



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Eliška Korcová

Pád částic do Kerrovy černé díry

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Fyzika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

V první řadě bych ráda poděkovala svému vedoucímu doc. Oldřichu Semerákovi za vedení práce a cenné rady. Další poděkování patří mému nejbližšímu okolí, přátelům a rodině, za jejich podporu. Speciálně své babičce a mamince děkuji za výborné obědy, které bych si byla sama během psaní práce nestíhala vařit.

Název práce: Pád částic do Kerrovy černé díry

Autor: Eliška Korcová

Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Jednou z hlavních úloh obecné teorie relativity je studium geodetického pohybu volných testovacích částic. Ve speciálních případech, jako je Kerrova metrika, je tato úloha plně integrabilní a formulovaná v podobě čtyř prvních integrálů rovnic geodetického pohybu. Jejich řešení závisí na počátečních podmínkách a sadě čtyř integrálů pohybu. Po stanovení mezí pohybu tyto rovnice numericky integrujeme pomocí metody Runge-Kutta 4 a následně studujeme různé druhy trajektorií, které částice mohou následovat, včetně pohybu pod horizonty. Výsledky simulací jsou navíc vizualizovány, což přispívá k lepšímu pochopení dynamiky pohybujících se částic v okolí kerrovské černé díry.

Klíčová slova: obecná teorie relativity, černé díry, Kerrova metrika, geodetický pohyb

Title: Particles falling into a Kerr black hole

Author: Eliška Korcová

Institute: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc., Institute of Theoretical Physics

Abstract: One of the main tasks of general relativity is to study geodesic motion of free test particles. In special cases, such as the Kerr metric, this problem is fully integrable and formulated in the form of four first integrals of geodesic motion equations. Their solutions depend on the initial conditions and a set of four integrals of motion. After determining the bounds of motion, these equations are numerically integrated using the Runge-Kutta 4 method, and subsequently, various types of trajectories that the particles can follow, including motion below the event horizons, are studied. The simulation results are also visualized, contributing to a better understanding of the dynamics of moving particles in the vicinity of a Kerr black hole.

Keywords: general theory of relativity, black holes, Kerr metric, geodesic motion

Obsah

Úvod	2
1 Konvence	3
2 Geodetický pohyb v Kerrově metrice	4
2.1 Kerrova metrika	4
2.1.1 Základní vlastnosti metriky	5
2.1.2 Struktura pod horizonty	6
2.2 Carterovy rovnice	8
3 Povolené oblasti	10
3.1 Radiální pohyb	10
3.1.1 Příklad $Q > 0$	11
3.1.2 Příklad $Q \leq 0$	11
3.2 Polární pohyb	12
3.3 Pohyb pod horizontem	13
4 Numerický výpočet trajektorií	14
4.1 Parametrizace Minovým časem	14
4.2 Rungeho-Kuttovy metody	15
4.3 Aplikace na hledání geodetik v Kerrově metrice	16
4.3.1 Klasická metoda Runge-Kutta 4	17
4.3.2 Přesnější metody a možnosti využití knihovny SciPy	21
5 Vyhodnocení trajektorií	23
5.1 Trajektorie pro $Q = 0$	23
5.2 Trajektorie v druhém sheetu	25
5.3 Vázané a nevázané trajektorie zasahující pod horizont	31
5.4 Vliv parametru a	36
5.5 Shrnutí	46
Závěr	48
Seznam použité literatury	49
Seznam obrázků	51
A Přílohy	55
A.1 Kód pro numerickou simulaci trajektorií	55

Úvod

Obecná relativita, teorie publikovaná Albertem Einsteinem v roce 1915, je jedním z pilířů moderní fyziky. Zobecňuje speciální teorii relativity na případ s gravitační interakcí a nahrazuje do té doby přijímanou, tehdy více než 200 let starou Newtonovu teorii gravitace. Na gravitaci nově nepohlíží jako na dálku působící sílu, ale jako na geometrickou vlastnost prostoročasu. Hmota a energie zakřivuje prostoročas a zakřivení výměnou řídí pohyb hmotných i nehmotných objektů. Einsteinovy závěry byly navíc revoluční v našem chápání samotného prostoru a času, základních pojmů všech fyzikálních teorií, které poprvé v historii nebyly brány jako absolutní veličiny.

Vzájemný vztah mezi geometrií prostoročasu a chováním hmoty a negravitačních polí popisuje centrální element obecné teorie relativity: Einsteinovy rovnice, systém deseti nelineárních parciálních rovnic druhého řádu, zahrnující čtyři zákony zachování pro zdroje.

Již krátce po zveřejnění teorie bylo K. Schwarzschildem nalezeno jejich řešení pro sféricky symetrický problém, které poslal A. Einsteinovi formou dopisu přímo z válečné fronty, kde v tu dobu sloužil. Samotný Einstein byl překvapený, že takové řešení vůbec existuje - nejen pro jeho jednoduchost, ale i proto, že se zdá být v rozporu s Machovým náhledem na setrvačnost. Schwarzschildova metrika ale není jediná, kterou lze najít exaktně. Brzy poté byla objevena Reissnerova-Nordstömova metrika pro sféricky symetrické nabitě těleso. Trvalo ale až do roku 1963, než Roy Kerr našel řešení problému pro nenabitě, ale zato rotující těleso, které po něm nazýváme Kerrova metrika.

Teorie A. Einsteina předpovídá dynamičnost vesmíru, gravitační vlny a také nové objekty - černé díry. Tímto pojmem označujeme oblast, kde je gravitace tak silná, že ji ani fotony, mající nejvyšší možnou rychlost, nedokážou opustit. Uvnitř černé díry se pak všechny částice musí pohybovat směrem dovnitř k jejímu centru - prostoročasové singularitě ve tvaru bodu či prstence, kde hustota energie diverguje.

Astronomická pozorování černých děr znesnadňuje fakt, že z jejich samotné podstaty není možné detekovat a analyzovat signály z nich přicházející, jak je v astronomii běžnou praxí. Přímý snímek černé díry byl poprvé pořízen teprve v roce 2019, tedy více než 100 let po jejich předpovězení. Jejich výzkum je proto mnohem náročnější než výzkum jiných vesmírných objektů a opírá se primárně o matematický aparát.

Většina článků a publikací zabývajících se pohybem okolí černých děr se zaměřuje primárně na pohyb vně horizontů. Zejména pokud chceme pochopit více o tom, co se děje přímo pod horizontem, musíme se uchýlit čistě k analytickému a numerickému zkoumání metriky, což je také obsahem této práce.

1. Konvence

Uvádíme konvence používané v textu.

- Všude používáme geometrizované jednotky, v nichž volíme rychlost světla ve vakuu $c = 1$ a stejně tak Newtonovu gravitační konstantu $G = 1$. Mimo to je často volena $M = 1$ a hmotnost částoce $m = 1$. Text na tuto volbu v příslušných částech vždy upozorňuje.
- Metrický tenzor má signaturu $(-+++)$.
- Tenzory zapisujeme v indexové notaci, pro něž $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. V indexech nahoře jsou tenzory kontravariantní, v indexech dole kovariantní.
- Vektory jsou značeny tučně, např. $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$.

Numerické simulace jsou programovány a zpracovány v Pythonu s využitím knihoven NumPy a Matplotlib. Kód pro třídu starající se o samotnou numerickou situaci je uveden v Příloze 1. Při analytických metodách pak byl využíván program Wolfram Mathematica.

Text obsahuje množství obrázků, z nichž většina je ve vektorovém formátu. Je možné, že v tištěné verzi nejsou všechny detaily viditelné, pro větší rozlišení lze doporučit elektronickou verzi.

2. Geodetický pohyb v Kerrově metrice

Geodetiky jsou křivky, po nichž se pohybují volné testovací částice, z geometrického hlediska je chápeme jako zobecnění přímek v obecném prostoročasu. Navíc splňují, že se na nich maximalizuje vlastní čas.

Geodetická rovnice, jejímž řešením tyto křivky jsou, je diferenciální rovnice druhého řádu závisující na metrice a jejích prvních derivacích. Ve speciálních případech prostoročasů, které vykazují určité symetrie, je ale možné geodetické rovnice zjednodušit díky existenci konstant pohybu. Jedním z těchto případů je i Kerrova metrika.

V této kapitole je čerpáno primárně z [1], [2] a [3].

2.1 Kerrova metrika

Zatímco Schwarzschildova metrika je sféricky symetrickým řešením Einsteino- vých rovnic (s tenzorem energie a hybnosti $T^{\mu\nu} = 0$ a kosmologickou konstantou $\Lambda = 0$), Kerrova metrika řeší stacionární a axiálně symetrický problém. Kromě parametru M zde vystupuje ještě parametr a spojený s rotací.

Ve válcových Kerrových-Schildových souřadnicích (T, ρ, z, ψ) nabývá metrika formy

$$ds^2 = -dT^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2 + dz^2 + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} \left(dT + \frac{r\rho d\rho - a\rho^2 d\psi}{r^2 + a^2} + \frac{zdz}{r} \right)^2, \quad (2.1)$$

kde r je dáno

$$r^4 - (\rho^2 - a^2 + z^2)r^2 - a^2 z^2 = 0. \quad (2.2)$$

Častěji jsou ale používány souřadnice Boyerovy-Lindquistovy (t, r, θ, ϕ) , odvozené v [4]. Ty jsou svázané s Kerrovými-Schildovými pomocí vztahů

$$dT = dt - \frac{2Mr}{\Delta} dr, \quad (2.3)$$

$$d\psi = d\phi - \frac{2Mar}{(r^2 + a^2)\Delta}, \quad (2.4)$$

$$\rho = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \quad (2.5)$$

a

$$z = r \cos \theta. \quad (2.6)$$

Ze zavedení souřadnic ρ a z snadno nahlédneme, že se jedná o oblé elipsoidální souřadnice. Význam Boyerových-Lindquistových souřadnic je lépe znázorněn na obrázku 2.1. Metrika v nich má formu

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4Mr}{\Sigma} a \sin^2 \theta dt d\phi + \frac{\mathcal{A}}{\Sigma} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (2.7)$$

kde

a pro vlastní plochu

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}} \, d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} a^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi = \pi a^2. \quad (2.12)$$

V Kerrově metrice existují dva horizonty (souřadnicové singularity) odpovídající $\Delta = 0$:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (2.13)$$

které stejně jako ve Schwarzschildově metrice mají charakter světelných nadploch. Také vidíme, že v tzv. extrémálním případě pro $a = M$ horizonty splynou v jeden, a pro $a > M$ dokonce neexistují, jedná se pak o případ tzv. nahé singularity.

Po průchodu vnějším horizontem do oblasti mezi oběma horizonty se (stejně jako v případě Schwarzschildovy metriky) kvůli orientaci světelného kužele musí pozorovatel nutně pohybovat ve směru klesajícího r , což souvisí se záporností Δ v této oblasti. Po dosažení vnitřního horizontu lze orientaci kužele opět připodobnit k situaci nad vnějším horizontem.

Na rozdíl od Schwarzschildovy metriky však tyto horizonty nejsou statickou limitou ani plochou nekonečného "redshiftu". Ty se nacházejí tam, kde $g_{tt} = 0$. Pro plochu nekonečného redshiftu to plyne přímo ze vztahu pro frekvenční posun, platného pro stacionární metriku,¹ a pro statickou limitu z normalizace čtyřrychlosti pozorovatele v klidu vůči nekonečnu $u^t = (1/\sqrt{-g_{tt}}, 0, 0, 0)$. Obojí nastane pro $\Sigma = 2Mr$, což dává poloměry

$$r_{0,1} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (2.14)$$

Obecně tedy, vyjma degenerovaných případů, platí následující nerovnosti: $r_1 < r_- < r_+ < r_0$. Na statické mezi a pod ní je pozorovatel nucen obíhat v kladném směru ϕ , není tedy statický vůči nekonečnu, protože jeho $u^\phi \neq 0$. Až do vnějšího horizontu však dokáže udržovat $u^r = 0$. Oblasti mezi statickou limitou a příslušným horizontem se nazývá ergosféra. Na rozdíl od horizontů také statické limity existují pro libovolné a , v případě $a > M$ se však spojí v jednu a vytvoří toroidální povrch.

2.1.2 Struktura pod horizonty

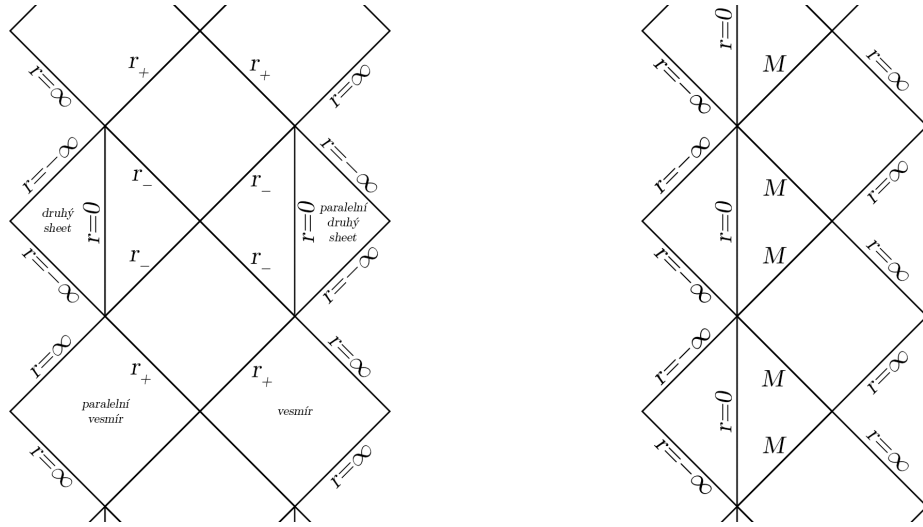
Ukázali jsme, že singulární je pouze prstenec $r = 0$, $\theta = \pi/2$, nikoliv celý disk $r = 0$, který budeme dále často označovat jako ekvatoriální disk. Můžeme si proto položit otázku, jestli by jím volná částice nemohla proletět jako obručí.

Zderivujeme-li komponenty metriky podle r a provedeme přechod $r \rightarrow 0^+$, uvidíme, že většina komponent je obecně nenulová. Průchod diskem přes $r = 0$ změní jejich znaménko (pohyb skrz disk je stále jedním směrem, zatímco gradient má vždy směr z disku), a způsobí tak skok v gradientu metriky. Gradient metriky je ale úměrný poli, což znamená, že se disk chová, jako by na něm byla indukovaná hmota. Z příslušného tenzoru energie a hybnosti získaného z Einsteinových rovnic lze dále ukázat, že její plošná hustota je záporná.

¹Vysílá-li pozorovatel A signál s jistou frekvencí k pozorovateli B, frekvence měřená pozorovatelem B může být jiná. Posun závisí na metrice v bodech, kde se oba pozorovatelé nacházejí. Pokud pozorovatel A vysílá signál z místa, kde $g_{tt} = 0$, pozorovatel B ho přijímá s frekvencí limitně jdoucí k nule.

Kdybychom ale prodloužili r do záporných hodnot, ke skoku v gradientu by nedošlo. Metrika této nové oblasti časoprostoru (tzv. druhý "sheet", v literatuře označována také jako "antiverse") se odlišuje pouze ve členech úměrných Mr , záporné hodnoty r tak můžeme také interpretovat jako zápornou hmotnost M při ponechání kladného r . Horizonty existují pro $\Delta = 0$, což zde ale kvůli zápornosti Mr není možné. Stejně tak tu nemůže existovat ani plocha statické limity.

Možnost prodloužení do záporných r vyplývá z existence maximálního analytického prodloužení Kerrovy metriky [4]. To také předpovídá, že na oblast pod vnitřním horizontem je napojená tzv. bílá díra, která se chová přesně opačným způsobem než černá díra a vypuzuje částice ven do jisté alternativní kopie vesmíru. Kauzální strukturu takového prodloužení znázorňuje Penroseův-Carterův diagram, vyznačený na obrázku 2.2.



(a) Penroseův-Carterův diagram pro černou díru se dvěma horizonty

(b) Penroseův-Carterův diagram pro extrémální černou díru

Obrázek 2.2: Penroseovy-Carterovy diagramy v Kerrově metrice

Ve skutečnosti za vnitřním horizontem Kerrova metrika už není realistickým modelem astronomické černé díry. Těsně nad vnitřním horizontem protichůdné svazky částic produkují tlak, který je dále urychluje, což vede k exponenciálně rostoucí (tzv. inflační) nestabilitě [5].

Existenci nahých singularit a extrémálních černých děr pak zakazuje třetí zákon dynamiky pro černé díry, podle něhož nemůže na horizontu vymizet tzv. povrchová gravitace, což by ale právě pro extrémální případ nastalo [6]. Třetí zákon sice nebyl rigorózně dokázán, ale dosavadní výzkum nasvědčuje, že skutečně platí (např. [7]). Můžeme na něj nahlížet jako na analogii třetího termodynamického zákona, který tvrdí, že žádný systém nemůže dosáhnout termodynamické teploty $T = 0$ K.

2.2 Carterovy rovnice

V obecné metrice lze pohyb určit vyřešením sady geodetických rovnic druhého řádu

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\kappa\nu} u^\kappa u^\nu = 0, \quad (2.15)$$

kde $\Gamma^\mu_{\kappa\nu}$ jsou složky afinní konexe, které lze taktéž vyjádřit jako Christoffelovy symboly pomocí metriky a jejích parciálních derivací. V případě Kerrovy metriky však byla B. Carterem nalezena jednodušší forma geodetických rovnic, ekvivalentní této [8].

Ačkoliv je Kerrovo řešení Einsteinových rovnic složitější než Schwarzschildovo, lze ukázat, že i v tomto případě je geodetický pohyb plně integrabilní. Jinak řečeno lze nalézt sadu čtyř integrálů pohybu, které popisují geodetický pohyb v Kerrově metrice. Ty existují dokonce i v případě Kerrova-Newmannova pole, které zahrnuje nenulový elektrický náboj zdroje, a tím i působení Lorentzovy síly, jejich obecnou formu pro tuto situaci ale nebudeme nyní uvažovat a automaticky volíme elektrický náboj zdroje nulový.

Metrika nezávisí na souřadnicích t a ϕ , čemuž odpovídá existence killingovských vektorových polí a zachování projekce čtyřhybnosti $p_\mu \xi^\mu$ na tato pole podél libovolné geodetiky. Souřadnici t odpovídá konstanta E (energie v nekonečnu), souřadnici ϕ konstanta L (moment hybnosti vůči ose z v nekonečnu).

Pomocí Hamiltonovy-Jacobiho rovnice pak lze nalézt další konstantu K , kterou vyjádříme jako

$$K = \left(aE - \frac{L}{\sin^2 \theta} \right)^2 \sin^2 \theta + m^2 a^2 \cos^2 \theta + p_\theta^2. \quad (2.16)$$

V první řadě vidíme, že je vždy kladná. Společně s podmínkou na normalizaci čtyřrychlosti jsme tak získali čtyři integrály pohybu a dostáváme rovnice pro geodetický pohyb v Kerrově poli, které nabývají pro hmotné částice formy

$$m\Delta\Sigma u^t = (r^2 + a^2) [(r^2 + a^2)E - aL] - \Delta a \left(aE - \frac{L}{\sin^2 \theta} \right), \quad (2.17)$$

$$m\Delta\Sigma u^\phi = a [(r^2 + a^2)E - aL] - \Delta \left(aE - \frac{L}{\sin^2 \theta} \right), \quad (2.18)$$

$$(m\Sigma u^r)^2 = [(r^2 + a^2)E - aL]^2 - \Delta(m^2 r^2 + K) \quad (2.19)$$

a

$$(m\Sigma u^\theta)^2 = K - m^2 a^2 \cos^2 \theta - \left(aE - \frac{L}{\sin^2 \theta} \right)^2 \sin^2 \theta, \quad (2.20)$$

kde m označuje klidovou hmotnost testovací částice. Pro nehmotné částice je lze vyjádřit v podobném tvaru

$$\Delta\Sigma p^t = (r^2 + a^2) [(r^2 + a^2)E - aL] - \Delta a \left(aE - \frac{L}{\sin^2 \theta} \right), \quad (2.21)$$

$$\Delta\Sigma p^\phi = a [(r^2 + a^2)E - aL] - \Delta \left(aE - \frac{L}{\sin^2 \theta} \right), \quad (2.22)$$

$$(\Sigma p^r)^2 = [(r^2 + a^2)E - aL]^2 - \Delta K \quad (2.23)$$

a

$$(\Sigma p^\theta)^2 = K - \left(aE - \frac{L}{\sin^2 \theta} \right)^2 \sin^2 \theta, \quad (2.24)$$

kde jsme na levé straně nahradili $mu^\mu \rightarrow p^\mu$ a na pravé položili $m = 0$.

3. Povolené oblasti

Pro zkoumání geodetického pohybu je v první řadě vhodné stanovit podmínky, kde se v závislosti na konstantách může testovací částice nacházet. Ty plynou z rovnic (2.19), (2.20), (2.23) a (2.24) - jelikož má jejich levá strana tvar druhé mocniny, musí být pravá strana vždy nezáporná. Uvidíme, že omezení platí nejen na souřadnice r a θ , ale i na konstanty pohybu.

