UNIVERZITA KARLOVA
FILOSOFICKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

David Roubínek

Ramseyovy věty a jejich zobecnění na nespočetné kardinály

Katedra logiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Šárka Stejskalová, PhD.
Studijní program: Logika
Studijní obor: Logika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Nejen za vedení práce bych rád poděkoval Mgr. Šárce Stejskalové, PhD.

Název práce: Ramseyovy věty a jejich zobecnění na nespočetné kardinály

Autor: David Roubínek

Katedra: Katedra logiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Šárka Stejskalová, PhD.

Abstrakt: V práci jsou dokázány Ramseyovy věty a definována šipkovací notace pro *partition calculus*. Dále zkoumáme, jaké *partition relations* platí, pokud je zdroj ω_1, ω_2, nebo $\aleph_\omega$.

Klíčová slova: Frank P. Ramsey, nekonečná kombinatorika, Ramseyova věta

Title: Ramsey's Theorems and their generalizations for uncountable cardinals

Author: David Roubínek

Department: Department of Logic

Supervisor: Mgr. Šárka Stejskalová, PhD.

Abstract: We prove Ramsey's Theorems and define arrow notation for partition calculus. Next we examine which partition relations hold for resources ω_1, ω_2, or $\aleph_\omega$.

Keywords: Frank P. Ramsey, infinitary combinatorics, Ramsey's Theorem

Obsah

Úvod

Tématem práce jsou Ramseyovy věty. Ty se poprvé objevují v článku *On a Problem of Formal Logic* z roku 1930 od Franka Ramseyho.

V první kapitole jsou uvedeny základní definice a tvrzení.

V druhé kapitole jsou představeny Ramseyovy věty tak, jak se v původním článku objevují. Následně dokážeme nekonečnou Ramseyovu větu stejným způsobem jako v původním článku a řekneme také něco o článku a jeho obsahu.

Ve třetí kapitole je uvedena nekonečná Ramseyova věta a po jejím důkazu z modernějšího zdroje a srovnání s důkazem z druhé kapitoly je definována šipkovací notace. Šipkovací notace je způsob jak zapisovat výsledky z jisté části nekonečné kombinatoriky, které se říká *Partition calculus. Partition calculus* dostal své jméno, protože ústřední úlohu ve větách z této oblasti mají rozklady nějakých množin (struktur).

Kombinatorika se často rozděluje na konečnou a nekonečnou. Přestože zobecnění Ramseyových vět na nespočetné kardinály patří do nekonečné kombinatoriky, je ve čtvrté kapitole, pro úplnost, důkaz konečné Ramseyovy věty a definice Ramseyovy funkce.

Pátá kapitola je hlavní kapitolou této práce. V rámci řešení otázky možného zobecnění Ramseových vět zkoumáme, jaké *partition relations* platí na ω, ω_1, ω_2 a $\aleph_\omega$.

Práce neobsahuje žádné nové výsledky, ale kromě zkoumání *partition relations* se pokoušíme i o náležitý obraz historického vývoje těchto otázek. Nedá se ovšem říci, že by šlo o práci historickou. Většinou jsme nuceni omezit se na citace a na informace o autorech citovaných článků, širší kontext, nebo obsáhlejší rozbor nezbývá prostor. Hlavní téma je stále zobecnění Ramseyových vět. Takže na původní důkaz konečné Ramseyovy věty, na podrobné objasnění obsahu článku *On a Problem of Formal Logic*, nebo obsáhlejší popis výsledků, které jsou v citovaných článcích, ale netýkají se přímo našeho tématu, nezbyl prostor.

V práci jsou nějaké pojmy, které jsme nepřekládali. Částečně jde o citace, které jsme ponechali v anglickém jazyce a částečně jsme nechali cizí pojem tam, kde jsme si nebyli dobrým překladem jistí, nebo se nám zdál anglický pojem už i v českém prostředí zavedený. Ale i v případě, že jsme pojem přeložili, uvedli jsme na příslušném místě i jeho původní anglickou podobu.

1. Základní pojmy a tvrzení

V této části udáváme věty jako fakta. Jejich důkazy lze najít v příslušné literatuře. K objasnění zakládních pojmů, které jsou zde uvedeny, můžeme nabídnout např. Jechovu knihu [11] nebo začátek knihy [4]. Knihu [11] lze použít také jako úvod do teorie ZFC, což je teorie v rámci níž v práci dokazujeme.

Objekty naší teorie jsou množiny a domluvme se, že předem neuvádíme, jestli množiny značíme velkými nebo malými písmeny. Pokud nebude uvedeno jinak, tak malá písmena psaná latinkou $(a, b, c, \dots)$, kromě w, x, y, z, označují přirozená čísla. Malá písmena ze začátku řecké abecedy (α, β, γ, $\dots$) označují ordinální čísla a malá řecká písmena ze středu abecedy (κ, λ, μ, $\dots$) označují kardinální čísla. Dohodňeme se, že nebude vadit, pokud budeme kadinálním a ordinálním číslům zkráceně říkat kardinály a ordinály.

Pokud máme množinu X a Y, tak jejich rozdíl budeme značit jako $X - Y$. Nebudeme tedy rozlišovat mezi množinovým odčítáním $\setminus$ a $-$. Mohutnost (velikost) množiny X budeme značit $|X|$. Pokud jsou X a Y množiny, pak $X \subseteq Y$ značí, že X je podmnožina Y, ale $X \subset Y$ znamená, že X je **vlastní** podmnožina Y. Pro množinu X a kardinál κ je $[X]^\kappa = \{x \mid x \subseteq X \& |x| = \kappa\}$, $[X]^{\leq\kappa} = \{x \mid x \subseteq X \& |x| \leq \kappa\}$ a $[X]^{<\kappa} = \{x \mid x \subseteq X \& |x| < \kappa\}$. Množiny tvaru $[X]^{<\omega}$ budeme nazývat konečnatice a množiny tvaru $[X]^\omega$ nekonečnatice. Pokud budeme mluvit o maximální podmnožině a neřekneme jinak, myslíme vždy maximální vzhledem k inkluzi.

Pokud budeme mít množinu X, pak $P(X)$ značí rozklad množiny a $\mathcal{P}(X)$ chápeme jako potenční množinu množiny X. Budeme rozlišovat mezi rozkladem a pokrytím.

Definice 1. *Nechť je dána množina S. Řekneme, že množina $A \subseteq \mathcal{P}(S)$ je rozklad množiny S, pokud platí:*

- $\forall a \in A$ *platí* $a \neq \emptyset$.
- $\forall a, b \in A$ *platí* $a \cap b = \emptyset$.
- $\bigcup A = S$.

Definice 2. *Nechť je dána množina S. Řekneme, že množina $A \subseteq \mathcal{P}(S)$ je pokrytí množiny S, pokud platí:*

- $\forall x \in A$ *platí* $x \neq \emptyset$.
- $\bigcup A = S$.

Naše definice rozkladu říká, že rozklad je podmnožina potenční množiny. Zároveň bychom ovšem mohli uvažovat rozkladu jako o funkci. Pokud bychom měli funkci $f : S \to n$, tak f určuje rozklad, kde je třída rozkladu definována jako množina prvků $y \in S$, pro které platí $f(y) = m$ pro fixní $m \in n$.

V naší práci budou důležité funkce/rozklady, kterým budeme říkat obarvení.

Definice 3. *Nechť je dáno κ, λ a μ. Řekneme, že funkce $\pi : [\kappa]^\lambda \to \mu$ je obarvení λ-tic množiny κ μ barvami.*

Definice je obecná. V této práci si ovšem v naprosté většině případů vystačíme s konečným λ i μ. Mějme dáno obarvení $\pi : [\kappa]^{\lambda} \to \mu$. Množina H, pro kterou platí, že funkce π je na $[H]^{\lambda}$ konstatní, se nazývá homogenní množina (pro obarvení π). Pokud je H homogenní množina, pak $[H]^{\lambda}$ se nazývá monochromatická množina (pro obarvení π).

Domluvme se, že kromě výrazů tvaru $[\kappa]^{\lambda}$ připustíme v obarvení i výrazy tvaru $[\kappa]^{\leq\lambda}$ a $[\kappa]^{<\lambda}$.

Následující část povede k tomu, že dokážeme Fodorovo lemma ve verzi pro podmnožiny. Je to jediný důkaz v této kapitole a uvádíme ho zde z toho důvodu, že běžně se v literatuře nevyskytuje.

