FILOZOFICKÁ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Eliška Radikovská

Původ některých rekurzivně-teoretických pojmů

Katedra logiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Vítězslav Švejdar, CSc.
Studijní program: Logika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Ráda bych poděkovala panu doc. RNDr. Vítězslavu Švejdarovi, CSc. za trpělivost a všechny cenné rady. Dále bych chtěla velmi poděkovat všem vyučujícím z katedry logiky za znalosti, které nám v průběhu studia předali.

Název práce: Původ některých rekurzivně-teoretických pojmů

Autor: Eliška Radikovská

Katedra logiky: Katedra logiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Vítězslav Švejdar, CSc., Katedra logiky

Abstrakt: Tato práce má za cíl shrnout vývoj některých pojmů z teorie rekurzivních funkcí, jako je například primitivní rekurze, částečně rekurzivní funkce nebo rekurzivně spočetná množina. Zaměřuje se na klíčové příspěvky Kurta Gödela, Stephena Cole Kleenea a dalších autorů. Zvláštní pozornost je věnována Emilu Postovi, který bývá v tomto kontextu často opomíjen. Sleduje také, jak se tato teorie vyvíjela v kontextu vzniku dalších výpočetních modelů, převážně strojů, které v roce 1936 popsal Alan Turing. Práce vychází převážně z primárních zdrojů, zohledňuje však i komentáře editorů z později publikovaných sborníků a další sekundární zdroje, včetně komentářů samotných autorů z pozdější doby.

Klíčová slova: rekurzivně spočetná množina; primitivní rekurze; produktivní a kreativní množiny; rekurzivní funkce

Title: Origin of some recursion-theory concepts

Author: Eliška Radikovská

Department of Logic: Department of Logic

Thesis advisor: doc. RNDr. Vítězslav Švejdar, CSc., Department of Logic

Abstract: This thesis aims to summarize the development of certain concepts from the theory of recursive functions, such as primitive recursion, partial recursive functions, and recursively enumerable sets. It focuses on the key contributions of Kurt Gödel, Stephen Cole Kleene, and other authors, with particular attention given to Emil Post, who is often overlooked in this context. The paper also examines how this theory developed in the context of the emergence of other computational models, primarily the machines described by Alan Turing in 1936. The paper mainly draws on primary sources but also considers editor comments from later-published collections and additional secondary sources, including comments from the authors themselves from later periods.

Keywords: recursively enumerable set; primitive recursion; productive and creative sets; recursive function

Obsah

Úvod

V souvislosti s teorií rekurzivních funkcí jsou často skloňována jména jako je Kurt Gödel nebo Stephen Cole Kleene. V této práci se snažím mapovat, jak se tito autoři vzájemně ovlivňovali, z jakých dalších zdrojů čerpali a jak se tato teorie vyvíjela v kontextu vzniku dalších výpočetních modelů, převážně strojů, které v roce 1936 popsal Alan Turing.

V první kapitole se budu věnovat vývoji pojmů, jako je *primitivní rekurze*, *obecně rekurzivní funkce* a *částečně rekurzivní funkce*. Vznik primitivní rekurze můžeme přičítat už Richardu Dedekindovi a jeho práci z roku 1888, ačkoli zde se ještě nevyskytuje v kontextu teorie vyčíslitelnosti. Za použití primitivní rekurze poté začátkem 20.let minulého století Thoralf Skolem neformálně definuje třídu primitivně rekurzivních funkcí, která bývá často přičítána Kurtu Gödelovi. Ten ji nejdříve v roce 1931 používá jen jako nástroj k důkazu vět o neúplnosti, ale o tři roky později poprvé rekurzivní funkce začíná brát v úvahu i v kontextu vyčíslitelnosti a třídu primitivně rekurzivních funkcí rozšíří o další konečnou procedurou počitatelné funkce a definuje tak to, co dnes známe jako obecně rekurzivní funkce.

Na Gödela navazuje Stephen Cole Kleene, který v roce 1936 přetvoří definici obecně rekurzivní funkce na verzi, kterou standardně používáme dodnes. Další přínosy k teorii rekuzivních funkcí, které stojí za zmínku, jsou například formulace věty o normální formě a definice rekurzivně spočetných množin. O dva roky později Kleene jako první přestane brát v úvahu pouze funkce totální, ale přejde i k částečně rekurzivním funkcím.

Zvláštní pozornost bych chtěla věnovat Emilu Postovi, který v kontextu teorie rekurzivních funkcí, dle mého názoru, není zmiňován tak často jako výše uvedení autoři. V roce 1922 ale napsal práci, kde nejenže dokázal větu o neúplnosti, kterou publikoval Kurt Gödel až o necelých 10 let později, ale také popsal tzv. produkční systém, který se později ukázal jako další z výpočetních modelů ekvivalentních např. k Turingovu stroji. Od publikace tohoto článku ho dělila neschopnost dokázat ekvivalent Churchovy teze pro tyto systémy, proto tento článek poprvé vyšel až v roce 1965 a oficiální prioritu v těchto oblastech tedy mají jiní autoři.

Postův přístup k vyčíslitelnosti je pro nás zajímavý i tím, že na rozdíl od Kleeneho, který k definici rekurzivně spočetných množin používá rekurzivní funkce, pro Posta jsou rekurzivně spočetné množiny základní pojem, na kterém celý výpočetní model vystavěl. Posta dále cituje například Noam Chomsky ve svých pracích, kde přichází s hierarchií formálních gramatik, nezanedbatelný vliv měl tedy i na vývoj formální lingvistiky. Dále se budu zabývat i dalšími pojmy, které ve svých článcích definoval, jako je například kreativní množina.

V práci se snažím vycházet převážně z primárních zdrojů, beru ale v úvahu i komentáře editorů ze sborníků, kde byly články publikované později, další sekundární zdroje a komentáře samotných autorů z pozdější doby, jako je například

Kleeneho článek z roku 1981, kde se snaží vývoj teorie vyčíslitelnosti shrnout z jeho pohledu. V tomto článku mimojiné zveřejňuje i části korespondence mezi jednotlivými autory.

1. Teorie rekurzivních funkcí

Na úvod se pokusím shrnout vývoj základních pojmů z teorie rekurzivních funkcí jako je *primitivní rekurze* nebo *obecně rekurzivní funkce*. Zároveň bych ráda upozornila, že dokud v textu nebude uvedeno jinak, pohybujeme se v oboru totálních funkcí. Funkce částečné začne brát v úvahu až Kleene ve svém článku *On notation for ordinal numbers* (Kle38), jak bude blíže popsáno později. Definice pojmů tak, jak je chápeme dnes, jsou v této i v dalších kapitolách čerpány převážně z knih (Odi89) a (Rog67).

1.1 Původ primitivní rekurze

Primitivní rekurzi poprvé použil Richard Dedekind v roce 1888 ve svém článku *The Nature and Meaning of Numbers* (Ded88). Na začátku článku Dedekind definuje *věci* jako nějaké objekty, o kterých můžeme přemýšlet, a na základě nějakých asociací nebo společných vlastností těchto objektů mohou jednotlivé věci tvořit *systémy*. Neformálně tím definoval to, čemu dnes říkáme množiny. V těchto systémech poté definuje nějaké základní pojmy a vlastnosti jako například, že nějaký systém patří do jiného systému, což definuje jako dnešní podmnožinu, že se dva systémy sobě rovnají, pokud obsahují stejné věci a nic jiného, dále definuje průnik a sjednocení systémů a další pojmy. Pomocí této teorie pak definuje přirozená čísla.