3.1 Radiální pohyb

Označme pravou stranu rovnice (2.19) jako $R(r)$. Zavádíme konstanty

$$Q = K - (aE - L)^2, \quad \mathcal{E} = E^2 - m^2. \quad (3.1)$$

Konstanta Q je někdy v literatuře přímo nazývána Carterova konstanta a z nezápornosti K plyne, že je zdola omezená:

$$Q \geq -(aE - L)^2. \quad (3.2)$$

Uvažujme pouze částice s energií $E > 0$, jelikož částice se zápornou energií mohou existovat pouze v ergosféře [1]. Navíc volíme $M = 1$, pro jiné hodnoty M provedeme přechod

$$r \rightarrow \frac{r}{M}, \quad a \rightarrow \frac{a}{M}, \quad L \rightarrow \frac{L}{M}, \quad Q \rightarrow \frac{Q}{M^2}. \quad (3.3)$$

Pro hmotné testovací částice můžeme pak rovnici (2.19) upravit do tvaru

$$R(r) = \mathcal{E}r^4 + 2m^2r^3 + (a^2E^2 - a^2m^2 - L^2 - Q)r^2 + 2[(aE - L)^2 + Q]r - a^2Q, \quad (3.4)$$

V limitních případech se pro $r \rightarrow 0$ rovnice redukuje na $R(r) \approx -a^2Q$ a pro $r \rightarrow \infty$ (a také při prodloužení do záporných hodnot pro $r \rightarrow -\infty$) na $R(r) \approx \mathcal{E}r^4$.

Zatím uvažujme, že alespoň jeden horizont existuje. Z původního tvaru rovnice geodetiky (2.19) si snadno všimneme, že na horizontu, kde $\Delta = 0$, musí být vždy nutně $R(r_+) > 0$, kde. To samé platí analogicky i pro vnitřní horizont r_- . Stejně tak mezi horizonty je ze zápornosti Δ funkce $R(r)$ vždy kladná.

Podle chování funkce $R(r)$ a jejích kořenů můžeme trajektorie v obecnosti klasifikovat jedním z následujících typů:

- $R(r)$ nemá žádný reálný kořen (možné pouze pro $\mathcal{E} > 0$): částice se pohybuje po tranzitní trajektorii, tedy se může nacházet na libovolné hodnotě souřadnice r ,
- $R(r)$ má dva jednoduché reálné kořeny a $\mathcal{E} > 0$: existují pouze nevázané trajektorie,
- $R(r)$ má dva jednoduché reálné kořeny a $\mathcal{E} < 0$: existují pouze vázané trajektorie,
- $R(r)$ má čtyři jednoduché reálné kořeny a $\mathcal{E} > 0$: existují vázané i nevázané trajektorie,

- $R(r)$ má čtyři jednoduché reálné kořeny $\mathcal{E} < 0$: existují pouze vázané trajektorie.

Vícenásobné kořeny pak vedou na stabilní sférické orbity [9]. Konkrétně si pak ještě všimněme, že při volbě $a = 1$ pro $L = 2E$ existuje dvojitý kořen funkce $R(r)$ v $r = 1$, tedy přímo na horizontu.

Speciální situace nastává pro částici, která je v nekonečnu v klidu. V takovém případě je $E = m$, a tedy $\mathcal{E} = 0$. To ale znamená, že se mění charakter výrazu (3.4). Člen 4. stupně se vynuluje a řídicím členem se stává člen 3. stupně, tedy $2m^2r^3$, který je vždy kladný. Pro $r \rightarrow \infty$ tak celý výraz $R(r)$ musí být kladný, naopak při prodloužení do záporných hodnot $r \rightarrow -\infty$ musí být záporný. Trajektorie potom může být jednou z možností:

- $R(r)$ má jeden jednoduchý reálný kořen: existují pouze nevázané trajektorie,
- $R(r)$ má tři jednoduché reálné kořeny: existují vázané i nevázané trajektorie.

Částice, pro něž $\mathcal{E} < 0$, jsou zachycené gravitačním zdrojem a do nekonečna se dostat nemohou, protože od jistého r je $R(r) < 0$. Speciálně pro světelné geodetiky vždy platí $\mathcal{E} > 0$, a dokonce se kvůli $m = 0$ ve výrazu $R(r)$ vynuluje celý člen třetího stupně.

Výsledky získané v této a následující sekci byly zformulované již například v článcích [9], který obsahuje velmi detailní rozbor možností radiálního pohybu, nebo [10], zde ale byly odvozeny nezávisle (pokud není uvedeno jinak) a se zmíněnými zdroji zkontrolovány.

Podívejme se dále podrobněji na chování funkce $R(r)$ v závislosti na různých hodnotách parametrů.

3.1.1 Příklad $Q > 0$

V první řadě si všimněme, že pro $Q > 0$ je průsečík s vertikální osou, tedy pro $r = 0$, vždy záporný. To znamená, že taková částice se nikdy nemůže dostat až k singularitě a jí ohraničenému disku. $R(r)$ je ale přitom na horizontu kladné, musí tedy existovat jisté $r_{min} > 0$, v němž $R(r)$ protíná horizontální osu, a žádná částice se již nemůže nacházet v oblasti $r < r_{min}$. Tomuto případu zřejmě odpovídají zaprvé vázané orbity zasahující pod vnitřní horizont a zadruhé nevázané orbity, pokračující asymptoticky do $r = \infty$.

3.1.2 Příklad $Q \leq 0$

Případ $Q \leq 0$ je zajímavější, protože povoluje, aby se testovací částice dostala až k $r = 0$. Speciálně hned vidíme, že pro $Q = 0$ se na $r = 0$ v radiálním směru přesně zastaví, jelikož se v (3.4) všechny ostatní členy také vynulují a bude platit $R(0) = 0$. Pro $Q < 0$ pak po průchodu diskem pohyb pokračuje do druhého sheetu.

Jak už ale bylo zmíněno výše, konstanta Q nemůže nabývat libovolných záporných hodnot. Z podmínky na dolní mez plyne poměrně intuitivní pozorování: čím větší má částice energii (a moment hybnosti), tím spíše se může dostat až na $r = 0$. Pokud dokonce $Q < 0$, nemá podle [9] $R(r)$ žádné kořeny nad vnějším horizontem.

Speciálním případem spadajícím do této kategorie je jisté zobecnění volného pádu pro $E = m$ a $L = 0$, tedy částice padající z nekonečna z klidu s nulovým momentem hybnosti. Pokud navíc dodáme podmínku na konstantu K , že pro částici v nekonečnu platí $p_\theta = 0$, dostáváme, vychází pro tento typ příkladu $Q = 0$, na což se ještě dále budeme odkazovat.

3.2 Polární pohyb

Doposud jsme se zaměřovali pouze na pohyb v radiální souřadnici, kde jsme zkoumali, kdy pravá strana (2.19) nabývá kladných hodnot. Podobně se v krátkosti podíváme i na rovnici pro polární souřadnici θ (2.20), kde zřejmě také musí být pravá strana, kterou označíme $\Theta(\theta)$, kladná. Můžeme ji upravit do tvaru

$$\Theta(\theta) = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[-a^2 \mathcal{E} \cos^4 \theta + (a^2 E^2 - a^2 m^2 - L^2 - Q) \cos^2 \theta + Q \right]. \quad (3.5)$$

V první řadě vidíme, že pro $\theta \rightarrow 0$ a $\theta \rightarrow \pi$ se funkce chová jako $-L^2/\sin^2 \theta$, tedy pro $L \neq 0$ jde $\Theta(\theta) \rightarrow -\infty$ a částice se nemůže dostat až na osu z .

V zásadě rozlišujeme tři hlavní typy pohybu dané konstantou Q , jelikož $\Theta(\pi/2) = Q$:

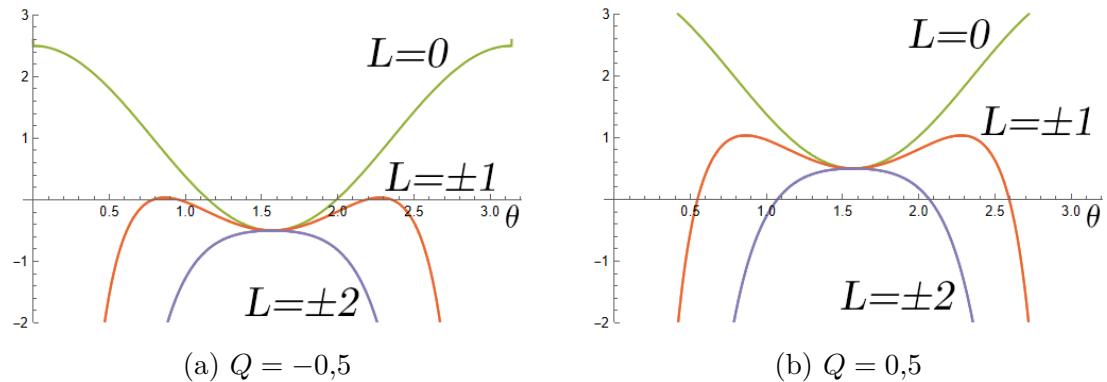
- $Q > 0$, pak existují dva reálné kořeny (pro $L \neq 0$) symetrické vůči $\theta = \pi/2$ a částice osciluje mezi nimi,
- $Q < 0$, pak existují čtyři reálné kořeny (pro $L \neq 0$), speciálně $\theta = \pi/2$ leží v zakázané oblasti a pohyb je vázaný na povolenou oblast pouze v jedné hemisféře,
- $Q = 0$, pak může být pohyb buď vázaný na ekvatoriální rovinu, nebo se k ní částice asymptoticky přibližuje, a nebo padá do singularity [11].

V případě $L = 0$ pak $\Theta(\theta)$ nediverguje v krajních bodech, počet kořenů se proto může odlišovat.

Podle [9] pro Q navíc z omezení na polární pohyb plyne:

$$Q \geq -(|L| - a\sqrt{\mathcal{E}})^2 \quad \text{pro } E > m \text{ a } 0 \leq |L| < a\sqrt{\mathcal{E}}, \quad (3.6)$$

při nesplnění podmínek na pravé straně je dokonce vždy nezáporná. Tuto situaci ilustruje dvojice grafů na obrázku 3.1, kde při vyšších hodnotách L a $Q < 0$ je celý graf pod osou, čímž je takový pohyb zakázan.



Obrázek 3.1: Průběh $\Theta(\theta)$ pro $(m, E) = (1, 2)$, $a = 1$ pro různé hodnoty L a Q

3.3 Pohyb pod horizontem

Shrňme, co se stane s částicí, dostane-li se pod vnitřní horizont. V závislosti na konstantách pohybu může dojít k jedné ze tří situací.

- Částice spadne do prstencové singularity. Tato situace může nastat pouze pro $Q = 0$.
- Částice doletí na ekvatoriální disk $r = 0$, ale ne přímo do singularity. Stejně jako v předchozím případě je to možné jen v případě $Q \leq 0$, speciálně pokud je $Q = 0$, částice se zde zastaví. Pokud je $Q < 0$, můžeme pracovat s prodloužením do druhého sheetu pro $r < 0$.
- Částice mine ekvatoriální disk a vnitřním a nevyhnutelně také vnějším horizontem projde do kopie původního vesmíru, jak lépe vysvětluje Penroseův-Carterův diagram pro Kerrovu metriku, znázorněný v předchozí kapitole na obrázku 2.2. Dále má ještě smysl rozlišit případ, kdy má částice vázané orbity a horizonty překračuje opakovaně, a kdy se pod horizont dostane z nekonečna a pak opět do nekonečna vyletí, průlet se tedy koná pouze jednou.

4. Numerický výpočet trajektorií

Naším cílem je zkoumat vykreslit trajektorie volné částice pro různé počáteční podmínky se zaměřením na její pohyb pod vnitřním horizontem. Trajektorie nalezneme numerickou integrací geodetických rovnic (2.17), (2.18), (2.19) a (2.20) pomocí algoritmu Runge-Kutta 4.

Alternativně by bylo možné využít i obecnější přístup a místo rovnic pro r a θ integrovat klasické geodetické rovnice (2.15). V příslušných Carterových rovnicích se totiž kvůli druhým mocninám ztrácí informace o směru pohybu v radiální a polární souřadnici, což obecná rovnice geodetik řeší. Také by v tomto případě bylo jednodušší přejít k pozmeněné metrice. Kvůli složitosti Christoffelových symbolů v Kerrově metrice ale nakonec volíme výše zmíněný přístup a body obratu ošetříme samostatně.

4.1 Parametrizace Minovým časem

Carterovy rovnice pro geodetiky (i odpovídající rovnice pro částice s nulovou hmotností) sice jednoznačně popisují pohyb v Kerrově metrice, ale vidíme, že poslední dvě rovnice jsou vzájemně provázané. Tuto provázanost dokážeme eliminovat použitím parametrizace pomocí Minova času λ [12]:

$$d\tau = \Sigma d\lambda. \quad (4.1)$$

Rovnice tak lze upravit do tvaru

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{m\Delta}(r^2 + a^2) [(r^2 + a^2)E - aL] - \frac{1}{m}a \left(aE - \frac{L}{\sin^2\theta} \right), \quad (4.2)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{1}{m\Delta}a [(r^2 + a^2)E - aL] - \frac{1}{m} \left(aE - \frac{L}{\sin^2\theta} \right), \quad (4.3)$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{m^2} [(r^2 + a^2)E - aL]^2 - \frac{1}{m^2}\Delta(m^2r^2 + K), \quad (4.4)$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{m^2} \left[K - m^2a^2 \cos^2\theta - \left(aE - \frac{L}{\sin^2\theta} \right)^2 \sin^2\theta \right]. \quad (4.5)$$

Tato parametrizace je výhodná jak při analytickém, tak numerickém přístupu. V prvním případě umožňuje díky oddělení souřadnic r a θ řešit rovnice postupně - začít s posledními dvěma rovnicemi a poté dosadit do prvních dvou rovnic. V druhém případě je pak Mino čas praktický pro výpočty v oblasti malých hodnot r , konkrétně pod vnitřním horizontem. Jak plyne z parametrizace (4.1), $d\tau$ se pro malá r výrazně zmenšuje, a výpočty jsou tak při parametrizaci pomocí vlastního času více časově náročné.

4.2 Rungeho-Kuttovy metody

V této části je čerpáno zejména z [13] a [14]. Mějme soustavu N diferenciálních rovnic 1. řádu s počáteční podmínkou

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) &= f(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0,\end{aligned}\tag{4.6}$$

kde $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$.

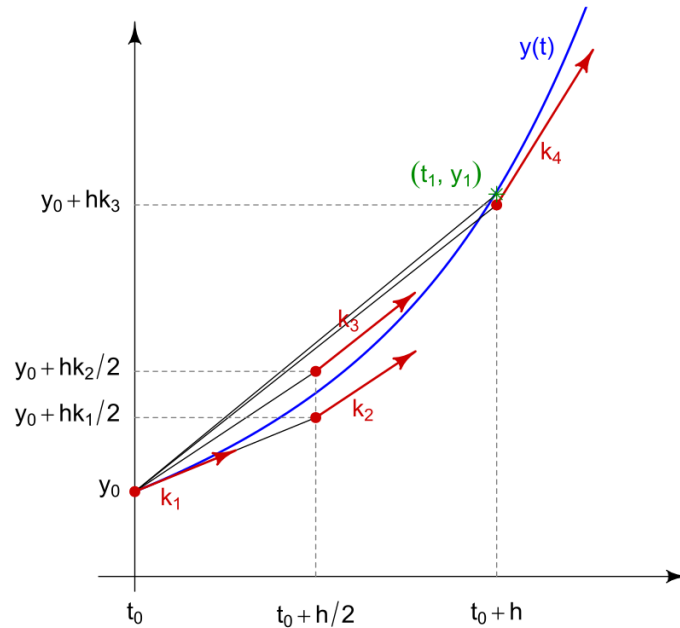
V principu nejjednodušší numerický integrátor pracuje tak, že s krokem h vyvine řešení soustavy z bodu t_n do bodu $t_{n+1} = t_n + h$, čemuž odpovídá

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + hf(t_n, \mathbf{y}_n),\tag{4.7}$$

Tento algoritmus se nazývá Eulerův, ale je zatížen velkou chybou v řádu $O(h^2)$, jelikož využívá informaci o derivaci pouze v prvním bodě intervalu $[t_n, t_{n+1}]$. Řešením, jak algoritmus zpřesnit, je rozdělit tento interval do více bodů a v nich vyhodnocovat funkci f . Na to obecně cílí metody z rodiny Runge-Kutta, rozdělující interval do několika částí. V závislosti na jejich počtu pak rozlišujeme konkrétní Rungeho-Kuttovy algoritmy, z nichž nejvyužívanější je metoda Runge-Kutta 4 (RK4), která dělí interval na čtyři části a vyvíjí řešení podle

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= hf(t_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k}_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{\mathbf{k}_1}{2}\right) \\ \mathbf{k}_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{\mathbf{k}_2}{2}\right) \\ \mathbf{k}_4 &= hf(t_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) + O(h^5).\end{aligned}\tag{4.8}$$

Obecně vektorové veličiny \mathbf{k}_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, reprezentují aproximace derivace \mathbf{y}' v bodech dělících interval. Grafické znázornění této metody je vyneseno v grafu na obrázku 4.1. Metody stejného řádu se při současném splnění určitých vazeb mohou lišit v koeficientech (hodnotách stojících před h a \mathbf{k}_i na pravé straně (4.8)), které také ovlivňují přesnost modelu.



Obrázek 4.1: Grafické znázornění metody Runge-Kutta 4. Počáteční podmínka $y(t_0) = y_0$, vývoj s krokem h do bodu (t_1, y_1) . Exaktní řešení vyneseno modře, výsledný krok černě. (Převzato z https://en.wikipedia.org/wiki/File:Runge-Kutta_slopes.svg, upraveno)

Nevýhodou Rungeho-Kuttových metod je, že nezachovávají energii systému s chybou rostoucí s časem, při výpočtu na větším časovém intervalu tedy jejich přesnost klesá, a nejsou tak obecně vhodné pro dlouhé časové vývoje.

Kromě metody RK4 existuje, jak už bylo výše zmíněno, celá rodina metod založených na podobném principu. Pokud bychom chtěli dosáhnout větší přesnosti, než nabízí RK4, potřebujeme metody vyššího řádu. Jednou z nich je například metoda DOP853, patřící do skupiny Dormandových-Princeových metod. Jejimi autory jsou E. Hairer a G. Wanner [15], kteří ji původně napsali v jazyce Fortran. Charakterizuje ji velké množství koeficientů, které jsou k nahlédnutí v originální implementaci [16]. Navzdory tomu, že se jedná o algoritmus vyššího řádu, je jeho výkon srovnatelný s jednoduššími metodami. Ostatní algoritmy z této rodiny se ale neliší pouze počtem kroků, ale také obecně komplexnějším jádrem, které zahrnuje i odhad chyby a v závislosti na ní modifikaci délky kroku nebo s tím související extrapolační metody.

4.3 Aplikace na hledání geodetik v Kerrově metrice

Numerické řešení rovnic pro geodetiky a jejich vykreslení realizujeme pomocí skriptu psaném v jazyce Python s využitím knihoven NumPy [17] a Matplotlib [18].

Centrálním elementem je pak samozřejmě samotné numerické řešení rovnic, které je ale nutné doplnit ošetřením některých událostí, jmenovitě pádu do singularity, průchodu přes horizont a bodů obratu.

- Pád do singularity detekujeme, jsou-li souřadnice částice $r < r_tol$ a $\theta \in [\pi/2 - th_tol, \pi/2 + th_tol]$. Řešení rovnic je tímto ukončeno. Stejně tak ukončíme řešení, pokud částice skončí na $r = 0$ mimo singularitu, avšak s nulovou rychlostí ve směru r (nastává pro $Q = 0$), tedy zastaví se uvnitř ekvatoriálního disku.
- Carterovy rovnice pro časovou a azimutální souřadnici (2.17) a (2.18) na horizontech zřejmě divergují, nemá tedy smysl snažit se je na jistém okolí horizontu `hor_tol` řešit. V tomto okolí tak vyvíjíme pouze zbylé dvě rovnice (2.19) a (2.20) a souřadnice t a ϕ na sebe napojíme tak, aby měly na obou hranicích okolí horizontu stejnou hodnotu. Není to tedy matematicky skutečně korektní řešení, ale zajišťuje přehlednost a srozumitelnost vnesených hodnot.
- Rovnice (2.19) a (2.20) kvůli druhé mocnině neobsahují informaci o směru pohybu v příslušných souřadnicích. Je proto nutné ohlídat, kdy se jejich pravá strana vynuluje (je menší než `ur_eps`, respektive `uth_eps`) a v tu chvíli obrátit znaménko. Směr vývoje charakterizujeme veličinami $\epsilon_r = \pm 1$ a $\epsilon_\theta = \pm 1$.

Nastavujeme automaticky počáteční souřadnice $t = 0$ a $\phi = 0$, ze symetrie na jejich hodnotě nezáleží. Počáteční hodnoty r a θ a stejně tak konstanty a , m , E , L a Q lze upravovat pro jednotlivé simulace, přičemž využíváme podmínky z předchozí kapitoly. Zajistíme tak, že pro zvolené hodnoty existuje řešení, a eliminujeme nesmyslné vývoje.

Pro další použití volíme bez újmy na obecnosti $m = 1$, pro jinou hodnotu m nám stačí přeskálovat

$$E \rightarrow \frac{E}{m}, \quad L \rightarrow \frac{L}{m}, \quad Q \rightarrow \frac{Q}{m^2}. \quad (4.9)$$

4.3.1 Klasická metoda Runge-Kutta 4

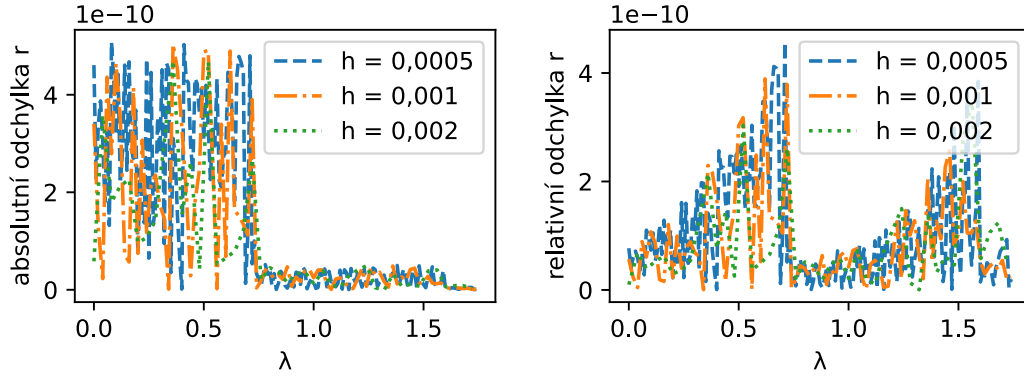
Metodu implementujeme přímočaře jako cyklus opakující (4.8). Cyklus pak doplníme o `if` výroky ošetřující výše zmíněné problémy: pád do singularity, průchod horizonty a obraty.