Definice 4. *Nechť je dán kardinál κ. Řekneme, že $C \subseteq \kappa$ je club*[1]*, pokud splňuje následující:*

1. *Pro všechna $\alpha < \kappa$ platí, že, pokud je $\sup(\alpha \cap C) \neq \emptyset$, pak $\sup(\alpha \cap C) \in C$. Množina C je tedy uzavřená.*

2. *Pro všechna $\alpha < \kappa$ existuje $\beta \in C$ takové, že $\beta > \alpha$. Množina C je tedy (v κ) neomezená.*

Definice 5. *Nechť je dán kardinál κ. Řekneme, že $S \subseteq \kappa$ je stacionární množina, pokud pro všechny cluby $C \subseteq \kappa$ platí, že $S \cap C \neq \emptyset$.*

Fakt 1 (O pevných bodech normální funkce)**.** *Nechť je κ regulární nespočetný kardinál a nechť je funkce $f : \kappa \to \kappa$ normální. Potom existuje club $C \subseteq \kappa$ takový, že pro všechna $\alpha \in \kappa$ je $f(\alpha) = \alpha$.*

Fakt 2. *(Fodorovo lemma) Nechť je κ regulární, nespočetný kardinál a nechť je $S \subseteq \kappa$ stacionální a nechť je funkce $f : S \to \kappa$ regresivní. Potom existuje γ a $S_0 \subset S$ taková, že $f(\alpha) = \gamma$ pro všechna $\alpha \in S_0$.*

Dále dokážeme obecnější verzi Fodorova lemmatu. Ve větě níže, i dále v práci, značí CH hypotézu kontinua a GCH obecnou hypotézu kontinua. Regresivitu zde budeme chápat tak, že pro každé $x \in Dom(f)$ je každý prvek množiny $f(x)$ pod x. To lze taky napsat tak, že $f(x) \subseteq x$ platí pro všechny $x \in Dom(f)$.

Věta 3 (Fodorovo lemma pro podmnožiny)**.** .

Nechť je κ regulární nekonečný kardinál a nechť je funkce $f : \kappa^+ \to [\kappa^+]^{<\kappa}$ taková, že existuje $S \subseteq \kappa$ stacionální pro kterou platí, že funkce f je na prvcích S regresivní. Potom, za předpokladu GCH, existují $\gamma \in [\kappa^+]^{<\kappa}$ a club $C \subseteq S$ takové, že pro všechna $\alpha \in C$ je $f(\alpha) = \gamma$.

Důkaz.

Nechť je dán kardinál κ a regresivní funkce $f : \kappa^+ \to [\kappa^+]^{<\kappa}$

K funkci f si vezmeme libovolnou bijekci $b : [\kappa^+]^{<\kappa} \to \kappa$. Aby taková bijekce existovala, potřebujeme v obecném případě GCH.

Kromě těchto dvou funkcí nadefinujeme ještě třetí funkci $g : \kappa^+ \to \kappa^+$ tak, že $g(\alpha)$ bude to nejmenší β pro které platí, že $b''[\alpha]^{<\kappa} \subseteq \beta$.

Protože funkce g je normální, tak můžeme použít větu 1 a dostaneme club $C \subseteq \kappa^+$ pevných bodů funkce g. Teď se podívejme na funkci $f \circ b \restriction_C$. Tato funkce

[1] Zkratka z anglického *closed and unbounded*.

je regresivní a my můžeme použít Forodovo lemma, abychom získali $Y \subseteq C$ na které bude $f \circ b$ konstantní. Označme tuto konstantu jako η. Množina S bude naše hledaná množina pro funkci f. Pro všechna $\alpha \in Y$ bude totiž $f(\alpha) = \gamma$, kde $\gamma = b^{-1}(\eta)$.

V důkazu jsme potřebovali, aby funkce g byla normální. To je druhé místo, kde se použije GCH. Potřebujeme totiž, abychom takové β našli. Proto je třeba, aby dané podmnožiny byly v κ^+ omezené.

□

Definice 6. *Nechť je $\langle T, < \rangle$ částečně uspořádaná množina. Řekneme, že $\langle T, < \rangle$ je strom, pokud pro všechny $t \in T$ platí, že je množina $\{s \mid s \in T \& s < t\}$ dobře uspořádaná.*

Definice 7. *Nechť je $\langle T, < \rangle$ strom. Pak:*

- *Větev stromu T je jakákoliv maximální, lineárně uspořádaná podmnožina T. Pokud je B větev, pak $|B|$ značí délku větve.*
- *Pro každé $t \in T$ definujeme výšku t jako $ht(t) = otp\{s \mid s \in T \& s < t\}$.*
- *Pro každý ordinál α je $T[\alpha] = \{t \in T \mid ht(t) = \alpha$. Množině $T[\alpha]$ se říká α-hladina stromu T.*
- *Výška stromu T, $ht(t)$, je definována jako to nejmenší α, pro které je $[\alpha] = \emptyset$.*

Definice 8. *Pro kardinál κ definujeme κ-strom jako strom, který má výšku κ, ale každá jeho hladina má velikost menší než κ*

Fakt 4 (Kőnigovo lemma)**.** *Každý ω-strom má větev délky ω.*

O stromech jsme se bavili, protože budeme nějaké stromy konstruovat v rámci důkazů a také kvůli stromové vlastnosti, jejíž definici uvedeme v šesté kapitole.

Definice 9 (Graf)**.** *Graf G je uspořádaná dvojice $\langle V, E \rangle$, kde V je neprázdná množina a $E \subseteq [V]^2$. Prvky množiny V se jmenují vrcholy grafu G a prvky množiny E hrany grafu G.*

Definice 10. *Nechť jsou $G = \langle V_g, E_g \rangle$ a $H = \langle V_h, E_h \rangle$ grafy. Řekneme, že H je podgraf grafu G, když platí:*

1. *$V_h \subseteq V_g$,*
2. *$E_h \subseteq E_g$.*

Definice 11 (Úplný graf)**.** *Řekneme, že graf $G = \langle V, E \rangle$ je úplný, pokud platí $E = [V]^2$. Klika grafu G je podgraf $H = \langle V_h, E_h \rangle$, který je úplný.*

Definice 12 (Klika grafu)**.** *Nechť je $G = \langle V_g, E_g \rangle$ graf. Klika grafu G je podgraf $H = \langle V_h, E_h \rangle$, který je úplný.*

Definice 13 (Nezávislá množina grafu.)**.** *Nechť je $G = \langle V, E \rangle$. Nezávislá množina grafu G je $H \subseteq V$, pro kterou platí, že $\forall x, y \in H$: $\{x, y\} \notin E$.*

Na konec této kapitoly ještě připomeneme pojem kombinace.

Definice 14 (Kombinace)**.** *Nechť je S množina taková, že $|S| \geq r$ pro nějaké kladné $r \in \omega$. Řekneme, že C je r-členná kombinace prvků z S, pokud platí $C \subseteq S$ a $|C| = r$.*

Kombinace a podmnožina je vlastně to samé, jak uvádí i autor knihy *Introductory Combinatorics*:

„*Thus a combination of S is a choice of a subset of S. As a result, the terms combination and subset are essentially interchangeable, and we shall generally use the more familiar subset rather than perhaps the more awkward combination, unless we want to emphasize the selection process.*“[1]

S touto citací souhlasíme. V teorii množin jsme se s pojmem kombinace ještě nesetkali a jediné místo, kde budeme kombinaci používat, je v překladu Ramseyovy věty v druhé kapitole. Tam jsme tento pojem zachovali proto, abychom nezměnili původní znění věty. Jinak budeme mluvit o podmnožinách.

Na úplný závěr ještě připomeneme, že $\binom{n}{k}$ se nazývá kombinační číslo a značí počet k-prvkových podmnožin n prvkové množiny. Kombinační číslo se objevuje v důkazu konečné Ramseyovy věty při zdůvodnění, že nadefinovaný strom splňuje podmínky pro použití Kőnigova lemmatu.

2. Ramseyův článek

Kapitola se zabývá článkem *On the Problem of Formal Logic* [15], kde byly Ramseyovy věty poprvé formulovány a dokázány. Nejdříve uvedeme (v našem překladu) původní znění vět A, B a C, které se v článku vyskytují.

Ve druhé podkapitole představíme původní důkaz nekonečné Ramseyovy věty, ale pokusíme se jak větu, tak důkaz přetlumočit do dnešního znění za současného zachování původního postupu důkazu. Ve třetí kapitole představíme jeden z moderních důkazů Ramseyovy věty. Až po něm porovnáme původní důkaz s tím, který bude uveden ve třetí kapitole.

V závěrečné části této kapitoly popíšeme, co je tématem Ramseyho článku a hlavní výsledek článku.

2.1 Původní Ramseyovy věty

Na začátku svého článku Ramsey formuluje a dokazuje věty, *„which have an indipendent interest and are most conviniently set out by themselves beforehand“*[15]. Tato část obsahuje překlad Ramseyho formulace těchto vět s krátkým komentářem. Věta A níže může být považována za nekonečnou Ramseyovu větu a Věta B za její konečnou verzi.

Věta 5 (Věta A)**.** *Nechť Γ je nějaká nekonečná třída. Nechť jsou μ a r kladná celá čísla. A nechť jsou všechny podtřídy Γ, které mají právě r prvků, nebo, jak bychom mohli říci, nechť jsou všechny r-členné kombinace prvků z Γ libovolným způsobem rozděleny do μ vzájemně disjunktních tříd C_i $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ tak, že každá r-členná kombinace je prvkem právě jedné třídy. Za předpokladu Axiomu výběru, musí potom Γ obsahovat nekonečnou podtřídu Δ takovou, že všechny r-členné kombinace prvků z Δ patří do stejné C_i.*

Ve větách níže značí r, n, k a μ kladná celá čísla. Γ_m a Δ_n, Δ_k třídy, které mají po řadě o m, n a k prvcích. C_i jsou třídy, jejichž prvky jsou kombinace a i je pouze index. Nijak se nevztahuje k počtu prvků C_i.