V kapitole *Definition of a Transformation of the Number-series by Induction* poté použije primitivní rekurzi v definici sčítání na přirozených číslech jako

$$\begin{aligned} f(x,1) &= \mathrm{s}(x), \\ f(x,y+1) &= \mathrm{s}(f(x,y)), \end{aligned} \tag{1.1}$$

násobení na přirozených číslech jako

$$\begin{aligned} f(x,1) &= x, \\ f(x,y+1) &= f(x,y) + x \end{aligned} \tag{1.2}$$

a umocnění základu x na nějaké přirozené číslo y jako

$$\begin{aligned} f(x,1) &= x, \\ f(x,y+1) &= x \cdot f(x,y). \end{aligned} \tag{1.3}$$

On sám tento způsob v článku nazývá definicí pomocí indukce a konstruuje pomocí něj funkce, jejichž definičním oborem jsou přirozená čísla. O těchto funkcích poté indukcí dokazuje vlastnosti jako komutativitu, asociativitu a další.

Nerozlišuje tedy zatím indukci jakožto metodu důkazu a to, čemu dnes říkáme rekurze, tedy nějakou metodu konstrukce. V úvodu ale zmiňuje i slovo rekurze.

> As such main points I mention here the sharp distinction between finite and infinite, the notion of the number of things, the proof that the form of argument known as complete induction (or the inference from n to $n+1$) is really conclusive, and that therefore the definition by induction (or recursion) is determinate and consistent.

V Dedekindově článku tedy můžeme najít pokusy o axiomatizaci aritmetiky a teorie množin. Primitivní rekurze jako taková se tedy zatím nevyskytuje ve spojitosti s vyčístlitelností. Stojí ale za zmínku, že tento článek byl jednou z hlavních inpirací pro Peana v jeho axiomatizaci aritmetiky. V předmluvě jeho publikace *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita* (Pea89) se na tento Dedekindův článek odkazuje a říká, že pro něj byl užitečný.

Třídu primitivně rekurzivních funkcí, jejíž definice bývá často přičítaná Kurtu Gödelovi, neformálně popsal již Thoralf Skolem ve svém článku *The foundations of elementary arithmetic established by means of the recursive mode of thought, without use of apparent variables ranging over infinite domains* (Sko23) napsaném v roce 1919 a publikovaném v roce 1923. Jak sám v závěru píše, článek napsal po svém studiu Whiteheadova a Russellova díla Principia Matematica. V Principia Matematica jsou mimojiné definované základy logiky, ze kterých Skolem vychází. Whitehead a Russell ale ve svých pracích pro definování základní aritmetiky používají neomezené kvantifikátory. Cílem článku je položit základy aritmetiky na nějakých základních aritmetických tvrzeních a rekurzivní metody přemýšlení (které dnes říkáme primitivní rekurze) za použití nanejvýš omezené kvantifikace.

> Now what I wish to show in the present work is the following: If we consider the general theorems of arithmetic to be functional assertions and take the recursive mode of thought as a basis, then that science can be founded in a rigorous way without use of Russell and Whitehead's notions "always" and "sometimes". This can also be expressed as follows: A logical foundation can be provided for arithmetic without the use of apparent logical variables (pozn.vázané logické proměnné). To be sure, it will often be advantageous to introduce apparent variables; but we shall require that these variables range over only finite domains, and by means of recursive definitions we shall then always be able to avoid the use of such variables.

Za základní aritmetická tvrzení (jím nazývané *functional assertion*) Skolem považuje vztahy mezi primitivně rekurzivně definovatelnými funkcemi, které nazývá deskriptivní funkce nebo vlastní jména. Hodnota deskriptivní funkce se mění na základě dosazených hodnot proměnných, za deskriptivní funkci tedy můžeme považovat například “$n+1$”. Základními aritmetickými tvrzeními jsou potom například komutativita $x + y = y + x$, asociativita $x + (y + z) = (x + y) + z$ nebo tvrzení týkající se uspořádání jako je $x < y \vee x = y \vee x > y$.

Další tvrzení poté formuluje pomocí primitivní rekurze a funkce následníka, což můžeme přirovnat k tomu, co dnes chápeme jako třídu primitivně rekurzivních funkcí. Skolem ji neformálně definuje takto:

> The notions “natural number” and “the number $n + 1$ following the number n” (thus, the descriptive function $n+1$) as well as the recursive mode of thought are taken as basis.

Tato tvrzení o rekurzivně odvozených funkcích poté dokazuje pomocí matematické indukce. Mezi ně patří například tvrzení týkající se sčítání, násobení, uspořádání, relace dělitelnosti a další. Také dokázal základní tvrzení o největším společném děliteli, nejmenším společném násobku a prvočíselnosti.

Skolem tedy například rekurzivně definuje násobení (tedy deskriptivní funkci ab) jako

$$\begin{aligned} a \cdot 1 &= a, \\ a \cdot (b + 1) &= ab + a. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Poté indukcí dokazuje tvrzení například o asociativitě nebo distributivitě.

V těchto tvrzeních si sice můžeme na začátku představit univerzální kvantifikátory (například $\forall x \forall y (x + y = y + x)$), pokud to ale chápu správně, tím, že Skolem veškeré funkce definuje pomocí rekurze a veškerá tvrzení dokazuje pomocí indukce, přistupuje k tomu v nějakém smyslu jako k tvrzením, která můžeme tvrdit o jednotlivých hodnotách proměnných a díky rekurzivní metodě přemýšlení to bude v důsledku platit o všech přirozených číslech. Tvrzení je tedy dokazatelné, pokud platí pro všechny konkrétní instance. Zároveň při použití existenčního kvantifikátoru bude vždy hledat takovou hodnotu proměnné, která svědčí za dané tvrzení.

1.2 Kurt Gödel a definice obecně rekurzivních funkcí pomocí soustav rovnic

Třídu primitivně rekurzivních funkcí, které zatím nazývá jen rekurzivní, poté formálně definuje Kurt Gödel v roce 1931 ve svém článku *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I* (Göd31). Jak bude blíže popsáno níže, zatím je ale používá pouze jako nástroj k jeho důkazu vět o neúplnosti. V článku nic nenasvědčovalo tomu, že by nad nimi přemýšlel i v kontextu vyčíslitelnosti.

Funkci φ nazývá *rekurzivní* právě tehdy když existuje posloupnost funkcí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, kde $\varphi_n = \varphi$ taková, že pro každé φ_k platí, že je definovaná z funkcí φ_{k-2} a φ_{k-1} pomocí primitivní rekurze, z kterýchkoli předešlých funkcí pomocí substituce, nebo se jedná o konstantu, nebo funkci následníka. Také zavádí pojem *stupeň*, který definuje jako délku n nejkratší možné posloupnosti $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ takové, že $\varphi_n = \varphi$. Drobný rozdíl v Gödelově definici a současném pojetí primitivně rekurzivní funkce je, že zatím nezahrnuje projekci mezi základní funkce. Tu přidává až v roce 1934.

Relaci $R(x_1, \ldots, x_n)$ nazývá *rekurzivní* právě tehdy, když existuje taková (primitivně) rekurzivní funkce $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, že

$$R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{1.5}$$

Jeho definice rekurzivní funkce a relace použije následně Kleene v článku *General recursive functions of natural numbers* (Kle36), kde je přejmenuje na *primitivně rekurzivní* funkci a relaci. Kleeneho terminologii používáme v tomto kontextu dodnes.