Konkrétně rozpoznání bodů obratu zajišťuje `if` podmínka kontrolující, je-li rychlost v příslušné souřadnici daná (4.4) a (4.5) menší než konstanta určující toleranci.

Pro zhodnocení přesnosti numericky vypočítané trajektorie je srovnáme s analytickým řešením rovnic (2.17), (2.18), (2.19) a (2.20), nalezeném v [10]. V článku jsou vyjádřena jejich exaktní řešení ve formě Weierstrassových eliptických funkcí a jeho součástí je i knihovna v jazyce Wolfram Mathematica, která zmíněné funkce obsahuje a na základě počátečních podmínek, stejných jako v numerickém přístupu, umožňuje spočítat přesné trajektorie.

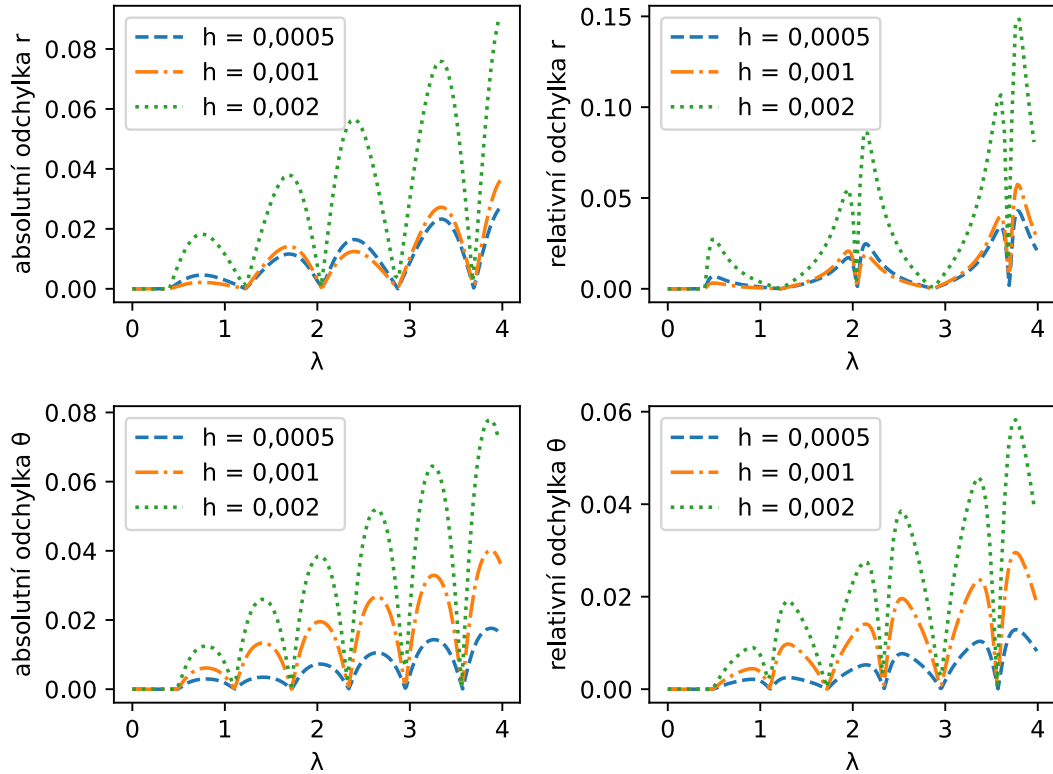
Srovnáme nejprve odchylku pro speciální případ volného pádu, popsany v kapitole 3.1.2 a charakterizovaný $(m, E, L, Q) = (1, 1, 0, 0)$, jakožto jedno z nejjednodušších možných trajektorii. Jelikož je v tomto případě souřadnice θ konstantní, její chybu nevynášíme a v grafu na obrázku 4.2 znázorňujeme pouze

průběh relativní a absolutní chyby r . Kvůli divergentnímu chování na okolí horizontu v souřadnicích t a ϕ je nutné volit dostatečně malý krok, rovnou se proto omezíme na $h \sim 10^{-3}$. V takovém měřítku už v tomto případě zřejmě velikost kroku nehraje velkou roli, jak vidíme v grafech. Pokles chyby na okolí $\lambda = 0,75$ odpovídá průchodu přes horizont.



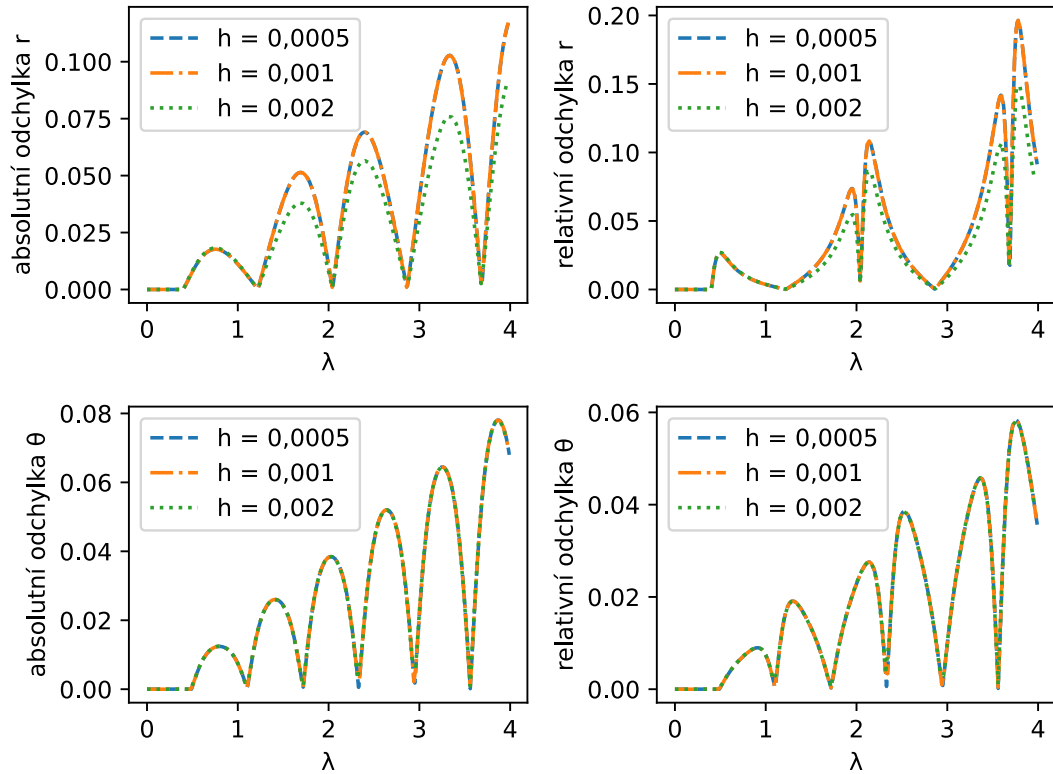
Obrázek 4.2: Relativní a absolutní chyba souřadnice r vůči analytickému řešení při konstantách $(m, E, L, Q) = (1, 1, 0, 0)$, $a = 1$ a počátečních podmínkách $r_0 = 6$, $\theta_0 = \pi/4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$, metoda RK4. Vynesen každý 20. bod. Jedná se o nevázanou trajektorii.

Ukažme, že mnohem signifikantější je vliv chyby způsobené změnou znaménka v bodech obratu, jak lze vidět na příkladu vázané orbity s konstantami $(m, E, L, Q) = (1, 1, -4, 10)$, $a = 1$ a zvolenými počátečními podmínkami $r_0 = 2$, $\theta_0 = \pi/3$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$, kde $\lambda \in (0, 4)$. Hodnoty tolerance `ur_tol` a `uth_tol` nemohou být libovolně malé, aby reflektovaly velikost kroku h . Pro pevně nastavenou toleranci chyba v souřadnicích r a θ prakticky nezávisí na h , jak lze vidět v grafu na obrázku 4.3. Paradoxně je dokonce chyba pro největší z vykreslených kroků $h = 0,002$ menší, což ale přisuzujeme spíše náhodné shodě s exaktní trajektorií, zapříčiněné hrubostí kroku.



Obrázek 4.3: Relativní a absolutní chyba souřadnice r a θ vůči analytickému řešení pro $(m, E, L, Q) = (1, 1, -4, 10)$, $a = 1$, $r_0 = 2$, $\theta_0 = \pi/3$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$, $\epsilon_\theta = 1$, $\lambda \in (0, 4)$, metoda RK4. Tolerance bodů obrátu zvolena pevně jako $ur_tol = 0,05$ a $uth_tol = 0,05$. Vyneseno každý 20. bod. Jedná se o vázanou trajektorii.

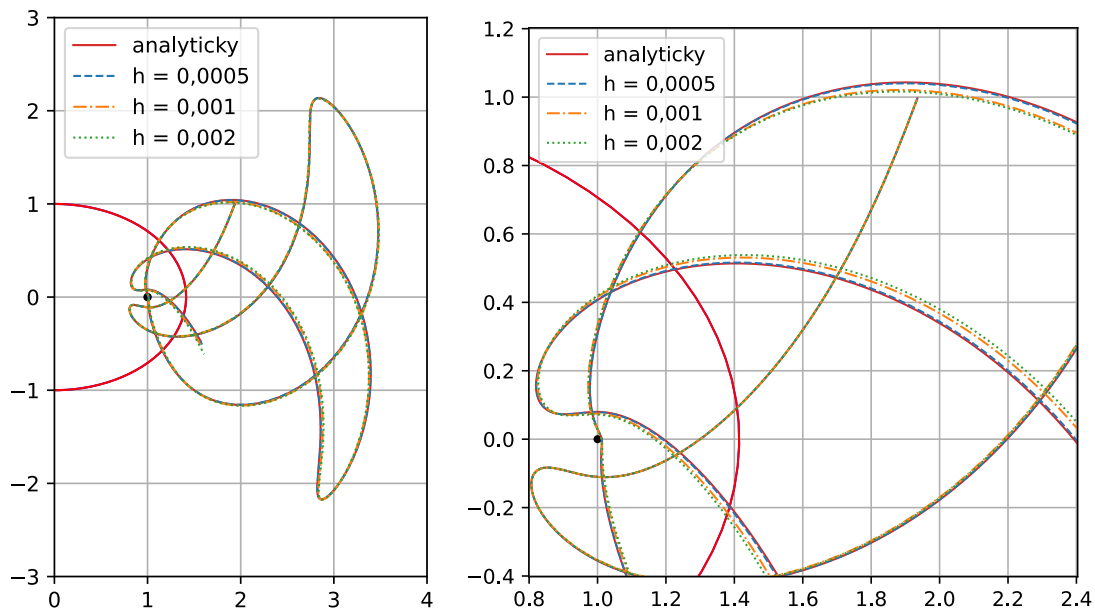
Pokud hodnotu tolerance škálujeme koeficientem k podle kroku h jako $ur_tol = hk$ a $uth_tol = hk$, plyne z grafu na obrázku 4.4, že se pro menší krok chyba snižuje. Další výpočty tak budeme provádět s tímto škálováním. Koeficient k je většinou nutné měnit v závislosti na konstantách pohybu a konkrétní trajektorii: pro malá r musí obecně být spíše větší.



Obrázek 4.4: Relativní a absolutní chyba souřadnice r a θ vůči analytickému řešení pro $(m, E, L, Q) = (1, 1, -4, 10)$, $a = 1$, $r_0 = 2$, $\theta_0 = \pi/3$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$, $\lambda \in (0, 4)$, metoda RK4. Tolerance bodů obratu zvolena jako $ur_tol = 25h$ a $uth_tol = 25h$. Vynesen každý 20. bod. Jedná se o vázanou trajektorii.

Ještě si všimněme, že v úseku před prvním bodem obratu, tedy přibližně $\lambda \in (0, 0,5)$ je chyba numerického řešení řádově 10^{-10} .

Srovnání samotných simulovaných trajektorií s analytickou je vykresleno na obrázku 4.5.



Obrázek 4.5: Srovnání numerických a analytické trajektorie v korotující rovině ρz pro $(m, E, L, Q) = (1, 1, -4, 10)$, $a = 1$, $r_0 = 2$, $\theta_0 = \pi/3$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$, $\lambda \in (0, 4)$, metoda RK4. Tolerance bodů obratu zvolena jako $ur_tol = 25h$ a $uth_tol = 25h$. Jedná se o vázanou trajektorii. Vpravo detail.

Důležitým závěrem z vyhodnocení chyby simulovaných trajektorií je, že dominantní vliv na velikost odchylky mají body obratu. Snižováním velikosti kroku ale můžeme nepřímo tuto chybu alespoň částečně omezit.

Pro naše potřeby je dosažená přesnost dostačující, což je dáno i integrovatelností geodetických rovnic, které tak nejsou extrémně citlivé na počáteční podmínky. Pokud bychom ale požadovali vyšší přesnost, například při zkoumání chaotického pohybu, bylo by na místě přejít k integraci geodetických rovnic (2.15). Ty informaci v sobě o směru pohybu přímo obsahují, a není proto nutné body obratu, kde chyba primárně vzniká, řešit.

4.3.2 Přesnější metody a možnosti využití knihovny SciPy

Kromě přímé implementace metody RK4 lze také pro výpočet trajektorií použít knihovnu SciPy a v ní obsaženou funkci `solve_ivp` ("Solve Initial Value Problem"), která podporuje více různých algoritmů včetně například RK4(5) nebo velmi přesné DOP853, kde se nejedná o doslovný překlad originálu ve Fortranu, ale algoritmické jádro a koeficienty zůstávají stejné.

Na rozdíl od předchozího přístupu, kdy jsme ošetření speciálních situací zakomponovali přímo do hlavního cyklu, musí se tentokrát kvůli nemožnosti úpravy samotné funkce `solve_ivp` postupovat jinak. Funkce `solve_ivp` podporuje jako argument tzv. `event` - událost, kdy je detekována změna znaménka zvolené proměnné a numerické řešení rovnic se tímto ukončí. Integrátor tedy například místo podmínky "otočit znaménko, když je změna souřadnice r menší než ur_eps " hledá pomocí extrapolace konkrétní bod, kde je tato podmínka splněna. Definujeme si pak funkce reprezentující události pádu do singularity, dosažení okolí horizontu $r_\pm \pm hor_tol$ a dosažení bodu obratu. Při ukončení vlivem detekce události nalezené řešení uložíme, v případě potřeby změním hodnoty některých konstant

a započneme nový výpočet s počátečními podmínkami navazujícími na uložené řešení, na závěr takto rozdělená řešení spojíme v jedno.

Tento způsob je však v případě komplexnějšího ošetřování podmínek značně nepraktický a nepřehledný. Navíc, jelikož má na chybu největší vliv právě navazování v bodech obratu, stejně nebenefitujeme ze zvýšené přesnosti dostupných algoritmů. Zůstaneme tak u klasické RK4 metody, která naopak díky přístupnosti hlavního iteračního cyklu a jeho snadné úpravy vyniká možnostmi modifikace pro konkrétní situaci.

5. Vyhodnocení trajektorií

Trajektorie vykreslujeme Kerrových-Schildových souřadnicích (2.5) a (2.6) a z nich odvozených

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi \\y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Tyto souřadnice jsou vhodné, jelikož v nich singularita odpovídá svému skutečnému tvaru a také odlišují centrální disk a samotnou singularitu, která ho obepíná. Trajektorie rozdělíme do několika kategorií podle jejich chování pod horizontem.

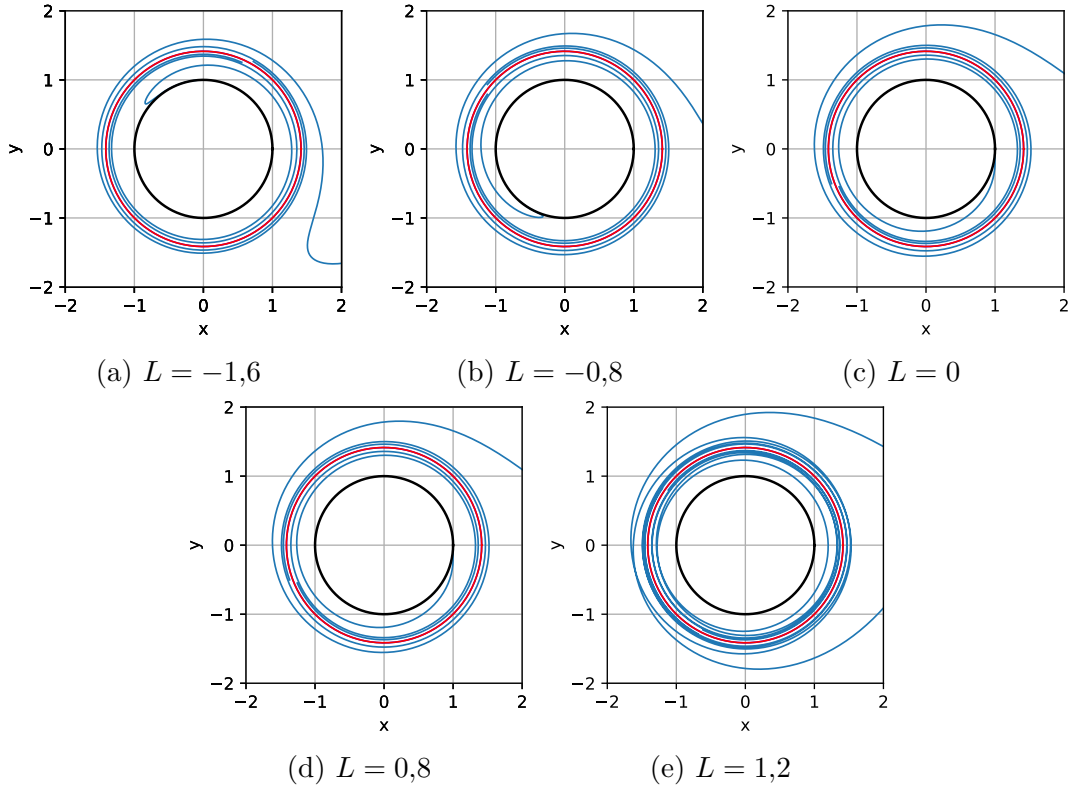
Ačkoliv konstanta a s volbou $a = 1$ již nepopisuje realistickou černou díru, pro význačnost této hodnoty ji prozatím zafixujeme, abychom zmenšili počet sledovaných parametrů. Nakonec ale zhodnotíme i její vliv na pohyb částice.

Ještě poznamenejme, že nepřikládáme grafy pro všechny provedené simulace. Zmíněná pozorování však uvádíme na základě zkoumání funkcí $R(r)$ a $\Theta(\theta)$ pro zvolené kombinace parametrů a dalších (zde nevykreslených) simulací. Hlavní část využitého kódu je k dispozici v příloze A.1. Simulace provádíme s krokem $h = 0,0001$ nebo $h = 0,0002$ a k v rozsahu od 10 do 100 v závislosti na ostatních parametrech.

5.1 Trajektorie pro $Q = 0$

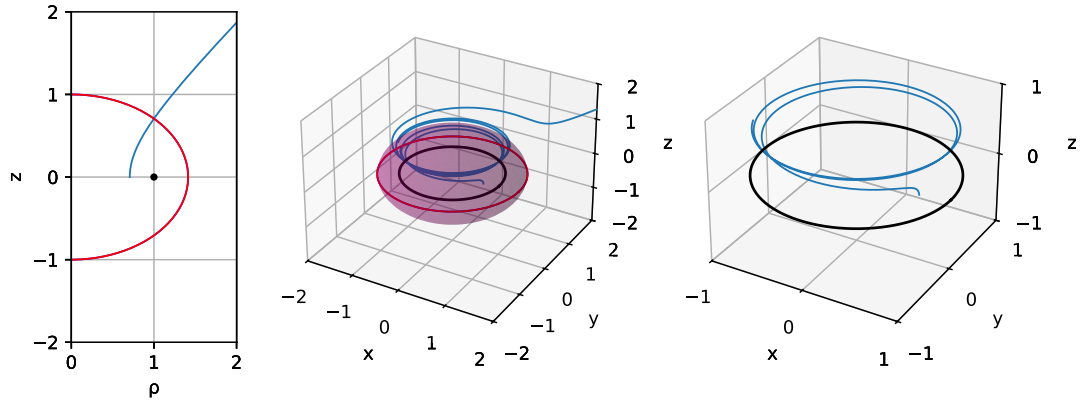
Nejprve volme $Q = 0$. V první řadě pokud v souladu se zvolenou konvencí $m = 1$ volíme také $E = 1$, je možný pouze pohyb v rovině $\theta \equiv \pi/2$ pro libovolné $L \neq 0$. Výjimkou je speciální případ $L = 0$, který byl již popsán v sekci 3.1.2 jako zobecnění volného pádu a vyznačuje se tím, že se hodnota souřadnice θ zachovává.

V závislosti na L má funkce $R(r)$ buď kořen pouze v $r = 0$ (obecně pro menší $|L|$), a jelikož je pohyb částic omezen na rovinu $\theta = \pi/2$, skončí všechny v singularitě, nebo má další dva kladné kořeny (obecně pro větší $|L|$). V takovém případě pak částice padající do černé díry z dostatečně velké počáteční hodnoty r nekončí v singularitě, ale pohybuje se po nevázané trajektorii. Při dalším zvyšování $|L|$ by se dokonce bod obratu posunul nad horizont, částice by se tak do černé díry nedostala vůbec. Pohyb v rovině $\theta = \pi/2$ jsme vykreslili v grafech na obrázku 5.1.

