější úvahou.

Abychom prodloužily nalezené souřadnice do fyzikálního časoprostoru, je potřeba zvolit ještě jednu dodatečnou souřadnicovou funkci, ideálním kandidátem je jistě Ω . Uvažujme dále světlupodobné nadplochy příčné na \mathcal{I}^- , které protínají \mathcal{I}^- v S_v , takové nadplochy se na nějakém okolí \mathcal{I}^- neprotínají a v pak prodloužíme tak, že budeme požadovat aby bylo právě na těchto nadplochách konstantní. Dodefinujeme normálový kovektor $n_\mu = -\hat{\nabla}_\mu v$ a s jeho pomocí rozneseme paralelním přenosem i souřadnice x^A . Tímto je dokončena definice konformních Bondi-Sachsových souřadnic na okolí \mathcal{I}^- . V těchto souřadnicích dostaneme metriku v Bondi-Sachsově tvaru

$$ds^2 = -W e^{2\beta} dv^2 + 2e^{2\beta} dv d\Omega + h_{AB}(dx^A - V^A dv)(dx^B - V^B dv), \quad (2.20)$$

kde W, β, h_{AB} a V^A jsou hladké funkce (v, Ω, x^A) . Tvar exponenciály se používá z historických důvodů pro zdůraznění pozitivní definitnosti e^β funkce. Všechny

funkce vystupující v metrice je možné rozvinout Taylorovým rozvojem v Ω na okolí \mathcal{I}^-

$$W = W^{(0)} + W^{(1)}\Omega + W^{(2)}\Omega^2 + \mathcal{O}(\Omega^3), \quad (2.21)$$

$$\beta = \beta^{(0)} + \beta^{(1)}\Omega + \beta^{(2)}\Omega^2 + \mathcal{O}(\Omega^3), \quad (2.22)$$

$$U^A = U^{A(0)} + U^{A(1)}\Omega + U^{A(2)}\Omega^2 + \mathcal{O}(\Omega^3). \quad (2.23)$$

Proč je však metrika v tomto tvaru ideální pro popis gravitačních vln? Ideou je zafixovat v této metrice všechny nefyzikální stupně volnosti (tedy kalibrační volnost) a ponechat v metrice pouze dva fyzikální stupně volnosti odpovídající polarizacím gravitačního záření. Jak bylo zmíněno výše je volba souřadnic na průřezech S_v libovolná. V Bondi-Sachsových souřadnicích je však volíme jako souřadnice jednotkové sféry. Jak uvidíme později tak tato volba dává pevnou geometrickou definici konformnímu faktor Ω jako převrácená hodnota poloměru sféry odpovídající ploše spočtené pomocí dvou dimenzionální kontrakce Bondi-Sachsovi metriky. Začneme tedy určením tenzoru h_{AB} , funkce Ω definující světelné nekonečno ještě není zafixována úplně a to ani po volbě $\omega^{(0)}$ splňující 2.17. Můžeme ještě zvolit $\omega^{(0)}$ tak, aby metrika na průřezu S_v odpovídala metrice jednotkové sféry. Tím už $\omega^{(0)}$ zafixujeme kompletně a pokud označíme metriku jednotkové sféry Σ_{AB} , bude h_{AB} expandována do tvaru

$$h_{AB} = \Sigma_{AB} + C_{AB}\Omega + D_{AB}\Omega^2 + \mathcal{O}(\Omega^3). \quad (2.24)$$

Vyšší řady $\omega^{(n)}$ jsou skaláry a tak nemůžou úplně fixovat tvary tenzorů C_{AB} . Můžeme je však zvolit tak, aby determinant h_{AB} zůstal konstantní i mimo \mathcal{I}^- . Dostaneme tak podmínky

$$\Sigma^{AB}C_{AB} = 0, \quad (2.25)$$

$$\Sigma^{AB}D_{AB} = \frac{1}{2}C^{AB}C_{AB}, \quad (2.26)$$

kde indexy jsou zvedány a snižovány pomocí Σ_{AB} . Analýzou geodetik na \mathcal{I}^- a vlastností n^μ a l_μ můžeme nalézt vazby i pro β, W a V^A ,

$$W = \Omega^2 + W^{(3)}\Omega^3 + \mathcal{O}(\Omega^4), \quad (2.27)$$

$$\beta = \Omega^2\beta^{(2)} + \mathcal{O}(\Omega^3), \quad (2.28)$$

$$U^A = \Omega^2U^{A(2)} + \Omega^3U^{A(3)} + \mathcal{O}(\Omega^4). \quad (2.29)$$

Členy $U^{A(3)}$ a $W^{(3)}$ nabývají pak v Bondi-Sachsově formalismu speciálního významu. Obsahují totiž informaci o celkové hmotě a hybnosti. Z těchto důvodů se často také označují $U^{A(3)} = N^A$ a $W^{(3)} = -2M$. Z nalezené expanze můžeme dále určit i tvar fyzikální metriky

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= \Omega^{-2}\hat{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\ &= -\Omega^{-2}e^{2\beta}Wdv^2 - 2\Omega^{-2}e^{2\beta}dvd\Omega + \Omega^{-2}h_{AB}(dx^A - V^A dv)(dx^B - V^B dv). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Minulého světelného nekonečna dosáhneme pohybem po nadplochách konstantního v v limitě $r \rightarrow \infty$. Je tedy přirozené zvolit konformní faktor $r = \Omega^{-1}$. Tím

dostaneme fyzikální metriku v Bondi-Sachsově souřadnicích ve tvaru jak je uváděna v literatuře nejčastěji [16], [19]

$$ds^2 = -\frac{B}{r}e^{2\beta}dv^2 + 2e^{2\beta}dvdr + r^2h^{AB}(dx^A - V^A dv)(dx^B - V^B dv), \quad (2.31)$$

kde $B = r^3W$. Einsteinovy rovnice pak aplikujeme na nalezenou metriku řád po řádu $\frac{1}{r}$ a dostaneme vazby [19], [16]

$$\beta = -\frac{1}{32}C^{AB}C_{AB}\frac{1}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad (2.32)$$

$$B = r - 2M + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad (2.33)$$

$$V^A = -\frac{\delta_A C^{AB}}{2r^2} + \frac{N^A}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad (2.34)$$

$$h_{AB} = \Sigma_{AB} + \frac{C_{AB}}{r} + \frac{D_{AB}}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (2.35)$$

kde δ_A je kovariantní derivace příslušná Σ_{AB} . Vztahy (2.32) jsou převzaté z [16].

Dalším krokem ve vývoji Bondi-Sachsova formalismu je pak obvykle studovat vývoj hmoty a momentu hybnosti vzhledem k v , to je však pro tuto práci nepodstatné a kompletnější přístup nalezneme například v [19]. Naším cílem je samozřejmě studovat řešení Regge-Wheelerovy rovnice ve tvaru rotujícího vlnového balíku. Intuitivně bychom mohli předpokládat, že gravitační záření bude reprezentováno hlavně v rozvoji h_{AB} a konkrétně v prvním řádu $\frac{1}{r}$ analogicky s elektromagnetismem. Je tomu skutečně tak a tenzor C_{AB} bude předmětem studia v této práci. Derivace C_{AB} podle v se nazývá *news tenzor* (toto označení pochází z anglicky psané literatury [16]) N_{AB} a výskyt gravitační radiace poznáme právě z jeho nenulovosti. Pro určení Bondi-Sachsovi metriky na okolí \mathcal{I}^- je dostačující znalost M , N^A a C_{AB} . M a N^A mají vývoj jednoznačně určen z Einsteinových rovnic a tím i omezené stupně volnosti. Tenzor C_{AB} je naopak Einsteinovými rovnicemi neurčen a ponechává si tak všechny své stupně volnosti. Jelikož C_{AB} má nulovou stopu, má tedy dva stupně volnosti, ty odpovídají právě dvěma možným polarizacím gravitačního záření.

Naším cílem je tedy určit tenzor C_{AB} z řešení Regge-Wheelerovy rovnice 1.60. Pracujeme v Bondi-Sachsových souřadnicích (v, r, x^A) Aby nedošlo k matoucí notaci, budu značit pertubaci metriky $p_{\mu\nu}$ a h_{AB} bude značit tenzor vystupující v Bondi-Sachsově tvaru metriky. Metriku pozadí zvolíme rovnou Minkowského a kovariantní derivace tak přejdou v parciální derivace. Petrubační tenzor tak bude mít tvar

$$p_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (g_{\mu\nu}^{BS} - \eta_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu = \left(-e^{2\beta}\frac{B}{r} + r^2h_{AB}V^AV^B + 1\right)dv^2 + 2(e^{2\beta} - 1)dvdr - 2r^2h_{AB}V^Adx^Bdv + r^2(h_{AB} - \Sigma_{AB})dx^Adx^B. \quad (2.36)$$

Nyní rozvineme jednotlivé části poruchy pomocí $\frac{1}{r}$,

$$p_{vr} = 2\beta + 2\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^3) = 0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (2.37)$$

$$p_{vv} = 0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (2.38)$$

$$p_{rB} = 0, \quad (2.39)$$

$$p_{vB} = \frac{1}{2}\Sigma_{BA}\delta_F C^{AF} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad (2.40)$$

$$p_{AB} = rC_{AB} + D_{AB} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right). \quad (2.41)$$

Označíme-li pak

$$a(v) = X^{AB}C_{AB}, \quad (2.42)$$

$$b(v) = \frac{1}{2}X^B\Sigma_{BA}\delta_F C^{AF}. \quad (2.43)$$

Dostaneme konečně rozvoj pro jednotlivé γ_p funkce,

$$\gamma_0 = b(v) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad (2.44)$$

$$\gamma_1 = 0, \quad (2.45)$$

$$\gamma_2 = ra(v) + \mathcal{O}(r^0). \quad (2.46)$$

Rozvoj nyní chceme dosadit do linearizovaných vakuových Einsteinových rovnic (1.52). To můžeme provést pokud spočteme kalibračně nezávislé funkce $\tilde{\gamma}_a$ (1.59),

$$\tilde{\gamma}_0 = b(v) - \frac{1}{2}r\partial_v a(v) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad (2.47)$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{1}{2}a(v) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right). \quad (2.48)$$

Nyní zvolíme a zafixujeme Regge-Wheelerovu kalibraci, kde $\gamma_a = \tilde{\gamma}_a$. Dosazením do (1.52) dostaneme rovnice

$$-\partial_v^2 a(v) - \frac{(l-1)(l+2)}{r^2}a(v) = 0, \quad (2.49)$$

$$\partial_v b(v) = \frac{1}{2}r\partial_v^2 a(v). \quad (2.50)$$

Tedy celkově pak

$$\gamma_2 = ra(v) + \mathcal{O}(r^0), \quad (2.51)$$

$$\gamma_0 = -\frac{(l-1)(l+2)}{2r} \int^v a(v')dv' + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (2.52)$$

