

Posudek školitele na diplomovou práci

Wreath product of operadic categories

Darii Duniny

Mike Boardman a Rainer Vogt definovali v roce 1973 ve své proslulé knize „Homotopy invariant structures on topological spaces“ jistý asociativní a komutativní součin $P \star Q$ operád P a Q . Tento součin, později nazvaný Boardmanovým-Vogtovým (BV-) součinem, je charakterizovaný tím, že $P \star Q$ -algebry jsou to samé, jako P -algebry v monoidální kategorii Q -algeber, či ekvivalentně, Q -algebry v monoidální kategorii P -algeber. Jejich konstrukce tedy zobecňuje Adamsonovu-Hiltonovu distributivitu známou z důkazu komutativity vyšších homotopických grup.

Z algebraického i kombinatorického hlediska vykazuje BV-součin patologické vlastnosti. Jeho struktura je komplikovaná i pro dvojici volných operád. Důkaz tak zdánlivě samozřejmého tvrzení, že BV-součin operády malých m -disků s operádou malých n -disků má homotopický typ operády $(m+n)$ -malých disků má dlouhou a turbulentní historii. Jakýkoliv nový přístup či koncepční uchopení BV-součinu se tedy nepochybně setká se zájmem matematické komunity.

Duninina práce uvádí do souvislosti BV-součin operád a věncový součine operadických kategorií, navrženým M. Bataninem. Připomeňme, že operadické kategorie jsou koncept, vytvořený v roce 2014 M. Bataninem a školitelem jako jednotící paradigma pro rozmanité objekty, abstrahující operace s mnoha vstupy a výstupy. Definice operadických kategorií i souvisejících pojmů je připomenuta v úvodní části práce.

V další části D. Dunina předkládá definici věncového součinu $A \int B$ operadických kategorií A a B . V Propozici 23 pak ověřuje, že pokud je B souvislá, $A \int B$ opravdu splňuje axiomy operadických kategorií; souvislost druhé kategorie je potřebná pro existenci lokálních terminálních objektů. Důkazem Propozice 23 D. Dunina prokázala schopnost provádět složité, netriviální výpočty při ověřování technických axiomů operadických kategorií.

Třetí, závěrečná část uvádí do souvislosti věncový součin operadických kategorií a BV-součin operád. Pojítkem je morfismus v Propozici 39. Jeho definičním oborem je BV-součin klasických, monochromatických operád X a Y , a terčem operáda $A(IX \star IY)$. Zde IX je Grothendieckova konstrukce nad operádou X , což konkrétní operadická kategorie; IY má podobný význam. Dále A je zleva adjungovaný funktor k funktoru restrikce, aplikovaný na terminální $(IX \star IY)$ -operádu. D. Dunina dokazuje, že zmíněný morfismus je surjekce, přičemž věříme, že je ve skutečnosti bijekcí, což bude tématem další práce. Ve třetí části Dunina předvedla schopnost vstřebat velmi složité koncepce a aktivně s nimi pracovat. Musím zdůraznit, že téma práce zasahuje do oblastí, s nimiž se během výuky student MFF UK neseťká.

Závěr. Vzhledem k výše uvedenému nepřekvapivě doporučuji posuzovanou práci přijmout jako práci diplomovou a udělit ji nelepší možnou známku, tedy 1. Nepochybuji, že výsledky práce, rozšířené o důkaz izomorfismu zmíněný v předchozím odstavci, budou publikovatelné v dobrém mezinárodním časopise. Práce je navíc velmi úhledně napsaná. To dnes zdaleka není samozřejmé.

2. září 2024

M. Markl, školitel

P.S.: Psáno na letišti CDG v Paříži. Nevím, jak v LibreOffice udělat symbol pro tenzorový součin se subscriptem BV, píše místo toho tedy \star .