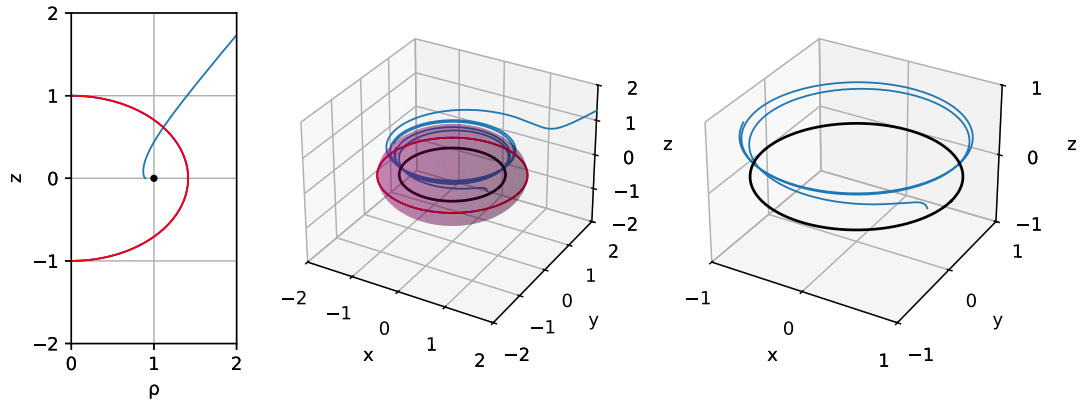


Obrázek 5.1: Srovnání trajektorií v rovině xy , $z = 0$ pro $(m, E, Q) = (1, 1, 0)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = \pi/2$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita.

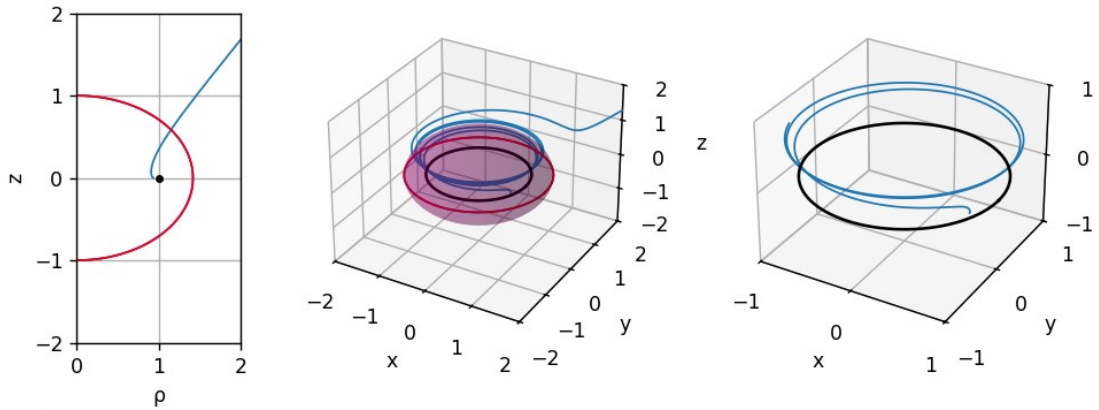
Pokud je $E > m$, neplatí už omezení na pohyb pouze v rovině $\theta = \pi/2$. S tím zároveň souvisí, že částice nekončí nutně v singularitě, ale obecně kdekoliv na $r = 0$, kde se díky $Q = 0$ zastaví. Srovnání trajektorií pro různé hodnoty E je vykresleno v grafech na obrázku 5.2. Zřejmě pro vyšší energii se během pohybu zvětšuje také souřadnice θ , což se projeví dopadem blíže k singularitě (pro počáteční volbu $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ a $\epsilon_\theta = 1$). Pokud bychom naopak zvolili $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ a ponechali $\epsilon_\theta = 1$, se zvyšující se energií by se bod dopadu na $r = 0$ směrem do středu disku. Čas, za který částice dorazí na $r = 0$, se s rostoucí hodnotou E zkracuje, což bychom také intuitivně očekávali.



(a) $E = 1$



(b) $E = 1,05$



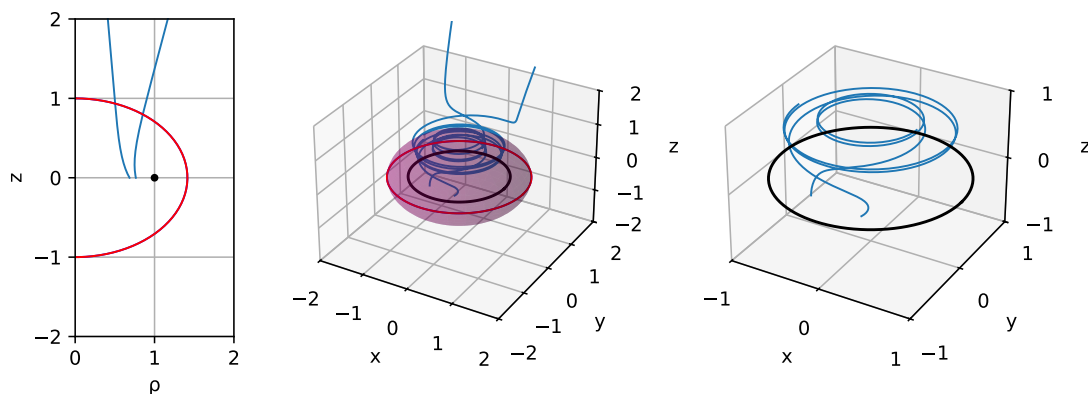
(c) $E = 1,1$

Obrázek 5.2: Srovnání trajektorií pro $(m, L, Q) = (1, 0, 0)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = \pi/4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Vlevo rovina ρz , uprostřed prostor xyz , vpravo prostor xyz se znázorněnou pouze částí trajektorie pod horizontem.

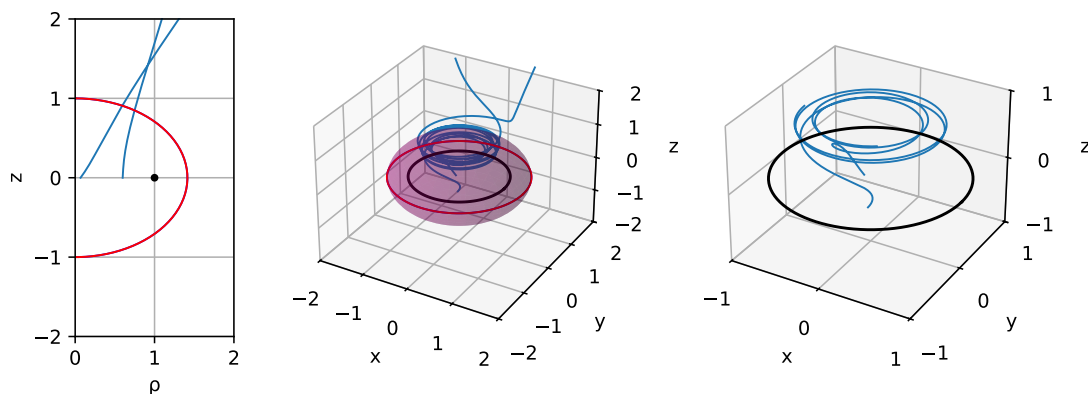
5.2 Trajektorie v druhém sheetu

Dívejme se dále na pohyb charakterizovaný $Q < 0$. Aby vůbec mohla konstanta Q takových hodnot nabývat, požadujeme podle (3.6) $E > m$. Takový pohyb může mít bod obrátu obrátu $r < 0$, nebo se částice dokonce může nacházet na libovolné hodnotě r .

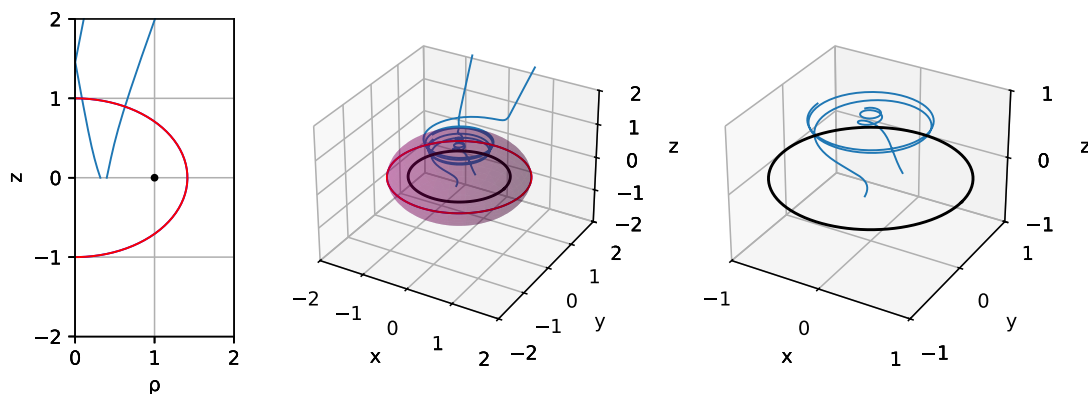
Podívejme se nejprve na vliv samotné konstanty Q . Srovnání trajektorií v oblasti $r > 0$ je zakresleno v grafech na obrázku 5.3, v prodloužení $r < 0$ na 5.4. Hodnota Q tak zřejmě ovlivňuje hloubku, do níž v případě vázané trajektorie částice pronikne. Navíc čím nižší Q , tím menší hodnota souřadnice θ v okamžiku dosažení $r = 0$ (opět v počáteční konfiguraci $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, $\epsilon_\theta = 1$), což se zdá platné i pro jiné povolené hodnoty E a L .



(a) $Q = -0,5$

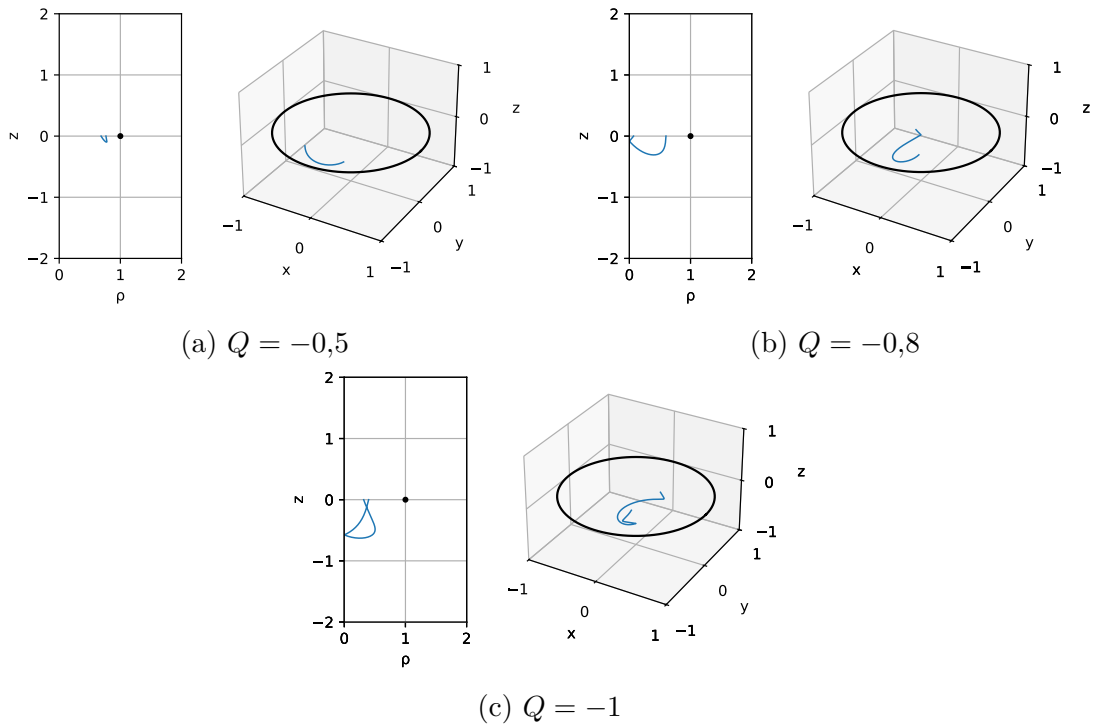


(b) $Q = -0,8$



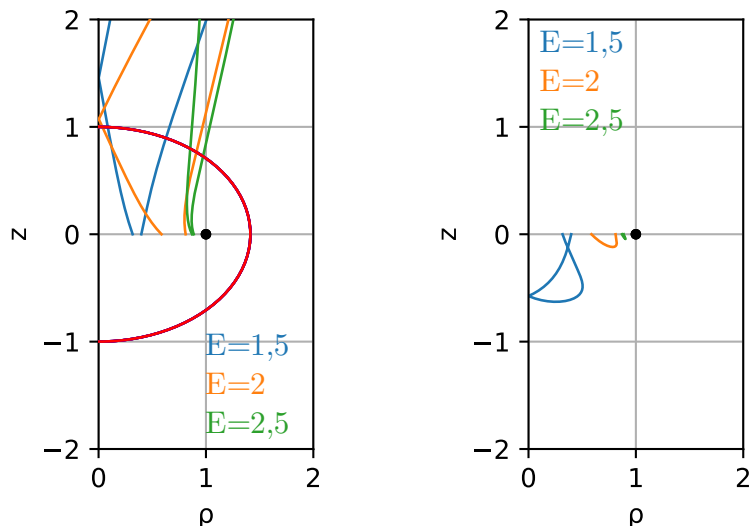
(c) $Q = -1$

Obrázek 5.3: Srovnání trajektorií v oblasti $r > 0$ pro $(m, E, L) = (1, 1, 5, 0)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémní horizont, černě singularita. Vlevo rovina ρz , uprostřed prostor xyz , vpravo prostor xyz se znázorněnou pouze částí trajektorie pod horizontem.

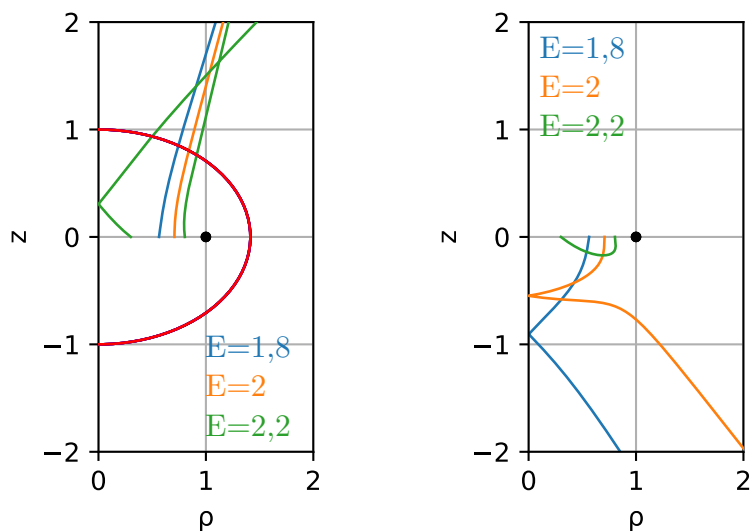


Obrázek 5.4: Srovnání trajektorií v oblasti $r < 0$ pro $(m, E, L) = (1, 1,5, 0)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Černě singularita. Vlevo vždy rovina ρz , vpravo prostor xyz .

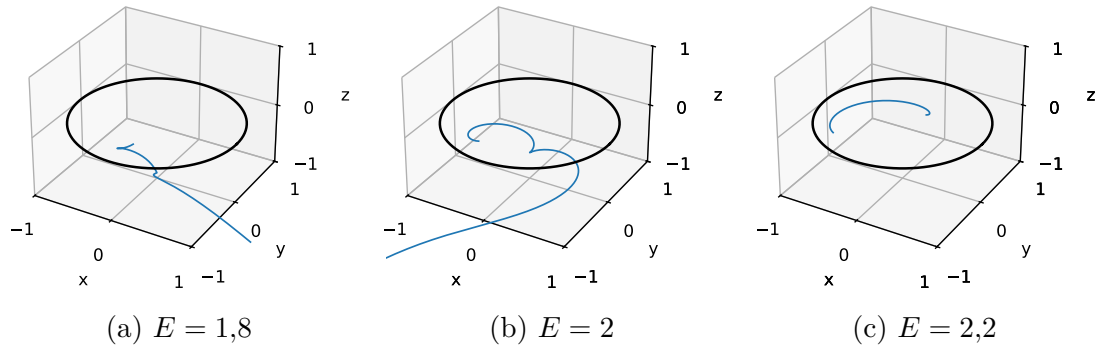
Zajímavý je vliv hodnoty E na pohyb v druhém sheetu. Z grafů 5.5 pro $(m, L, Q) = (1, 0, -1)$ a $a = 1$ se zdá, že čím vyšší je tato hodnota, tím větší je $r < 0$ bod obratu. Volba souřadnicových os by sice v tomto případě nemusela mít vypovídající hodnotu, zmíněný poznatek jsme ale ověřili z chování funkce $R(r)$. To není příliš intuitivní chování - mohli bychom spíše očekávat, že větší energie bude znamenat lepší "průraznost" do záporných r . Pro tuto konkrétní konfiguraci konstant nejsou povoleny tranzitní trajektorie. I při jiné volbě, která je povoluje, (zde $(m, L, Q) = (1, 0, -1,5)$ a $a = 1$) ale pozorujeme obdobný jev: tranzitní trajektorie se realizují pro menší hodnoty E , naopak pro větší hodnoty se mění na nevázané, jak je znázorněno na obrázku 5.6. V kartézských souřadnicích jsou pak trajektorie pro $r < 0$ vyznačeny na obrázku 5.7. Podotkněme, že ačkoliv uvedené případy mají shodně $L = 0$, ty samé změny byly pozorovány pro $L \neq 0$.



Obrázek 5.5: Srovnání trajektorií v rovině ρz pro $(m, L, Q) = (1, 0, -1)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémní horizont, černě singularita. Modře $E = 1,5$, oranžově $E = 2$, zeleně $E = 2,5$. Vlevo $r > 0$, vpravo $r < 0$.

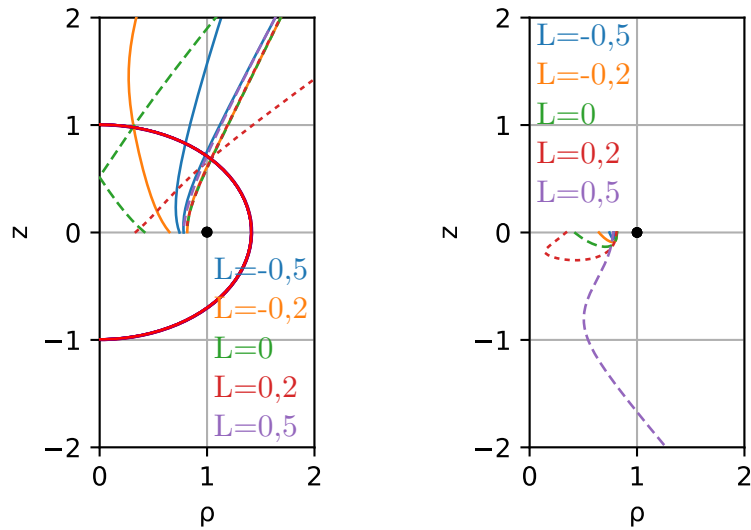


Obrázek 5.6: Srovnání trajektorií v rovině ρz pro $(m, L, Q) = (1, 0, -1,5)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémní horizont, černě singularita. Modře $E = 1,8$, oranžově $E = 2$, zeleně $E = 2,2$. Vlevo $r > 0$, vpravo $r < 0$.

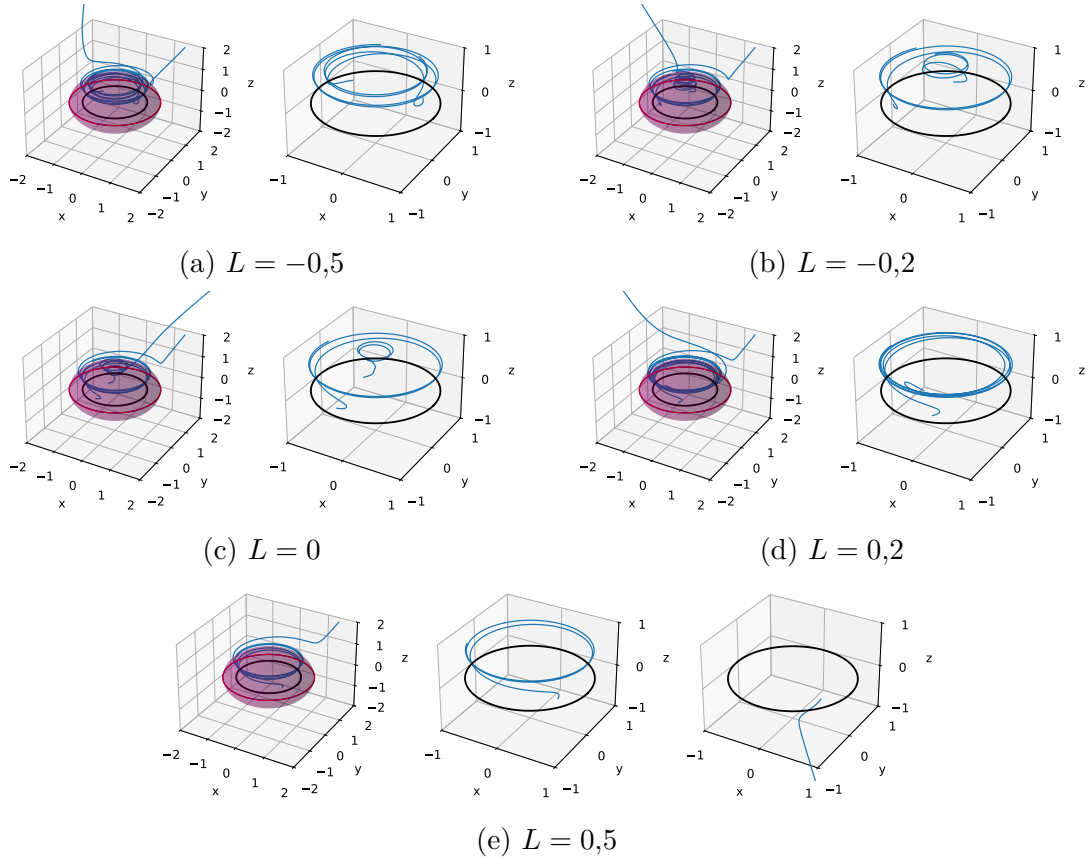


Obrázek 5.7: Srovnání trajektorií kartézských souřadnicích xyz , $r < 0$ pro $(m, L, Q) = (1, 0, -1, 5)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Černě vyznačena singularita.