Teď už jsme schopni spočítat CPM funkci řád po řádu

$$\psi_{\text{odd}} = a(v) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right). \quad (2.53)$$

Z čehož dostaneme finální vztah

$$C_{AB}(v, \theta, \phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_{\text{odd}}(v, r) X_{AB}(\theta, \phi). \quad (2.54)$$

Jak CPM tak Regge-Wheelerova funkce jsou řešením Regge-Wheelerovy rovnice. Otázkou zůstává, které z nich přiřadit řešení ve tvaru skalární vlny. Jak bylo již zmiňováno je CPM funkce vhodnější pro studium gravitačního záření a proto budeme volit ve tvaru skalární vlny právě ji.

$$\psi_{\text{odd}}(t,r) = -\frac{2r}{(l-1)(l+2)}Q(t,r). \quad (2.55)$$

Z definice Regge-Wheelerovy funkce pak dostaneme

$$\gamma_1 = r\psi_{\text{RW}} = \frac{r}{2}\partial_t\psi_{\text{odd}}, \quad (2.56)$$

$$\gamma_0 = \partial_r\left(\frac{r}{2}\psi_{\text{odd}}\right). \quad (2.57)$$

Takže dostaneme konečně vztah poruchy a skalární funkce v Regge-Wheelerově kalibraci

$$\gamma_1 = -\frac{1}{(l-1)(l+2)}\partial_t(r^2Q_l(t,r)), \quad (2.58)$$

$$\gamma_0 = -\frac{1}{(l-1)(l+2)}\partial_r(r^2Q_l(t,r)). \quad (2.59)$$

Tenzor C_{AB} pak určíme transformací $Q_l(t,r)$ do Bondi-Sachsových souřadnic

$$Q_l(V = \frac{v}{a}, \rho = \frac{r}{a}) = B_l 2^l l! \frac{\rho^l}{(1 - V^2 + 2V\rho + 2i(V - \rho))^{l+1}} \quad (2.60)$$

a provedením limity $r \rightarrow \infty$

$$\psi_{\text{odd}}(v, r = \infty) = -\frac{B_l l! a^{l+2}}{(l-1)(l+2)} \frac{1}{(v - ia)^{l+1}}. \quad (2.61)$$

Celkově tedy bude

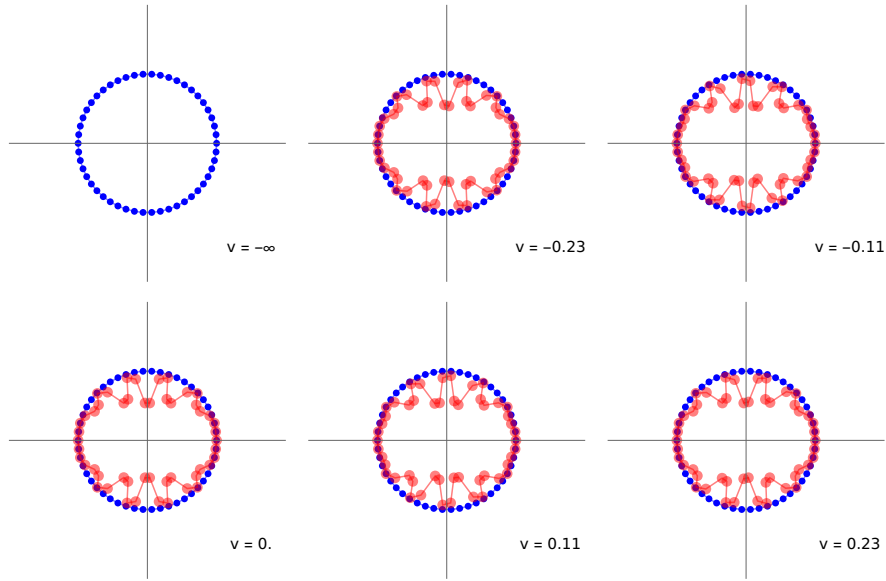
$$C_{AB} = \tilde{B}_l l! a^{l+2} \frac{1}{(v - ia)^{l+1}} X_{AB}^{lm}, \quad (2.62)$$

kde $\tilde{B}_l = \frac{B_l}{(l-1)(l+2)}$. Tenzorové funkce X_{AB}^{lm} jsou konkrétně vypsány v dodatku C.

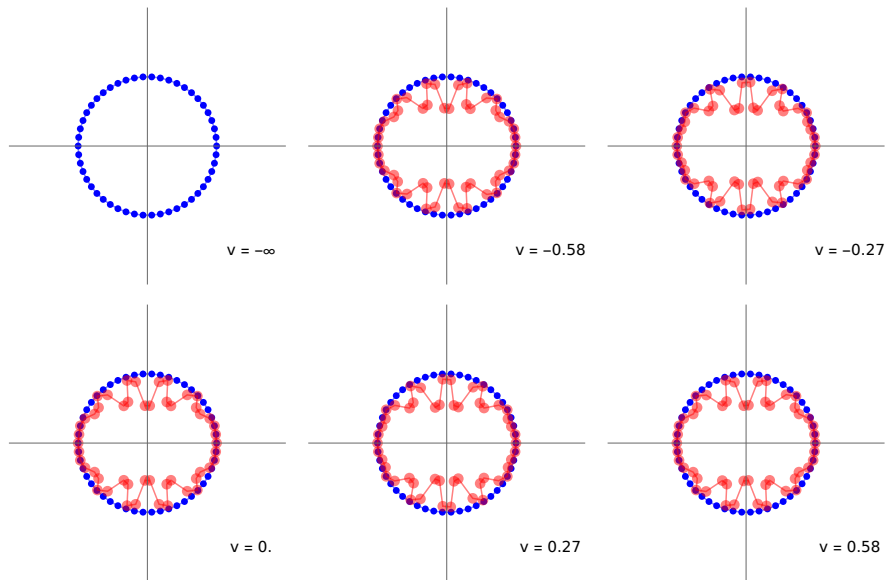
Tenzor C_{AB} obsahuje na minulém světelném nekonečnu veškerou informaci o polarizaci gravitačních vln. Stačí si uvědomit, že na světelném nekonečnu plně určuje metriku a tedy i vlastní vzdálenost dvou blízkých „bodů“ (můžeme si třeba představit hmotné body blízko u \mathcal{I}^-),

$$ds^2 = (1 + C_+)d\theta^2 + \sin^2\theta(1 - C_+)d\phi^2 + 2\sin\theta(1 + C_\times)d\phi d\theta. \quad (2.63)$$

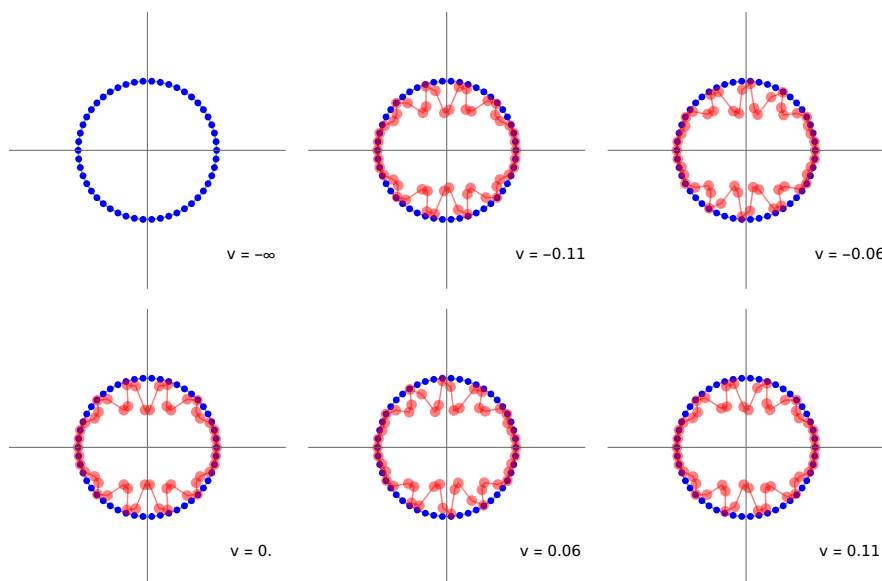
Metrika (2.1.1) se značně podobá metrice dané TT-vlnou na ploše kolmé na směr šíření (viz kapitola o TT-vlnách a hlavně (1.34)). Obrázky 2.4 až ?? zobrazují jaký mají gravitační vlny efekt v závislosti na čase v . Pověšimněme si, že se obrazce komplikují s rostoucím l . Frekvence se kterou se obrazce mění v v jsou také závislé na l , původ závislosti je jasný po nahlédnutí na rovnici (1.73).



Obrázek 2.5 Vliv gravitační vlny dané tenzorem C_{AB} na světelném nekonečnu pro $l = 13$ a $m = 3$



Obrázek 2.4 Vliv gravitační vlny dané tenzorem C_{AB} na světelném nekonečnu pro $l = 5$ a $m = 3$



Obrázek 2.6 Vliv gravitační vlny dané tenzorem C_{AB} na světelném nekonečnu pro $l = 27$ a $m = 3$

2.1.2 Newman-Penrosův formalismus

Newman-Penrosův formalismus představuje elegantní a výkonný nástroj pro analýzu vlastností gravitačního záření v kontextu obecné teorie relativity. Jeho význam spočívá zejména v možnosti využití geometrického přístupu k popisu gravitačních jevů, což umožňuje hlubší vhled do struktury prostoročasu a dynamiky gravitačních vln.

Tento formalismus, zavedený E. T. Newmanem a R. Penrosem, je založen na používání komplexních spinorů a tetrad, které umožňují popis prostoročasu v rámci tzv. nulového rámce. Hlavní myšlenkou je rozklad metriky prostoročasu do souřadnicového systému, který je vhodný pro zkoumání asymptotických vlastností gravitačních polí. Tento přístup se ukázal být mimořádně užitečným při studiu asymptotické struktury prostoročasu, tedy vlastností prostoročasu v limitě velkých vzdáleností od zdroje gravitačního pole.

Jedním z klíčových aspektů Newman-Penrosova formalismu je jeho schopnost přirozeně integrovat koncept světelného nekonečna. Světelné nekonečno, které představuje hranici prostoročasu dosahovanou světelnými paprsky, hraje zásadní roli v pochopení asymptotických vlastností gravitačních vln. Newman-Penrosův formalismus poskytuje prostředky pro explicitní výpočet tzv. Newman-Penrosových koeficientů, které charakterizují křivost prostoročasu v blízkosti světelného nekonečna.