Věta 6 (Věta B)**.** *Pro daná r, n a μ lze nalézt m_0 takové, že, když je $m \geq m_0$ a r-členné kombinace nějaké Γ_m jsou libovolným způsobem rozděleny do μ vzájemně disjunktních tříd $C_i (i = 1, 2, \ldots, \mu)$, pak musí Γ_m obsahovat podtřídu Δ_n takovou, že všechny r-členné kombinace prvků z Δ_n patří do stejné C_i.*

Věta 7 (Věta C)**.** *Pro jakákoliv r, n a k taková, že $n + k \geq r$, existuje m_0 takové, že, když je $m \geq m_0$ a r-členné kombinace nějaké Γ_m jsou rozděleny do dvou vzájemně disjunktních tříd C_1 a C_2, pak musí Γ_m obsahovat dvě vzájemně disjunktní podtřídy Δ_n a Δ_k takové, že všechny r-členné kombinace prvků z $\Delta_n + \Delta_k$, které obsahují aspoň jeden člen z Δ_n, patří do stejné C_i.*

Místo třída bychom dnes psali množina a místo $\Delta_n + \Delta_k$ spíše $\Delta_n \cup \Delta_k$. Jako zajímavost dále zmiňme, že Ramsey nazývá Axiom výběru *„axiom of selections“*[15].

2.2 Původní důkaz nekonečné Ramseyho věty

Věta 8 (Věta A*)**.** *Nechť je Γ nekonečná množina a nechť jsou c a k kladná celá čísla. A nechť je $\pi : [\Gamma]^k \to c$ obarvení, pak existuje nekonečná množina $H \subseteq \Gamma$, která je homogenní pro obarvení π.*

Důkaz.

Dokazovat budeme dvojitou indukcí. Nejdříve tvrzení dokážeme pro $k = 2$ indukcí podle počtu barev. Potom použijeme indukci na k

Pokud je pouze jedna barva, tak není co dokazovat. Mějme tedy dvě barvy a pro přehlednost se domluvme, že 0 bude červená a 1 modrá.

Pokud máme $k = 1$, tak je tvrzení triviální[1].

Nechť tvrzení platí pro $k = n - 1$ a dokazujeme pro $k = n$.

Popíšeme hypotetickou konstrukci množiny, ve které jsou všechny dvoji obarveny červenou barvou. Dejme tomu, že Γ obsahuje $x_1 \in \Gamma$ a nekonečnou podmnožinu $\Gamma_1 \subseteq \Gamma - \{x_1\}$ takové, že všechny prvky množiny $\{z \mid z \in [\Gamma_1]^n \& x_1 \in z\}$ dostanou červenou barvu. Dále pak Γ_1 obsahuje x_2 a nekonečnou podmnožinu $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1 - \{x_2\}$ takové, že všechny $[\Gamma_2]^{n-1} \cup \{x_2\}$ dostanou červenou barvu. A takto buď můžeme pokračovat a vzniknou posloupnosti $x_1, x_2, x_3, \ldots$ a $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$, nebo daná konstrukce v nějakém kroku selže.

- Pokud konstrukce neselže, tak polož $H = \{x_i \mid i \geq 1\}$. Všechna x jsou potom různá, protože, když je $r > s$, pak $\forall t < r$ platí, že $x_r \in \Gamma_t$, ale $x_s \notin \Gamma_s$. Množina H je tedy nekonečná.

  Dále ukážeme, že H je červená homogenní množina pro obarvení π. Mějme danou n-tici prvků z H, označme ji třeba N. Najdeme x_j, které má v dané n-tici index j. Fixujme index j. Potom je pravda, že $N - \{x_j\} \subset \Gamma_j$. A konstrukce nám říká, že všechny n-tice tvaru $\{x_j\} \cup [L]^{n-1}$, kde $L \in \Gamma_l$ a $l > j$, dostanou červenou barvu.

- Pokud konstrukce v kroku a selže, pak nejsme schopni z množiny Γ_{a-1}[2] vybrat prvek x_a a nekonečnou množinu $\Gamma_a \subseteq \Gamma_{a-1} - \{x_a\}$ tak, aby všechny prvky množiny $\{z \mid z \in [\Gamma_a]^n \& x_a \in z\}$ dostaly červenou barvu.

  Fixujme libovoné $y_1 \in \Gamma_{a-1}$. Nadefinujeme obarvení $\pi_{y_1} : [\Gamma_{a-1} - \{y\}]^{n-1} \to 2$ tak, že

  $$\pi_{y_1}(x) = \pi(x \cup \{y_1\}).$$

  Indukční předpoklad říká, že pro množinu $\Gamma_{a-1} - \{y_1\}$ a obarvení π_{y_1} najdeme nekonečnou homogenní množinu Δ_1. Navíc bude platit, že se jedná o modrou homogenní množinu. Kdyby totiž Δ_1 byla červená, tak můžeme vzít $\Delta_1 = \Gamma_a$ a $x_a = y_1$. Δ_1 je nekonečná podmnožina Γ_{a-1} a opět můžeme fixovat libovolný prvek $y_2 \in \Delta 1$ a nadefinujeme obarvení $\pi_{y_2} [\Delta_1 - \{y_2\}]^{n-1} \to 2$ tak, že

[1] Ramsey toto dále nerozvádí, ale v takovém případě jde o Dirichletův princip.

[2] Ramsey to v článku neudává, ale pro úplnost doplňme, že $\Gamma_0 = \Gamma$. Toto je důležité pouze v případě, že konstrukce selže už v prvním kroku.

$$\pi_{y_2}(x) = \pi(x \cup \{y_2\}).$$

Pro množinu $\Delta_1 - \{y_2\}$ a obarvení π_{y_2} dostaneme opět (podle analogického argumentu) nekonečnou modrou homogenní podmnožinu Δ_2.

A tak dále, až nám vzniknou posloupnosti $y_1, y_2, y_3, \ldots$ a $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$. Uvaž množinu $H = \{y_i \mid i \geq 1\}$. Podle podobného argumentu jako pro $H = \{x_i \mid i \geq 1\}$ v předchozím bodě dostaneme, že H je nekonečná modrá homogenní množina pro obarvení π.

Teď dokazujme indukcí podle počtu barev. Víme, že tvrzení platí pro dvě barvy a dále předpokládejme, že tvrzení platí pro $c = v - 1$ a chceme dokázat pro $c = v$.

Nechť dáno Γ, k a obarvení $\pi : [\Gamma]^k \to v$. Nadefinujeme nové obarvení $\pi_1 : [\Gamma]^k \to v - 1$ následovně:

$$\pi_1(x) = \begin{cases} \pi(x) & \text{pokud platí } \pi(x) < v - 2, \\ v - 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nové obarvení je vlastně stejné jako to staré, akorát jsme poslední dvě barvy spojily do jedné. Z indukčního předpokladu víme, že pro $\pi_1 : [\Gamma]^k \to v - 1$ nalezneme nekonečnou homogenní množinu H v nějaké barvě. Pokud je to některá z barev 0 až $v - 3$, tak nám H svědčí i pro obarvení π. Pokud má H barvu $v - 2$, tak víme, že nekonečná homogenní množina bude v barvě $v - 2$, nebo $v - 1$. Potom použijeme fakt, že jsme větu pro dvě barvy již dokázali. Máme nekonečnou množinu H a nadefinujeme obarvení $\pi_2 : [H]^k \to 2$ následovně:

$$\pi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud platí } \pi(x) = v - 2, \\ 1 & \text{pokud platí } \pi(x) = v - 1. \end{cases}$$

Homogenní množina pro obarvení π_2 je pak i hledaná homogenní množina pro obarvení π. Tím je ukončen důkaz pro jakékoliv konečné c, tedy i důkaz celé věty.

□

2.3 Obsah článku

Na začátku článku je uvedena věta A i s důkazem. Větu A Ramsey v článku dále nepotřebuje. To dokládá následuící pasáž:

„*The theorems which we actually require concern finite classes only, but we shall begin with a similar theorem about infinite classes which is easier to prove and gives a simple example of the metod of argument*“[15].

Dále je dokázána věta B a věta C se bere jako ekvivalent věty B pro $\mu = 2$. Ramseyho slovy: „*That this is equivalent to Theorem B with $\mu = 2$ is evident from the fact that, for any given r, Theorem C, for n and k, asserts more than Theorem B for n, but less than Theorem B for $n + k$.*“[15]. Věta C tedy slouží jako báze indukce v důkazu věty B.