Gödel ve svém článku zavádí formální systém P vycházející z teorie typů formulované v Principia Matematica a axiomů Peanovy aritmetiky. Pojem rekurzivní funkce poté používá k aritmetizaci syntaxe. Pro potřeby důkazu vět o neúplnosti zde uvádí celkem 46 různých příkladů rekurzivních funkcí. Mezi takové funkce patří například

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(x) &\Leftrightarrow x \text{ je proměnná}, \\ \mathrm{Neg}(x) &\Leftrightarrow \text{negace } x, \\ \mathrm{Form}(x) &\Leftrightarrow x \text{ je formule}, \\ \mathrm{Ax}(x) &\Leftrightarrow x \text{ je axiom}, \\ \mathrm{Z}(n) &\Leftrightarrow n \text{ je numerál čísla } n, \\ \mathrm{Sb}(x_y^v) &\Leftrightarrow x \text{ je formule v níž substituujeme } y \text{ za } v, \\ x\mathrm{B}y &\Leftrightarrow x \text{ je důkaz formule } y. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Poté pro systém P dokazuje věty o neúplnosti, které platí nejen pro jeho systém P, ale i pro další axiomatické systémy jako je například Zermelova–Fraenkelova teorie množin nebo Peanova aritmetika. Gödel se tedy zatím nezaměřuje na primitivní rekurzi jako takovou, používá ji pouze jako nástroj pro důkaz vět o neúplnosti, jak i sám v článku uvádí, než rekurzivní funkce definuje.

> We now insert a parenthetic consideration that for the present has nothing to do with the formal system P.

Mimojiné v článku definoval pojem *aritmetická relace*, což je relace, kterou lze definovat formulí v jazyce používajícím logické symboly, kvantifikátory, + sčítání,

$\cdot$ násobení, číselné proměnné a konstanty 1 a 0. Poté dokázal, že každá rekurzivní relace je aritmetická.

Své úvahy o rekurzivních funkcích Gödel dále rozšiřuje v roce 1934 na Princetonu při přednášce o svých výsledcích publikovaných v roce 1931. Z přednášek Stephen Cole Kleene a John Barkley Rosser vytvořili zápis, který po Gödelově schválení vyšel v roce 1934 pod názvem *On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems* (GKR34). Na těchto přednáškách Gödel poprvé zmiňuje i třídu obecně rekurzivních funkcí.

Nejprve Gödel opět zmiňuje rekurzivní funkce (dnes primitivně rekurzivní funkce), tentokrát ale k definici mezi základní funkce přidává kromě konstanty a funkce následníka také funkci n proměnných $i_n^j(x_1,...,x_n) = x_j$, která vrací hodnotu j-tého parametru.

Zavádí také pojem, který dnes známe jako charakteristická funkce množiny/relace, kterou definuje jako

$$\begin{aligned} \varphi(x_1,\ldots,x_n) = 0 \leftrightarrow R(x_1,\ldots,x_n), \\ \varphi(x_1,\ldots,x_n) = 1 \leftrightarrow \neg R(x_1,\ldots,x_n). \end{aligned} \tag{1.7}$$

O rekurzivních funkcích poprvé začíná mluvit jako o funkcích, jejichž hodnota může být vyčíslena nějakou konečnou procedurou, což už bychom mohli považovat za nějaké přiblížení se k pojmu algoritmu a k vyčíslitelnosti samotné. Také poprvé v tomto kontextu použije slovo *computable*.

> Recursive functions have the important property that, for each given set of values of the arguments, the value of the function can be computed by a finite procedure. Similarly, recursive relations (classes) are decidable in the sense that, for each given n-tuple of natural numbers, it can be determined by a finite procedure whether the relation holds or does not hold (the number belongs to the class or not), since the representing function is computable.

V poslední kapitole, která se jmenuje *General recursive functions*, Gödel píše, že si je vědom toho, že rekurzivní funkce tak, jak je definoval, nepostihují celou třídu funkcí počitatelných nějakou konečnou procedurou. Jako příklad uvádí funkci dvou proměnných

$$\begin{aligned} \varphi(0,y) &= \psi(y), \\ \varphi(x+1,0) &= \chi(x), \\ \varphi(x+1,y+1) &= \varphi(x,\varphi(x+1,y)). \end{aligned} \tag{1.8}$$

V původním článku se Gödel nijak neodkazuje na Ackermanna, nicméně v knize (Fef$^+$86) máme k dispozici k článku i postscriptum z roku 1964 a Gödelovy pozdější poznámky, které se mi bohužel nepodařilo zjistit z jakého roku pochází (editoři je uvádí pouze jako “corrections supplied by Gödel”). Gödel v nich ale zmiňuje Ackermannovu funkci. Nelze tedy říct, jestli si jí byl vědom už v době publikace tohoto článku.

> For a very similar function W.Ackermann in 1928 proved that it cannot be defined by recursion with respect to one variable.

Gödel tedy zavádí definici obecně rekurzivních funkcí pomocí soustav rovnic, které neformálně popsal takto:

> One may attempt to define this notion as follows: If φ denotes an unknown function, and $\psi_1, \dots, \psi_k$ are known functions, and if the ψ's and φ are substituted in one another in the most general fashions and certain pairs of the resulting expressions are equated, then, if the resulting set of functional equations has one and only one solution for φ, φ is a recursive function.

Jako příklad uvádí soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
\varphi(x,0) &= \psi_1(x), \\
\varphi(0,y+1) &= \psi_2(y), \\
\varphi(1,y+1) &= \psi_3(y), \\
\varphi(x+2,y+1) &= \psi_4(\varphi(x,y+2), \varphi(x, \varphi(x,y+2))). \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

Jako příklad nějaké funkce jedné proměnné, kde je celý postup možná o něco lépe vidět, můžeme uvést třeba tuto soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= 1, \\
\phi(0) &= 0, \\
\phi(x+1) &= \psi(\phi(x)), \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

která popisuje funkci

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad (1.11)$$

Soustava rovnic nám tedy udává nějaký mechanický postup, jak vypočítat hodnotu funkce $\phi(x)$ pro libovolné x. Jak uvádí editoři v knize (Fef$^+$86), i Gödel sám v článku, v definici obecně rekurzivních funkcí vychází z práce a soukromé korespondence s Jacquesem Herbrandem, v pozdějších poznámkách opět ze zmíněné knihy Gödel uvádí konkrétně toto:

> This was suggested by Herbrand in a private communication. A slightly different definition was given by him in his 1931, where he postulated “computability”. However, also in this definition, he did not

require computability by any definite formal rules. In intuitionistic mathematics the two Herbrand definitions are trivially equivalent. In classical mathematics the non-equivalence of general recursiveness with the first mentioned concept of Herbrand was proved by L. Kalmár in 1955. Whether Herbrand's second concept is equivalent with general recursiveness is a largely epistemological question which has not yet been answered.

Gödelova definice pomocí soustav rovnic je tedy pozměněná Herbrandova definice, proto tuto definici obecně rekurzivní funkce můžeme najít v literatuře i pod názvem *"Herbrand-Gödel computability"*.

Na Gödelovu definici obecně rekurzivních funkcí reaguje Stephen Cole Kleene ve svém článku (Kle36), kde definuje minimalizaci a zavádí novou definici obecně rekurzivních funkcí, kterou standardně používáme dnes. Motivací pro tuto novou definici, jak uvádí v článku, byly nevýhody, které definice pomocí soustav rovnic má. Ze zadané soustavy rovnic totiž není možné na první pohled určit, zda opravdu jednoznačně definuje nějakou funkci. Můžeme mít například soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \phi(x) &= 1, \\ \phi(x) &= 0, \end{aligned} \tag{1.12}$$

kterou nemůže splňovat žádná funkce, nebo naopak rovnici

$$\phi(x) = \phi(x), \tag{1.13}$$

která funkci nedefinuje jednoznačně.

1.3 Stephen Cole Kleene a přechod k částečně rekurzivním funkcím

Velký přínos pro teorii rekurzivních funkcí a celou teorii vyčíslitelnosti má Kleeneho článek *General recursive functions of natural numbers* (Kle36). Článek pro mě byl vzhledem ke složité aritmetizaci syntaxe poměrně nečitelný. Kleene v něm totiž přejímá aritmetizaci syntaxe, jakou použil už Gödel při svém důkazu vět o neúplnosti. Gödelovy rekurzivní funkce, které v článku (Göd31) touto metodou vytvořil, doplňuje o další, jako je například funkce, která enumeruje prvky rekurzivně spočetné množiny, o které budu mluvit později.