V naší analýze gravitačního záření využijeme Newman-Penrosův formalismus k podrobnému zkoumání chování gravitačních vln generovaných rotujícími sféricky symetrickými zdroji. Zaměříme se na výpočet konkrétních členů gravitačních vln a jejich interpretaci ve fyzikálním kontextu. Tento přístup nám umožní nejen pochopit základní vlastnosti gravitačních vln, ale také získat cenné informace o struktuře prostoročasu v blízkosti světelného nekonečna.

Newman-Penrosův formalismus je tetradový formalismus, v jehož základu stojí čtyři světlupodobné vektory. S jedním z těchto vektorů jsme se již setkali v

Bondi-Sachsově formalismu

$$n^\mu = g^{\mu\nu} n_\nu = -g^{\mu\nu} \nabla_\nu v. \quad (2.64)$$

Zbytek tetrády pak dodefinujeme pomocí vzájemných vztahů ortogonality

$$l^\mu n_\mu = -m^\mu \bar{m}_\mu = -1, \quad (2.65)$$

$$l^\mu m_\mu = l^\mu \bar{m}_\mu = n^\mu m_\mu = n^\mu \bar{m}_\mu = 0, \quad (2.66)$$

$$l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = m^\mu m_\mu = \bar{m}^\mu \bar{m}_\mu = 0. \quad (2.67)$$

Tetráda je tedy složena ze dvou reálných vektorů a dvou komplexních vektorů propojených komplexní konjugací. V plné obecnosti v těchto definicích zvedáme indexy pomocí globální metriky $g_{\mu\nu}$. Tu můžeme také zpětně vyjádřit pomocí vektorové tetrády

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - m_\mu \bar{m}_\nu - \bar{m}_\mu m_\nu. \quad (2.68)$$

Tento vztah lze kompaktněji zapsat zavedením

$$\lambda_\mu^\nu = (l^\nu, n^\nu, m^\nu, \bar{m}^\nu), \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (2.69)$$

Globální metrika je pak dána

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\sigma\rho} \lambda_\sigma^\mu \lambda_\rho^\nu, \quad (2.70)$$

kde $\eta_{\sigma\rho}$ je plochá metrika v tetrádové bázi.

Očekáváme samozřejmě, že tetráda nebude vektorem l^μ určena jednoznačně a že při volbě tetrády budeme mít určitou svobodu. Je tomu skutečně tak, svobodně můžeme provádět tři různé rotace:

1. Rotace kolem l^μ
2. Rotace kolem n^μ
3. Rotace m^μ pro konstantní l^μ a n^μ

$$m^\mu \rightarrow e^{i\lambda} m^\mu \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.71)$$

V Newman-Penrosově formalismu můžeme veličinám transformujících se po provedení rotace 3) speciálním způsobem přiřadit spin,

$$f \rightarrow e^{is\lambda} f, \quad (2.72)$$

kde s označuje právě spin. Nomenklatura samozřejmě pochází z analogie s kvantovou teorií pole. Pro obsah této práce je spin důležitý hlavně pro zadefinování souřadnicových transformací tetrády. Nejprve však zavedeme nové souřadnice, které pomohou zjednodušit matematický formalismus. Jelikož pracujeme s komplexními vektory, je vhodné zavést i nové komplexní souřadnice. Zvolíme souřadnice na okolí \mathcal{S}^- podobně jako v Bondi-Sachsově formalismu, pouze je zanecháme v úplné obecnosti. Tedy v bude světelnou souřadnicí $t + r$, r bude afinním parametrem geodetik na nadplochách konstantního v a souřadnice na S_v ponecháme obecně x^A . Zavedeme nyní komplexní souřadnice ve tvaru

$$\zeta = e^{ix^3} \cot\left(\frac{x^2}{2}\right). \quad (2.73)$$

Jedná se o takzvanou stereografickou projekci sféry do komplexní roviny [29]. Na S_v tedy pak bude mít nefyzikální konformní metrika tvar

$$ds^2 = \frac{4}{P^2} d\zeta d\bar{\zeta}, \quad (2.74)$$

kde P je funkcí $v, \zeta, \bar{\zeta}$. Bondi-Sachsovy souřadnice pak očividně odpovídají volbě

$$P = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 1 + \zeta\bar{\zeta}. \quad (2.75)$$

Zavedeme nyní spinové diferenciální operátory

$$\bar{\partial}f = -P^{1-s} \frac{\partial(P^s f)}{\partial\zeta}, \quad (2.76)$$

$$\partial f = -P^{1+s} \frac{\partial(P^{-s} f)}{\partial\bar{\zeta}}. \quad (2.77)$$

Operátory pak zvedají a snižují spin veličiny o jednotku. V Bondi-Sachsových souřadnicích jsou dány

$$\bar{\partial}f = -(\sin\theta)^s \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) (\sin\theta)^{-s} f, \quad (2.78)$$

$$\partial f = -(\sin\theta)^{-s} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) (\sin\theta)^s f. \quad (2.79)$$

Souřadnicové transformace tetrády můžeme zapsat následovně. Necht T je transformace na \mathcal{I}^+

$$u \rightarrow T(u, \zeta, \bar{\zeta}). \quad (2.80)$$

Tetráda se pak transformuje

$$l^\mu \rightarrow \dot{T} \left(l_\mu + \frac{\bar{\partial}T}{\dot{T}r} m_\mu + \frac{\bar{\partial}T\bar{\partial}T}{\dot{T}^2 r^2} n_\mu \right), \quad (2.81)$$

$$m^\mu \rightarrow m^\mu + \frac{\bar{\partial}T}{\dot{T}r} n^\mu, \quad (2.82)$$

$$n^\mu \rightarrow \dot{T}^{-1} n^\mu. \quad (2.83)$$

Newman-Penrose formalismus pak zavádí veličiny v tetrádovém formalismu obsahující celou informaci o asymptoticky plochém časoprostoru. Jedná se o dvanáct komplexních spinových koeficientů, pět komplexních funkcí Ψ nesoucích informaci Weylova tenzoru, tři komplexní Maxwellovy skaláry Φ nesoucí informaci Einstein-Maxwellova tenzoru a deset funkcí nesoucí informaci Ricciho tenzoru. Pro naše účely je důležitá informace nesená Weylovým tenzorem. Do teď jsme však analyzovali gravitační záření asymptotickým rozkladem studovaných veličin popisujících asymptoticky ploché prostory. Aby byl prostor asymptoticky plochý musí být Weylův tenzor ve světelném nekonečnu nulový. Jak rychlý však musí tento pokles být? Odpověď na tuto otázku se dána takzvanou peeling theorem. Ta udává pokles Weylova tenzoru na okolí světelného nekonečna. Zvolíme-li geodetiku

začínající v časoprostoru a končící ve světelném nekonečnu a λ je jejím affíním parametrem, pak Weylův tenzor klesá

$$C_{\mu\nu\sigma\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{\mu\nu\sigma\rho}^{(k)}}{\lambda^k}. \quad (2.84)$$

V tetradovém formalismu je informace Weylova tenzoru zakódována v pěti komplexních funkcích daných

$$\Psi_0 = C_{\mu\nu\sigma\rho} l^\mu m^\nu l^\sigma m^\rho, \quad (2.85)$$

$$\Psi_1 = C_{\mu\nu\sigma\rho} l^\mu n^\nu l^\sigma m^\rho, \quad (2.86)$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{2}(C_{\mu\nu\sigma\rho} l^\mu n^\nu l^\sigma n^\rho - C_{\mu\nu\sigma\rho} l^\mu n^\nu m^\sigma \bar{m}^\rho), \quad (2.87)$$

$$\Psi_3 = -C_{\mu\nu\sigma\rho} l^\mu n^\nu n^\sigma \bar{m}^\rho, \quad (2.88)$$

$$\Psi_4 = C_{\mu\nu\sigma\rho} n^\mu \bar{m}^\nu n^\sigma \bar{m}^\rho. \quad (2.89)$$

$$(2.90)$$

Díky peeling teorému můžeme tyto funkce asymptoticky rozložit. První členy funkcí Ψ_0 a Ψ_4 pak nesou informaci o gravitačním vlnění na \mathcal{I}^- a \mathcal{I}^+ . O tom se dá přesvědčit jednoduchým příkladem v TT-soustavě. Máme harmonickou sférickou gravitační vlnu vycházející z počátku, ta klesá s $\frac{1}{r}$. Ve vakuovém časoprostoru jsou Einsteinovy rovnice jednoduše $R_{\mu\nu} = 0$ a tedy $C_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\mu\nu\sigma\rho}$. Volbou tetrády, bez ohledu na normalizaci,

$$l^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \right)^\mu, \quad (2.91)$$

$$n^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \right)^\mu, \quad (2.92)$$

$$m^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^\mu. \quad (2.93)$$

Spočteme pak už jednoduše funkci Ψ_4 ,

$$\Psi_4 \propto -\frac{1}{2}(\ddot{h}_{\theta\theta} - \ddot{h}_{\phi\phi}) - i\ddot{h}_{\theta\phi} = \ddot{h}_+ - i\ddot{h}_\times, \quad (2.94)$$

kteřá tedy jak vidíme nese informaci o odcházející TT-vlně na světelném nekonečnu.

Chtěli bychom podobným způsobem extrahovat informaci o gravitačním záření generovaným skalární rotující vlnou. Máme dva možné případy, v prvním studujeme záření, které uteče na \mathcal{I}^+ a v druhém záření, které vychází z \mathcal{I}^- . V Bondi-Sachsově formalismu mezi oběma problémy rozlišujeme pouze změnou souřadnic a expanzí kolem různých částí hranice prodlouženého časoprostoru (\mathcal{I}^+ a \mathcal{I}^-). Studujeme-li vlnění v tetradovém formalismu, musíme být pozornější. Kovektor l_μ má jasný fyzikální význam. Je to světlu podobná normála na nadplochy konstantního u mířící do budoucnosti. Vektor l^μ pak tedy tvoří tečný vektor charakterizující nadplochy konstantního u . Jinými slovy udává směr záření odcházejícího do budoucího světelného nekonečna. Vektor n^μ je naopak vektorem tečným k nadplochám konstantního v . Komplexní vektory už pak pouze doplňují tetradu o axiální složky. Náhlédneme-li opět na definici komplexních funkcí Ψ ,

můžeme se opět přesvědčit proč právě Ψ_0 souvisí s vlněním na \mathcal{I}^- a Ψ_4 s zářením uniklým do \mathcal{I}^+ .