Zvolme nyní fixní E a Q a sledujme, jak je pohyb částice ovlivněn konstantou L . Srovnání různých trajektorií je v grafech na obrázcích 5.9 a 5.8. Na nich vidíme, že pro větší hodnoty L (zde konkrétně $L = 0,5$ pro $E = 2$, $Q = -1$) se dokonce mění typ geodetiky z vázaných trajektorií na tranzitní trajektorii bez bodů obratu a částice pokračuje do $r \rightarrow -\infty$.

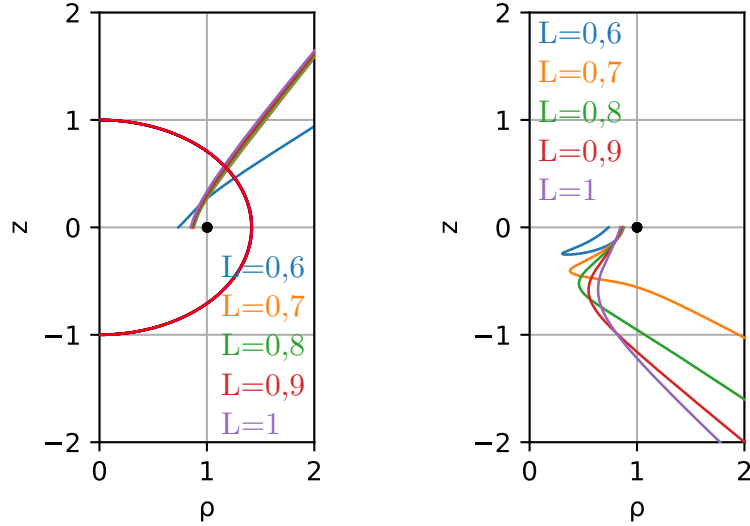


Obrázek 5.8: Srovnání trajektorií v rovině ρz pro $(m, E, Q) = (1, 2, -1)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Modře $L = -0,5$, oranžově $L = -0,2$, zeleně $L = 0$, červeně $L = 0,2$, fialově $L = 0,5$. Vlevo $r > 0$, vpravo $r < 0$.



Obrázek 5.9: Srovnání trajektorií pro $(m, E, Q) = (1, 2, -1)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Vlevo vždy prostor xyz , vpravo prostor xyz se znázorněnou pouze částí trajektorie pod horizontem. Speciálně na posledním grafu uprostřed prostor xyz se znázorněnou pouze částí trajektorie pod horizontem, vpravo prostor xyz pro $r < 0$.

Z chování $R(r)$ se zdá, že ke změně typu trajektorie může dojít pouze pro $L > 0$. Podívejme se nyní proto ještě speciálně právě na tyto případy, vykreslené v grafu na obrázku 5.10. Vidíme, že v oblasti $r > 0$ se trajektorie od sebe odchyľují pouze minimálně, ale brzy po průchodu $r = 0$ se jasně rozdělí.

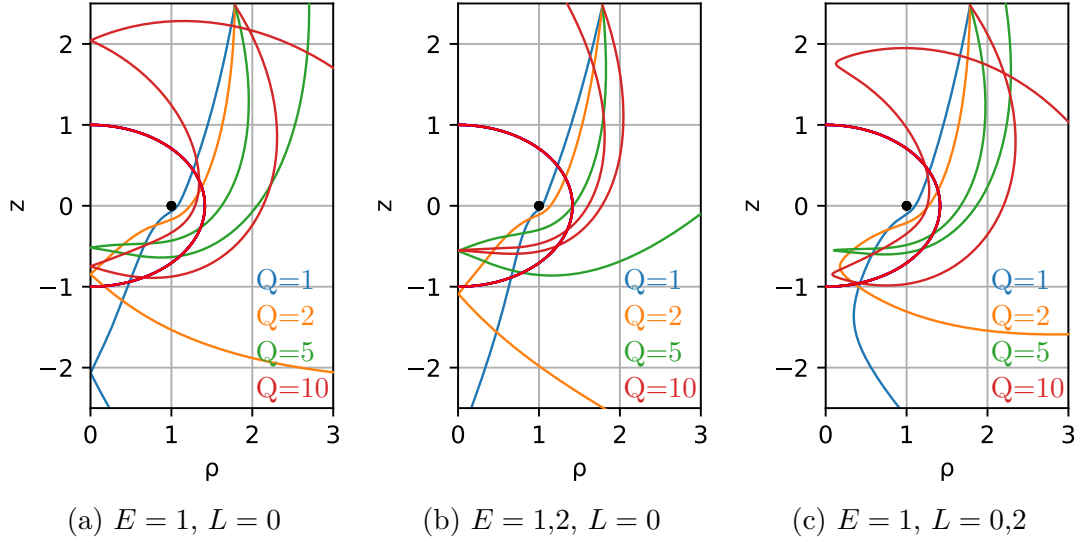


Obrázek 5.10: Srovnání trajektorií v rovině ρz pro $(m, E, Q) = (1, 2, 5, -1)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,8$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Modře $L = 0,6$, oranžově $L = 0,7$, zeleně $L = 0,8$, červeně $L = 0,9$, fialově $L = 1$. Vlevo $r > 0$, vpravo $r < 0$.

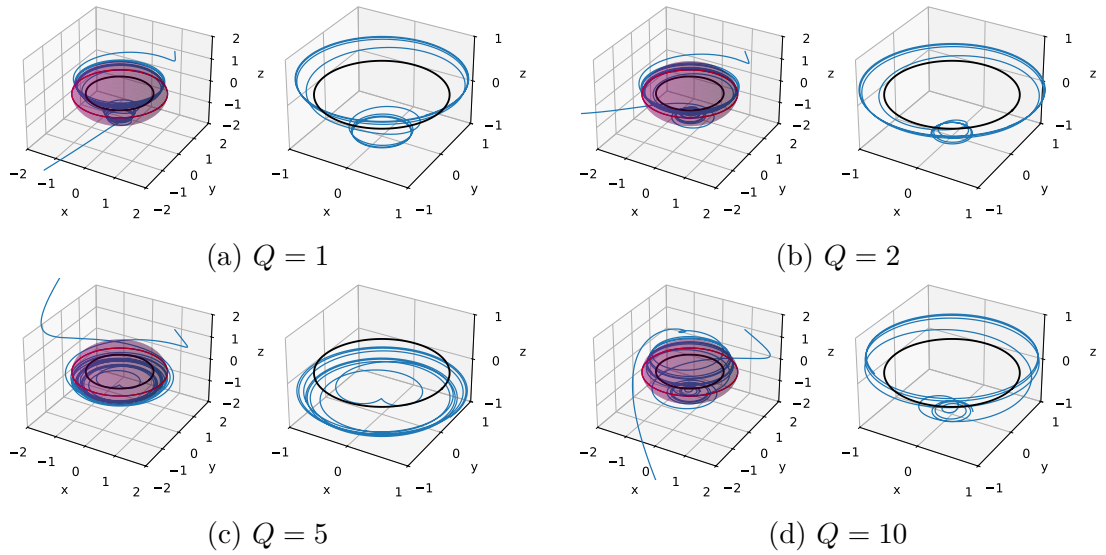
5.3 Vázané a nevázané trajektorie zasahující pod horizont

Pohyb po těchto typech trajektorií vykazují částice popsané $Q > 0$. Speciálně nevázané trajektorie jsou možné pouze pro $E > m$.

Nejprve se podívejme na vliv Carterovy konstanty. Z chování funkce $R(r)$ očekáváme, že se zvyšující se hodnotou Q se bude zvyšovat $r > 0$, pro které nastává bod obratu. Z grafů na obrázku 5.11 pak navíc vidíme, jak přesně se částice v okolí singularity pohybuje: centrální disk spíše obletí okolo skrz ekvatoriální rovinu, než aby se v bodu obratu ostře změnila směr. Lépe si pak celkový tvar trajektorií představíme při vykreslení v prostoru xyz , jak ukazují grafy na obrázku 5.12.



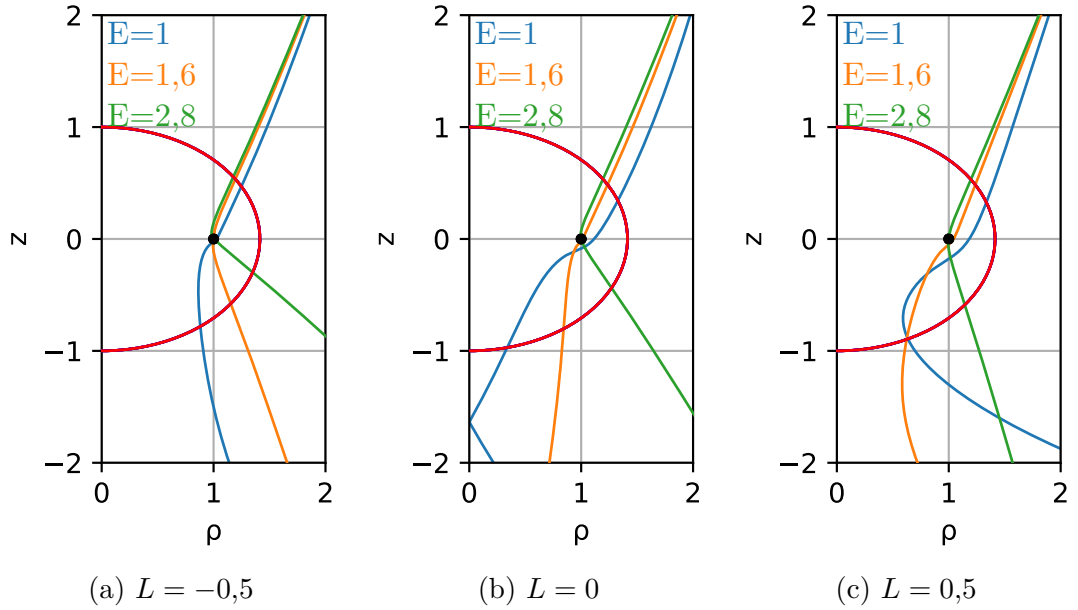
Obrázek 5.11: Srovnání trajektorií v rovině ρz , $r > 0$ pro $m = 1$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 3$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Modře vždy $Q = 1$, oranžově $Q = 2$, zeleně $Q = 5$, červeně $Q = 10$.



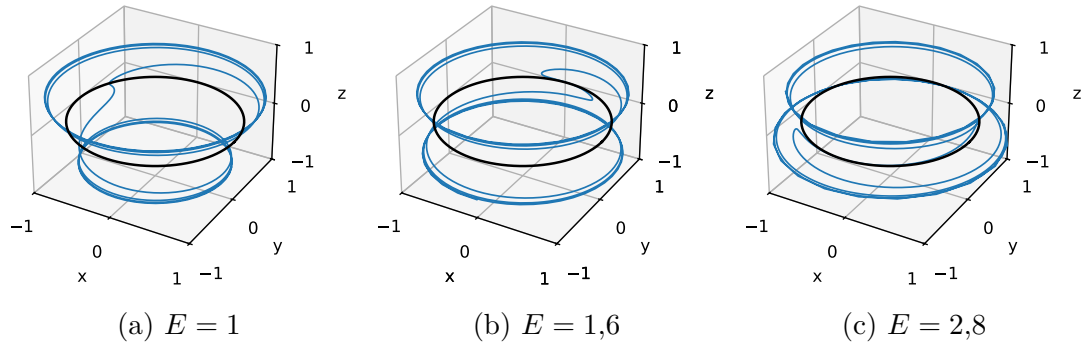
Obrázek 5.12: Srovnání trajektorií pro $(m, E, L) = (1, 1, 0,2)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 3$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Vlevo vždy postor xyz , vpravo prostor xyz se znázorněnou pouze částí trajektorie pod horizontem.

Dále nás bude zajímat, jak pohyb ovlivňuje energie částice. Na obrázku 5.13 jsou vykresleny závislosti trajektorie v korotující rovině na E pro tři různé hodnoty momentu hybnosti.

V kartézském xyz grafu na obrázku 5.14 si navíc všimáme, že v blízkosti singularity se mění směr azimutálního pohybu, a to pro kladné i záporné L . Tato změna je významnější pro vyšší E .



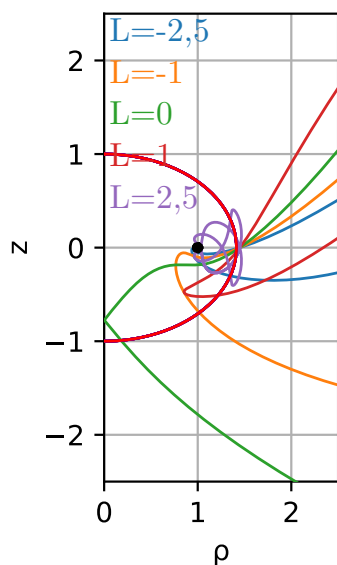
Obrázek 5.13: Srovnání trajektorií v rovině ρz , $r > 0$ pro $(m, Q) = (1, 1)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Modře vždy $E = 1$, oranžově $E = 1,6$, zeleně $E = 2,8$.



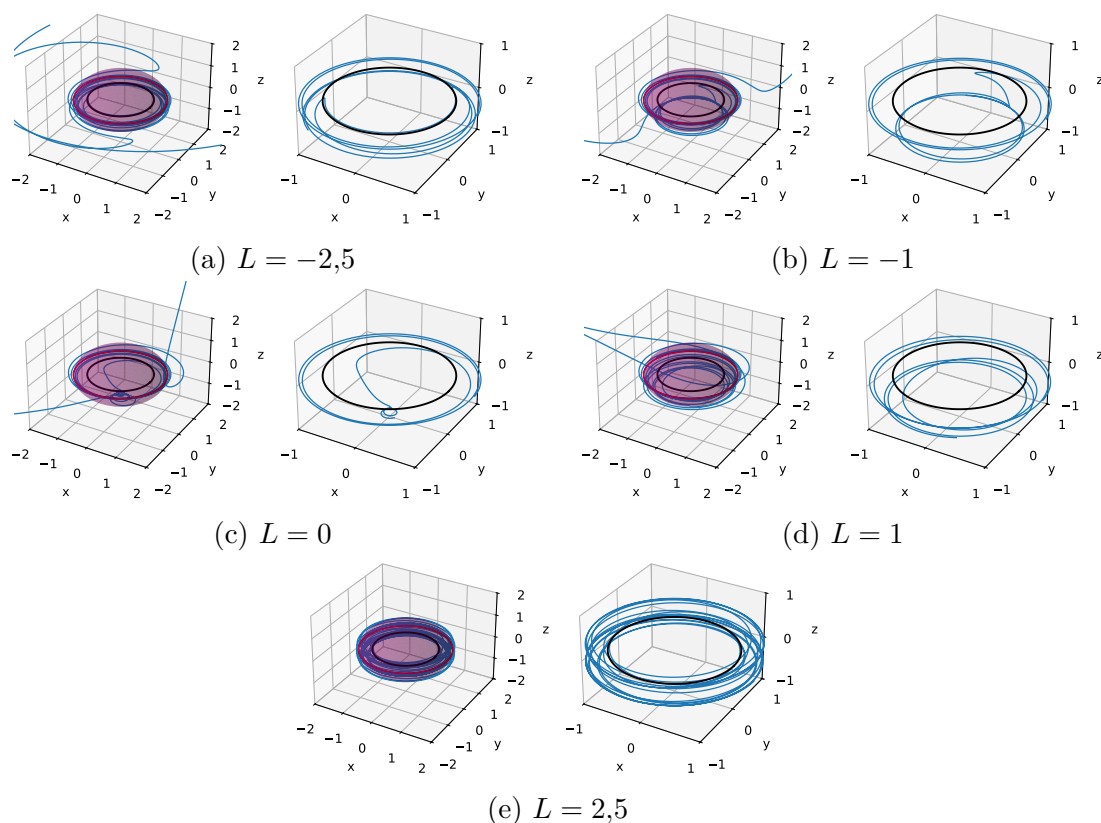
Obrázek 5.14: Srovnání trajektorií v xyz se znázorněnou pouze částí trajektorie pod horizontem pro $(m, L, Q) = (1, 0,5, 1)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Černě vyznačena singularita.

Zvolme pevné E a Q a podívejme se, jak jsou trajektorie a jejich typ ovlivněny konstantou L . Už z průběhu $R(r)$ můžeme vypořádat, že obecně pro menší hodnoty $|L|$ jsou trajektorie nevázané, zatímco pro větší $|L|$ vázané. Situace navíc není symetrická pro kladná a záporná L , což je zřejmě dáno koeficientem v prvním řádu $R(r)$.

V grafu na obrázku 5.15 jsou pak zakresleny trajektorie v korotující rovině pro různé hodnoty L a $(m, E, Q) = (1, 1, 1)$. Vidíme, že v souladu s předchozím pozorováním je jedna z trajektorií vázaná, a to pro $L = 2,5$. Trajektorie pro $L = -2,5$ je nevázaná, ale při dalším snižování hodnoty L by se její typ také změnil. Pro lepší představu o tvaru trajektorií jsou také vykresleny v kartézské soustavě v grafech 5.16.



Obrázek 5.15: Srovnání trajektorií v rovině ρz , $r > 0$ pro $(m, E, Q) = (1, 1, 1)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 1,05$, $\theta_0 = \pi/2$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Modře $L = -2,5$, oranžově $L = -1$, zeleně $L = 0$, červeně $L = 1$, fialově $L = 2,5$.



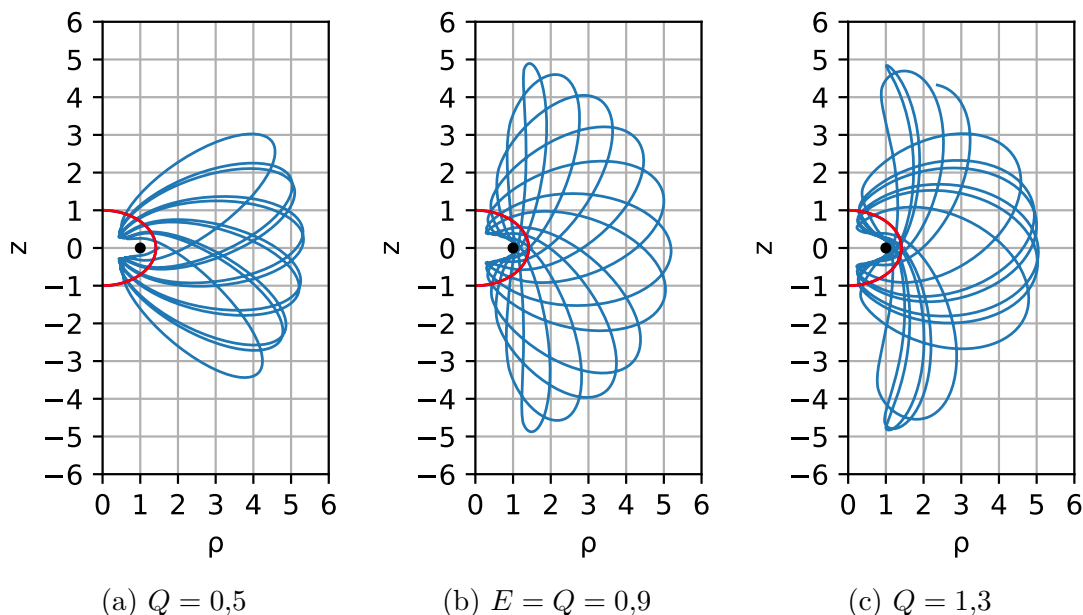
Obrázek 5.16: Srovnání trajektorií pro $(m, E, Q) = (1, 1, 1)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 1,05$, $\theta_0 = \pi/2$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Vlevo vždy postor xyz , vpravo prostor xyz se znázorněnou pouze částí trajektorie pod horizontem.

Poznamenejme, že jsme v tomto případě vyvíjeli metodou RK4 řešení geodetických rovnic z počátečního bodu navíc i opačným směrem, abychom zajistili shodné počáteční podmínky pro všechny testované trajektorie.

V kontrastu s nevázanými trajektoriemi se po vázaných geodetikách částice pohybují buď naopak vždy při $E < m$, nebo také pro $E \geq m$ a dostatečně velké $|L|$. V druhém případě ale nezbytné velké hodnoty $|L|$ mají za následek zmenšující se interval povolených hodnot θ a také menší povolený interval r .

Interval, v němž vázané trajektorie existují, se mění s rostoucí hodnotou Q . Vliv Q , jakožto konstanty s dominantním vlivem na typ trajektorie, jsme vykreslili na grafech na obrázku 5.17. Konkrétně r pro spodní bod obratu se zvyšuje, pro horní snižuje. Naopak ale pozorujeme, že interval povolených hodnot θ se zvětšuje. Zatímco u nevázaných trajektorií dochází k obratu pouze jednou, zde díky jejich mnohonásobnému opakování i na grafickém znázornění dobře rozlišíme příslušné hranice.