Ramsey uvede i první mez Ramseyho funkce[3]. Speciálně dochází k tomu, že pro $r = 2$ a $\mu \neq 2$ můžeme vzít:

$$m_0 = n \overbrace{!!!!!\ldots!}^{\mu-1 \text{ krát}}. \tag{2.1}$$

Ramsey nebyl s tímto výsledkem spokojen. Poznámka pod čarou na straně 270 začíná větou: *„But this value is, I think, still much too high.“*[15]

Základní horní mez Ramseyho funkce bude uvedena v kapitole Konečná Ramseyho věta. Zajímavostí je, že už v roce 1933 přišel s vylepšením odhadu Thoralf Skolem. Jeho článek [18] obsahuje první zlepšení horní meze Ramseyho funkce. První větu jeho článku bychom mohli přeložit přibližně takto:

Věta 9. *Pokud bychom dvojice vytvořené z m prvků rozdělili do μ množin, pak mezi m prvky existuje n prvků takových, že se všechny dvojice vytvořené z těchto n prvků vyskytují ve stejné množině.*

K tomu udává svůj odhad:

$$m \geq \frac{\mu^{\mu n - \mu + 2} - 1}{\mu - 1}. \tag{2.2}$$

Zpět k Ramseyho článku. Ramsey v něm řeší *Entscheidungsproblem*, který popisuje jako: *„problem of finding a regular procedure to determine the truth or falsity of any given logical formula“*[15]. Ramsey se v článku snaží zlepšit výsledek Bernayse a Schöfinkela a přichází s tím, že pro formule tvaru

$$\exists x_0, x_1, \ldots, x_m \forall y_0, y_1, \ldots, y_n \varphi \left(x_0, x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_n\right),$$

kde formule φ neobsahuje žádné kvantifikátory, taková procedura (algoritmus) existuje. Věta B je v článku jako pouhé lemma. Na tomto místě není prostor přesně rozebrat, na co je věta v článku potřeba. Uvedeme pouze, že Ramsey ji použije na to, že od universa s určitým počtem prvků musí už něco platit.

V tomto odstavci uvedeme některé další zajímavosti, které se týkají článku *On a Problem of Formal Logic*, které jsou založeny na zdroji [3]. Ukázalo se, že odpověď na *Entscheidungsproblem* je negativní. Obecně takovou proceduru najít nelze. Na druhou stranu se dá říct, že Ramseyho výsledek je nejsilnější pozitivní výsledek, který lze v tomto směru získat. A to v tom smyslu, že při otočení pořadí kvantifikátorů už proceduru nenajdeme. Další zajímavostí je, že Ramsey v důkazu přichází s pojmem *idiscernibles.* Tento pojem se potom (zřejmě nezávisle na Ramseym) objevuje v důkazu Morleyho Věty (důležité věty z Teorie modelů) a Paris-Harringtonovy věty, což je věta, která ukazuje nedokazatelnost Paris-Harringtonova principu v Peanově aritmetice.

Na závěr kapitoly ještě něco k rokům, které se uvádějí v literatuře. Často se cituje rok 1930, kdy byl článek vydán. Pokud se mluví o tom, kdy Ramsey článek napsal, nebo o tom, kdy byly věty poprvé dokázány, tak někteří autoři uvádí rok 1928. Tento rok je uveden na titulní straně článku jako rok, kdy byl článek obdržen redakcí. Pokud jsou uváděna jiná data, nebyly jsme pro ně schopni najít odůvodnění.

[3] Pojem Ramseyho funkce bude vysvětlen ve čtvrté kapitole.

3. Nekonečná Ramseyova věta

V této kapitole vyslovíme a dokážeme nekonečnou Ramseyovu větu. Na závěr kapitoly taky definujeme Šipkovací notaci, kterou budeme dále používat hlavně v kapitole 5, kde budeme zkoumat možná zobecnění.

3.1 Nekonečná Ramseyova věta

Nekonečnou Ramseyovu větu už jsme vlastně vyslovili, když jsme se zabývali původním Ramseyho článkem. Nynějším cílem je moderní formulace věty a dále důkaz, který jsme v předchozí části vynechali. Ve formulaci i v důkazu budeme (volně) postupovat podle knihy [10].

Věta 10. *(nekonečná Ramseyho věta)*
Pro každé kladné přirozené číslo $n \in \omega$, pro jakékoliv kladné číslo $r \in \omega$, libovolnou $S \in [\omega]^{\omega}$ a jakékoliv obarvení $\pi : [S]^{n} \to r$ vždy najdeme homogenní množinu $H \in [S]^{\omega}$.

Pokud tedy budeme barvit nějaké n-tice nekonečné podmnožiny přirozených čísel konečně mnoha barvami, tak najdeme nekonečnou homogenní množinu. Důkaz bude proveden indukcí podle n.

Důkaz.
Nechť je dáno kladné $r \in \omega$ a nechť je dána množina S.
Báze:
Naše báze indukce bude pro $n = 2$. Nechť $\pi : [S]^2 \to r$ je dáno. Máme tedy obarvené dvojice nějaké nekonečné podmnožiny $S \subseteq \omega$ a chceme ukázat, že existuje nekonečná $H \subseteq S$ taková, že všechny dvojice utvořené z prvků H mají stejnou barvu. Budeme vytvářet obarvení ρ, které bude obarvením prvků (nikoliv dvojic), a posloupnost $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 \dots$, které nakonec budou tvořit množinu H.

Popišme krok v konstrukci posloupnosti a_i pro $i \in \omega$: Položíme $S_0 = S$ a vezmeme $a_0 = min\,(S_0)$. Nadefinujeme obarvení: $\tau_0 : S_0 \setminus \{a_0\} \to r$ tak, že $\tau_0\,(x) = \pi\,(\{a_0, x\})$. Vrcholy tedy dostanou barvu, kterou měla hrana, kterou byly spojeny s a_0. Protože nekonečně mnoho vrcholů dostalo jednu z konečného množství barev, tak podle Dirichletova principu existuje množina H_0 taková, že všechny vrcholy z H_0 mají tu samou barvu, kterou označíme ρ_0. Tedy $\rho_0 = \tau_0\,(x)$ pro $x \in H_0$. Položme $S_1 = H_0$ a $a_1 = min\,(S_1) \dots$

Tento postup můžeme ω-krát opakovat a dostaneme posloupnosti: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 \dots$ a $\rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 \dots$. Definujeme množinu $A = \{a_n \mid n \in \omega\}$ a obarvení $\rho : A \to r$ jako $\rho\,(a_n) = \rho_n$. Opět jsme tedy nekonečnou množinu obarvili konečně mnoha barvami a můžeme použít Dirichletův princip na to, abychom nalezli homogenní $H \subseteq A$. Tato množina H bude homogenní i pro naše obarvení π, protože z definice obarvení zavedených obarvení máme pro všechna $n \in \omega$ a $k > n$: $\pi\,(\{a_n, a_k\}) = \tau_n = \rho\,(a_n)$.
Indukční krok:
Nechť tvrzení platí pro $n \geq 2$ a dokazujeme pro $n + 1$. Nechť je π obarvení $\pi : [S]^{n+1} \to r$. Zkonstruujeme množiny $A = \{a_i \mid i \in \omega\}$, $\{S_i \mid i \in \omega\}$, $\{\pi_i \mid i \in$

$\omega\}$ a $\{H_i \mid i \in \omega\}$ takto: $S_0 = S$, $a_0 = min\,(S)$, $\pi_0 : [S \setminus \{a_0\}]^n \to r$ definované jako $\pi_0\,(x) = \pi\,(x \cup \{a_0\}) \to r$. Podle indukčního předpokladu bude existovat nekonečná množina H_0 homogenní pro π_0. Dále: $S_{i+1} = H_i$, $a_{i+1} = min\,(S_{i+1})$, $\pi_{i+1} : [S_{i+1} \setminus \{a_{i+1}\}]^n \to r$ definované jako $\pi_{i+1}\,(x) = \pi\,(x \cup \{a_{i+1}\})$ a H_{i+1} je nekonečná množina, která je homogenní pro π_{i+1}.

Uvědomme si, že máme nějaká obarvení π_i, která jsou nadefinována pořád stejně, akorát se zúžuje $dom\,(\pi_i)$. Podobně jako v bázi teď nadefinujeme obarvení pro prvky množiny A. Nechť je $\rho : A \to r$ obarvení definováno jako $\rho\,(a_i) = \pi_i\,(x)$, kde x je libovolná n-tice prvků z H_i, takže a_i dostane tu barvu, která svědčí pro homogenitu H_i. Můžeme použít Dirichletův princip (indukční předpoklad) a dostaneme nekonečnou množinu H, která je homogenní pro ρ. Tato množina je množina, kterou jsme hledali, protože H je homogenní i pro π z toho, že pro libovolnou $n+1$-tici prvků z H: $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ platí $\rho\,(x_0) = \pi_i\,(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \pi\,(\{x_0, x_1, \ldots, x_n\})$, kde i je krok, ve kterém se $a_i = x_0$. Tím je důkaz hotov.

□

Zde si dovolíme udělat srovnání Ramseyho a důkazu uvedeného výše. Nejdříve zmíníme, že Ramseyův důkaz je dvojitou indukcí, ale druhý důkaz je indukcí pouze přes velikost podmnožin, které barvíme. Pro úplnost uvedeme, že třetí známý typ důkazu nekonečné Ramseyho věty je přes ultraprodukty a je uveden například v [9]. Ramseyův důkaz a důkaz z knihy [10] nám přijdou podobné, až na malé vyjímky. V Ramseyově důkazu je dvojitá indukce, což mu dovoluje jistou přehlednost, která při prvním čtení důkazu z této kapitoly chybí. Je asi dobré připomenout, že v Ramseyho znění věty je explicitní zmíňka o Axiomu výběru. Pro někoho může být výhoda důkazu z této kapitoly ta, že nerozebíráme případy toho, jestli se dokončí nějaká hypotetická konstrukce. Na druhou stranu v Ramseyově důkazu nepřecházíme až k obarvení prvků.