Začneme prvním případem a tedy v souřadnicích (u, r, θ, ϕ) . Tetráda světlupodobných vektorů je dána

$$l^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^\mu, \quad (2.95)$$

$$n^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right)^\mu, \quad (2.96)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^\mu. \quad (2.97)$$

K vektoru l^μ jsem zde dopočítal zbytek tetrády pomocí ploché Minkowského metricky. Tetráda tedy nenese žádnou informaci o poruše, ta je kompletně zakódována v Weylově tenzoru. Tento postup je validní, jelikož se zajímáme pouze o lineární řád poruchy. Weylův tenzor je čistě lineární v poruše a vektory m^μ klesají s $\frac{1}{r}$. Prvnímu řádu Ψ_4 v $\frac{1}{r}$ budou tak přispívat pouze ty členy Weylova tenzoru, které jsou lineární v r . Nemusíme tak počítat poruchu ze skalární generující funkce a pak z ní počítat Weylův tenzor. Ve vakuu je Weylův tenzor roven Riemannovu tenzoru. Ten je pak v prvním řádu poruchy dán

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h_{\mu\rho} + \partial_\rho\partial_\mu h_{\nu\sigma} - \partial_\rho\partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\rho}). \quad (2.98)$$

Zvolíme jako v kapitole o Bondi-Sachsově formalismu poruchu ve tvaru

$$h_{ab} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (2.99)$$

$$h_{aB} = \mathcal{O}(r^0), \quad (2.100)$$

$$h_{AB} = rC_{AB} + D_{AB} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right). \quad (2.101)$$

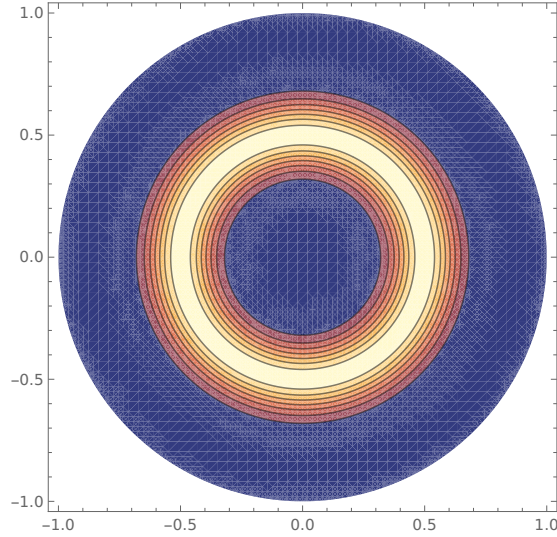
Lineární příspěvek bude zcela jistě pocházet pouze od členu s C_{AB} . Za pomoci těchto úvah lze Ψ_4 už pak lehce dopočítat,

$$\Psi_4(u, r, \theta, \psi) = \frac{1}{r} \left[-\frac{1}{2} \left(\ddot{C}_{\theta\theta} - \frac{i}{\sin \theta} \ddot{C}_{\theta\phi} \right) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (2.102)$$

Jelikož Riemannův tenzor je nezávislý na kalibraci, je na ní nezávislá i funkce Ψ_4 . Tenzor C_{AB} jsme už pomocí generující skalární funkce spočítali a konkrétní vyjádření Ψ_4 je tak přímočarým dosazením,

$$\Psi_4(u, r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{2} B_l l! a^{l+2} \frac{l+1}{l-1} \frac{1}{(ia-u)^{l+3}} \left(X_{\theta\theta} - \frac{i}{\sin \theta} X_{\theta\phi} \right) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (2.103)$$

Pro případ gravitační radiace vycházející z minulého světelného nekonečna je postup velice obdobný. Všechny naše úvahy jsou pořád platné i pro výpočet Ψ_0 . Zaměníme pouze souřadnice a budeme používat Bondiho souřadnice na okolí minulého světelného nekonečna (v, r, θ, ϕ) . Tetrádu světlupodobných vektorů



Obrázek 2.7 Absolutní hodnota skaláru v rovině $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ilustrace zachycuje kompakťovaný obraz celého \mathcal{I}^- . Souřadnice v roste se vzdáleností od počátku. Z fyzikálního hlediska představuje $|\Psi_4|$ hustotu toku energie nesené gravitačními vlnami.

můžeme transformovat s pomocí jejich transformačních relací, je však mnohem jednodušší prostě spočít l^μ a doplnit jej o zbytek tetřady

$$l^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \right)^\mu, \quad (2.104)$$

$$n^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^\mu, \quad (2.105)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^\mu. \quad (2.106)$$

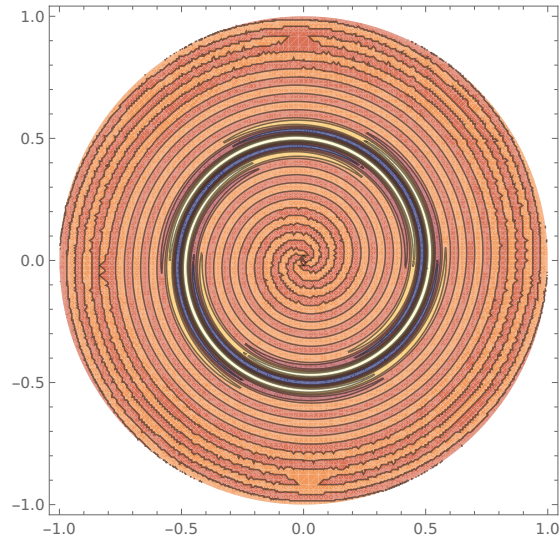
Dopocíst Ψ_0 je už pak triviální.

$$\Psi_0(v, r, \theta, \psi) = \frac{1}{r} \left[-\frac{1}{8} \left(\ddot{C}_{\theta\theta} + \frac{i}{\sin \theta} \ddot{C}_{\theta\phi} \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{1}{r^2} \right). \quad (2.107)$$

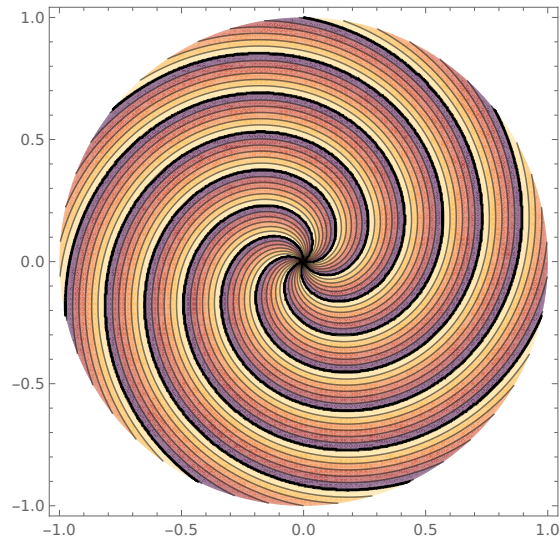
Opět jej jednoduše vyjádříme pomocí skalární generující funkce

$$\Psi_0(v, r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{8} B_l l! a^{l+2} \frac{l+1}{l-1} \frac{1}{(v-ai)^{l+3}} \left(X_{\theta\theta} - \frac{i}{\sin \theta} X_{\theta\phi} \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{1}{r^2} \right). \quad (2.108)$$

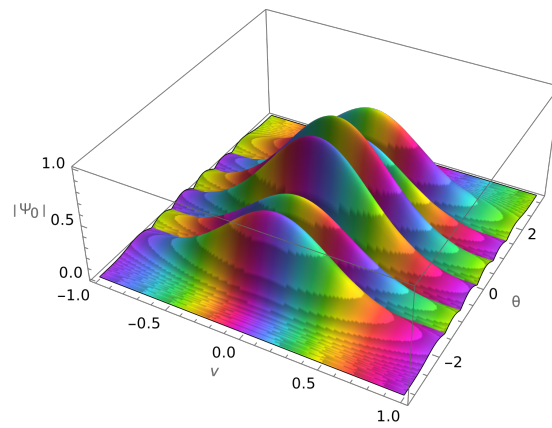
Nalezené funkce Ψ_4 a Ψ_0 poskytují informace o gravitačních vlnách na \mathcal{I}^\pm . V literatuře se nejčastěji setkáme s interpretací Ψ_4 pomocí vztahu (2.94) [19], [6]. Skutečně jednoduše můžeme nahlédnout, že bychom v takové interpretaci dostali stejné vztahy pro amplitudy polarizací jako v Bondi-Sachsově formalismu (viz vztahy (2.94), (2.102) a (2.1.1)). Informace obsažené v Ψ_4 a C_{AB} jsou tak propojené, ale nejsou identické. Z matematického hlediska se jedná o rozdílné objekty. Zatímco C_{AB} obsahuje informaci o metrice, Ψ_4 kóduje informaci obsaženou ve Weylově tenzoru. Obrázky 2.7 až 2.10 poskytují ilustraci Ψ_4 jakožto komplexní funkce. Fyzikální informace reprezentovaná různými komponenty Ψ_4 je zopakována pod jednotlivými obrázky. Pro všechny vykreslené funkce jsou zvoleny $l = 9$ a $m = 7$.



Obrázek 2.8 Reálná část skaláru v rovině $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ilustrace zachycuje kompaktifovaný obraz celého \mathcal{S}^- . Souřadnice v roste se vzdáleností od počátku. Z fyzikálního hlediska představuje reálná část Ψ_4 druhou časovou derivaci amplitudy h_{\times} .



Obrázek 2.9 Komplexní argument skaláru v rovině $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ilustrace zachycuje kompaktifovaný obraz celého \mathcal{S}^- . Souřadnice v roste se vzdáleností od počátku. Z fyzikálního hlediska představuje komplexní argument Ψ_4 poměr druhých časových derivací amplitud h_{\times} a h_{+} .



Obrázek 2.10 Komplexní graf skaláru Ψ_4 pro $\phi = 0$. Výška grafu reprezentuje absolutní hodnotu Ψ_4 a barva její komplexní argument.

3 Světelné geodetiky ve slabých gravitačních vlnách

V této kapitole se zaměříme na reprodukci výsledků článku „Effects of rotating gravitational waves“ [17], publikovaného v časopise Physical Review D v roce 2012. Cílem této práce je zkoumat vliv rotujících gravitačních vln na světelně podobné geodetiky a určit, jak tyto vlny ovlivňují zdánlivou polohu hvězd na nebeské sféře.

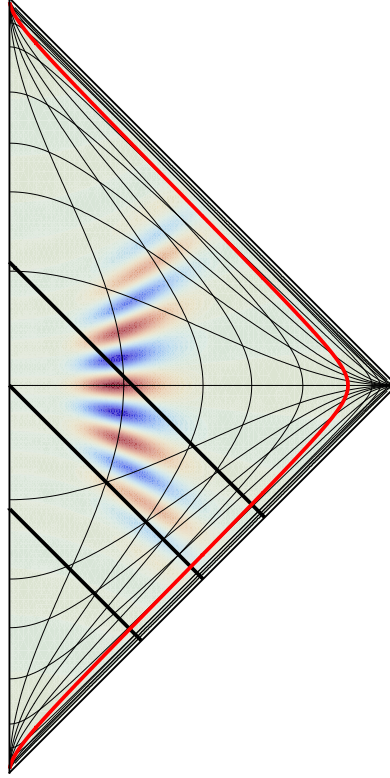
Gravitační vlny, které jsou oscilacemi časoprostoru, mohou významně ovlivňovat dráhy světelných paprsků. Ačkoli zatím nejsou takové pohyby detekovatelné současnými astrometickými metodami, představují měřitelné veličiny tedy z invarianty vzhledem ke změnám kalibrace. Velmi blízko takovému postupu jsou ale tzv. pulsar timing arrays (PTA), kde se měří variace v čase příchodu signálů ze vzdálených pulsarů [citace] v důsledku přítomnosti gravitačních vln. V rámci lineární teorie gravitace se budeme věnovat analytickým výpočtům, které umožňují sledovat změny v trajektoriích světelných paprsků, když jsou vystaveny vlivu rotujících gravitačních vln.