I v případě $E > m$, $|L|$ dostatečně velké se u vázaných trajektorií s větším Q obdobným způsobem zmenšuje povolený interval r .



Obrázek 5.17: Srovnání trajektorií v rovině ρz , $r > 0$ pro $(m, E, L) = (1, 0, 8, 0, 2)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 1, 1$, $\theta_0 = \pi/2$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$, $\lambda \in (0, 50)$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita.

Vliv samotné změny L není tak jednoznačný a nelze obecně říci, jak působí na polohu bodů obratu - to se mění v závislosti na konkrétních hodnotách L . Stejně tak změna E neovlivňuje povolený interval stále stejně, podle hodnoty L se může při zvětšující energii jak zmenšovat, tak rozšiřovat.

Zatímco u nevázaných a tranzitních trajektorií dávalo grafické vynesení trajektorií dodatečné informace o jejich tvaru oproti prostému určení povolených zakázaných oblastí, v případě vázaných trajektorií tomu kvůli jejich jisté periodičnosti a významné roli počátečních souřadnic tak není. Už na případu kontrovaného Q výše vidíme, že vypovídajícím popisem jsou zejména intervaly povolených r a θ , které nám lépe poskytne analytický přístup. Z toho důvodu je dále numericky nezpracováváme.

5.4 Vliv parametru a

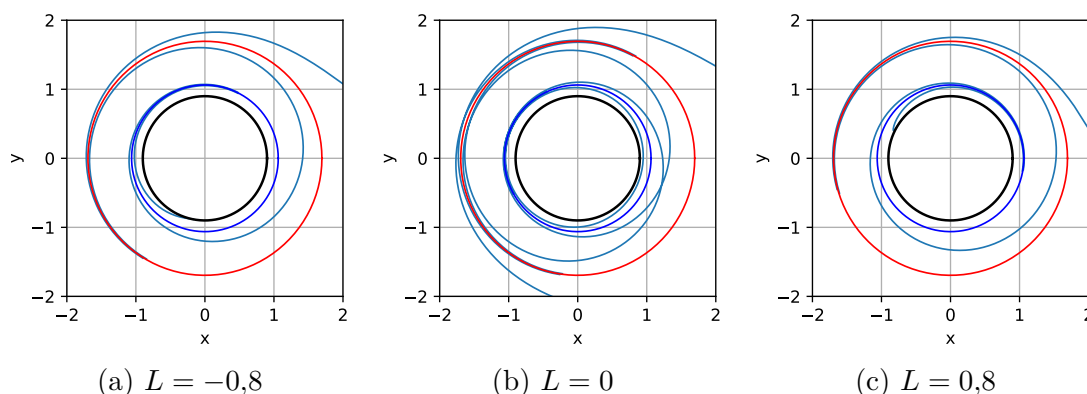
Doposud jsme pro jednoduchost vždy uvažovali pouze $a = 1$. Tato volba má svoje opodstatnění - jakožto jediná možná hodnota pro extrémální horizont plní význačnou roli. Nyní konečně prozkoumáme, jak i tato konstanta ovlivňuje geodetický pohyb.

Trajektorie pro $Q = 0$

Podívejme se na různé trajektorie v podobném pořadí jako v předchozích sekcích, nejprve tedy volme $Q = 0$. Pohyb je pro $L \neq 0$ vázaný na rovinu $\theta = \pi/2$ pro libovolná a . Srovnání pro $a = 0,9$ s $a = 1$, které je vykreslené již výše v grafech na obrázku 5.1, lze nahlédnout v grafech na obrázku 5.18.

V první řadě hned vidíme, že v situaci, kdy horizonty nejsou extrémální, na nich azimutální pohyb nediverguje v takové míře.¹ To tedy nejspíše souvisí s tím, že extrémální horizont je dvojitý kořen $\Delta = 0$. Tento rozdíl můžeme pozorovat i ve všech navazujících příkladech.

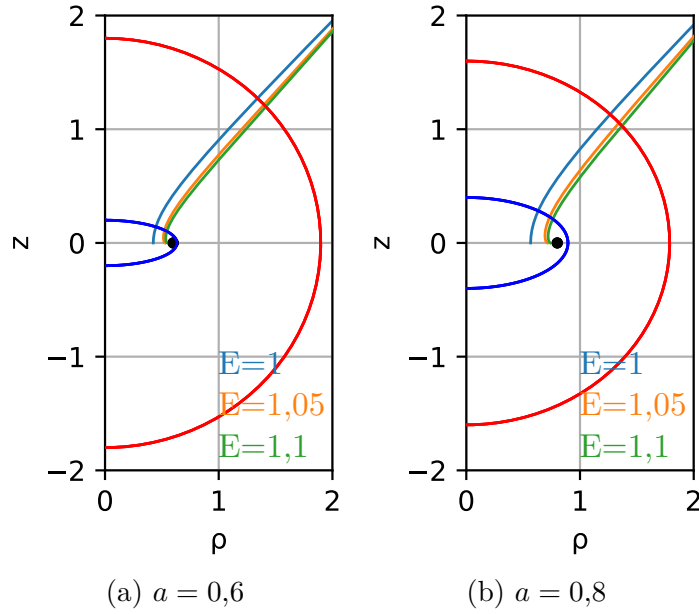
Dále si všimneme, že čím menší je parametr a , tím menší stačí hodnota momentu hybnosti částice, aby se pohybovala po nevázané trajektorii. Ovšem pozor, naopak pro větší L pak částice opět může dorazit až na singularitu.



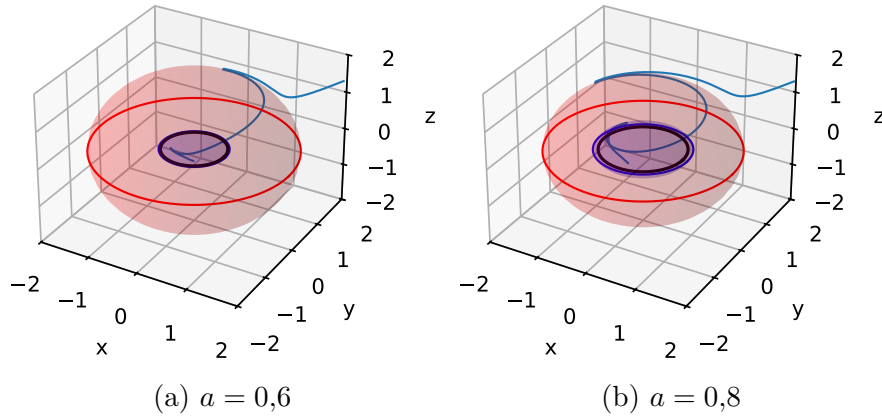
Obrázek 5.18: Srovnání trajektorií v rovině xy , $z = 0$ pro $(m, E, Q) = (1, 1, 0)$, $a = 0.9$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = \pi/2$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita.

Srovnání vlivu změny E pro $a < 1$ je pak vyvedené v dvojici grafů na obrázku 5.12 při jinak stejných parametrech jako na grafech na obrázku 5.2. Zdá se, že čím menší je a , tím blíže sobě jednotlivé trajektorie jsou. Pro $E = 0$ jsme navíc vykreslili trajektorie ve 3D grafu na obrázku 5.20.

¹Hodnota konstanty `hor_tol` charakterizující vzdálenost od horizontu, v níž kvůli divergentnímu chování nelze vykreslit numericky vypočítanou trajektorii, je pro extrémální černou díru přibližně pětikrát vyšší.



Obrázek 5.19: Srovnání trajektorií v rovině ρz , $r > 0$ pro $(m, L, Q) = (1, 0, 0)$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = \pi/4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita.

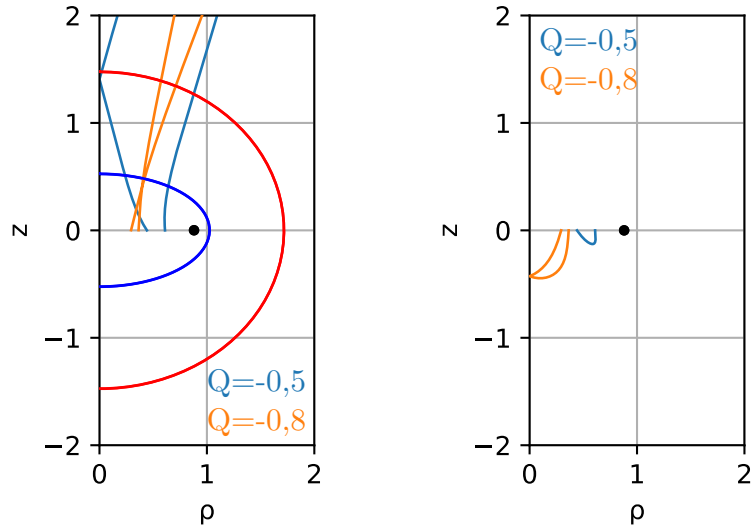


Obrázek 5.20: Srovnání trajektorií pro $(m, E, L, Q) = (1, 1, 0, 0)$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = \pi/4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita.

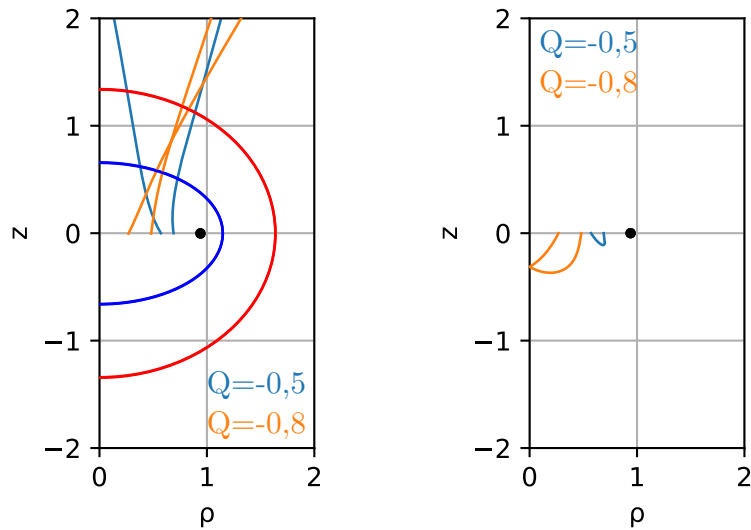
Trajektorie pro $Q < 0$

Přesuňme se nyní k zajímavějšímu typu trajektorií, a to k těm charakterizovaným $Q < 0$. Čím nižší je hodnota a , tím vyšší je nejnižší povolené Q podle (3.2).

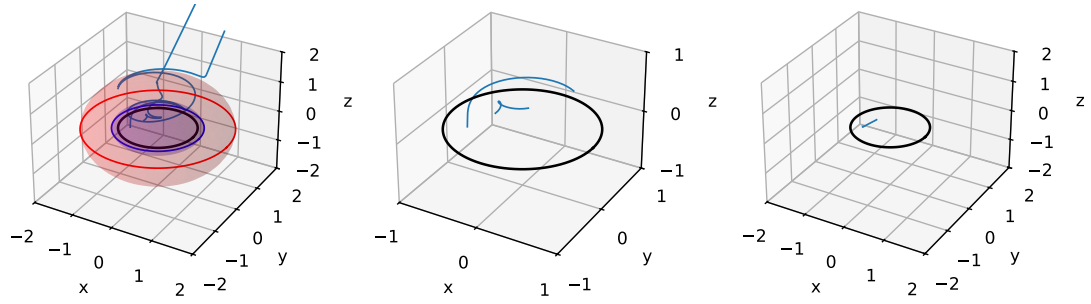
Z grafů na obrázcích 5.21 a 5.22 vidíme, že pro a menší částice proniká v radiálním směru hlouběji do druhého sheetu. Vynesení v souřadnicích ρz v tomto ohledu může být opět zavádějící, ověřili jsme ale z konkrétních hodnot r , že tomu tak skutečně je. V grafech na obrázku 5.23 jsou pak vyneseny vybrané samotné trajektorie v kartézských souřadnicích.



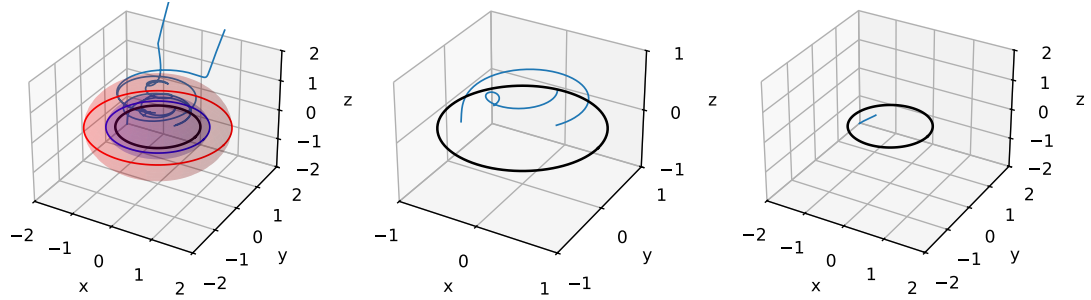
Obrázek 5.21: Srovnání trajektorií v rovině ρz pro $(m, E, L) = (1, 1, 5, 0)$, $a = 0,88$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita. Modře $Q = -0,5$, oranžově $Q = -0,8$. Vlevo $r > 0$, vpravo $r < 0$.



Obrázek 5.22: Srovnání trajektorií v rovině ρz pro $(m, E, L) = (1, 1, 5, 0)$, $a = 0,94$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita. Modře $Q = -0,5$, oranžově $Q = -0,8$. Vlevo $r > 0$, vpravo $r < 0$.



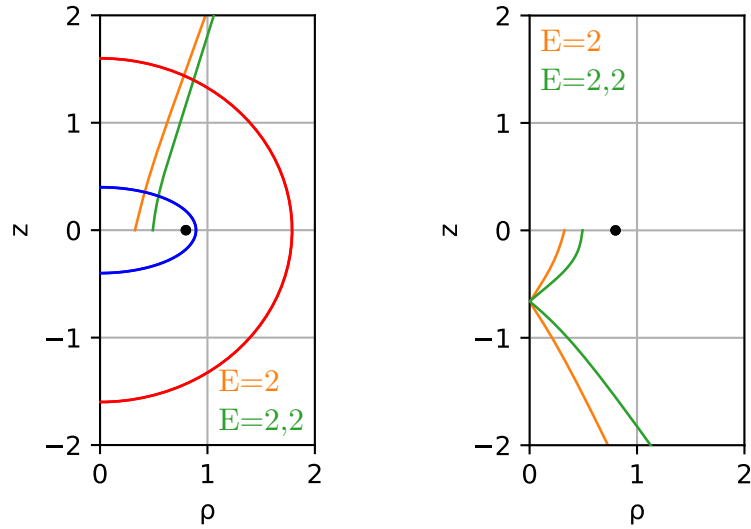
(a) $a = 0,88$



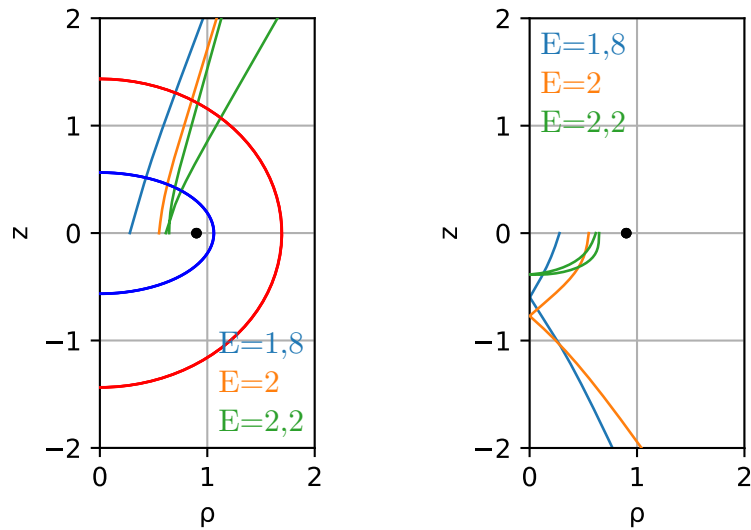
(b) $a = 0,94$

Obrázek 5.23: Srovnání trajektorií pro $(m, E, L, Q) = (1, 1,5, 0, -0,8)$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita. Vlevo vždy prostor xyz , uprostřed prostor xyz s vyznačenou pouze částí pod vnitřním horizontem, vpravo prostor xyz v druhém sheetu.

Stejně jako pro $a = 1$ se i nyní podíváme na vliv energie částice, znázorněný na dvojici grafů na obrázku 5.24. Znovu se potvrzuje, že paradoxně vyšší energie vede na nevázané trajektorie, zatímco pro nižší hodnoty (je-li pohyb možný) jsou trajektorie tranzitní. Navíc si ale na případě $E = 2,2$ všimáme, že při fixované energii je typ trajektorie ovlivněn i hodnotou parametru a . Zatímco pro vyšší hodnoty a je příslušná trajektorie vázaná, pro nižší a se stává tranzitní.



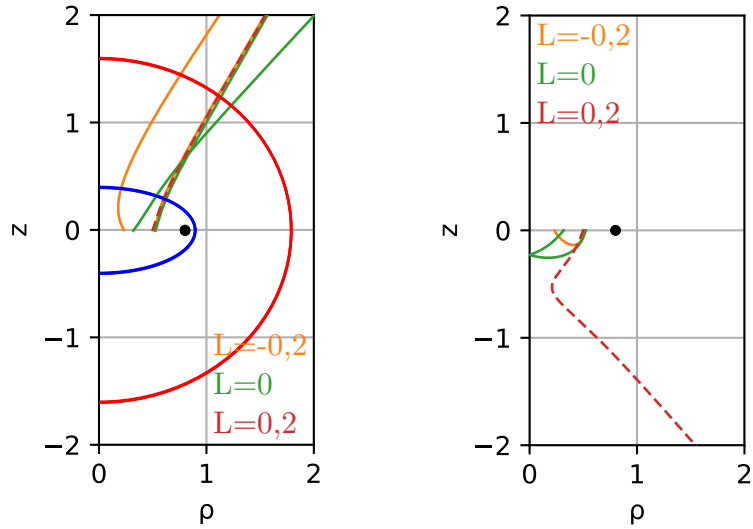
(a) $a = 0,8$



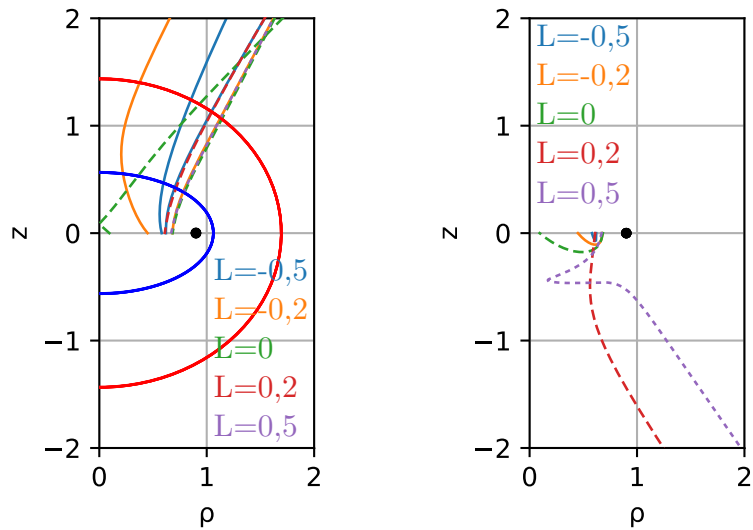
(b) $a = 0,9$

Obrázek 5.24: Srovnání trajektorií v rovině ρz pro $(m, L, Q) = (1, 0, -1,5)$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita. Modře $E = 1,8$, oranžově $E = 2$, zeleně $E = 2,2$. Vlevo $r > 0$, vpravo $r < 0$.

Z grafu na obrázku 5.25 pak vidíme, že při $a < 0$ dostačuje nižší moment hybnosti, aby se trajektorie stala z vázané tranzitní, než pro $a = 1$ (znázorněno na obrázku 5.6). Pro dostatečně malé a může být hranice mezi nevázanými a tranzitními trajektoriemi dokonce v $L < 0$. Přímo trajektorie pro tři různé hodnoty L a $a = 0,9$ jsme pak vykreslili v grafech na obrázku 5.26.