Na začátku článku definuje primitivně rekurzivní funkce definicí, kterou použil již Gödel a které poprvé nazve primitivně rekurzivní funkce. Dále se odkazuje na Herbranda a Gödela a jejich definici obecně rekurzivních funkcí pomocí soustav rovnic, na kterou v tomto článku chce navázat.

Jak už jsem zmínila v předchozí kapitole, poprvé v tomto článku definuje operaci minimalizace a pomocí ní definuje obecně rekurzivní funkce definicí, kterou standardně používáme dodnes. Dále se Kleenemu podaří dokázat, že definice Herbranda a Gödela je ekvivalentní jeho definici za použití minimalizace.

Nejprve dokáže, že každá funkce, která je obecně rekurzivní podle definice Herbranda a Gödela, je rekurzivní i podle této definice za použití minimalizace.

Věta 1.1 *Každou rekurzivní funkci, ve smyslu definovatelnou nějakou soustavou rovnic, lze vyjádřit také jako $\psi(\mu y(R(x,y)))$, kde $\psi(y)$ je primitivně rekurzivní funkce, $\mu y(R(x,y))$ je nejmenší y takové, že pro něj platí $R(x,y)$, $R(x,y)$ je primitivně rekurzivní relace a platí, že $\forall x \exists y R(x,y)$.*

> Thus the extension of general over primitive recursive functions consists only in that to substitutions and primitive recursions is added the operation of seeking indefinitely through the series of natural numbers for one satisfying a primitive recursive relation.

Kleene dále definuje rekurzivní relace podle jejich charakteristické funkce tak, jak je definujeme standardně i dnes a dokazuje opačnou implikaci, tedy, že každá funkce definovatelná pomocí primitivně rekurzivních funkcí a minimalizace je rekurzivní i ve smyslu Herbranda a Gödela.

Definice 1.2 Mějme charakteristickou funkci $\rho(x)$ k relaci $R(x)$. Relace $R(x)$ je rekurzivní, jestliže její charakteristická funkce je obecně rekurzivní.

Věta 1.3 *Pokud $R(x,y)$ je rekurzivní relace a $\forall x \exists y R(x,y)$, pak $\mu y(R(x,y))$ je rekurzivní funkce (existuje soustava rovnic, která ji definuje).*

Kleenemu se v této části článku tedy podařilo rozšířit definici primitivně rekurzivních funkcí o operaci minimalizace a definovat tak dnešní třídu obecně rekurzivních funkcí. Dokázal také, že tato definice je ekvivalentní s definicí rekurzivních funkcí pomocí soustav rovnic podle Gödela a Herbranda.

Dalším důležitým přínosem tohoto článku je první pokus o definici toho, co dnes známe jako rekurzivně spočetné množiny. Jak jsem psala v úvodu, Kleene se znovu odkazuje na aritmetizaci syntaxe, kterou ve svém článku definoval Gödel a doplňuje ji o nějaké další rekurzivní funkce. Jednou z nich je i funkce, která pro každou primitivně rekurzivní funkci generuje její definiční obor.

Věta 1.4 *Mějme primitivně rekurzivní relaci $R(x,y)$ a číslo k takové, že $\exists y R(k,y)$, pak existuje primitivně rekurzivní funkce $\gamma(m)$ taková, že $\gamma(0), \gamma(1), \ldots$ je enumerace třídy $\exists y R(x,y)$.*

V dnešním jazyce by se tedy dalo říct, že každá (neprázdná) rekurzivně spočetná množina je oborem hodnot nějaké obecně rekurzivní funkce. Protože jako rekurzivní funkce jsou zde uvažovány zatím pouze totální funkce, číslo k zajišťuje, že funkce γ bude v nejhorším případě konstantní, ale nenastane situace, že by nebyla pro žádné n definovaná. Na tuto větu se Kleene znovu odkazuje v článku z roku 1981 (Kle81), kde shrnuje ze svého pohledu vývoj teorie rekurzivních funkcí a kde píše, že na jeho práci v tomto navázal Post v roce 1944.

> Post 1944 dealt with recursively enumerable sets. By including as such not just the sets enumerated by a general recursive function (Kleene 1936) but also the empty set, he made the recursively enumerable sets coincide with the sets S for which the predicate $a \in S$ is expressible in the form $\exists x R(a,x)$ with R recursive, which I discuss below.

Druhá část Kleeneho článku se jmenuje *O nerozhodnutelnosti, která soustava rovnic definuje rekurzivní funkci.* Jak jsem nastínila už dříve, definice pomocí soustav rovnic je problematická hlavně v tom smyslu, že ze zadané soustavy rovnic nejsme schopni určit, zda definuje nějakou rekurzivní funkci.

> A recursive process of deciding which systems define recursive functions is unattainable, if by recursive process is meant one such that there is a recursive function of the corresponding numbers whose value is 0 or 1 according to the result obtained.

V nějakém smyslu tohle chápu jako paralelu k *halting problemu* u Turingova stroje a dalších výpočetních modelů. Kleene pomocí aritmetizace syntaxe přiřadí soustavě rovnic E index e a formuluje větu o normální formě. Každá funkce může mít tedy několik různých indexů, protože může být definovaná různými soustavami rovnic. Zároveň některé indexy nemusí nutně definovat rekurzivní funkci (například soustava $\phi(x) = \phi(x)$).

Věta 1.5 *Existují primitivně rekurzivní fuknce U a primitivně rekurzivní relace T_n takové, že funkce f n proměnných je rekurzivní právě, když existuje e takové, že $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y T_n(e,x_1,\dots,x_n,y)$ a $f(x_1,\dots,x_n) = U(\mu y T_n(e,x_1,\dots,x_n,y))$.*

Poté dokáže, že třída rekurzivních funkcí, pro které existuje takové e, je stejná třída funkcí jako funkce definované Gödelem pomocí soustav rovnic. Pokud máme funkci, která je rekurzivní v tom smyslu, že existuje soustava rovnic, která ji jednoznačně definuje, pak máme i její index e, který tuto funkci bude rekurzivně definovat podle věty o normální formě.

Problém nastává, pokud máme index e který rekurzivně definuje funkci pomocí věty o normální formě a toto e kóduje nějakou soustavu rovnic E, která ale nemusí nutně definovat rekurzivní funkci podle Gödelovy definice.

> (...) the problem is raised, which systems of equations define recursive functions under the general definition. (...) If a number e defines a function $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ recursively under Def.2c (pozn. věta o normální formě) and is the Gödel number of a system E of equations,

E is in general a system determining a multiple-valued function, not necessarily a system defining a function recursively under Def.2a or 2b. (pozn. definice pomocí soustav rovnic)

Další výsledky, které zde publikuje, jsou, že indexy, které definují obecně rekurzivní funkce, nelze rekurzivně generovat (tedy že třída všech indexů všech obecně rekurzivních funkcí není rekurzivně spočetná). To dokazuje pomocí diagonálního argumentu. Dále také, že třída všech indexů e rekurzivních funkcí $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y T_n(e,x_1,\dots,x_n,y)$ není rekurzivní (tohle opět můžeme chápat jako nějakou paralelu k Turingovým strojím a halting problemu, kdy sice dokážeme indexovat Turingovy stroje, ale neexistuje stroj, který by dokázal pro všechny stroje a vstupy rozhodnout, jestli výpočet skončí).