V důkazu je báze indukce $n = 2$. Mohli bychom začít u $n = 1$ a například Jech v [11] takto postupuje. Ale pouze bychom řekli, že jde o případ nekonečného Dirichletova principu a jsme hotoví. Vybrali jsme jako bázi indukce 2, protože si myslíme, že je to jednodušší než indukční krok, ale zároveň to nastiňuje, co se v indukčním kroku děje (což bychom z $n = 1$ moc neviděli). Druhým důvodem, proč jsme se rozhodli postupovat tímto způsobem, je, že barvení dvojic je speciální případ, který si lze pro dvě barvy představit jako existenci, či neexistenci hran grafu. Pro více barev si potom lze představit, že obarvujeme hrany úplného grafu. Proto se případu, kdy barvíme dvojice někdy říká Ramseyho věta pro grafy (někdy se uvažují navíc pouze konečné grafy). Pro úplnost uvedeme přesné znění Ramseyho věty pro grafy ve čtvrté kapitole.

3.2 Šipkovací notace

V této části nadefinujeme šipkovací notaci, která je často používána pro zachycení výsledků o rozkladech různých množin. Šipkovací notace je poprvé uvedena v článku [5]. Je více způsobů, jak danou notaci zadefinovat. My zde uvedeme tři definice. Nejdříve zvlášť pro ordinály a kardinály a potom si řekneme, jak by šla definice spojit v jednu, popřípadě ještě rozšířit.

Definice 15 (Šipkovací notace pro ordinály). *Nechť jsou α, γ a β_ζ pro všechna*

$\zeta < \gamma$ ordinály a nechť je dále r libovolný nenulový kardinál. Potom výraz

$$\alpha \to (\beta_\zeta)^r_{\zeta \in \gamma} \tag{3.1}$$

znamená, že pro každé obarvení $\pi : [\alpha]^r \to \gamma$, existují ordinál $\delta < \zeta$ a množina $H \subseteq \alpha$ takové, že H je homogenní množina pro obarvení π a $otp\,(H) = \beta_\delta$.

Definice 16 (Šipkovací notace pro kardinály)**.** *Nechť jsou κ, γ a λ_ζ pro všechna $\zeta < \gamma$ kardinály a nechť je dále r libovolný nenulový kardinál. Potom výraz*

$$\kappa \to (\lambda_\eta)^r_{\eta \in \gamma} \tag{3.2}$$

znamená, že pro každé obarvení $\pi : [\alpha]^r \to \gamma$, existují ordinál $\delta < \zeta$ a množina $H \subseteq \alpha$ takové, že H je homogenní množina pro obarvení π a $|H| = \lambda_\delta$.

K tomu, abychom nadefinovaly šipkovací notaci v obecnější podobě, budeme potřebovat nějaké definice. Budeme volně postupovat podle knihy [4] a smyslem definic bude, abychom neměli *otp* pouze pro dobře uspořádané množiny, kdy je *otp* vždy roven nějakému ordinálu, ale pro jakékoliv částečně uspořádané množiny.

Definice 17. *Nechť jsou $\langle X, < \rangle$ a $\langle Y, \prec \rangle$ částečně uspořádané množiny. Řekneme, že částečně uspořádané množiny $\langle X, < \rangle$ a $\langle Y, \prec \rangle$ jsou podobné, pokud jsou* order isomorphic*. Jinak řečeno, pokud existuje bijekce $f : X \to Y$ taková, že*

$$\forall x, y \in X\, (x < y \leftrightarrow f\,(x) \prec f\,(y))\,. \tag{3.3}$$

Definice 18 (Typ uspořádání částečně uspořádané množiny)**.** *Typ uspořádání částečně uspořádané množiny $\langle X, < \rangle$ definujeme jako*

$$\begin{aligned} otp\langle X, < \rangle =& \{\langle |X|, \prec \rangle \mid \langle |X|, \prec \rangle \text{je částečně uspořádaná množina a} \\ & \langle |X|, \prec \rangle a \langle X, < \rangle \text{jsou podobné}\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Definice 19 (*The ordinary partition symbol*, [4])**.** *Výraz*

$$a \to (b_i)^r_{i \in I} \tag{3.5}$$

má smysl, pokud je I libovolná množina a všechny ostatní proměnné označují kardinál, nebo typ uspořádání částečně uspořádané množiny. Za těchto podmínek výraz znamená, že pro každé obarvení $\pi : [A]^r \to I$, kde A je množina druhu a (tedy velikosti a, nebo typu a, podle toho zda a je kardinál nebo typ uspořádání), existují $i \in I$ a množina $H \subseteq A$ takové, že H je homogenní množina pro obarvení π a H je druhu b_1.

Pro třetí definici se musíme domluvit, jak budeme značit ordinály a kardinály.

Obvykle se mezi $\omega, \omega_1, \omega_2 \ldots$ a $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 \ldots$ dělá ten rozdíl, že ω_1 značí ordinál spolu s jeho uspořádáním $\in$, ale při značení $\aleph_1$ se bere v potaz jen daná množina, bez uspořádání.

Ukazuje se, že, pokud v šipkovací relaci vystupují jen ordinály, nebo kardinály, tak není rozdíl podstatný. Problém by nastal, pokud bychom povolili i jiné typy uspořádání.

Pokud máme dány I a r všechna b_i jsou kardinály, nebo ordinály, pak

$$\aleph_\alpha \to (b_i)^r_{i \in I} \tag{3.6}$$

platí pro nějaký ordinál α právě tehdy, když platí

$$\omega_\alpha \to (b_i)^r_{i \in I} \, . \tag{3.7}$$

Pokud bychom ovšem povolili i jiné typy uspořádání, tak začne na tom, co označuje kardinály, co ordinály, záležet. Situaci se pokusíme objasnit příkladem převzatým z knihy [4]. Nechť η označuje typ uspořádání racionálních čísel. Potom

$$\eta \to (\eta, \aleph_0)^2 \, , \tag{3.8}$$

ale

$$\eta \not\to (\eta, \omega)^2 \, . \tag{3.9}$$

Dále v práci budeme používat třetí definici.

Pokud by se na pravé straně v exponentu objevil místo kardinálu γ výraz tvaru $\leq \gamma$ ($< \gamma$) pro nějaký kardinál γ tak tomu rozumíme, že se barví množina $[A]^{\leq\gamma}$ ($[A]^{<\gamma}$). Význam $[A]^{\leq\gamma}$ i $[A]^{<\gamma}$ je uveden v první kapitole.

Notaci budeme používat, až se budeme zabývat možnými způsoby, jak zobecnit Ramseyho věty. Zavedli jsme jí ale už teď, protože v další kapitole nám poslouží ke komentáři toho, co je vlastně konečná Ramseyho věta a pomocí ní definujeme Ramseyho funkci a Ramseyova čísla.

3.3 Grafy a šipkovací notace

V této podkapitole se podíváme na souvislost mezi námi zavedenou šipokovací notací a grafy. Tato interpretace je dobrá hlavně v případech, kdy se snažíme najít protipříklad na nějakou relaci.

Nechť máme obarvení $\pi : [\kappa]^2 \to \lambda$. Potom si můžeme představit, že barvíme hrany úplného grafu o κ vrcholech λ barvami a nalézt homogenní podmnožinu znamená nalézt úplný podgraf takový, že všechny jeho hrany budou obarveny stejnou barvou.

Pokud navíc barvíme pouze dvěma barvama, tak to můžeme brát tak, že pro libovolný (ne nutně úplný graf) graf o κ vrcholech hledáme kliku, nebo nezávislou množinu.

Je možné použít grafy rovnou v definici šipkovací notace. Tento způsob je ovšem dobrý pouze v případě, že barvíme dvojice. Pro vyšší ká-tice bychom byli nuceni zavést hypergrafy a opět ztratíme možnost si dané problémy představit jednoduše.

3.4 Rozličné poznámky k šipkovací notaci.

V této části uvedeme další fakta ohledně šipkovací notace. Půjde pouze o poznámky bez důkazů.

1. Už jsme se zmínili o tom, že šipkovací notace byla poprvé nadefinována v článku [5]. Tento článek napsali Richard Rado a Paul Erdős. Přesto se v [9] píše, že šipkovací notaci vymyslel Rado. Bohužel se nám nepodařilo ověřit, jestli lze autorství připsat právě/pouze jemu.

2. Co se týče terminologie, tak pokud máme relaci $\kappa \to (\alpha_i)^r_{i\in I}$, pak můžeme říkat, že κ šipkuje[1] ... Dále se κ nazývá zdroj[2] a potom máme cíl[3] a domluvme se, že jako cíl můžeme označit celou závorku za šipkou, nebo pouze nějaký její člen. Význam by měl být vždy jasný z kontextu.

3. Platnost *partition relation* se nezmění, pokud budeme změníme pořadí, ve kterém jsou uvedeny cíle.

4. Pokud chceme vyjádřit negaci relace, pak to uděláme obvyklým způsobem, relaci přeškrtneme ($\not\to$). Pokud dokazujeme negaci šipkovací relace, tak vlastně hledáme protipříklad. Z toho, co bylo uvedeno v předchozí podkapitole, vyplývá, že si protipříklad můžeme za určitých předpokladů představit jako konkrétní obarvení hran úplného grafu.