Hlavním cílem této kapitoly je přesně popsat metodologii použitou při reprodukci výsledků zmíněného článku a poskytnout podrobný přehled o vlivu těchto gravitačních vln na zdánlivou polohu vzdálených hvězd. V této bakalářské práci tak můžeme srovnat teoretičtější přístup používající koncept světelného nekonečna z předchozích kapitol a principiálně pozorovatelný vliv na pozorovanou polohu hvězd na obloze.

V následujících částech kapitoly se budeme zabývat specifickými výpočty světelně podobných geodetik v linearizované teorii gravitace, a to v kontextu modelu rotujících gravitačních vln. Důkladně prozkoumáme změny v optických efektech a jejich následky na pozorování hvězdného nebe, což přispěje k lepšímu pochopení vlivu gravitačních vln na astrofyzikální pozorování.

3.1 Pozorování dalekých hvězd skrz gravitační vlnění

Model vesmíru vyplněného gravitačním zářením generovaným skalární rotující vlnou je hlavním předmětem této práce. V takovém vesmíru můžeme uvažovat přítomnost hvězd, pokud jsou umístěny v dostatečné vzdálenosti od pozorovatele a neovlivňují tak geometrii časoprostoru. Jejich pozorovaná poloha bude pak samozřejmě odlišná než by byla v úplně prázdném Minkowského časoprostoru. Problém si můžeme představit tak, že z těchto mimořádně vzdálených hvězd vylétají fotony (viz 3.1), který se po své geodetice dostane v globálním čase T do počátku, kde se nachází teleskop. V počátku pak zobrazíme polohu hvězd pomocí projekce pozorovaných hvězd na dvoudimenzionální mapu oblohy. Naším úkolem je tedy spočítat jak se změní úhly dopadu fotonu (úhly θ, ϕ ve sférických souřadnicích) ve vesmíru vyplněném zářením v porovnání s prázdným vesmírem. Na problém aplikujeme rovnice linearizované teorie relativity. Nejvhodnějším systémem souřadnic jsou Bondiho souřadnice na minulém světelném nekonečnu, přestože výchozí článek [17] využívá klasických sférických souřadnic pro dosáhnutí



Obrázek 3.1 Světelné paprsky vycházející z daleké statické hvězdy (červená geodetika) zakresleny v Penroseově diagramu.

stejného výsledku. Metrika $g_{\mu\nu}$ od teď tedy značí globální metriku plochého prostoru v Bondiho souřadnicích

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Poruchou metriky pak budeme rozumět tenzor ve tvaru (1.2) vyjádřený v Bondiho souřadnicích. V prázdném Minkowského prostoru se foton pohybuje po geodetice dané rovnicí

$$x^{(0)\mu} = \left(T \frac{\partial}{\partial} + r \frac{\partial}{\partial r} \right)^\mu = A^\mu + r N^\mu \quad r \in [0, \infty). \quad (3.2)$$

Jelikož víme, že geodetiky generující minulé světelné nekonečno jsou právě takové, které jsou v Bondiho souřadnicích dány konstantním v a tečným vektorem $\frac{\partial}{\partial r}$. Vidíme na ni proč jsou Bondiho souřadnice vhodné pro úlohu tohoto typu. Jelikož je v konstantní po celé geodetice musí být tak samozřejmě rovno $v = T + 0$ v počátku, tedy času dopadu fotonu na teleskop. V prostoru vyplněném gravitačními vlnami se bude foton pohybovat po nové geodetice lehce odchýlené od původní,

$$x^\mu = x^{(0)\mu} + x^{(1)\mu} \quad \frac{dx^\mu}{dr} = N^\mu + p^\mu. \quad (3.3)$$

Tato geodetika samozřejmě splňuje linearizované rovnice geodetiky

$$\frac{d^2 x^\mu}{dr^2} = -\Gamma_{\sigma\rho}^\mu (N^\sigma + p^\sigma)(N^\rho + p^\rho). \quad (3.4)$$

Rovnici geodetiky můžeme řešit řád po řádu. V nultém řádu rovnice prostě přejdou v neporušenou rovnici geodetiky, která zaručuje, že $x^{(0)\mu}$ je právě neporušenou geodetikou (3.2). Integraci rovnice druhého řádu provedeme právě na této neporušené geodetice, jelikož ostatní poruchové členy už jsou řádu minimálně kvadratického. Jak již bylo zmíněno, jsou pro nás důležité pouze změny v úhlových souřadnicích, zabývejme se dále tedy jenom příslušnými rovnicemi. Spočítat neporušené Christoffelovy symboly je triviální a dosazením neporušených tečných vektorů dostaneme

$$\frac{dp^\theta}{dr} = -2\Gamma_{r\sigma}^{(0)\theta} p^\sigma - \Gamma_{rr}^{(1)\theta} = -\frac{2}{r}p^\theta - \Gamma_{rr}^{(1)\theta}, \quad (3.5)$$

$$\frac{dp^\phi}{dr} = -2\Gamma_{r\sigma}^{(0)\phi} p^\sigma - \Gamma_{rr}^{(1)\phi} = -\frac{2}{r}p^\phi - \Gamma_{rr}^{(1)\phi}. \quad (3.6)$$

Tato rovnice se ještě zjednoduší pokud přejdeme k duálnímu kovektoru p^μ , tedy p_μ . Kovariantní rovnice jsou pak

$$\frac{dp_\theta}{dr} = \frac{d(g_{\theta\mu}p^\mu)}{dr} = 2rp^\theta + r^2 \frac{dp^\theta}{dr} = -r^2 \Gamma_{rr}^{(1)\theta}, \quad (3.7)$$

$$\frac{dp_\phi}{dr} = \frac{d(g_{\phi\mu}p^\mu)}{dr} = 2r \sin^2 \theta p^\phi + r^2 \frac{dp^\phi}{dr} = -r^2 \sin^2 \theta \Gamma_{rr}^{(1)\phi}. \quad (3.8)$$

Ty už jednoduše zapíšeme pomocí poruchy $h_{\mu\nu}$,

$$\frac{dp_\theta}{dr} = -\partial_r h_{r\theta}, \quad (3.9)$$

$$\frac{dp_\phi}{dr} = -\partial_r h_{r\phi}. \quad (3.10)$$

Rovnice pro úhly pak můžeme s pomocí kovariantních porušených hybností napsat ve tvaru

$$\frac{d\theta^{(1)}}{dr} = \frac{1}{r^2} p_\theta = -\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} p_\theta \right) + \frac{1}{r} \frac{dp_\theta}{dr}, \quad (3.11)$$

$$\frac{d\phi^{(1)}}{dr} = \frac{1}{\sin^2 \theta r^2} p_\phi = -\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta r} p_\phi \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta r} \frac{dp_\phi}{dr}. \quad (3.12)$$

Teď už stačí pouze rovnice integrovat podél celé neporušené geodetiky. První členy u každého úhlu v integraci vymizí, jelikož na nekonečnu porucha vymizí (pracujeme v asymptoticky plochem časoprostoru) a v počátku půjde k nule dostatečně rychle pokud zvolíme dostatečně velké l (vlny jsou liché). Inspirování notací z článku [17], značme celkovou poruchu úhlů θ, ϕ pomocí $\delta\theta, \delta\phi$. Ty jsou pak dány integrálem

$$\delta\theta = \int_\infty^0 \frac{d\theta^{(1)}}{dr} dr = \int_\infty^0 \frac{1}{r} \frac{dp_\theta}{dr} dr = \int_0^\infty \partial_r h_{r\theta} \frac{dr}{r}, \quad (3.13)$$

$$\delta\phi = \int_\infty^0 \frac{d\phi^{(1)}}{dr} dr = \int_\infty^0 \frac{1}{r \sin^2 \theta} \frac{dp_\phi}{dr} dr = \int_0^\infty \partial_r h_{r\phi} \frac{dr}{r \sin^2 \theta}. \quad (3.14)$$

Teď už je třeba pouze dosadit konkrétní poruchový tenzor $h_{\mu\nu}$. Ten je v našem modelu jak již víme dán v Regge-Wheelerově kalibraci jednoduše vztahy (2.58). Jelikož se úhlové souřadnice podél neporušené geodetiky nemění, zjednoduší

se problém na integrál kombinace derivací funkce $R_l(t,r)$. Musíme si však při dosazování dát pozor na význam tenzoru $h_{\mu\nu}$, ten je dán v Bondiho souřadnicích a nesmíme zapomenout správně transformovat nejen skalární funkci $R_l(t,r)$, ale i celý kovariantní tenzor druhého řádu $h_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}\partial_r h_{r\theta} &= X_\theta^{lm} \partial_r (h_1 - h_0) = \frac{1}{(l-1)(l+2)} X_\theta^{lm} \partial_r [\partial_r (r^2 R_l) - \partial_t (r^2 R_l)], \\ &= \frac{l+1}{l-1} X_\theta^{lm} a^{l+2} B_l \frac{1}{(a+iv)^{l-1}} \frac{(2r)^l}{(a-2ir+iv)^{l+3}}.\end{aligned}\quad (3.15)$$

Ten lze kupodivu analyticky vyřešit,

$$\int_0^\infty \frac{(r)^{l-1}}{(a-2ir+iv)^{l+3}} dr = \frac{2^{1-l}(ia-v)^l}{l(l+1)(l+2)(a+iv)^{l+3}}.\quad (3.16)$$

Jednoduše nahlédneme, že $\delta\phi$ je dáno stejným integrálem. Stačí už tedy jen dosadit konkrétní derivace sférických harmonik a $v = T$. Dostaneme tak finální jednoduchý vztah