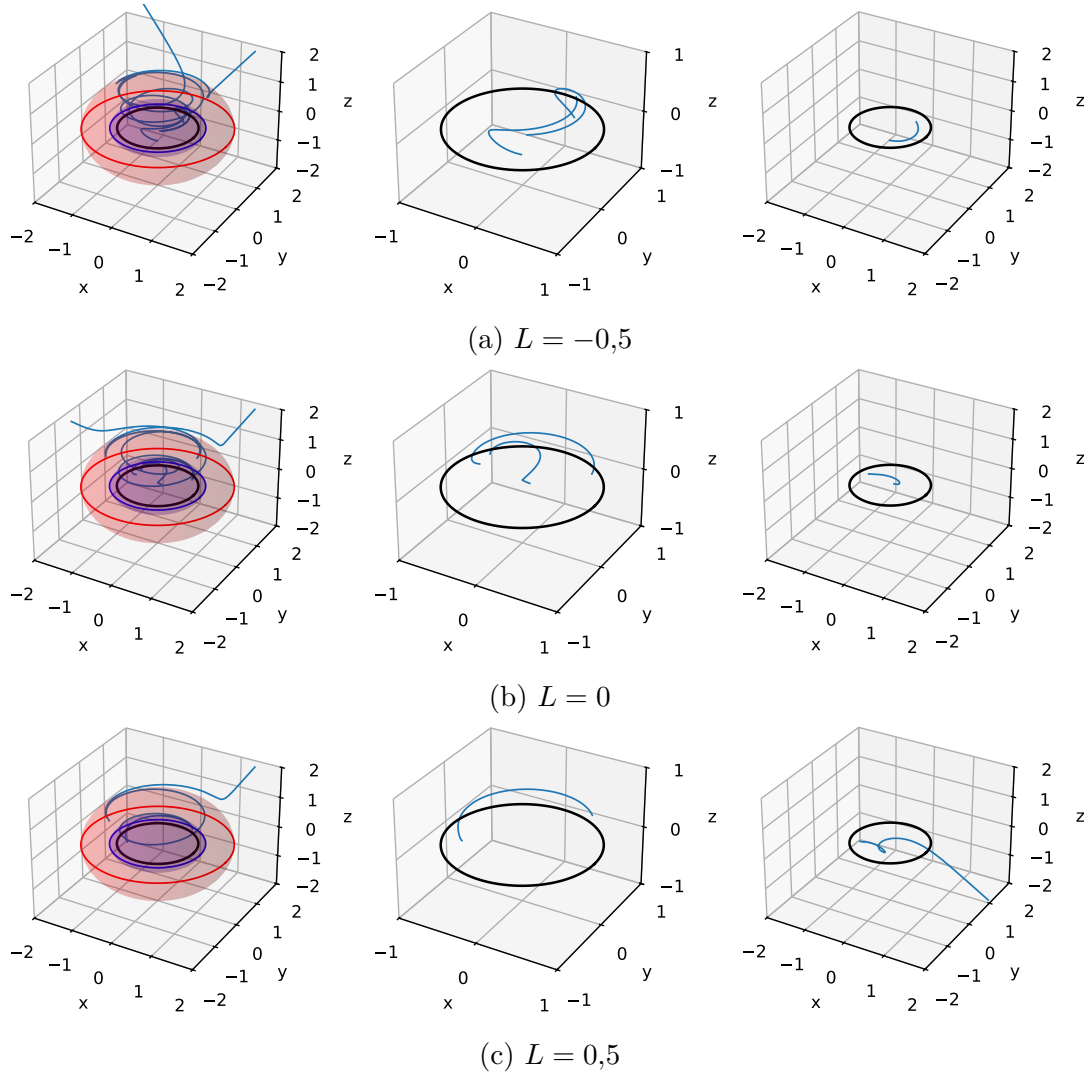


(a) $a = 0,8$



(b) $a = 0,9$

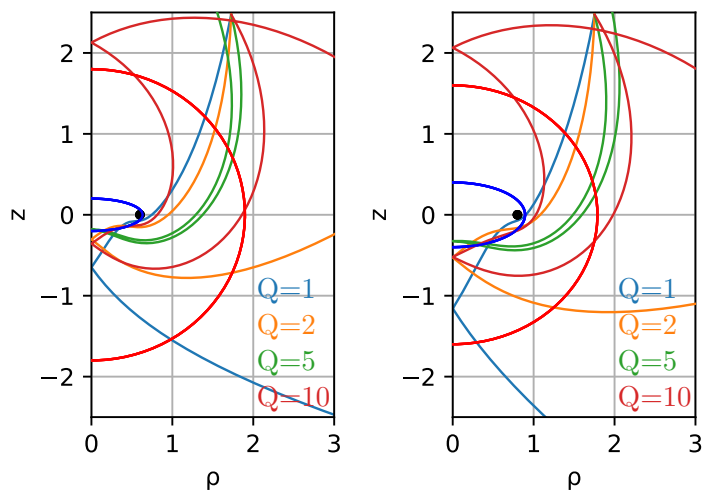
Obrázek 5.25: Srovnání trajektorií v rovině ρz pro $(m, E, Q) = (1, 2, -1)$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita. Modře $L = -0,5$, oranžově $L = -0,2$, zeleně $L = 0$, červeně $L = 0,2$, fialově $L = 0,5$. Vlevo vždy $r > 0$, vpravo $r < 0$.



Obrázek 5.26: Srovnání trajektorií pro $(m, E, L, Q) = (1, 1,5, 0, -0,8)$, $a = 0,9$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita. Vlevo vždy prostor xyz , uprostřed prostor xyz s vyznačenou pouze částí pod vnitřním horizontem, vpravo prostor xyz v druhém sheetu.

Trajektorie pro $Q > 0$

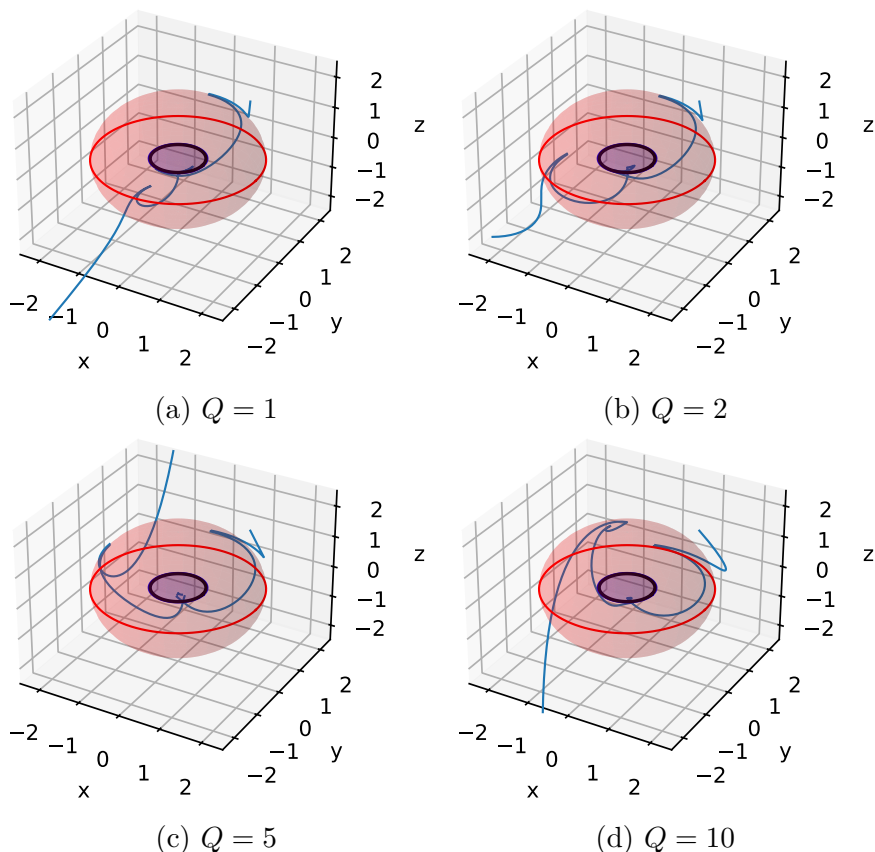
Také nyní se zaměříme primárně na nevázané trajektorie. V grafech na obrázku 5.27 jsme vynesli, jak trajektorie v korotující rovině ovlivňuje Q pro různé hodnoty parametru a . Vidíme, že se v zásadě neodlišují od situace $a = 1$, nejvýraznější rozdíl je pravděpodobně ve směru, jakým částice vycházejí ven: čím menší a , tím více se trajektorie odchyluje od osy z , a to i zřejmě v případě $L = 0$, který nijak nelimituje povolená θ . Pro lepší představu o skutečném tvaru trajektorií jsme je opět vykreslili do grafů na obrázcích 5.28 a 5.29 i v prostoru xyz .



(a) $a = 0,6$

(b) $a = 0,8$

Obrázek 5.27: Srovnání trajektorií v rovině ρz , $r > 0$ pro $(m, E, L) = (1, 1, 1)$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 3$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita. Modře vždy $Q = 1$, oranžově $Q = 2$, zeleně $Q = 5$, červeně $Q = 10$.



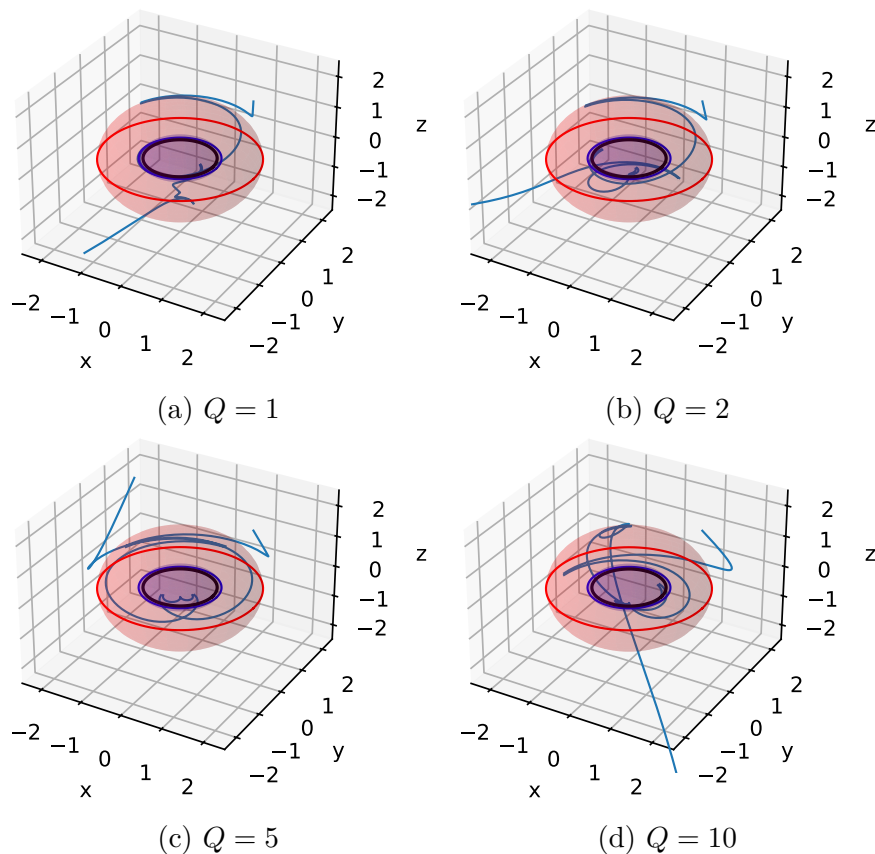
(a) $Q = 1$

(b) $Q = 2$

(c) $Q = 5$

(d) $Q = 10$

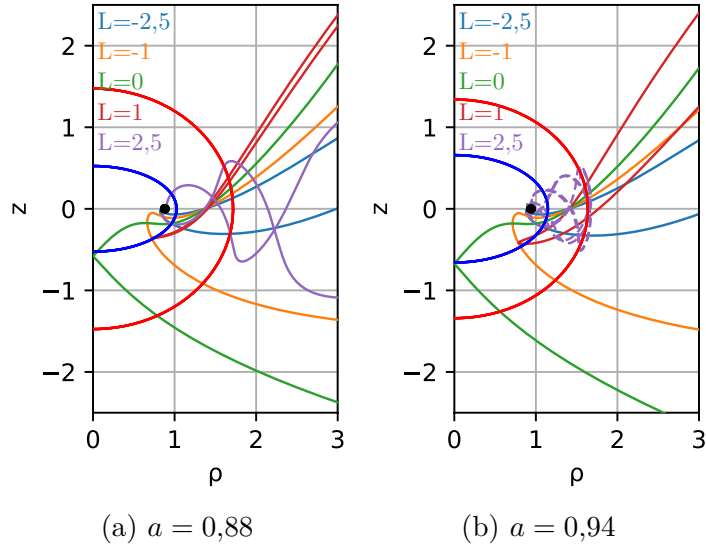
Obrázek 5.28: Srovnání trajektorií v rovině ρz , $r > 0$ pro $(m, E, L) = (1, 1, 1)$, $a = 0,6$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 3$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita. Modře vždy $Q = 1$, oranžově $Q = 2$, zeleně $Q = 5$, červeně $Q = 10$.



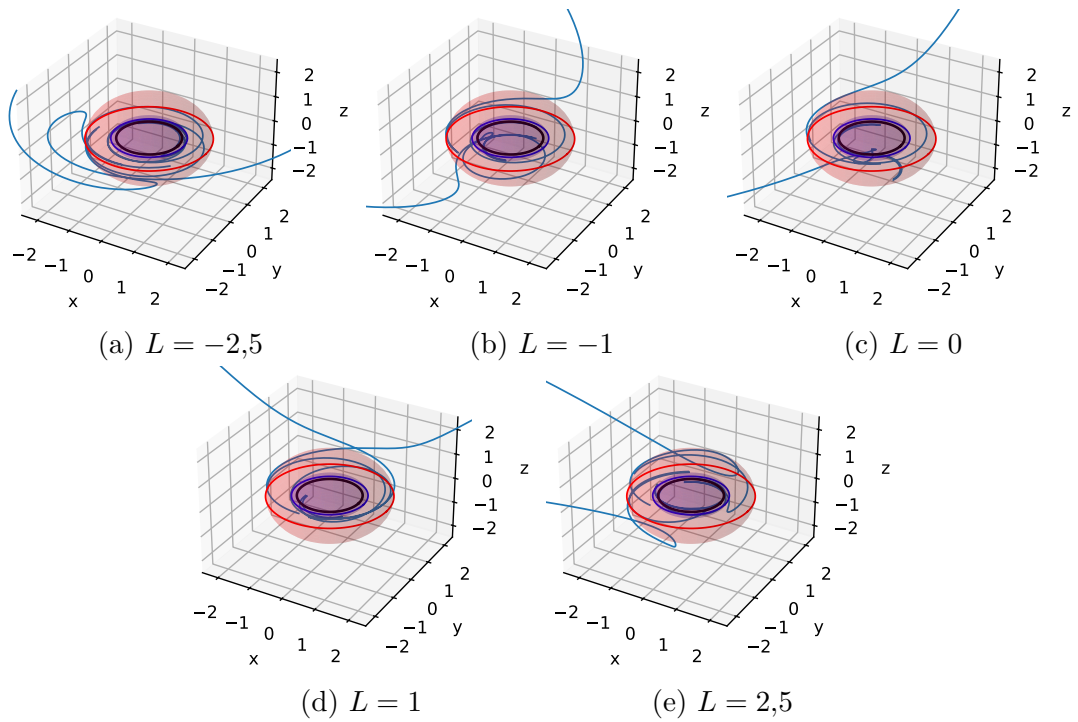
Obrázek 5.29: Srovnání trajektorií pro $(m, E, L) = (1, 1, 1)$, $a = 0,6$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 3$, $\theta_0 = 0,8$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita.

Také nadále platí, že pro velká $|L|$ jsou trajektorie vázané. Konkrétní hodnota L , při níž dochází ke změně typu trajektorie z vázané na nevázanou a naopak, se ale odvíjí od velikosti a . Pro vázané trajektorie se pak také s rostoucím a zvětšuje r pro vnější bod obratu tak, aby byl nad horizontem. Vliv L na pohyb částice pro různé hodnoty a jsme znázornili v grafech na obrázku 5.30 a poté jsme také celé trajektorie vykreslili, jak ukazují grafy na obrázcích 5.31 a 5.32. Speciálně pro $L = 2,5$ zejména v grafu korotující roviny dobře pozorujeme, jak se mění typ trajektorie.

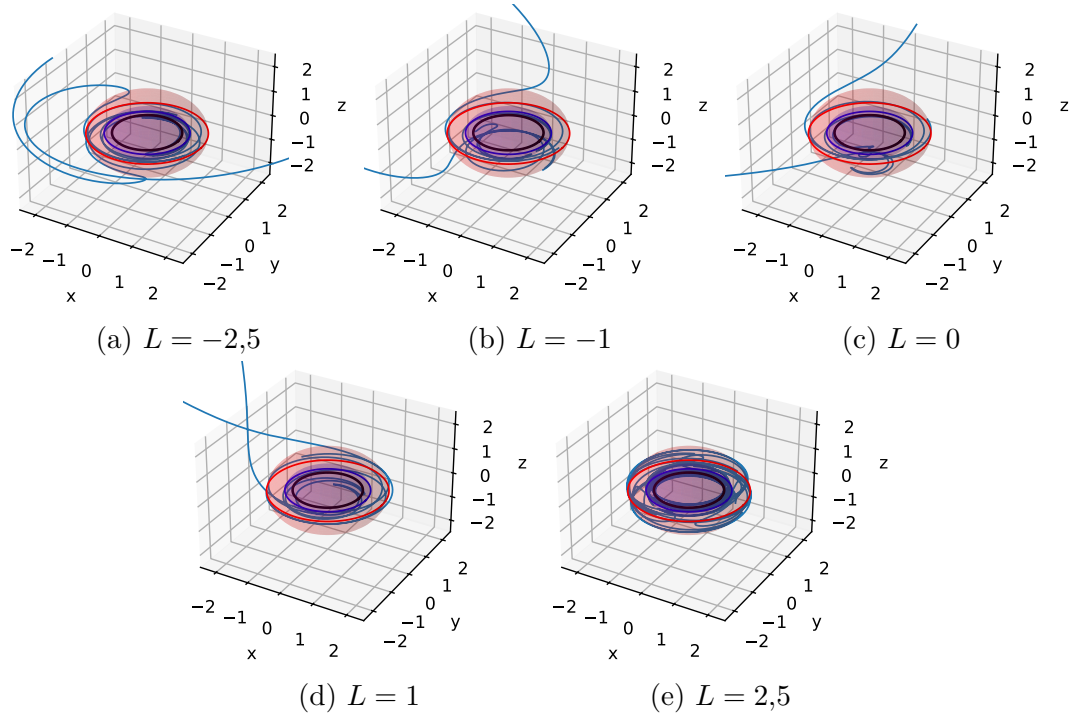
V tomto případě jsme opět stejně jako pro $a = 1$ zvolili takový počáteční bod, který uspokojuje vázané i nevázané trajektorie, a v případě nevázaných vyvinuli řešení také dozadu.



Obrázek 5.30: Srovnání trajektorií v rovině ρz , $r > 0$ pro $(m, E, Q) = (1, 1, 1)$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 1,05$, $\theta_0 = \pi/2$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Modře $L = -2,5$, oranžově $L = -1$, zeleně $L = 0$, červeně $L = 1$, fialově $L = 2,5$.



Obrázek 5.31: Srovnání trajektorií pro $(m, E, Q) = (1, 1, 1)$, $a = 0,88$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = \pi/2$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita.



Obrázek 5.32: Srovnání trajektorií pro $(m, E, Q) = (1, 1, 1)$, $a = 0,94$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = \pi/2$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita.

5.5 Shrnutí

V zásadě můžeme shrnout vliv jednotlivých konstant na pohyb částice do několika bodů:

- Konstanta a ovlivňuje nejen polohu horizontů, ale i chování částice v jejich blízkém okolí. V blízkosti horizontu dominuje azimutální pohyb, přičemž tento efekt je podstatně významnější pro extrémální černé díry. Část geodetiky pod horizontem se tak zejména právě pro extrémální případ projevuje jako sada navzájem propojených prstenců, každý odpovídající průchodu přes horizont. Čím větší a je, tím více je částice v okolí horizontu strhávána ve směru rotace černé díry.
- Konstanta L , kterou bychom si jakožto moment hybnosti částice spojili s azimutálním pohybem, má značný vliv zejména na pohyb polární a vůbec na samotný typ trajektorie.
- Zajímavým pozorováním je vliv energie částice. Intuice by nám nejspíše říkala, že čím vyšší energii částice disponuje, tím spíše bude v případě průchodu do druhého sheetu trajektorie tranzitního typu nebo alespoň bude její bod obratu $r < 0$ "hlouběji". Paradoxně však platí přesný opak a kýženný vliv má snižování konstanty Q . Konstanta E však stále v tomto ohledu ovlivňuje pohyb nepřímo - čím vyšší je, tím níže se posouvá spodní hranice pro Q .

Poznamenejme, že pozorování o vlivu konstant na body obratu lze získat snadněji než numerickým řešením geodetických rovnic - jejich analytické nalezení v tomto ohledu dává přesnější výsledky. Neposkytuje však dobrou představu o samotném tvaru trajektorií, na což se zde zaměřujeme.

Rovnice pro geodetický pohyb v sobě zřejmě nemají nijak zakódováno, že částice, které projdou pod vnitřní horizont, se už nemohou dostat ven. Trajektorie ale chápeme v souladu s Penroseovými-Carterovými diagramy - tedy částice nevyletí ven fyzicky ve stejném vesmíru, v němž se pod horizont dostala. To ostatně můžeme očekávat už ze samotného tvaru rovnic. Tím, že neobsahují explicitně směr pohybu, musí nutně ze symetrie vyvíjet polohu částice stejně oběma směry.

Otázka trajektorie v "našem" vesmíru se tak jeví podstatně složitější. V první řadě ale realistické černé díry jsou pod vnitřním horizontem, jak už bylo naznačeno v sekci 2.1.2, nestabilní. Zadruhé, i kdybychom uvažovali model ideální kerrovské černé díry, geodetické rovnice nám zjevně v tomto ohledu neposkytují požadovanou odpověď. Neuvažujeme-li analytické prodloužení, na základě kauzální struktury můžeme předpokládat, že částice v ideálním modelu zůstává v oblasti pod vnitřním horizontem, její pohyb ale není zmíněnými rovnicemi popsán.

Závěr

Pohyb částic v okolí kerrovské černé díry je kontrolován příliš velkým množstvím parametrů na to, abychom dokázali v obecnosti přesně určit jejich výsledný efekt. Podařilo se nám ale s využitím metod analytických, konkrétně zkoumání bodů obratu, a numerických prozkoumat různé trajektorie a vliv, jaký na ně mají změny jednotlivých parametrů. Speciálně jsme se pak zaměřili na pohyb částic pod horizontem a v analytickém rozšíření Kerrovy metriky $r < 0$, který nebývá běžně zkoumán pro jeho čistě teoretický význam.

Jako součást práce vznikl program v Pythonu, který pomocí numerické integrační metody Runge-Kutta 4 řeší geodetické rovnice a vykresluje trajektorie, po nichž se volná částice pohybuje. Jejich cílem je podat i vizuální představu o tvaru trajektorií a o tom, jak je ovlivňován jednotlivými konstantami pohybu.