5. Pokud jsou v všechny cíle stejné, tak danou relaci nazýváme vyváženou[4]. V takovém případě píšeme pouze $\kappa \to (\alpha)^r_I$. V opačném případě je relace nevyvážená.

6. Místo indexovací množiny I můžeme také uvažovat nějaký kardinál. Platnost relace se totiž nezmění, pokud nahradíme I množinou se stejnou mohutností.

3.5 Základní vlastnosti šipkovací notace.

V této sekci uvedeme některé vlastnosti šipkovací notace. Vlastností šipkovací notace je více a lze je najít v příslušné literatuře. Na tomto místě uvedeme pouze ty, které budeme dále potřebovat.

Fakt 11. *Nechť jsou dány kardinál κ, indexovací množina I, číslo r a nechť je pro každé i α_i kardinál, nebo ordinál. Pro všechna kardinální čísla $\lambda > \kappa$ pak platí:*
Jestliže $\kappa \to (\alpha_i)^r_{i\in I}$, potom $\lambda \to (\alpha_i)^r_{i\in I}$.

Fakt 12. *Nechť jsou dány kardinál κ, indexovací množina I, číslo r a nechť jsou pro každé i α_i i β kardinály, nebo ordinály takové, že $\alpha_i \leq \beta_i$. Pak platí:*
Jestliže $\kappa \not\to (a_i)^r_{i\in I}$, potom $\kappa \not\to (\beta_i)^r_{i\in I}$.

Věty slouží k odvození nových relací, pokud víme, že už nějaké relace platí. Když budeme v páté kapitole zkoumat zobecnění Ramseyových vět, tak budeme znalost těchto výsledků předpokládat, ale nebudeme je explicitně zmiňovat. Například relace dokázaná pro ω platí i tehdy, pokud bude jako zdroj ω_1.

[1] Z anglického *arrows.*
[2] Anglicky *resource.*
[3] Z anglického *goal.*
[4] Z anlického *balanced.*

4. Konečná Ramseyova věta

V této kapitole dokážeme Konečnou Ramseyho větu, definujeme Ramseyho funkci, ukážeme jeden klasiký ohad Rmaseyho funkce a ukážeme pár hodnot Ramseyho funkce.

4.1 Konečná Ramseyova věta

Věta 13. *(Konečná Ramseyho věta) Pro všechna kladná $m, n, r \in \omega$ taková, že $n \leq m$, existuje $N \in \omega$ takové, že $N \geq m$ pro jakékoliv obarvení $\pi : [N]^n \to r$ vždy najdeme množinu $H \in [N]^m$, která je homogenní pro π.*

Důkaz. Důkaz bude sporem. Zkonstruujeme obarvení, které by bylo ve sporu s Nekonečnou Ramseyho větou.

Nechť tedy Konečná Ramseyho věta neplatí, takže máme m, n, r, $n \leq m$ takové, že pro všechna $N \in \omega$, $N \geq m$ existuje obarvení $\pi_N : [N]^n \to r$ takové, že žádná $H \in [N]^m$ není homogenní. Zkonstruujeme obarvení $\pi : [\omega]^n \to r$ takové, že žádná nekonečná množina $M \subseteq \omega$ není homogenní, což by byl spor s Nekonečnou Ramseyho větou. Toto obarvení zkostruujeme pomocí Königova lemmatu, takže budeme potřebovat nekonečný, konečně se větvící strom.

Kořen stromu bude $\emptyset$ a ostatní vrcholy stromu budou obarvení $\pi_N : [N]^n \to r$ pro $N \geq m$ taková, že neexistuje $H \in [N]^m$ homogenní pro π_N. Hrany budou v grafu budou realizovány takto: Existuje hrana mezi $\emptyset$ a všemi π_m. Dále existuje hrana mezi π_s a π_r, pokud je $s < r$, π_r je rozšíření π_s. Toto je náš strom.

Abychom mohli použít Königova lemma, musíme odůvodnit, že máme nekonečný, konečně se větvící strom. Máme nekonečný strom, protože pro každé $Ngeqm$ budeme mít podle předpokladu (který chceme nakonec dovést ke sporu) aspoň jedno π_N. Na nultém levelu stromu máme kořen. V kapitole 1 jsme řekli, že n-prvkových podmnožin N-prvkové množiny je $\binom{N}{n}$. Takže pro nějaké N máme maximálně $r^{\binom{N}{n}}$ prvků stromu, které jsou obarvení π_N. Každé π_N má jen konečně mnoho rozšíření, která jsou tvaru π_{N+1}(protože funkcí tvaru $\pi N + 1$ je konečně, tak i těch, která jsou rozšíření, bude konečně). Na závěr je dobré si uvědomit, že pokud máme π_N, tak pouhou restrikcí obarvení na n-tice vytvořené z $N - 1$ dostáváme π_{N-1} takové, že π_N je rozšíření π_{N-1}. Tím jsme tedy dokázali, že máme nekonečný, konečně se větvící strom.

Kőnigovo lemma aplikované na náš strom nám dává nekonečnou větěv. Máme tedy nekonečnou podmnožinu $I \in \omega$ takovou, že naše větev obsahuje pro každé $i \in I$ právě jednu funkci tvaru π_i. Potom by

$$\bigcup_{i \in \omega} \pi_i$$

byla definice obarvení n-prvkových podmnožin nekonečné množiny r barvami, které nemá žádnou m-prvkovou homogenní podmnožinu. Tedy nemá ani nekonečnou homogenní podmnožinu, což by byl spor s Nekonečnou Ramseyho větou. Takže musí existovat N, pro které jsou všechna obarvení $\pi_N : [N]^n \to r$ taková, že pro ně existuje homogenní $H \in [N]^m$. Tím je důkaz dokončen.

$\square$

Tím jsme z Nekonečné Ramseyho věty dokázaly Konečnou Ramseyho větu. Tento důkaz nebývá někdy považován za dobrý, protože víme, že existuje nějaké N, ale z důkazu samotného nemáme žádné meze na dané N. Nějaké meze budou uvedeny níže a pro přímý důkaz odkazujeme čtenáře na knihu [7].

Dále musíme okomentovat, co jsme dokázali. V zápisu pomocí Šipkovací notace máme, že $\forall m, n, r\ \exists N\ N \to (m)^n_r$. Za Ramseyho větu bychom ovšem mohli považovat i jiné tvrzení

Věta 14. *Pro všechna kladná r, k a kladná $n_1, \dots, n_r$ existuje m takové, že*

$$m \to (n_1, \dots, n_r)^k\,. \tag{4.1}$$

Rozdíl je samozřejmě v tom, že jedna formulace je *balanced partition* a druhá *unbalanced*.

V minulé kapitole jsme při komentování důkazu Nekonečné Ramseyho věty uvedly, že báze indukce může představovat verzi pro grafy. Teď uvedeme plné znění (Konečné) Ramseyho věty pro grafy podle knihy [13].

Věta 15 (Ramseyova věta pro grafy)**.** *Nechť je G graf, který má alespoň $\binom{k+l-2}{k-1}$ vrcholů. Potom $\omega(G) \geq k$ nebo $\alpha(G) \geq l$, kde $\omega(G)$ značí maximální počet vrcholů úplného podgrafu G a $\alpha(G)$ značí maximální počet vrcholů nezávislé množiny vrcholů G.*

4.2 Ramseyho funkce a její vlastnosti

V minulé kapitole jsme definovali Šipkovací notaci. Zde pomocí ní nadefinujeme Ramseyho funkci a uvedeme si nějaké její meze a vlastnoti.

Definice 20 (Ramseyho funkce)**.** *Nechť a, c, $b_0, b_1, \dots, b_c$ a r jsou přirozená čísla a nechť platí*

$$a \to (b_0, b_1, \dots, b_c)^r \tag{4.2}$$

.

Potom

$$R_r(b_0, b_1, \dots, b_c) = a \tag{4.3}$$

platí právě tehdy, když je a nejmenší přirozené číslo takové, že pro něj platí 4.2. Výraz tvaru

$$R_r(b_0, b_1, \dots, b_c) \tag{4.4}$$

potom nazýváme Ramseyho funkcí a a je Ramseyho číslo (pro dané argumenty Ramseyho funkce).

Pokud se u R explicitně neuvede dolní index, tak se tím myslí $r = 2$.

Ramseyho číslům $R(a, a)$ pro nějaké a se říká diagonální Ramseyho čísla.

Všechny vlastnosti Ramseyho funkce uvedeme bez důkazů.

První vlastností je symetrie. Tedy pro všechna a, b platí $R(a, b) = R(b, a)$. Dále pro všechna b platí $R(2, b) = b$ a pro všechna a platí $R(a, 1) = 1$.

Poslední vlastností, kterou zde uvedeme, je základní horní mez, kterou dokázali Erdős a Szekeres v roce 1935 v článku [6], *A combinatorial problem in geometry.*

Věta 16. *Pro všechna kladná přirozená čísla s, t platí:* $R\left(s,t\right) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$.

Důkaz.