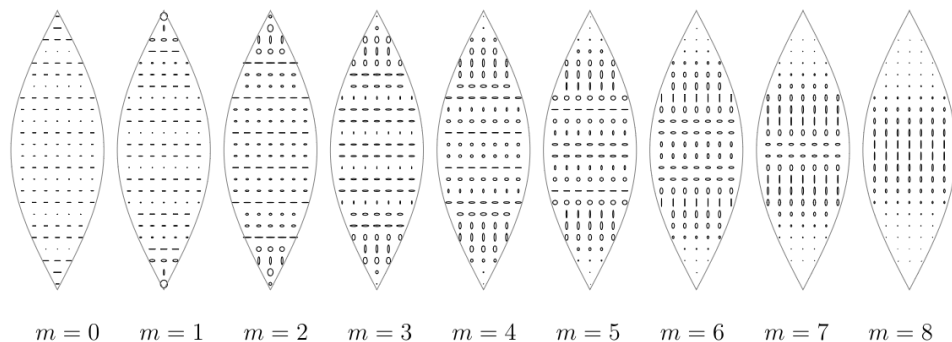
$$\frac{\delta\phi}{\Delta\phi} + i \frac{\delta\theta}{\Delta\theta} = \frac{i^l e^{im\phi}}{(1+i\frac{T}{a})^{l+2}},\quad (3.17)$$

kde

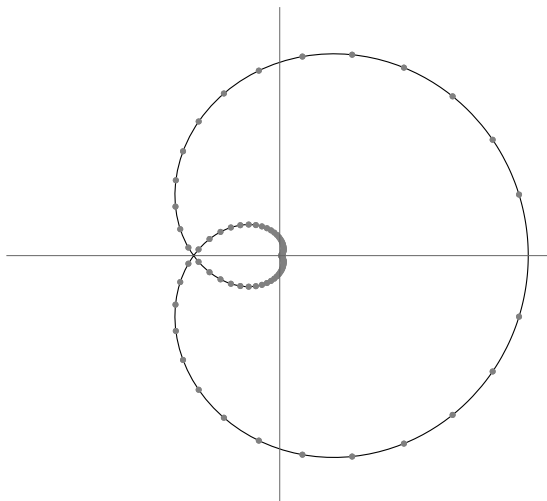
$$\Delta\theta = B_l N_l^m 2(l-1)! \frac{m P_l^m(\cos\theta)}{\sin\theta},\quad (3.18)$$

$$\Delta\phi = -B_l N_l^m 2(l-1)! P_l^m(\cos\theta).\quad (3.19)$$

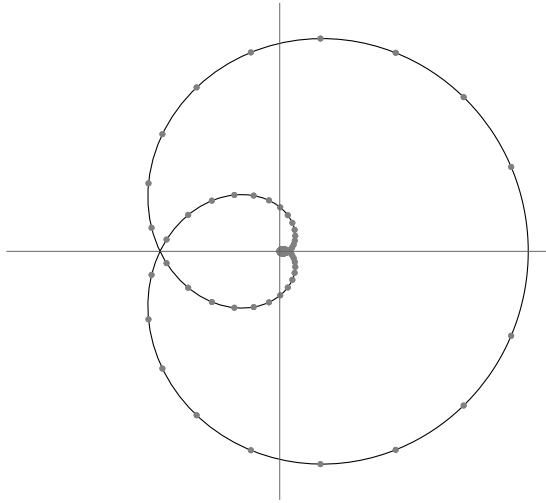
Rovnice (3.17) je shodná s výsledkem, který pánové Bičák, Katz, Ledvinka a Lynden-Bell obdrželi v článku [17], přestože jsme v našem výpočtu počítali v jiných souřadnicích. Za předpokladu, že je teleskop natočený na počáteční polohu daleké hvězdy v čase $T \rightarrow -\infty$, pak bude jeho poloha na fotografické desce skutečně úměrná nalezených poruchám $\delta\phi$ a $\delta\theta$. Dokonce dostaneme pro všechny hvězdy stejný obraz, jelikož faktory $e^{im\phi}$, $\Delta\phi$ a $\Delta\theta$ v můžeme rotací a přeškálováním obrazu libovolně určit. Tyto obrazy budou překvapivě časově symetrické a maximální vychýlení od neporušené polohy nastane pro $T = 0$. Obrázky 3.3 až 3.8 zobrazují, jak by takový obraz na fotografické desce vypadal, povšimněme si, že s rostoucím l roste i složitost trajektorie desky na fotografické desce.



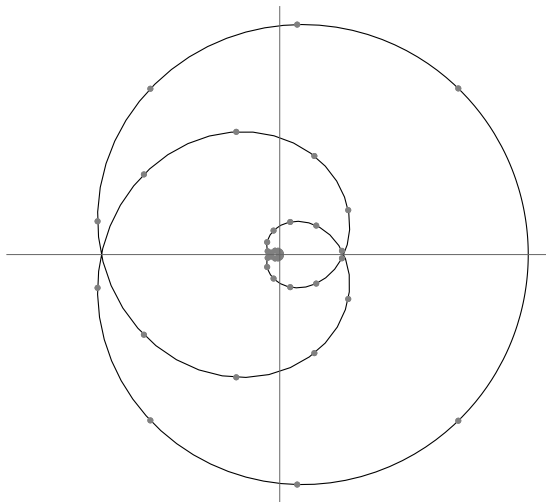
Obrázek 3.2 Nebeské trajektorie hvězd by v dalekohledu vypadaly jako spirály obklopené elipsami s poloosami $\Delta\phi \sin\theta$ a $\Delta\theta$, které závisí na nebeských souřadnicích hvězdy θ a ϕ . Tyto elipsy jsou zde ukázány pro $l = 8$ a různé hodnoty m , jak by se objevily na části oblohy ohraničené dvěma poledníky. Obrázek a jeho vysvětlivka jsou kompletně převzaty z [23]



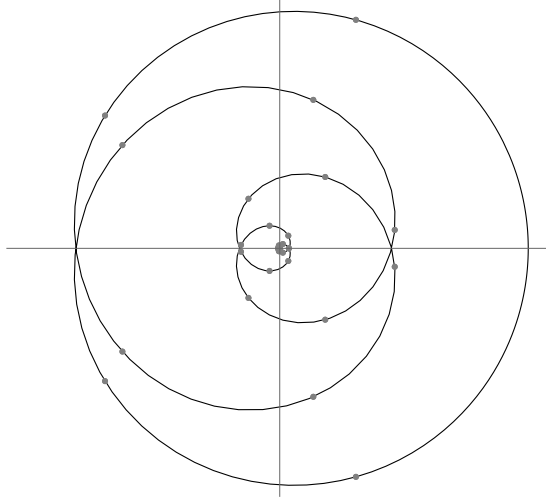
Obrázek 3.3 Trajektorie daleké hvězdy na fotografické desce pozorovaná v počátku ve vesmíru vyplněným modelovými gravitačními vlnami pro $l = 3$. Tečky v trajektorii znázorňují polohu hvězdy pozorovanou v počátku v časech $T = 0, \pm 0.05, \pm 0.1 \dots$. Na počátku pozorování se hvězda nachází v počátku.



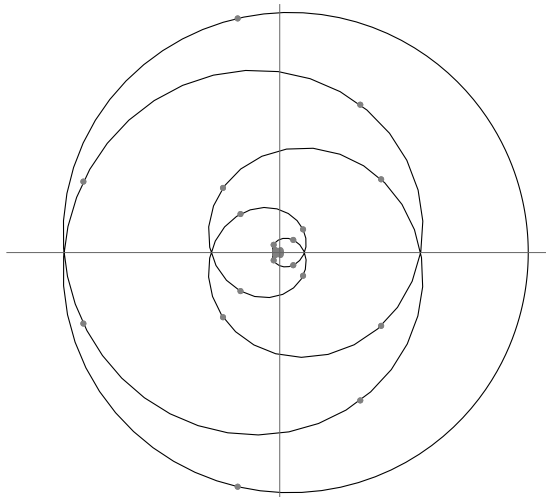
Obrázek 3.4 Trajektorie daleké hvězdy na fotografické desce pozorovaná v počátku ve vesmíru vyplněným modelovými gravitačními vlnami pro $l = 5$. Tečky v trajektorii znázorňují polohu hvězdy pozorovanou v počátku v časech $T = 0, \pm 0.05, \pm 0.1 \dots$. Na počátku pozorování se hvězda nachází v počátku.



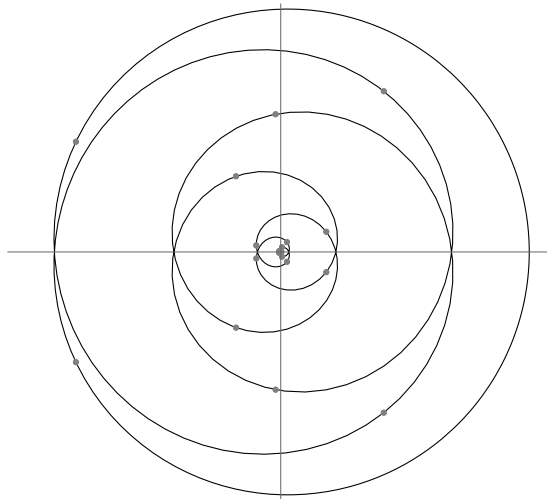
Obrázek 3.5 Trajektorie daleké hvězdy na fotografické desce pozorovaná v počátku ve vesmíru vyplněným modelovými gravitačními vlnami pro $l = 13$. Tečky v trajektorii znázorňují polohu hvězdy pozorovanou v počátku v časech $T = 0, \pm 0.05, \pm 0.1 \dots$. Na počátku pozorování se hvězda nachází v počátku.



Obrázek 3.6 Trajektorie daleké hvězdy na fotografické desce pozorovaná v počátku ve vesmíru vyplněným modelovými gravitačními vlnami pro $l = 23$. Tečky v trajektorii znázorňují polohu hvězdy pozorovanou v počátku v časech $T = 0, \pm 0.05, \pm 0.1 \dots$. Na počátku pozorování se hvězda nachází v počátku.



Obrázek 3.7 Trajektorie daleké hvězdy na fotografické desce pozorovaná v počátku ve vesmíru vyplněným modelovými gravitačními vlnami pro $l = 33$. Tečky v trajektorii znázorňují polohu hvězdy pozorovanou v počátku v časech $T = 0, \pm 0.05, \pm 0.1 \dots$. Na počátku pozorování se hvězda nachází v počátku.



Obrázek 3.8 Trajektorie daleké hvězdy na fotografické desce pozorovaná v počátku ve vesmíru vyplněným modelovými gravitačními vlnami pro $l = 51$. Tečky v trajektorii znázorňují polohu hvězdy pozorovanou v počátku v časech $T = 0, \pm 0.05, \pm 0.1 \dots$. Na počátku pozorování se hvězda nachází v počátku.

Závěr

Tato bakalářská práce přináší nové poznatky do oblasti studia gravitačních vln a jejich vlivu na pohyb obrazů vzdálených hvězd. V rámci tohoto výzkumu byla identifikována další kalibračně invariantní veličina, kterou je pohyb hvězd na obloze, vykazující podobné vlastnosti jako dříve známé invarianty [7]. Tento pohyb je popisován jako komplexní funkce času a úhlových souřadnic, což poskytuje nový náhled na dynamiku hvězd v kontextu gravitačních vln [6].