Jeho formulaci věty o normální formě znovu komentuje i v roce 1981. Vrací se zde k tomu, že definice rekurzivních funkcí pomocí soustav rovnic předpokládá, že funkce takto definovaná je totální.

It remained for me in 1938 (the work was done in 1936) to omit this assumption about E, and just talk about those p-tuples $x_1,\dots,x_p$ for which there is an m, still assumed to be unique, such that $\psi(x_1,\dots,x_p) = m$ is deducible from E. So $\psi(x_1,\dots,x_p)$ becomes a partial function.

V tomto článku *On Notation for Ordinal Numbers* z roku 1938 tedy Kleene poprvé bere v úvahu i částečné funkce.

If we omit the requirement that the computation process always terminate, we obtain a more general class of functions, each function of which is defined over a subset (possibly null or total) of the n-tuples of natural numbers, and possesses the property of effectiveness when defined. These functions we call partial recursive.

V článku se poté věnuje notaci pro ordinální čísla, tedy nějakému systému mapování přirozených čísel na ordinální čísla. Zavádí takový systém notace, kdy pro daný ordinál budeme schopni efektivně rozhodnout, jestli se jedná o izolované nebo limitní ordinální číslo. U následnického ordinálu bude schopný efektivně spočítat jeho předchůdce a pro limitní ordinál dokáže generovat posloupnost ordinálů, pro něž je daný ordinál limitní.

Kleene definuje *r-systém*, systém reprezentování ordinálů jako přirozených čísel splňující následující podmínky:

1. Žádné číslo nereprezentuje dvě různá ordinální čísla.

2. Existuje částečně rekurzivní funkce K taková, že pro x reprezentující ordinál X

$$K(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } X \text{ je } 0 \\ 1 & \text{pro } X \text{ je následnický ordinál} \\ 2 & \text{pro } X \text{ je limitní ordinál.} \end{cases} \tag{1.14}$$

3. Existuje částečně rekurzivní funkce P taková, že když Y je předchůdce ordinálu X, pak pro x reprezentující ordinál X, $P(x)$ je číslo reprezentující ordinál Y.

4. Existuje částečně rekurzivní funkce Q taková, že pro x reprezentující limitní ordinál X, pro každé n, $Q(x,n)$ je n-tý člen posloupnosti ordinálních čísel, pro něž je X limitní ordinál.

Z takto definovaného systému plyne, že pokud systém přiřadí nějaké číslo ordinálu α, svoji reprezentaci budou mít i všechny ordinály menší než α. Kleene poté zavádí několik takových r-systémů a dokazuje, že nejmenší ordinál nereprezentovatelný v žádném r-systému je ω_1. Ordinál, pro který existuje nějaký systém, ve kterém je reprezentovatelný, nazýváme jako *konstruktivní.* Každý konstruktivní ordinál je tedy spočetný, protože každý systém pro notaci ordinálů může pokrýt nanejvýš spočetnou část ordinálních čísel.

> The ordinal obtained (non-constructively) as the maximum value of ξ was designed as ω_1 by Church and Kleene. Arguing non-constructively, the notations are enumerable. The second number class is not enumerable. Therefore ω_1 is in the second number class.

Pojem *second number class* definuje Rogers ve své knize (Rog67) jako množinu všech konečných a spočetných ordinálů, neboli množinu obsahující 0, uzavřenou na operaci následníka a uzavřenou na limity rostoucích (spočetných) posloupností. *First number class* je třída všech konečných ordinálů. K výsledku o konstruktivních ordinálech Kleene cituje i článek *The constructive second number class* od Alonza Churche, který při jeho úvahách o notaci pro ordinální čísla přišel s obdobným výsledkem, že ordinál ω_1 je nejmenší ordinál nereprezentovatelný formulemi v jeho λ-notaci.

2. Emil Post a rekurzivně spočetné množiny

Přínos Emila Posta k teorii rekurzivních funkcí začíná pravděpodobně už článkem *Absolutely unsolvable problems and relatively undecidable propositions. Account of an anticipation* (Pos22). Tento článek lze najít ve sborníku (Dav65), kde Davis shromáždil nejdůležitější články týkající se nerozhodnutelnosti a vyčíslitelnosti. Ke článku je přiložen krátký úvod od editora, ve kterém píše, že ačkoli článek byl napsán již v roce 1922, Post se ho rozhodl publikovat až v roce 1941 v *American Journal of Mathematics*, kde článek publikovat odmítli. Tuto skutečnost editor přičítá spekulativnímu až metafyzickému dodatku v článku. Poprvé byl tedy zveřejněn až v roce 1965 v tomto sborníku.

Důvodem, proč se tímto článkem chci zabývat podrobněji, je, že Post v tomto článku publikuje mnoho závěrů, o kterých se o deset let později dočítáme v publikacích od Gödela, Churche a Turinga. Na tuto skutečnost upozorňuje i editor.

> For Post, these conclusions were based on an assumption which is equivalent to Church's thesis. Hence, Post's further efforts were directed towards verification of the assumption, which to him was a matter of "psychological analysis of the mental processes involved in combinatory mathematics." He proposed to publish his work only after he had completed this analysis. In the meanwhile, the more complete development by Gödel appeared.

V roce 1941, když se článek neúspěšně pokoušel publikovat, k němu napsal Post úvod, v němž mluví o motivaci za tím zveřejnit tento článek i navzdory tomu, že výsledky z něj již jsou známé. Píše, že si tímto nechtěl nárokovat nějakou neoficiální prioritu, ale jeho přístup se mu zdá natolik odlišný od toho, který použil Gödel, Church a další, že jeho zveřejnění považuje za přínosné. Jeho definice vyčíslitelnosti je založená na takzvaných *generated sets*. V kontextu tohoto článku je budu nazývat jako generované množiny, nicméně jde o základ toho, co dnes nazýváme rekurzivně spočetné množiny. Neformálně je popisuje jako množiny, kde každý prvek je v nějaký moment vygenerován použitím nějaké metody a nedojde k tomu, že je vygenerován prvek, který do této množiny nepatří.

Generovaná množina je tady tedy braná jako základní pojem, od kterého odvozuje ostatní pojmy. Tím se jeho přístup liší od Kleeneho a jeho rekurzivně spočené množiny, jejíž definice se opírá o definici rekurzivní funkce. Dnes už víme, že i takový přístup je možný, protože funkce je částečně rekurzivní právě tehdy, když její graf je rekurzivně spočetný.

Následující shrnutí Postova přístupu k neúplnosti a vyčíslitelnosti je částečně převzato i z článku *Emil Post and His Anticipation of Gödel and Turing* (Sti04) australského matematika Johna Stillwella, který se věnuje právě Postovu článku z roku 1922. Post si vytvořil formální systém (v literatuře ho lze najít pod názvy *canonical system* (Odi89) nebo *production system* (Sti04)(Hof79)) založený na práci s řetězci znaků z nějaké konečné abecedy. Jako příklad bych ráda použila produkční systém, který použil Douglas Hofstadter ve své knize *Gödel, Escher, Bach* (Hof79). Pracuje zde s abecedou skládající se ze znaků **p**, **r**, **-**. Jako axiomy si definuje řetězce

$$x\mathbf{p}\text{-}\mathbf{r}x\text{-}, \tag{2.1}$$

kde za x lze dosadit libovolný počet pomlček. Tento produkční systém má jedno odvozovací pravidlo a tím je

$$x\mathbf{p}y\mathbf{r}z \to x\mathbf{p}y\text{-}\mathbf{r}z\text{-}, \tag{2.2}$$

kde nalevo od šipky je axiom nebo již odvozený řetězec a napravo je řetězec, který můžeme pomocí pravidla odvodit. Symboly v tomto systému poté můžeme interpretovat jako sčítání na přirozených číslech (v řetězci $x\mathbf{p}y\mathbf{r}z$ tedy jako $x + y = z$). Generovanými množinami můžeme nazvat množiny řetězců, které lze vygenerovat nějakým produkčním systémem. Generovaná množina nějakého produkčního systému je tedy množina axiomů a řetězců vytvořených pomocí odvozovacích pravidel daného produkčního systému.