Důkaz zde uveden nebude, ale řekneme alespoň, že je založen na fatku, že pro všechna kladná přirozená čísla s, t platí:

$$R\left(s,t\right) \leq R\left(s,t-1\right) + R\left(s-1,t\right). \tag{4.5}$$

$\square$

4.3 Malá Ramseyova čísla

Malá Ramseyho čísla jsou hodnoty Ramseyho funkce, u kterých máme ambici na to, že bychom je jednou mohli přesně znát. Nejde tedy o žádnou ostrou děfinici. Oproti tomu se pro velká čísla Ramseyova funkce zkoumá asymptoticky. Pak nejde o nalezení přesné hodnoty, ale o určení horní a dolní meze. Někdy se Ramseyova čísla omezují pouze na barvení dvěma barvama.

Uvedeme všechna známá netriviální Ramseyova čísla $R\left(a,b\right)$ pro $a \leq 10$ a $b \leq 10$: $R\left(3,3\right) = 6$, $R\left(3,4\right) = 9$, $R\left(3,5\right) = 14$, $R\left(3,6\right) = 18$, $R\left(3,7\right) = 23$, $R\left(3,8\right) = 28$, $R\left(3,9\right) = 36$, $R\left(4,4\right) = 18$, $R\left(4,5\right) = 25$. Tímto krátkým seznamem jsme jen chtěli demostrovat, že zjistit přesné hodnoty Ramseyho funkce je obtížný problém a je časté, že se k novým výsledkům v této oblasti dostaneme důkazem pomocí počítače. Toto nejsou všechna známá čísla, a to dokonce ani pro obarvení dvěma barvama. Je třeba známo, že $R\left(10,15\right) = 1313$. Dobrým zdrojem pro přehled výsledků z této oblasti je [14]. Barvení dvěma barvama je nejvíce známo. Uveďme alespoň jeden jiný výsledek: Je známo, že $R\left(3,3,3\right) = 17$.

5. Možná zobecnění

V této kapitole uvedeme nejdříve obecné věty, které pak použijeme pro získání relací, kde je jako zdroj ω, ω_1, ω_2, nebo $\aleph_\omega$. Zkoumáme možná zobecnění Ramseyových vět. Proto se ve výsledcích omezíme na relace, které mají alespoň jeden z cílů stejný jako zdroj.

Věta 17 (Erdős-Dushnik-Miller, [**?**])**.** *Pro všechny nekonečné kardinály κ platí: $\kappa \to (\kappa, \omega)^2$.*

Tato věta byla dokázána v článku [**?**]. Článek napsali Dushnik a Miller, ale v poznámce pod čarou děkují Erdősovi za nápad, jak dokázat danou relaci i pro singulární kardinály. Odtud tedy název Erdős-Dushnik-Millerova věta. V důkazu budeme postupovat podle knihy [4].

Důkaz.

Nechť je dán nekonečný kardinál κ a funkce (obarvení) $c : [\kappa]^2 \to 2$. A pro přehlednost řekneme, že 0 je červená a 1 modrá. Pro $x \in \kappa$ nadefinujeme

$$B(x) = \{y \in \kappa - \{x\} \mid f(\{x,y\}) = 1\}, \tag{5.1}$$

$B(x)$ je tedy množina bodů, které jsou s x spojeny modrou barvou.

Teď dokážeme lemma, které budeme dále potřebovat:

Lemma 18. *Když κ nemá nekonečnou modrou homogenní podmnožinu, pak existuje $X \subseteq \kappa$ taková, že $|X| = \kappa$ a pro každé $x \in X$ platí $|B(x) \cap X| < \kappa$.*

Důkaz. Budeme dokazovat obměnnou. Nechť tedy závěr neplatí a chceme najít nekonečnou modrou homogenní podmnožinu. Rekurzí nadefinujeme posloupnosti x_n a X_n pro $n \in \omega$. Položme $X_0 = \kappa$. Dále předpokládejme, že X_n už byla nadefinovaná a platí, že $|X_n|$. Nadefinujeme $x_n \in X_n$ tak, aby $|B(x_n) \cap X_n| = \kappa$. A nakonec $X_{n+1} = B(x_n) \cap X_n$. Tím jsme dostali nekonečnou modrou homogenní množinu $\{x_i \mid i \in \omega\}$. Je to modrá homogenní množina z toho důvodu, že pro každé $n < m < \omega$ platí $x_m \in X_{n+1} \subseteq B(x_n)$, takže je hrana $\{x_n, x_m\}$ modrá.

□

Teď pokračujeme v důkazu věty a rozlišíme 2 případy.

- Pokud je κ regulární, tak předpokládejme, že neexistuje červená homogenní množina velikosti κ. Chceme najít nekonečnou modrou homogenní množinu. Opět budeme dokazovat obměnnou. Ukážeme, že neplatí závěr lemmatu výše, z toho usoudíme, že nebude platit ani předpoklad a tím dostaneme hledanou nekonečnou modrou homogenní množinu.

  Nechť je $X \subseteq \kappa$ a $|X| = \kappa$. $R \subseteq X$ budeme chápat jako maximální červenou homogenní podmnožinu κ. Z předpokladu máme, že $|R| < \kappa$. Z toho, že R je maximální dostáváme, že $\forall x \in X - R$ existuje $y \in R$ taková, že $\{x,y\}$ je modrá. Takže

  $$X - R \subseteq \bigcup_{y \in R} (B(y) \cap X). \tag{5.2}$$

Protože se zabýváme regulárním κ a $|R| < |X| \subseteq \kappa$, pak musí pro nějaké $y \in R$ platit

$$|B(y) \cap X| = \kappa. \tag{5.3}$$

Tím jsme dokázali negaci lemmatu, takže máme homogenní množinu.

- Nechť neexistuje nekonečná modrá homogenní množina a hledáme červenou homogenní množinu velikosti κ. Aplikujeme lemma a dostáváme, že existuje $X \subseteq \kappa$ taková, že $|X| = \kappa$ a pro každé $x \in X$ platí

$$|B(x) \cap X| < \kappa. \tag{5.4}$$

Nechť $I = \langle \kappa_\lambda \mid \lambda < cf(\kappa) \rangle$ je rostoucí posloupnost regulárních kardinálů konvergujících ke κ a pro každé κ_λ nechť platí $|\kappa_\lambda| > cf(\kappa)$. A nechť X_λ, $\lambda < cf(\kappa)$ jsou po dvou disjunktní podmnožiny X takové, že $|X_\lambda| = \kappa_\lambda$. Pro regulární kardinály už máme dokázáno $\kappa \to (\kappa, \omega)^2$. To teď použijeme, abychom pro každou množinu X_λ získali červenou homogenní množinu R_λ, $|R_\lambda| = \kappa_\lambda$. Protože platí vztah 5.4 a I konverguje ke κ, pak taky pro každé R_λ:

$$R_\lambda = \bigcup_{\alpha \in cf(\kappa)} \{x \in R_\lambda \mid |(B(x) \cap X)| < \kappa_\alpha\}. \tag{5.5}$$

Protože každé κ_α je regulární a větší než $cf(\kappa)$, tak pro každé R_λ musí existovat $\beta \in cf(\kappa)$ takové, že

$$|\{x \in R_\lambda \mid |(B(x) \cap X)| < \kappa_\beta\}| = \kappa_\lambda. \tag{5.6}$$

Položme $\beta = h_\lambda$ a

$$Z_\lambda = \{x \in R_\lambda \mid |(B(x) \cap X)| < \kappa_\beta\}. \tag{5.7}$$

Podívejme se na naši situaci. Máme nějakou posloupnost κ_λ. Ke každému členu této posloupnosti jsme přiřadili nějakou červenou homogenní množinu R_λ a k ní jsme dále přiřadili jednak h_λ a navíc ještě $Z_\lambda \subseteq R_\lambda$.

Teď mějme ostře rostoucí posloupnost ordinálů $\langle \alpha_\xi \mid \xi < cf(\kappa) \rangle$ takovou, že pro každé η a ξ, $\eta < \xi$, platí $h(\alpha_\eta) < \alpha_\xi < cf(\kappa)$. Pro všechna $\eta < cf(\kappa)$ položme

$$S_\xi = Z_{\alpha_\xi} - \bigcup \{B(x) \mid x \in \bigcup_{\eta < \xi} Z_{\alpha_\eta}\}. \tag{5.8}$$

Pak platí, že $|S_\xi| = \kappa_{\alpha_\xi}$ a dostáváme červenou homogenní množinu velikosti κ:

$$S = \bigcup S_\xi. \tag{5.9}$$

Tím je důkaz dokončen.

$\square$

Ukazuje se, že pro nespočetné regulární kardinály jsme schopni dostat silnější výsledek:

Věta 19 (Theorem 11.3., [4])**.** *Pro každý regulární kardinál $\kappa > \omega$ platí:* $\kappa \to (\kappa, \omega + 1)^2$.

V důkazu budeme postupovat podle knihy [4]

Důkaz.

Nechť je dán nespočetný kardinál κ a obarvení $\pi : [\kappa]^2 \to 2$. Domluvme se, že 0 je červená a 1 modrá barva a předpokládejme, že neexistuje červená podmnožina velikosti κ. Chceme tedy najít modrou $\omega + 1$. Nejprve indukcí nadefinujeme strom $\langle T, < \rangle$ výšky ω tak, že každý prvek stromu je nějaká maximální červená homogenní množina ve smyslu inkluze. Pro každé $X \in T$ nadefinujeme také množinu $S\,(X)$, ze které vybíráme červené homogenní podmnožiny, které budou bezprostřední následníci X v T.