Výsledky této práce přinášejí nový pohled na asymptoticky ploché časoprostory a otevírají cestu pro další výzkum. Budoucí studie se zaměří na obecný tvar gravitačních vln a jejich širší souvislosti, což může vést k ještě hlubšímu pochopení interakcí gravitačních vln s hmotou [5]. Naše identifikace nových kalibračně invariantních veličin navíc přispívá k rozšíření současného teoretického rámce a poskytuje nové nástroje pro analýzu astrofyzikálních jevů [2].

Tato práce rovněž zdůrazňuje důležitost použití kalibračně invariantních veličin při analýze gravitačních vln. Nově identifikované veličiny poskytují nový nástroj pro měření a interpretaci gravitačních vln, což může vést k přesnějším experimentálním výsledkům a lepšímu porozumění fyzikálním jevům. Budoucí výzkum by měl také zahrnovat detailní zkoumání interakcí gravitačních vln s jinými formami energie a hmoty, což může přinést nové poznatky o základních principech fungování vesmíru.

Literatura

1. EINSTEIN, Albert. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*. 1916, roč. 49, s. 769–822.
2. MISNER, Charles W.; THORNE, Kip S.; WHEELER, John Archibald. *Gravitation*. W. H. Freeman a Company, 1973.
3. ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T. D. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters*. 2016, roč. 116, č. 6, s. 061102.
4. COLLABORATION, The LIGO Scientific; COLLABORATION, The Virgo. GW150914: The Advanced LIGO Detectors in the Era of First Discoveries. *Physical Review Letters*. 2016, roč. 116, č. 13, s. 131103.
5. BONDI, H.; BURG, M. G. J. van der; METZNER, A. W. K. Gravitational waves in general relativity VII. Waves from axi-symmetric isolated systems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. 1962, roč. 269, č. 1336, s. 21–52.
6. NEWMAN, E.; PENROSE, R. An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients. *Journal of Mathematical Physics*. 1962, roč. 3, č. 3, s. 566–578.
7. SACHS, R. K. Gravitational waves in general relativity VIII. Waves in asymptotically flat space-time. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. 1962, roč. 270, č. 1340, s. 103–126.
8. STROMINGER, Andrew; ZHIBOEDOV, Alexander. Asymptotic Symmetries and Memory Effect. *Journal of High Energy Physics*. 2014, roč. 2014, č. 1, s. 152.
9. PENROSE, Roger. Republication of: Conformal treatment of infinity. *General Relativity and Gravitation*. 2011, roč. 43, č. 3, s. 901–922. Dostupné z DOI: 10.1007/s10714-010-1110-5.
10. MAGGIORE, Michele. *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments*. Oxford University Press, 2007. ISBN 9780198570745. Dostupné z DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198570745.001.0001.
11. MAGGIORE, Michele. *Gravitational Waves: Volume 2: Astrophysics and Cosmology*. Oxford University Press, 2018. ISBN 9780198570899. Dostupné z DOI: 10.1093/oso/9780198570899.001.0001.
12. WALD, Robert M. *General Relativity*. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984. Dostupné z DOI: 10.7208/chicago/9780226870373.001.0001.
13. CARROLL, Sean M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019.
14. BELAHCENE, Imène. *Searching for gravitational waves produced by cosmic strings in LIGO-Virgo data*. 2019. Dis. pr. Université Paris Saclay.
15. REGGE, Tullio; WHEELER, John A. Stability of a Schwarzschild Singularity. *Phys. Rev.* 1957, roč. 108, s. 1063–1069. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRev.108.1063.

16. BONGA, B. Foundations of gravitational waves and black hole perturbation theory. 2020.
17. BIČÁK, Jiří; KATZ, Joseph; LEDVINKA, Tomáš; LYNDEN-BELL, Donald. Effects of rotating gravitational waves. 2012, roč. 85, č. 12, s. 124003. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRevD.85.124003.
18. ZERILLI, Frank J. Gravitational Field of a Particle Falling in a Schwarzschild Geometry Analyzed in Tensor Harmonics. *Phys. Rev. D.* 1970, roč. 2, s. 2141–2160. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRevD.2.2141.
19. MÄDLER, Thomas; WINICOUR, Jeffrey. Bondi-Sachs Formalism. *Scholarpedia*. 2016, roč. 11, s. 33528. Dostupné z DOI: 10.4249/scholarpedia.33528.
20. ANDREWS, George E.; ASKEY, Richard; ROY, Ranjan. *Special Functions*. Sv. 71. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Dostupné také z: <https://www.cambridge.org/core/books/special-functions/0A2143C9081C6747EF885F084C0E3A65>.
21. DAI, Feng; XU, Yuan. *Spherical Harmonics*. New York, NY: Springer, 2013. Springer Monographs in Mathematics. Dostupné z DOI: 10.1007/978-1-4614-6660-4_1.
22. BOWMAN, Frank. *Introduction to Bessel Functions*. New York: Dover Publications, 1958. Dostupné také z: <https://store.doverpublications.com/products/9780486604626>.
23. LEDVINKA, Tomáš. *Dynamic effects in weak and strong gravitation*. Charles University Faculty of Mathematics a Physics, 2021.
24. ASHTEKAR, A.; HANSEN, R. O. A unified treatment of null and spatial infinity in general relativity. I. Universal structure, asymptotic symmetries, and conserved quantities at spatial infinity. *Journal of Mathematical Physics*. 1978, roč. 19, s. 1542–1566. Dostupné z DOI: 10.1063/1.523863.
25. ASHTEKAR, Abhay; KHERA, Neev. Unified treatment of null and spatial infinity III: asymptotically minkowski space-times. *Journal of High Energy Physics*. 2024, roč. 2024, č. 2, s. 210. Dostupné z DOI: 10.1007/JHEP02(2024)210.
26. ASHTEKAR, Abhay; KHERA, Neev. Unified treatment of null and spatial infinity IV: angular momentum at null and spatial infinity. *Journal of High Energy Physics*. 2024, roč. 2024, č. 1, s. 85. Dostupné z DOI: 10.1007/JHEP01(2024)085.
27. PENROSE, Roger. Asymptotic Properties of Fields and Space-Times. 1963, roč. 10, č. 2, s. 66–68. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRevLett.10.66.
28. SCHOLTZ, Martin. *Helical symmetry, spinors and periodic solutions in general relativity*. Lambert Academic Publishing, 2012.
29. GÓMEZ LÓPEZ, L.A.; QUIROGA, G.D. Asymptotic structure of spacetime and the Newman-Penrose formalism: a brief review. *Revista Mexicana de Física*. 2017, roč. 63, č. 3 May-Jun.
30. G., Eichmann. *Lecture notes in QCD and hadron physics*. Técnico Lisboa, 2020.

31. ADLAM, Emily. Poincaré and Special Relativity. *arXiv preprint arXiv:1112.3175* 2011. Dostupné také z: <https://arxiv.org/abs/1112.3175>.
32. TALAGRAND, Michel. The Lorentz Group and the Poincaré Group. In: *What Is a Quantum Field Theory?* Cambridge University Press, 2022, s. 102–131. Dostupné z DOI: 10.1017/9781108225144.006.
33. LOGUNOV, Anatolii A. Henri Poincaré and the Lorentz Group. *Theoretical and Mathematical Physics*. 2001, roč. 128, č. 3, s. 799–809. Dostupné z DOI: 10.1023/A:1010486429562.
34. ASHTEKAR, Abhay; SPEZIALE, Simone. Null Infinity and Horizons: A New Approach to Fluxes and Charges. *Journal of High Energy Physics*. 2024, roč. 2024, č. 7, s. 0354. Dostupné také z: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.03254>.
35. HOU, Shaoqi. Asymptotic Symmetries of the Null Infinity and the Isolated Horizon. *Journal of High Energy Physics*. 2017, roč. 2017, č. 4, s. 05701. Dostupné také z: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1704.05701>.
36. MARTEL, Karl; POISSON, Eric. Gravitational perturbations of the Schwarzschild spacetime: A practical covariant and gauge-invariant formalism. 2005, roč. 71, č. 10, s. 104003. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRevD.71.104003.
37. NAKANO, Hiroyuki; IOKA, Kunihiro. Second-order quasinormal mode of the Schwarzschild black hole. *Phys. Rev. D*. 2007, roč. 76, s. 084007. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRevD.76.084007.

Seznam obrázků

1.1	Efekt polarizací gravitační vlny na vlastní vzdálenost hmotných bodů. Obrázek je převzatý z [14].	13
1.2	Závislost funkce $Q_l(r,t)$ pro $l = 26$ na souřadnici r . Funkce je vykreslena v časech $t \in \{-4a, -2a, 0, +2a, +4a\}$, aby byl zdůrazněn pohyb vlnového balíku. Vlnový balík se v rostoucím čase pohybuje zprava doleva, kde se pak v počátku odráží a vrací symetricky zpět.	19
1.3	Obraz funkce psi_{lm} v rovině $\theta = \frac{\pi}{2}$ (nahore) a v rovině $\phi = 0$ (dole). Obrázek je převzat z [23].	19
1.4	Skalární vlnová funkce ψ_{lm} na pozadí Minkowského časoprostoru zakreslená v Penroseově diagramu. Čáry v grafu znázorňují konstantní souřadnice r a t	20
2.1	Časoprostorový diagram Einsteinova statického vesmíru. Na válcovém zobrazení je vidět přirozené rozdělení hranice na jednotlivé části: i^- , i^+ , \mathcal{I}^- , \mathcal{I}^+ a i^0 . Obrázek je převzatý z [28]	24
2.2	Časoprostorový Penroseův diagram Minkowského prostoru. Čáry uvnitř diagramu reprezentují nadplochy konstantního času nebo konstantního r	25
2.3	Časoprostorový Penroseův diagram Minkowského prostoru. Zelená a modrá čára představují geodetiky světelného paprsku. Červená geodetika představuje časupodobnou geodetiku (v tomto případě pozorovatele vzdalujícího se z počátku konstantní rychlostí) . . .	28
2.5	Vliv gravitační vlny dané tenzorem C_{AB} na světelném nekonečnu pro $l = 13$ a $m = 3$	34
2.4	Vliv gravitační vlny dané tenzorem C_{AB} na světelném nekonečnu pro $l = 5$ a $m = 3$	34
2.6	Vliv gravitační vlny dané tenzorem C_{AB} na světelném nekonečnu pro $l = 27$ a $m = 3$	35
2.7	Absolutní hodnota skaláru v rovině $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ilustrace zachycuje kompakťovaný obraz celého \mathcal{I}^- . Souřadnice v roste se vzdáleností od počátku. Z fyzikálního hlediska představuje $ \Psi_4 $ hustotu toku energie nesené gravitačními vlnami.	40
2.8	Reálná část skaláru v rovině $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ilustrace zachycuje kompakťovaný obraz celého \mathcal{I}^- . Souřadnice v roste se vzdáleností od počátku. Z fyzikálního hlediska představuje reálná část Ψ_4 druhou časovou derivaci amplitudy h_\times	41
2.9	Komplexní argument skaláru v rovině $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ilustrace zachycuje kompakťovaný obraz celého \mathcal{I}^- . Souřadnice v roste se vzdáleností od počátku. Z fyzikálního hlediska představuje komplexní argument Ψ_4 poměr druhých časových derivací amplitud h_\times a h_+	41
2.10	Komplexní graf skaláru Ψ_4 pro $\phi = 0$. Výška grafu reprezentuje absolutní hodnotu Ψ_4 a barva její komplexní argument.	42
3.1	Světelné paprsky vycházející z daleké statické hvězdy (červená geodetika) zakresleny v Penroseově diagramu.	44