Pro tyto systémy se Postovi v článku podařilo dokázat větu o normální formě, která v tomto kontextu znamená, že pro každou generovanou množinu existuje *normální systém*, který ji generuje. Tento normální systém se skládá pouze z jednoho axiomu a pravidel ve formě

$$g\mathbf{P} \to \mathbf{P}g', \tag{2.3}$$

tedy takových, kde z řetězce můžeme odtrhnout počáteční podřetězec a nahradit ho jiným, který připojíme na konec. Mezi těmito normálními systémy můžeme najít třídu ještě jednodušších *tag systémů*, tedy systémů, kde g má pokaždé stejnou délku a volba g' závisí pouze na počátečním znaku g. Na těchto systémech se Post poté neúspěšně snažil vyřešit otázku rozhodnutelnosti, tedy nějaké univerzální odpovědi na otázku, jestli je daný řetězec generovatelný určitým produkčním systémem. Protože se ale normální systémy skládají z konečných řetězců na konečné abecedě, jsme schopni je kódovat a následně enumerovat. Použil tedy diagonální argument a pomocí něj dokázal, že tento problém s rozhodnutelností pro určité produkční systémy není řešitelný. Tedy že existují rekurzivně spočetné množiny, které nejsou rekurzivní.

Předpokládejme, že pro množinu X existuje nějaká funkce f, která každému číslu $x \in X$ přiřadí nějakou $S_x \subseteq P(X)$. $D \subseteq X$ nazvěme *diagonální množinou* právě tehdy, když

$$x \in D \Leftrightarrow x \notin S_x.$$

Jak je napsáno výše, Post chápal generované množiny jako množiny řetězců, které může generovat nějaký (normální) produkční systém, tedy i generované množiny lze enumerovat. Označme S_n n-tou generovanou množinu a vytvořme si diagonální množinu D nad těmito generovanými množinami. Tato diagonální množina tedy nemůže být generovaná množina (liší se alespoň o jeden prvek od každé generované množiny). Komplement $\overline{D}$ této množiny ale musí být generovaná množina protože $n \in \overline{D} \Leftrightarrow n \in S_n$ a S_n jsou generované množiny. Nemůže tedy existovat stroj, který by pro každé n rozhodl, jestli $n \in \overline{D}$, protože kdyby existoval, byla by i množina D generovaná. $\overline{D}$ tedy není rekurzivní množina, ale je rekurzivně spočetná množina. Zároveň neexistuje produkční systém, který by dokázal generovat všechny $n \notin S_n$, jinak by množina D byla generovaná, takže všechny produkční systémy jsou neúplné.

Stillwell také píše o odlišném přístupu Gödela a Posta, který pravděpodobně zapříčinil, že Post tento článek nevydal a výsledky z něj jsou nyní přičítány Gödelovi, Kleenemu, Churchovi a dalším, co se později teorií vyčíslitelnosti zabývali. Neúplnost pro Posta byla důsledek diagonalizace, která je popsána výše. Postovi se ale nepodařilo dokázat, že opravdu všechno, co bereme jako vyčíslitelné, je skutečně zahrnuto v jeho normálních systémech. Snažil se tedy o něco, co se později podařilo až Churchovi, Turingovi a dalším, když dokázali ekvivalenci jejich přístupu k vyčíslitelnosti a byla formulovaná Churchova teze. Gödelův přístup byl mnohem přímočařejší a nezávislý na teorii vyčíslitelnosti. Rozhodl se analyzovat *Principia Matematica* a přímo nad ní dokázat její neúplnost.

Stillwell zde také zveřejňuje dopis, který Post Gödelovi napsal v roce 1938.

> I am afraid that I took advantage of you on this, I hope but our first meeting. But for fifteen years I had carried around the thought of astounding the mathematical world with my unorthodox ideas, and meeting the man chiefly responsible for the vanishing of that dream rather carried me away. Since you seemed interested in my way of arriving at these new developments perhaps Church can show you a long letter I wrote to him about them. As for any claims I might make perhaps the best I can say is that I would have have proved Gödel's theorem in 1921 had I been Gödel.

Z úvodu k tomuto Postovu článku z roku 1941 bych ještě ráda zdůraznila tento Postův citát, ve kterém zformuloval jeho očekávání, jak by se matematika mohla vyvíjet dále po Gödelově objevu. Nabádá k tomu být kreativní při přístupu k matematice a nějakému (pravděpodobně dočasnému) odchýlení od axiomatických systémů zpátky k významu a pravdě.

> But perhaps the greatest service the present account could render would stem from its stressing of its final conclusion that mathematical thinking is, and must be, essentially creative. It is to the writer's continuing amazement that ten years after Gödel's remarkable achievement current views on the nature of mathematics are thereby affected only to the point of seeing the need of many formal systems, instead of a universal one. Rather has it seemed to us to be inevitable that these developments will result in a reversal of the entire axiomatic trend of the late nineteenth and early twentieth centuries, with a return to meaning and truth.

V roce 1944, tedy v době, kdy už byla známá práce Gödela a Kleeneho, napsal Post článek *Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems* (Pos44). Na začátku článku Post znovu představuje své produkční systémy a srovnává jeho generované množiny s rekurzivně spočetnými množinami definovanými Kleenem v článku (Kle36). Dokazuje, že tyto dva pojmy jsou ekvivalentní a ke Kleeneho definici, navíc přidává i prázdnou množinu. Jako rekurzivně spočetnou množinu tedy definuje množinu která je prázdná, nebo je oborem hodnot nějaké obecně rekurzivní funkce. V souvislosti s rekurzivně spočetnými množinami zde také znovu zmiňuje problém s rozhodnutelností, tedy s tím, zda dokážeme zodpovědět, jestli daný prvek patří do rekurzivně spočetné množiny nebo ne. Vztah mezi rekurzivně spočetnou množinou a rekurzivní množinou ještě upřesňuje formulováním toho, co dnes známe jako Postovu větu.

Věta 2.1 *Množina A je rekurzivní právě tehdy, když A i $\overline{A}$ jsou rekurzivně spočetné.*

Důsledkem tedy je, že množina je rozhodnutelná právě tehdy, když jsou ona i její doplněk rekurzivně spočetné. Této skutečnosti si všiml pravděpodobně již při psaní článku (Pos22), protože je v podstatě formulovaná během diagonalizace, kterou použil už během důkazu jeho verze věty o neúplnosti, ale explicitně jako větu ji formuluje poprvé až zde. Větu zde ale neuvádí v kontextu diagonálního důkazu, ale dokazuje jí standardním způsobem, který je v literatuře dnes běžně používán — tedy pokud je množina S rekurzivní, bude existovat nějaká konečná procedura, která pro každý prvek odpoví "ano" nebo "ne" v závislosti na tom, jestli prvek leží nebo neleží v dané množině. Pokud tedy budeme vzestupně generovat přirozená čísla, budeme generovat prvky množiny S při odpovědi "ano" a prvky množiny $\overline{S}$ při odpovědi "ne". Množina S i množina $\overline{S}$ je tedy rekurzivně spočetná. Naopak pokud S a $\overline{S}$ jsou rekurzivně spočetné, můžeme procedury, co generují jednotlivé prvky, spustit naráz a každý prvek se v nějaký moment v jedné z těchto množin objeví a S tedy bude rekurzivní. Podrobnou verzi tohoto důkazu lze dohledat například v (Odi89).

