

# Eliška Radiková, *Původ některých rekurzivně-teoretických pojmů*

(V. Švejdar, posudek vedoucího na bakalářskou práci, srpen 2024)

Práce Elišky Radikové je historické povahy. Je věnována přínosu klasiků, jako jsou Gödel, Kleene, Rosser a Turing, a jejich interakci. Nedošlo na von Neumanna, který je jmenován v zadání. Historické otázky vztahující se k von Neumannovi, tj. zda k němu lze vystopovat architekturu soudobých počítačů a zda o důkazu Druhé Gödelovy věty uvažoval podobným způsobem jako Löb ale mnohem dříve, považují dnes za velmi zajímavé ale trochu vzdálené od hlavního tématu práce, což jsou počátky teorie rekurzivních funkcí a množin. Nutno uznat, že Emil Post, kterým se autorka zabývala nad rámec zadání, patří k tématu více než von Neumann, takže pominutí von Neumanna nepovažují za závadu.

Autorka se zabývala původní literaturou a většinou ji nejprve musela vyhledat. I ten, kdo se rekurzivními funkcemi zabývá, se z práce může dozvědět něco nového o jejich historii. Například, kde mají původ kreativní množiny nebo kde se objevil fakt, že kreativní množina není prostá (simple), protože její komplement obsahuje nekonečnou rekurzivně spočetnou množinu. Je víceméně jasné, že Kleeneho větu o normální formě objevil Kleene, ale je dobré vědět, kde o tom Kleene co publikoval a že to zřejmě dal do souvislosti s tím, čemu se dnes říká věta o projekci. Dnes je to sice samozřejmé, ale chvíli trvalo, než si zakladatelé teorie uvědomili, že při úvahách o algoritmicky počitatelných funkcích nelze vystačit s funkcemi všude definovanými, nebo že mezi rekurzivně spočetné množiny je účelné počítat i množinu prázdnou. I to si lze v práci přečíst.

Práce je celkem snadno čitelná. V *Principia Mathematica* chybí 'h'. Slovo *slightly* v angličtině pravděpodobně nelze dělit. Na str. 10 místo "Kleene se snaží shrnout z jeho pohledu" by česky bylo lepší "ze svého pohledu". Osobně nejsem pro inovativní gramatiku typu "poznámky pochází" a "editoři uvádí". Ve "for the present has nothing to do" na str. 14 možná chybí nějaké slovo. Na str. 15, kde dole stojí "V původním článku se Gödel nijak neodkazuje. . .", dá čtenáři práci pochopit, co se myslí původním článkem. Ale to je tak zhruba všechno, co bych práci vytknul z hlediska jazykového, stylistického či typografického.

Z hlediska věcného jsou určité závady v seznamu funkcí označeném (1.6) na str. 14. Také mi připadá, že přestože jsme o tom s autorkou před podáním práce diskutovali, zůstává nejasné vysvětlení na str. 27 k volbě termínu *kreativní množina*. Tvrzení, že výběr prvku množiny  $\bar{C}$ , který nepatří do množiny  $\alpha$ , nemůže být mechanický, mi nejde dohromady s tím, že účelem kreativní funkce je právě takový prvek algoritmicky vyhledat. Na straně 16 bych uvítal vysvětlení, zda a kterou funkci definuje soustava (1.9). Na str. 25 nahoře není zřejmé, co je myšleno funkcí  $f$ . Pravděpodobně funkce  $x \mapsto S_x$ ?

Nad prací čtenáře může napadnout několik otázek. Některé jsou určitě obtížnější a vyžadovaly by další pátrání v pramenech s nejistým výsledkem, ale k některým autorka asi něco říci dokáže:

- Dá se opravdu tvrdit, že Post už v roce 1922 dokázal větu o neúplnosti? Nepochybuji o tom, že podstatně přispěl k teorii rekurzivních funkcí, a je také jasné, že ty s Gödelovými výsledky úzce souvisejí. Ale mohl Post už v roce 1922 uvažovat o axiomatických teoriích?
- Dá se tvrdit, že omezenými kvantifikátory (v oboru přirozených čísel) se jako první zabýval Skolem?
- Byly v roce 1923 kvantifikátory považovány za běžný předmět logického zkoumání? Z Úvodu práce to vypadá, že Skolem se jim pokoušel vyhnout.
- Jak se vyvinulo chápání Peanovy aritmetiky? Kdo vlastně definoval Peanovu aritmetiku v dnešním smyslu, tj. jako prvořádovou axiomatickou teorii založenou na schématu indukce?

Práci považuji za kvalitní a přínosnou. Možná je trochu poznamenána určitým spěchem v období před odevzdáním. A k určitým závadám zmíněným výše bych přidal názor, že autorka se v některých případech mohla pokusit o jasnější, přehlednější a údernější formulace historických poznatků a hypotéz. Za přiměřenou klasifikaci považuji jak velmi dobře, tak výborně. Pro určitost navrhuji *výborně*.

V Praze 13.8.2024

doc RNDr Vítězslav Švejdar CSc