3.2	Nebeské trajektorie hvězd by v dalekohledu vypadaly jako spirály obklopené elipsami s poloosami $\Delta\phi\sin\theta$ a $\Delta\theta$, které závisí na nebeských souřadnicích hvězdy θ a ϕ . Tyto elipsy jsou zde ukázány pro $l = 8$ a různé hodnoty m , jak by se objevily na části oblohy ohraničené dvěma poledníky. Obrázek a jeho vysvětlivka jsou kompletně převzaty z [23]	47
3.3	Trajektorie daleké hvězdy na fotografické desce pozorovaná v počátku ve vesmíru vyplněným modelovými gravitačními vlnami pro $l = 3$. Tečky v trajektorii znázorňují polohu hvězdy pozorovanou v počátku v časech $T = 0, \pm 0.05, \pm 0.1\dots$. Na počátku pozorování se hvězda nachází v počátku.	47
3.4	Trajektorie daleké hvězdy na fotografické desce pozorovaná v počátku ve vesmíru vyplněným modelovými gravitačními vlnami pro $l = 5$. Tečky v trajektorii znázorňují polohu hvězdy pozorovanou v počátku v časech $T = 0, \pm 0.05, \pm 0.1\dots$. Na počátku pozorování se hvězda nachází v počátku.	48
3.5	Trajektorie daleké hvězdy na fotografické desce pozorovaná v počátku ve vesmíru vyplněným modelovými gravitačními vlnami pro $l = 13$. Tečky v trajektorii znázorňují polohu hvězdy pozorovanou v počátku v časech $T = 0, \pm 0.05, \pm 0.1\dots$. Na počátku pozorování se hvězda nachází v počátku.	48
3.6	Trajektorie daleké hvězdy na fotografické desce pozorovaná v počátku ve vesmíru vyplněným modelovými gravitačními vlnami pro $l = 23$. Tečky v trajektorii znázorňují polohu hvězdy pozorovanou v počátku v časech $T = 0, \pm 0.05, \pm 0.1\dots$. Na počátku pozorování se hvězda nachází v počátku.	49
3.7	Trajektorie daleké hvězdy na fotografické desce pozorovaná v počátku ve vesmíru vyplněným modelovými gravitačními vlnami pro $l = 33$. Tečky v trajektorii znázorňují polohu hvězdy pozorovanou v počátku v časech $T = 0, \pm 0.05, \pm 0.1\dots$. Na počátku pozorování se hvězda nachází v počátku.	49
3.8	Trajektorie daleké hvězdy na fotografické desce pozorovaná v počátku ve vesmíru vyplněným modelovými gravitačními vlnami pro $l = 51$. Tečky v trajektorii znázorňují polohu hvězdy pozorovanou v počátku v časech $T = 0, \pm 0.05, \pm 0.1\dots$. Na počátku pozorování se hvězda nachází v počátku.	50

Seznam tabulek

Seznam použitých zkratek

A Přílohy

A.1 Symetrie plochého Minkowského časoprostoru

Jelikož gravitační vlny v linearizované teorii je možné chápat jako tenzorové pole existující v Minkowského prostoru, je užitečné formulovat symetrie vystupující ve speciální teorii relativity. Níže uvedený přístup je převzatý z [30].

Lorentzova grupa

Základním postulátem relativity je nerozlišitelnost inerciálních systémů. Mezi inerciálními systémy přecházíme pomocí Lorentzových transformací. Lorentzovy transformace jsou tedy právě takové transformace, které zachovávají Minkowského metriku

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} \eta_{\rho\sigma} \quad (\text{A.1})$$

Soubor všech Lorentzovských transformací společně s operací skládání tvoří matematickou grupu, kterou nazýváme Lorentzova grupa L . Matematicky se jedná o pseudo-ortogonální grupu $O(1,3)$. Vztah (A.1) okamžitě implikuje vlastnosti

$$\begin{aligned} (\det \Lambda)^2 &= 1 \\ -(\Lambda_0^0)^2 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda_0^i)^2 &= -1 \implies (\Lambda_0^0)^2 \geq 1 \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že je tvořeno ze čtyř různých skupin transformací

1. $\det \Lambda = 1 \wedge \Lambda_0^0 > 0$
2. $\det \Lambda = -1 \wedge \Lambda_0^0 > 0$
3. $\det \Lambda = 1 \wedge \Lambda_0^0 < 0$
4. $\det \Lambda = -1 \wedge \Lambda_0^0 < 0$

Jsou to souvislé komponenty Lorentzovy grupy. Podgrupu 1) (souvislou komponentu obsahující jedničku) nazýváme vlastní Lorentzova grupa a značíme ji L^0 nebo $SO^+(1,3)$.

Poincarého grupa

Poincarého grupa je rozšířením Lorentzovy grupy o translace (posunutí) v časoprostoru. Matematicky se jedná o polopřímý součin Lorentzovy grupy s grupou translací. Poincarého grupa tedy reprezentuje všechny symetrie speciální teorie relativity

- Translace v čase nebo prostoru
- Prostorové rotace
- Transformace spojující dvě pohybující se tělesa (boosty)

Více o symteriích speciální teorie relativity lze nalézt například v [31],[32] a [33].

A.2 Symetrie na světelném nekonečnu

Světelné nekonečno (null infinity) hraje klíčovou roli při analýze asymptoticky plochých časoprostorů a gravitačních vln. Pro studium těchto jevů je důležitá struktura symetrií na světelném nekonečnu.

BMS grupa je rozšířením Poincarého grupy, která zahrnuje Lorentzovy transformace a translace. BMS grupa obsahuje tzv. supertranslace, které jsou parametrizovány hladkými funkcemi na sféře [5]. Generátory BMS grupy lze vyjádřit jako:

$$\xi = f(\theta, \phi)\partial_u + Y^A(\theta, \phi)\partial_A \quad (\text{A.2})$$

kde $f(\theta, \phi)$ jsou funkce na sféře a $Y^A(\theta, \phi)$ jsou vektorová pole na sféře, která reprezentují Lorentzovy transformace [7].

Supertranslace jsou obecnější než běžné translace a jsou dány funkcemi $f(\theta, \phi)$, které mohou být libovolně hladké. To vede k tomu, že časoprostor na světelném nekonečnu má bohatou strukturu symetrií. Supertranslace lze zapsat jako:

$$\xi = f(\theta, \phi)\partial_u \quad (\text{A.3})$$

Tyto transformace mění strukturu metriky na světelném nekonečnu a mají důležitý vliv na asymptotické chování gravitačních vln [6].

Newman-Penrose (NP) formalismus je nástroj pro analýzu asymptotických vlastností časoprostoru. Použitím NP formalismu lze identifikovat specifické složky Weylova tenzoru, které popisují gravitační vlny. V NP formalismu jsou složky Weylova tenzoru označeny jako $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$.

Asymptotické chování gravitačních vln je reprezentováno složkami Ψ_4 , které v limitě k světelnému nekonečnu (null infinity) určují amplitudu a polarizaci gravitačních vln [9]:

$$\Psi_4 \rightarrow \frac{1}{r}\psi_4(u, \theta, \phi) \quad (\text{A.4})$$

kde r je vzdálenost od zdroje a u je retardační čas.

Jedním z důležitých důsledků symetrií na světelném nekonečnu je tzv. BMS paměťový efekt, který popisuje trvalé posuny v detektorech gravitačních vln po průchodu gravitační vlny [8]. Tento efekt je důsledkem supertranslací a lze jej vyjádřit pomocí změn v asymptotickém tvaru metriky:

$$\Delta C_{AB} = \int_{-\infty}^{\infty} N_{AB} du \quad (\text{A.5})$$

kde N_{AB} je Bondiho news tenzor. Tento efekt je pozorovatelný a poskytuje cenné informace o zdrojích gravitačních vln.

Pro více informací o symetriích světelného nekonečna odkazujeme čtenáře na [8], [34], [35].

A.3 Tenzorové harmoniky

Zde uvádím konkrétní tvar používaných tenzorových harmonik X_A^{lm} a X_{AB}^{lm} . Ten je kompletně převzat z [36].

$$X_\theta^{lm} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} Y^{lm}, \quad (\text{A.6})$$

$$X_\phi^{lm} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y^{lm}, \quad (\text{A.7})$$

$$X_{\theta\theta}^{lm} = -\frac{1}{2 \sin \theta} X_{lm}, \quad (\text{A.8})$$

$$X_{\phi\phi}^{lm} = \sin \theta X_{lm}, \quad (\text{A.9})$$

$$X_{\theta\phi}^{lm} = \frac{1}{2} \sin \theta W_{lm}, \quad (\text{A.10})$$

kde

$$X_{lm} = 2 \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \right) Y_{lm}, \quad (\text{A.11})$$

$$W_{lm} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) Y_{lm}. \quad (\text{A.12})$$

Pro úplnost uvádím také tenzorové harmoniky ve tvaru, v jakém jsou uváděny v článku [17], který tuto práci značně inspiroval. V [17] jsou tři nezávislé liché harmoniky značeny $\mathbf{c}_{lm}^{(0)}$, \mathbf{c}_{lm} a \mathbf{d}_{lm} . Jedná se o čtyřdimenzionální tenzory, na rozdíl od funkcí a používaných v našem rozvoji. Tenzory jsou dány [17],

$$\mathbf{c}_{lm}^{(0)} = \frac{ir}{\sqrt{2l(l+1)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm} & -\sin \theta \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{lm} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ Sym & 0 & 0 & 0 \\ Sym & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{c}_{lm} = \frac{r}{\sqrt{2l(l+1)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm} & -\sin \theta \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{lm} \\ 0 & Sym & 0 & 0 \\ 0 & Sym & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{d}_{lm} = -\frac{ir^2}{\sqrt{2l(l+1)(l-1)(l+2)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sin \theta} X_{lm} & \sin \theta W_{lm} \\ 0 & 0 & Sym & -\sin \theta X_{lm} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

Tenzory z článku [17] používají normalizaci z [37] a [18].