V článku dále dokazuje také, že každá nekonečná rekurzivně spočetná množina obsahuje nekonečnou rekurzivní množinu, nebo že existuje množina, která je rekurzivně spočetná, ale ne rekurzivní, jako dokázal už v článku (Pos22) a jeho výsledky dává do souvislosti s Gödelovými větami o neúplnosti. Ve článku definuje také *kreativní množinu.*

Definice 2.2 Rekurzivně spočetná množina C je kreativní právě tehdy, když existuje rekurzivní funkce f, která pro každou rekurzivně spočetnou $\alpha \subseteq \overline{C}$ vrátí n takové, že $n \in \overline{C}$, ale $n \notin \alpha$.

Každá kreativní množina je tedy rekurzivně spočetná, ale není rekurzivní. Její doplněk není rekurzivně spočetný, to znamená, že se liší minimálně o jeden prvek od každé rekurzivně spočetné množiny. Funkce f pak pro každou rekurzivně spočetnou množinu vrátí tento prvek. Doplněk každé kreativní množiny dále musí obsahovat nekonečnou rekurzivně spočetnou množinu, která je definovaná jako obor hodnot funkce f.

Dnes můžeme v literatuře najít termíny kreativní a produktivní množina, kdy kreativní množina je definovaná pouze jako rekurzivně spočetná množina, jejíž doplněk je produktivní. Produktivní množina má poté vlastnosti doplňku kreativní množiny, které jsem popsala výše v definici kreativní množiny. V tomto původním Postově článku ale termín produktivní množina zaveden není.

Pojmenování kreativní množiny Post vysvětluje tak, že výběr prvku, který patří do množiny $\overline{C}$, ale nepatří do množiny α musí být kreativní. Pokud by byl nějakým způsobem mechanický, tvořily by tyto prvky další rekurzivně spočetnou množinu, pro kterou bychom uměli najít prvek, který patří do $\overline{C}$, ale nepatří do množiny α.

> But this process is essentially creative. For any mechanical process could only yield n's forming a generated, and hence recursively enumerable, subset α of $\overline{C}$, and hence could be transcended by finding that n of $\overline{C}$ not in α.

Postovými produkčními systémy se pravděpodobně inspiroval i Noam Chomsky ve svých pracích týkajících se hierarchie formálních gramatik. Ve svém článku *Three models for the description of language* (Cho56) sice necituje přímo Posta, ale podařilo se mi dohledat, že minimálně v knize *The elements of mathematical logic* (Ros50) od Paula Rosenblooma, na kterou se Chomsky odkazuje, Postovy produkční systémy hrají důležitou roli. Ve svém článku *On Certain Formal Properties of Grammars* (Cho59) už cituje i přímo Postův článek (Pos44).

Post také v článku definoval *jednoduché množiny* jako množiny, které jsou rekurzivně spočetné, ale jejich doplněk, který je nekonečný, neobsahuje žádnou nekonečnou rekurzivně spočetnou podmnožinu. Spolu s kreativními množinami tak definoval dvě různé třídy množin, které jsou rekurzivně spočetné, ale nejsou rekurzivní.

3. Turingův stroj

V této kapitole bych se ráda věnovala další ekvivalentní teorii vyčíslitelnosti, a to Turingovu modelu stroje. Churchův lambda kalkul sice vznikl ještě o něco dříve (Kleene v (Kle81) píše, že na Churchovy přednášky, kde rozebíral Gödelovy věty o neúplnosti a lambda kalkul, chodil už na podzim roku 1931), Turingův přístup se ale více přibližoval nějakému mechanickému modelu počítače a pravděpodobně i proto se mu podařilo přesvědčit Gödela k uznání Churchovy teze, proto mi tento přístup přijde důležitý. Vývoj všech těchto ekvivalentních definic včetně lambda kalkulu bude shrnut i v následující kapitole.

Svojí definici algoritmu popsal Alan Turing ve svém článku *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem* (Tur36). Na začátku definuje pojem “computable numbers”, tedy počitatelná čísla. Popisuje je jako reálná čísla, jejichž desetinný rozvoj je možné vypočítat nějakou konečnou procedurou.

> The computable numbers may be described briefly as the real numbers whose expressions as a decimal are calculable by finite means. (...) According to my definition, a number is computable if its decimal can be written down by a machine.

Dále v článku Alan Turing formuluje definici takového stroje, která odpovídá tomu, co dnes nazýváme Turingovým strojem. Turing ukazuje, jak lze přechodovou funkci takového stroje zakódovat do čísla. Toto číslo pak jednoznačně určuje konkrétní Turingův stroj. Pomocí toho definuje *univerzální Turingův stroj*, tedy stroj, který na vstupu dostane kód jiného Turingova stroje a dokáže jeho výpočet simulovat. O Turingových strojích dokazuje mimojiné i to, že sekvence, které jsou na stroji vyčístlitelné, nejsou rekurzivně spočetné (ve smyslu, že nejsme schopní enumerovat jen kódy, které skutečně kódují nějaký Turingův stroj) a také, že neexistuje proces, který by dokázal rozhodnout, jestli dané číslo kóduje Turingův stroj, nebo ne. Tento problém je obdobou problému s definováním rekurzivních funkcí pomocí soustav rovnic, jak bylo popsáno v předchozích kapitolách, tedy, že neexistuje algoritmus, který by o dané soustavě rozhodl, jestli jednoznačně definuje nějakou rekurzivní funkci.

> The computable sequences are therefore not enumerable. (...) but the problem of enumerating computable sequences is equivalent to the problem of finding out whether a given number is the D.N (pozn.číslo kódující Turingův stroj) of a circle-free machine, and we have no general process for doing this in a finite number of steps.

Turing poté definuje vyčíslitelné funkce následovně:

Definice 3.1 Funkce jedné proměnné ψ je vyčíslitelná právě tehdy, když existuje stroj, který počítá sekvenci symbolů 0 a 1 takovou, že $\psi(0)$ je počet symbolů 1 před prvním výskytem symbolu 0 a pro každě $x > 0$ $\psi(x)$ je počet symbolů 1 před x-tým a $(x+1)$-tým výskytem symbolu 0. Podobně lze definovat i funkce více proměnných.

Pokusil se tedy definici rekurzivních funkcí, převést na jeho definici stroje. Jak Kleene píše ve svém článku z roku 1981, byl skeptický k tomu, že by tato definice byla nejjednodušší, a navíc lze tímto způsobem počítat pouze totální funkce. Proto Kleene na svých přednáškách ve Winconsinu v roce 1941, inspirován Postovým článkem z roku 1936 *Finite combinatory processes*, zavedl nový, dnes používaný, způsob interpretace rekurzivních funkcí na Turingově stroji.

Definice 3.2 Na pásce jsou zapsaná přirozená čísla $x_1, \ldots, x_p$ oddělena prázdnými políčky. Částečná funkce $\psi(x_0, \ldots, x_p)$ je Turingovsky vyčíslitelná právě tehdy, když existuje Turingův stroj, který odpoví vypsáním na pásku hodnoty $\psi(x_0, \ldots, x_p)$, pokud je funkce pro $x_1, \ldots, x_p$ definovaná. Jinak neodpoví.

Turingovi se dále podařilo dokázat ekvivalenci jeho definice vyčíslitelné funkce s lambda-definovatelností a teorií rekurzivních funkcí formulovanou Kleenem v roce 1936. Nicméně, jak již bylo zmíněno, způsob, jakým Turing interpretoval rekurzivní funkce na Turingových strojích, je platný pouze pro totální funkce. Částečné funkce, které jsou obecnější, byly popsány Kleenem až v roce 1938.