Geodetické rovnice popisují pohyb ve smyslu již zmíněného maximálního analytického prodloužení. Musíme uvažovat, že částice prochází různými vesmíry, které se ale vzájemně překrývají - nelze tak jasně říci, kde jeden začíná a druhý končí. Pokud částice v jednom vesmíru spadne pod vnitřní horizont a má pod ním bod obratu, nutně opět přes vnitřní horizont, který už ale náleží novému vesmíru, vylétává ven. Představu o možných typech pohybu poskytuje kauzální struktura v Penroseově-Carterově diagramu maximálního rozšíření.

Zatímco pro radiální pohyb vně horizontu již existuje detailní analytický rozbor, pro pohyb pod ním ještě takové výsledky nebyly publikovány. Jejich odvození je nad rámec tohoto textu, do budoucna by však mohlo napomoci přesnějším závěrům, které jsou zde často formulované pouze ve formě pozorování.

Seznam použité literatury

- [1] BIČÁK, J. a SEMERÁK, O. Relativistic Physics - lecture notes for a course taught at Prague math-phys, 2024. URL <https://utf.mff.cuni.cz/~semerak/GTR.pdf>.
- [2] MISNER, C. W., THORNE, K. S. a WHEELER, J. A. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [3] VISSER, M. The Kerr spacetime: A brief introduction, 2008. URL <https://arxiv.org/abs/0706.0622>.
- [4] BOYER, R. H. a LINDQUIST, R. W. Maximal analytic extension of the Kerr metric. *J. Math. Phys.*, 8:265, 1967. URL <https://doi.org/10.1063/1.1705193>.
- [5] HAMILTON, A. J. S. a POLHEMUS, G. Interior structure of rotating black holes. I. Concise derivation. *Physical Review D*, 84:124055, 2010. URL <https://arxiv.org/abs/1010.1269>.
- [6] BARDEEN, J. M., CARTER, B. a HAWKING, S. W. The Four laws of black hole mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 31:161–170, 1973.
- [7] SORCE, J. a WALD, R. M. Gedanken experiments to destroy a black hole. II. Kerr-Newman black holes cannot be overcharged or overspun. *Physical Review D*, 96(10), November 2017. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.96.104014>.
- [8] CARTER, B. Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields. *Phys. Rev.*, 174:1559–1571, Oct 1968. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.174.1559>.
- [9] COMPÈRE, G., LIU, Y. a LONG, J. Classification of radial Kerr geodesic motion. *Phys. Rev. D*, 105:024075, Jan 2022. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.105.024075>.
- [10] CIEŚLIK, A., HACKMANN, E. a MACH, P. Kerr geodesics in terms of Weierstrass elliptic functions. *Physical Review D*, 108(2), July 2023. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.108.024056>.
- [11] O'NEILL, B. *The Geometry of Kerr Black Holes*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2014. URL <https://books.google.cz/books?id=jHXCAgAAQBAJ>.
- [12] MINO, Y. Perturbative approach to an orbital evolution around a supermassive black hole. *Phys. Rev. D*, 67:084027, Apr 2003. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.084027>.
- [13] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. a FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge, USA, second edition, 1992.

- [14] SÜLI, E. a MAYERS, D. *An Introduction to Numerical Analysis*. An Introduction to Numerical Analysis. Cambridge University Press, 2003. URL <https://books.google.cz/books?id=hj9weaqJTbQC>.
- [15] HAIRER, E., NÖRSETT, S. P. a WANNER, G. *Solving Ordinary Differential Equations: Vol. ~I Nonstiff Problems*, volume 8 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, 1987.
- [16] HAIRER, E. a WANNER, G. Web s původním kódem metody DOP853 ve Fortranu, 1993. URL <https://www.unige.ch/~hairer/software.html>.
- [17] Knihovna NumPy. URL <https://numpy.org/>.
- [18] Knihovna Matplotlib. URL <https://matplotlib.org/>.

Seznam obrázků

2.1	Zavedení Boyerových-Lindquistových souřadnic.	5
2.2	Penroseovy-Carterovy diagramy v Kerrově metrice	7
3.1	Průběh $\Theta(\theta)$ pro $(m, E) = (1, 2)$, $a = 1$ pro různé hodnoty L a Q	12
4.1	Grafické znázornění metody Runge-Kutta 4. Počáteční podmínka $y(t_0) = y_0$, vývoj s krokem h do bodu (t_1, y_1) . Exaktní řešení vyneseno modře, výsledný krok černě. (Převzato z https://en.wikipedia.org/wiki/File:Runge-Kutta_slopes.svg , upraveno)	16
4.2	Relativní a absolutní chyba souřadnice r vůči analytickému řešení při konstantách $(m, E, L, Q) = (1, 1, 0, 0)$, $a = 1$ a počátečních podmínkách $r_0 = 6$, $\theta_0 = \pi/4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$, metoda RK4. Vynesen každý 20. bod. Jedná se o nevázanou trajektorii.	18
4.3	Relativní a absolutní chyba souřadnice r a θ vůči analytickému řešení pro $(m, E, L, Q) = (1, 1, -4, 10)$, $a = 1$, $r_0 = 2$, $\theta_0 = \pi/3$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$, $\epsilon_\theta = 1$, $\lambda \in (0, 4)$, metoda RK4. Tolerance bodů obratu zvolena pevně jako $ur_tol = 0,05$ a $uth_tol = 0,05$. Vynesen každý 20. bod. Jedná se o vázanou trajektorii.	19
4.4	Relativní a absolutní chyba souřadnice r a θ vůči analytickému řešení pro $(m, E, L, Q) = (1, 1, -4, 10)$, $a = 1$, $r_0 = 2$, $\theta_0 = \pi/3$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$, $\lambda \in (0, 4)$, metoda RK4. Tolerance bodů obratu zvolena jako $ur_tol = 25h$ a $uth_tol = 25h$. Vynesen každý 20. bod. Jedná se o vázanou trajektorii.	20
4.5	Srovnání numerických a analytické trajektorie v korotující rovině ρz pro $(m, E, L, Q) = (1, 1, -4, 10)$, $a = 1$, $r_0 = 2$, $\theta_0 = \pi/3$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$, $\lambda \in (0, 4)$, metoda RK4. Tolerance bodů obratu zvolena jako $ur_tol = 25h$ a $uth_tol = 25h$. Jedná se o vázanou trajektorii. Vpravo detail.	21
5.1	Srovnání trajektorií v rovině xy , $z = 0$ pro $(m, E, Q) = (1, 1, 0)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = \pi/2$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita.	24
5.2	Srovnání trajektorií pro $(m, L, Q) = (1, 0, 0)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = \pi/4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Vlevo rovina ρz , uprostřed prostor xyz , vpravo prostor xyz se znázorněnou pouze částí trajektorie pod horizontem.	25
5.3	Srovnání trajektorií v oblasti $r > 0$ pro $(m, E, L) = (1, 1, 5, 0)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Vlevo rovina ρz , uprostřed prostor xyz , vpravo prostor xyz se znázorněnou pouze částí trajektorie pod horizontem.	26
5.4	Srovnání trajektorií v oblasti $r < 0$ pro $(m, E, L) = (1, 1, 5, 0)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Černě singularita. Vlevo vždy rovina ρz , vpravo prostor xyz	27

- 5.5 Srovnání trajektorií v rovině ρz pro $(m, L, Q) = (1, 0, -1)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Modře $E = 1,5$, oranžově $E = 2$, zeleně $E = 2,5$. Vlevo $r > 0$, vpravo $r < 0$ 28
- 5.6 Srovnání trajektorií v rovině ρz pro $(m, L, Q) = (1, 0, -1,5)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Modře $E = 1,8$, oranžově $E = 2$, zeleně $E = 2,2$. Vlevo $r > 0$, vpravo $r < 0$ 28
- 5.7 Srovnání trajektorií kartézských souřadnicích xyz , $r < 0$ pro $(m, L, Q) = (1, 0, -1,5)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Černě vyznačena singularita. 29
- 5.8 Srovnání trajektorií v rovině ρz pro $(m, E, Q) = (1, 2, -1)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Modře $L = -0,5$, oranžově $L = -0,2$, zeleně $L = 0$, červeně $L = 0,2$, fialově $L = 0,5$. Vlevo $r > 0$, vpravo $r < 0$ 29
- 5.9 Srovnání trajektorií pro $(m, E, Q) = (1, 2, -1)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Vlevo vždy prostor xyz , vpravo prostor xyz se znázorněnou pouze částí trajektorie pod horizontem. Speciálně na posledním grafu uprostřed prostor xyz se znázorněnou pouze částí trajektorie pod horizontem, vpravo prostor xyz pro $r < 0$ 30
- 5.10 Srovnání trajektorií v rovině ρz pro $(m, E, Q) = (1, 2,5, -1)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,8$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Modře $L = 0,6$, oranžově $L = 0,7$, zeleně $L = 0,8$, červeně $L = 0,9$, fialově $L = 1$. Vlevo $r > 0$, vpravo $r < 0$ 31
- 5.11 Srovnání trajektorií v rovině ρz , $r > 0$ pro $m = 1$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 3$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Modře vždy $Q = 1$, oranžově $Q = 2$, zeleně $Q = 5$, červeně $Q = 10$ 32
- 5.12 Srovnání trajektorií pro $(m, E, L) = (1, 1, 0,2)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 3$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Vlevo vždy prostor xyz , vpravo prostor xyz se znázorněnou pouze částí trajektorie pod horizontem. 32
- 5.13 Srovnání trajektorií v rovině ρz , $r > 0$ pro $(m, Q) = (1, 1)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Modře vždy $E = 1$, oranžově $E = 1,6$, zeleně $E = 2,8$ 33
- 5.14 Srovnání trajektorií v xyz se znázorněnou pouze částí trajektorie pod horizontem pro $(m, L, Q) = (1, 0,5, 1)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Černě vyznačena singularita. 33
- 5.15 Srovnání trajektorií v rovině ρz , $r > 0$ pro $(m, E, Q) = (1, 1, 1)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 1,05$, $\theta_0 = \pi/2$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Modře $L = -2,5$, oranžově $L = -1$, zeleně $L = 0$, červeně $L = 1$, fialově $L = 2,5$ 34

5.16	Srovnání trajektorií pro $(m, E, Q) = (1, 1, 1)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 1,05$, $\theta_0 = \pi/2$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita. Vlevo vždy prostor xyz , vpravo prostor xyz se znázorněnou pouze částí trajektorie pod horizontem.	34
5.17	Srovnání trajektorií v rovině ρz , $r > 0$ pro $(m, E, L) = (1, 0,8, 0,2)$, $a = 1$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 1,1$, $\theta_0 = \pi/2$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$, $\lambda \in (0,50)$. Červeně vyznačen extrémální horizont, černě singularita.	35
5.18	Srovnání trajektorií v rovině xy , $z = 0$ pro $(m, E, Q) = (1, 1, 0)$, $a = 0,9$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = \pi/2$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita.	36
5.19	Srovnání trajektorií v rovině ρz , $r > 0$ pro $(m, L, Q) = (1, 0, 0)$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = \pi/4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita.	37
5.20	Srovnání trajektorií pro $(m, E, L, Q) = (1, 1, 0, 0)$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = \pi/4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita.	37
5.21	Srovnání trajektorií v rovině ρz pro $(m, E, L) = (1, 1,5, 0)$, $a = 0,88$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita. Modře $Q = -0,5$, oranžově $Q = -0,8$. Vlevo $r > 0$, vpravo $r < 0$	38
5.22	Srovnání trajektorií v rovině ρz pro $(m, E, L) = (1, 1,5, 0)$, $a = 0,94$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita. Modře $Q = -0,5$, oranžově $Q = -0,8$. Vlevo $r > 0$, vpravo $r < 0$	38
5.23	Srovnání trajektorií pro $(m, E, L, Q) = (1, 1,5, 0, -0,8)$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita. Vlevo vždy prostor xyz , uprostřed prostor xyz s vyznačenou pouze částí pod vnitřním horizontem, vpravo prostor xyz v druhém sheetu.	39
5.24	Srovnání trajektorií v rovině ρz pro $(m, L, Q) = (1, 0, -1,5)$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita. Modře $E = 1,8$, oranžově $E = 2$, zeleně $E = 2,2$. Vlevo $r > 0$, vpravo $r < 0$	40
5.25	Srovnání trajektorií v rovině ρz pro $(m, E, Q) = (1, 2, -1)$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita. Modře $L = -0,5$, oranžově $L = -0,2$, zeleně $L = 0$, červeně $L = 0,2$, fialově $L = 0,5$. Vlevo vždy $r > 0$, vpravo $r < 0$	41
5.26	Srovnání trajektorií pro $(m, E, L, Q) = (1, 1,5, 0, -0,8)$, $a = 0,9$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = 0,4$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita. Vlevo vždy prostor xyz , uprostřed prostor xyz s vyznačenou pouze částí pod vnitřním horizontem, vpravo prostor xyz v druhém sheetu.	42

5.27	Srovnání trajektorií v rovině ρz , $r > 0$ pro $(m, E, L) = (1, 1, 1)$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 3$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita. Modře vždy $Q = 1$, oranžově $Q = 2$, zeleně $Q = 5$, červeně $Q = 10$	43
5.28	Srovnání trajektorií v rovině ρz , $r > 0$ pro $(m, E, L) = (1, 1, 1)$, $a = 0,6$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 3$, $\theta_0 = 0,6$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita. Modře vždy $Q = 1$, oranžově $Q = 2$, zeleně $Q = 5$, červeně $Q = 10$	43
5.29	Srovnání trajektorií pro $(m, E, L) = (1, 1, 1)$, $a = 0,6$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 3$, $\theta_0 = 0,8$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita.	44
5.30	Srovnání trajektorií v rovině ρz , $r > 0$ pro $(m, E, Q) = (1, 1, 1)$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 1,05$, $\theta_0 = \pi/2$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen extrémní horizont, černě singularita. Modře $L = -2,5$, oranžově $L = -1$, zeleně $L = 0$, červeně $L = 1$, fialově $L = 2,5$	45
5.31	Srovnání trajektorií pro $(m, E, Q) = (1, 1, 1)$, $a = 0,88$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = \pi/2$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita.	45
5.32	Srovnání trajektorií pro $(m, E, Q) = (1, 1, 1)$, $a = 0,94$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 4$, $\theta_0 = \pi/2$, $\epsilon_r = -1$, $\epsilon_\theta = 1$. Červeně vyznačen vnější horizont, modře vnitřní horizont, černě singularita.	46

A. Přílohy

A.1 Kód pro numerickou simulaci trajektorií

```
import math as math
import numpy as np

class Particle:

    """
    Třída reprezentující volnou testovací částici.
    """

    #KONSTANTY

    #tolerance záporných hodnot pod odmocninou kvůli numerické chybě
    th_tol = 10**(-32)
    r_tol = 10**(-12)

    #detekce ekvatoriálního disku
    disc_tol = 0.0005

    #vynechané hodnoty okolo horizontu
    hor_tol = 0.05

    M = 1

    def __init__(self, a, m, E, L, cc, r_0, th_0, pm_r, pm_th,
                  carter='Q'):

        """
        Metoda inicializující novou instanci částice.

        Parameters:
            a (float): konstanta a
            m (float): hmotnost částice
            E (float): energie částice
            L (float): moment hybnosti částice
            cc (float): buď konstanta K, nebo Q (specifikováno jiným
            parametrem)
            r_0 (float): počáteční souřadnice r
            th_0 (float): počáteční souřadnice theta
            pm_r (int): počáteční radiální směr (+1 dovnitř, -1 ven)
            pm_th (int): počáteční polární směr (+1 dolů, -1 nahoru)
            carter (str): typ Carterovy konstanty ('K'/'Q',
            default 'Q')
        """

        self.a = a
        self.m = m
```

```

self.E = E
self.L = L
if carter=='K':
    self.K = cc
elif carter=='Q':
    self.K = cc+(a*E-L)**2

self.r_0 = r_0
self.th_0 = th_0

self.pm_r = pm_r
self.pm_th = pm_th

def dlt(self, r):
    dlt = r**2 - 2*self.M*r + self.a**2
    return dlt

def sgm(self, r, th):
    sgm = r**2 + self.a**2*np.cos(th)**2
    return sgm

def u_t (self, r, th):
    ut = ((r**2 + self.a**2)*((r**2 + self.a**2)*self.E
    - self.a*self.L) - self.dlt(r)*self.a*(self.a*self.E -
    self.L/np.sin(th)**2))/(self.m*self.dlt(r))
    return ut

def u_ph (self, r, th):
    uph = (self.a*((r**2 + self.a**2)*self.E - self.a*self.L)
    - self.dlt(r)*(self.a*self.E - self.L/np.sin(th))**2)/
    (self.m*self.dlt(r))
    return uph

def u_r (self, r):
    ur2 = ((r**2 + self.a**2)*self.E-self.a*self.L)**2
    - self.dlt(r)*(self.m**2*r**2 + self.K)/(self.m)**2
    if ur2 < self.r_tol:
        return self.pm_r*np.sqrt(abs(ur2))
    else:
        return self.pm_r*np.sqrt(ur2)

def u_th (self, th):
    uth2 = (self.K - self.m**2*self.a**2*np.cos(th)**2
    - (self.a*self.E*np.sin(th) - self.L/np.sin(th))**2)/
    (self.m)**2
    if uth2 < self.th_tol:
        return self.pm_th*np.sqrt(abs(uth2))
    else:
        return self.pm_th*np.sqrt(uth2)

```

```

def u (self, r, th):
    return np.array([self.u_t(r, th), self.u_ph(r, th),
                    self.u_r(r),
                    self.u_th(th)])

def rk4_step (self, r, th, h):
    k1 = np.array(h*self.u(r,th))
    k2 = np.array(h*self.u(r + k1[2]/2,th + k1[3]/2))
    k3 = np.array(h*self.u(r + k2[2]/2,th + k2[3]/2))
    k4 = np.array(h*self.u(r + k3[2],th + k3[3]))

    return np.array([k1,k2,k3,k4])

def rungekutta(self, mino_max, h, k, test = False):
    """
    Metoda dělající numerickou simulaci.

    Parameters:
        self (Particle): instance třídy Particle
        mino_max (float): maximální Minův čas, do kterého se
        řešení vyvíjí
        h (float): velikost kroku
        k (float): škálovací konstanta pro kontrolu bodů obratu
        (běžně 10-100)
        test (bool): testovací mód, který vypisuje napočítané
        souřadnice a uloží je do souboru 'data.csv' (default
        False)

    Returns:
        ndarray: matice napočítaných souřadnic t, phi, r, theta
    """

    a = self.a

    t_0 = 0
    ph_0 = 0
    r_0 = self.r_0
    th_0 = self.th_0

    #tolerance bodů obratu
    ur_eps = h*k
    uth_eps = h*k

    #načtení polí pro souřadnice
    t_range = []
    ph_range = []
    r_range = []

```

```

th_range = []

#souřadnice horizontů
r_m = (self.M - math.sqrt(self.M**2 - a**2))
r_p = (self.M + math.sqrt(self.M**2 - a**2))

#načtení souřadnic
t = t_0
ph = ph_0
r = r_0
th = th_0

t_range.append(t_0)
ph_range.append(ph_0)
r_range.append(r_0)
th_range.append(th_0)

coords = np.array([t,ph,r,th])

disc_reached = False

last_ur = 100
last_uth = 100
last_t = 0
last_ph = 0

mino = 0

while mino < mino_max:

    #kontrola centrálního disku
    if coords[2] < self.disc_tol and not disc_reached:

        if (math.pi/2 - 0.001) < coords[3]
        < (math.pi/2 + 0.001):
            print("singularita, mino = ", mino)
            break
        else:
            print("r = 0, mino =", mino)
            disc_reached = True

    #povolená oblast
    try:
        k = self.rk4_step(coords[2], coords[3], h)

    #zakázaná oblast
    except ValueError:
        print("value error")
        break

```

```

cur_ur = abs(self.u_r(coords[2]))
cur_uth = abs(self.u_uth(coords[3]))

#body obratu
if last_ur > cur_ur and cur_ur < ur_eps:

    if abs(coords[2]) < self.disc_tol:
        break

    self.pm_r = self.pm_r*(-1)
    k = self.rk4_step(coords[2],coords[3],h)

if last_uth > cur_uth and cur_uth < uth_eps:

    self.pm_th = self.pm_th*(-1)
    k = self.rk4_step(coords[2],coords[3],h)

last_ur = cur_ur
last_uth = cur_uth

#testovací mód
if test:
    print(self.u(coords[2], coords[3]), coords[2],
          coords[3], mino)

coords = coords + (k[0] + 2*k[1] + 2*k[2] + k[3])/6

#napojení souřadnic na horizontu
if len(ph_range) > 0 and np.isnan(ph_range[-1]):
    coords[1] = last_ph
else:
    last_ph = coords[1]

if len(t_range) > 0 and np.isnan(t_range[-1]):
    coords[0] = last_t
else:
    last_t = coords[0]

#na horizontu neukládat hodnoty t a phi
if (coords[2] < (r_m + self.hor_tol) and coords[2]
    > (r_m - self.hor_tol)) or (coords[2] < (r_p
    + self.hor_tol) and coords[2] > (r_p - self.hor_tol)):
    t_range.append(np.nan)
    ph_range.append(np.nan)
else:
    ph_range.append(coords[1])
    t_range.append(coords[0])

r_range.append(coords[2])

```

```
        th_range.append(coords[3])

    mino += h

#načtení napočítaných souřadnic
t_range = np.array(t_range)
ph_range = np.array(ph_range)
r_range = np.array(r_range)
th_range = np.array(th_range)

bl_range = np.stack([t_range, ph_range, r_range, th_range],
                    axis=1)

if test:
    data = bl_range.T
    d = np.savetxt('data.csv', data, delimiter=',')

return bl_range
```