4. Kleeneho ohlédnutí zpět

V roce 1981 Kleene napsal článek *Origins of Recursive Function Theory*, který bych zde ráda zmínila a shrnula, jako subjektivní pohled na vývoj teorie rekurzivních funkcí někoho, kdo se ho sám účastnil. Tento článek na začátku nazval také jako "Four Dozen Years in Recursionland". Jako první z ekvivalentních definic třídy funkcí, pro které existuje algoritmus, který je počítá, zmiňuje Churchův lambda kalkul z let 1931-1932.

O Churchově lambda kalkulu, který ve článku stručně popisuje, při jeho zveřejnění nikdo nepředpokládal, že by takto definovaná třída funkcí skutečně pokrývala všechny možné algoritmem počitatelné funkce.

> Before research was done, no one guessed the richness of this subsystem. Who would have guessed that this formulation, generated as I have described to clarify the notation for functions, has implicit in it the notion (not known in mathematics in 1931 in a precise version) of all functions on the positive integers (or on the natural numbers) for which there are algorithms?

V roce 1933 už se měla Churchova teorie dostávat do povědomí logiků na Princetonu a Church podle Kleeneho prohlásil, že funkce jsou definovatelné pomocí lambda kalkulu právě tehdy, když jsou vyčíslitelné, tedy existuje algoritmus, který je počítá. Tuto tezi publikoval v roce 1936 a dnes je známá jako Churchova teze, jak jí začal říkat Kleene v roce 1952. K této tezi se vyjádřil skepticky i Kurt Gödel. Podle dopisu, který v roce 1935 poslal Church Kleenemu "Gödel 'regarded as thoroughly unsatisfactory' Church's proposal to use lambda-definability as a definition of effective calculability. Church 'replied that if [Gödel] would propose any definition of effective calculability which seemed even partially satisfactory [Church] would undertake to prove that it was included in lambda-definability.'" Gödel, pravděpodobně částečně i v návaznosti na tuto výzvu, na jaře 1934 publikoval za pomoci Herbranda jeho teorii rekurzivních funkcí, ale ani o této definici si nebyl jistý, že opravdu postihuje všechny vyčíslitelné funkce, jak Kleene říká, že napsal v dopise adresovaném Martinu Davisovi v roce 1965.

V roce 1936 ale Kleene i Church dokázali ekvivalenci Gödelovy a Herbrandovy definice a lambda kalkulu. Podle Churchovy teze už existovaly tedy dvě definice třídy vyčíslitelných funkcí. Třetí vytvořil ve stejném roce Turing, kdy formuloval definici Turingova stroje. Po jejím zveřejněním podle Kleeneho Gödel nakonec přijmul Chuchovu tezi, které se dnes říká někdy také Church-Turingova teze.

> In conversation at San Juan on October 31, 1979, Davis expressed to me the opinion that the equivalence between Gödel's definition of general recursiveness and mine (which equivalence Gödel, in his February 15, 1965, letter to Davis, called 'not quite trivial'), and my

normal form theorem, were considerations that combined with Turing's arguments to convince Gödel of the Church-Turing thesis.

Závěr

V práci jsem se pokusila shrnout vývoj teorie rekurzivních funkcí a s ní související pojmy, jako je například primitivní rekurze, částečně rekurzivní funkce nebo kreativní množina. Podstatná část práce je věnovaná přínosu Emila Posta v této oblasti, kterému v literatuře často nebývá věnován takový prostor jako jiným odborníkům. Zabývala jsem se touto teorií také v kontextu vývoje dalších výpočetních modelů a to primárně Turingova stroje.

Původním záměrem bylo popsat v práci i přínos Johna von Neumanna a jeho možný vliv na práci Kurta Gödela a Alana Turinga. Během psaní jsem se ale rozhodla od tohoto záměru upustit a více se věnovat práci Emila Posta, která se v kontextu rozebíraných témat jeví o něco relevantnější. Přínos Johna von Neumanna by nicméně určitě stál za další historický výzkum. Jak se můžeme dočíst například v článku (JZ23), při Gödelově přednášce v Královci roku 1930, kde upozornil na důkaz vět o neúplnosti formálních systémů, byl pravděpodobně jeden z mála, kdo dokázal rozpoznat, jakou váhu přednáška měla, a zahájil s Gödelem korespondenci, ze které vyplývá, že si pravděpodobně podobný důkaz také rozmýšlel. V dopise z 12. ledna 1931 von Neumann Gödelovi předkládá důkaz jeho verze druhé Gödelovy věty o neúplnosti, který velmi připomíná důkaz pomocí podmínek pro dokazatelnost a který je v literatuře připisován Hilbertovi, Bernaysovi nebo Löbovi a mohlo by být zajímavé zjistit, jestli o von Neumannově důkazu věděli.

Další otázka, která by stála za hlubší prozkoumání, by mohla být, jestli někdo navázal na Postův výrok, který pronesl po formulaci Gödelových vět o neúplnosti, o tom, že očekával, že se v matematickém myšlení obrátíme od formálních systémů a axiomatiky zpět k pravdě a významu. Vzhledem k tomu, že jde o poměrně silné filosofické tvrzení, dá se očekávat, že se jím někdo později zabýval, ale nic konkrétního se mi dohledat nepodařilo.

Seznam použité literatury

[Cho56] N. Chomsky. Three models for the description of language. *I.R.E. Transactions on Information Theory*, 2:113–124, 1956.

[Cho59] N. Chomsky. On certain formal properties of grammars. *Information and Control*, 2:137–167, 1959.

[Dav65] M. Davis, ed. *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions.* Dover Publication, 1965.

[Ded88] R. Dedekind. *Was Sind Und Was Sollen Die Zahlen?* Vieweg, Braunschweig, 1888. Do angličtiny přeložil Wooster Woodruff Beman.

[Fef+86] S. Feferman et al., ed. *Kurt Gödel: Collected Works. Volume I, publications 1929–1936.* Oxford University Press, 1986.

[GKR34] K. Gödel, S. C. Kleene a J. Rosser. On undecidable propositions of formal mathematical systems. 1934. Publikováno v (Fef+86), str. 346–369.

[Göd31] K. Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatsh. Math. Phys.*, 38:173–198, 1931. Anglický překlad též v (Fef+86), str. 144–195.

[Hof79] D. R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid.* Basic Books, 1979.

[JZ23] B. Jurková a L. H. Zámečník. Von Neumann, Turing, and Gödel: On Mind and Machines. *Teorie vědy*, 2023.

[Kle36] S. C. Kleene. General recursive functions of natural numbers. *Mathematische annalen*, 112(1):727–742, 1936.

[Kle38] S. C. Kleene. On notation for ordinal numbers. *The Journal of Symbolic Logic*, 3(4):150–155, 1938.

[Kle81] S. C. Kleene. Origins of recursive function theory. *Annals of the History of Computing*, 3(1):52–67, 1981.

[Odi89] P. Odifreddi. *Classical Recursion Theory. Volume 1.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Volume 125, Amsterdam, 1989.

[Pea89] G. Peano. *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita.* Bocca, 1889.

[Pos22] E. L. Post. Absolutely unsolvable problems and relatively undecidable propositions. Account of an anticipation. 1922. Publikováno v (Dav65), str. 338–433.

[Pos44] E. L. Post. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50:284–316, 1944.

[Rog67] H. Rogers. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. McGraw Hill, New York, 1967.

[Ros50] P. C. Rosenbloom. *The elements of mathematical logic*. Dover Press, 1950.

[Sko23] T. Skolem. Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veranderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich. *Videnskapsselskapets Skrifter, I. Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse*, 6:1–38, 1923. Do angličtiny přeložil Jean van Heijenoort.

[Sti04] J. Stillwell. Emil Post and His Anticipation of Gödel and Turing. *Mathematics Magazine*, 77:3–14, 2004.

[Tur36] A. M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42:230–265, 1936.