Nyní k definici stromu $\langle T, \prec \rangle$: Strom budem mít jediný kořen a bude to libovolná maximalní červená homogenní množina pro obarvení π. Nazvěme ji X_0 a položme $S\,(X_0) = \kappa$. Teď předpokládejme, že i-tá hladina stromu je nadefinovaná a pro každý prvek $T\,[i]$ je nadefinovaná množina S. Zkonstruujeme $T[i+1]$.

Pro každou $R_\alpha \in T\,[n]$ nadefinujeme množinu $ims\,(X)$, která bude obsahovat bezprostřední následníky X ve stromu T. A navíc pro každé $Y \in ims\,(X)$ nadefinujeme $S\,(Y)$. Pro každé $\xi \in X$ polož:

$$S_\xi\,(X) = B(\xi) \cap (S\,(X) - (\sup X + 1)), \tag{5.10}$$

kde množina $B(\xi)$ má stejnou definici jako v předešlém důkazu (5.1). Jako X_ξ označíme libovolnou maximální červenou homogenní podmnožinu množiny:

$$S_\xi^{'}\,(X) = S_\xi - \bigcup_{\eta < \xi, \eta \in X} S_\eta\,(X)\,. \tag{5.11}$$

Množinu $ims\,(X)$ definujeme následovně:

$$ims\,(X) = \{X_\xi \mid \xi \in X \& S_\xi^{'} \neq \emptyset\}. \tag{5.12}$$

Poznamenejme, že $S_\xi^{'} \neq \emptyset$ implikuje $X_\xi \neq \emptyset$. Pro každé X_ξ polož

$$S\,(X_\xi) = S_\xi^{'}\,(X)\,. \tag{5.13}$$

Protože X byl libovolný prvek $T\,[n]$, tak jsme nyní dokončili definici hladiny $T\,[n+1]$.

Strom T je definován jako:

$$T = \bigcup_{n \in \omega} T\,[n]\,. \tag{5.14}$$

V definici stromu nám to, že $S_\xi^{'}\,(X)$ jsou po dvou disjunktní, zajišťuje, že pro $\xi \in X$ budou množiny X_ξ také po dvou disjunktní. Tento fakt spolu se vztahem 5.10 zabraňuje tomu, abychom na různých místech přidali do stromu stejné množiny.

Teď chceme ukázat, že strom bude mít nekonečnou větev H takovou, že

$$\bigcap\{S(X) \mid X \in H\} \neq \emptyset. \tag{5.15}$$

Protože X je nějaká maximální červená homogenní podmnožina $S(X)$, tak pro libovolné $X \in T$ platí:

$$S(X) - (\sup X + 1) = \bigcup_{\xi \in X} S_{\xi}(X). \tag{5.16}$$

Protože předpokládáme, že κ nemá žádnou červenou homogenní podmnožinu velikosti κ, pak pro libovolné $X \in T$ také platí

$$S|X| < \kappa. \tag{5.17}$$

Z regularity κ a vztahů 5.11, 5.12 a 5.13 plyne:

$$|S(X) - \bigcup\{S(Y) \mid Y \in ims(X)\}| < \kappa. \tag{5.18}$$

Z 5.17 a 5.12 plyne, že pro každé $X \in T$ je

$$|ims(X)| < \kappa. \tag{5.19}$$

A z toho indukcí podle n dostáváme pro každé $n \in \omega$:

$$|T[n]| < \kappa. \tag{5.20}$$

Z regularity κ a vztahu 5.18 plyne, že pro každé přirozené číslo n platí:

$$|\kappa - \bigcup\{S(X) \mid X \in T[n]\}| < \kappa. \tag{5.21}$$

Nechť H značí libovolnou větev ve stromu T (ne nutně nekonečnou). Pak pro H polož

$$\overline{S}(H) = \bigcap\{S(X) \mid X \in H\}. \tag{5.22}$$

Chceme dokázat, že

$$\bigcap_{n \in \omega} \bigcup\{S(X) \mid X \in T[n] \subseteq\}, \tag{5.23}$$

kde sjednocení na pravé straně prochazí přes všechny větve T. Nám stačí dokázat ve vztahu 5.23 neostrou inkluzi. Ve skutečnosti ale platí pro tento vztah rovnost.

Pokud ξ patří do množiny na levé straně, pak je

$$H = \{X \in T \mid \xi \in S(X)\} \tag{5.24}$$

taková větev, že $\xi \in \overline{S}(H)$. Tím jsme ukázali 5.23 a vracíme se k důkazu 5.15.

Vztah 5.15 dokážeme sporem. Pokud taková větev neexistuje, pak pro všechny nekonečné větve H platí, že $\overline{S}(H) = \emptyset$. V takovém případě máme z 5.23 a díky tomu, že levá strana 5.23 má podle 5.21 velikost κ:

$$|\bigcup \overline{S}\left(H'\right)| = \kappa, \tag{5.25}$$

kde sjednocení na levé straně prochází všechny konečné větve $H^{'}$. Protože má strom T výšku ω a pro každou hladinu platí vztah 5.20, tak má T méně než κ konečných větví. Z toho plyne, že existuje konečná větev $H^{'}$ taková, že $|\overline{S}(H^{'})| = \kappa$. Nechť je $M = \max H^{'}$ vzhledem k uspořádání $\prec$. Pak $overlineS(H^{'}) = S(M)$ a z toho plyne, že $|S(M)| = \kappa$. Z 5.18 dostaneme, že pro M musí existovat ve stromu T nějaký bezprostřední následník. Ale to je spor, protože větev je definovaná jako maximální lineárně uspořádaná podmnožina stromu. Vztah 5.15 je tedy dokázaný.

Nechť je $H = \{X^n \mid n \in \omega\}$ nějaká nekonečná větev, pro kterou platí 5.15 a to, že pro každou hladinu n stromu T $X^n \in T[n]$. Definuj $\xi_n \in X^n$ pomocí výrazu (viz 5.12):

$$X^{n+1} = X^n_{\xi_n} \tag{5.26}$$

a nechť je ξ_ω libovolný prvek množiny

$$\overline{S}(H) = \bigcap_{n \in \omega} S(X^n) \tag{5.27}$$

Množina $\{\xi_\alpha \mid \alpha \leq \omega\}$ je modrá homogenní množina typu $\omega + 1$.

□

Teď budeme chtít dokázat větu, která nám říká, že za určitých předpokladů lze v předchozí větě zvýšit $\omega + 1$ na $\omega + 2$

Věta byla dokázána v Hajnalově článku *Some results and problems on set theory* ([8]) z roku 1960 a podle něj povedeme i důkaz.

Nejříve budeme potřebovat několik definicí a jedno lemma, které uvedeme jako fakt.

Definice 21 (Množinové zobrazení)**.** *Nechť je dána množina S. Řekneme, že funkce f definovaná na množině S tak, že pro každé $x \in S$ je $f(x)$ podmnožina S taková, že $x \notin f(x)$, se nazývá množinové zobrazení (na S).*

Definice 22. *Nechť je dána množina S a funkce $f(x)$, která je množinové zobrazení na S. Řekneme, že množina $S^{'} \subseteq S$ je volná[1] vzhledem k $f(x)$, pokud pro každé $x \in S^{'}$ a každé $y \in S^{'}$ platí*

$$x \neq y \to y \notin f(x) \,\&\, x \notin f(y).$$

Fakt 20. *Nechť je dán ordinál α takový, že $\aleph_\alpha$ je regulární kardinál, a množina S taková, že $|S| = \aleph_{\alpha+1}$. Pak lze na S nadefinovat množinové zobrazení f tak, že platí:*

1. *Pro každé $x \in S$ je $|f(x)| = \aleph_\alpha$.*
2. *Pro každé $x, y \in S$ platí:*

$$x \neq y \to |f(x) \cap f(y)| < \aleph_\alpha.$$

[1] Hajnal ve svém článku udává jak výraz *free*, tak *independent*.

3. Pro každou $S' \subseteq S$ volnou vzhledem k $f(x)$ platí:

$$|S'| < \aleph_{\alpha+1}.$$

Věta 21 (Hajnal, [8])**.** *Pro každý ordinál α takový, že $\aleph_\alpha$ je regulární platí:*

$$ZFC + GCH \vdash \omega_{\alpha+1} \not\to (\omega_{\alpha+1}, \omega_\alpha + 2)^2.$$

Důkaz.

Nechť je dáno α takové, že $\aleph_\alpha$ je regulární a hledáme protipříklad.

Nechť je dána dobře uspořádaná množina S taková, že $|S| = \aleph_{\alpha+1}$. Nechť je $f(x)$ množinové zobrazení na S, který splňuje body lemmatu 20.

Obarvení $\pi : [S]^2 \to 2$ definujeme pro $\{y, x\}$, kde $y < x$, jako $\pi(\{y, x\}) = 0$ právě tehdy, když platí, že $y \in f(x)$ a $\pi(\{y, x\}) = 1$ právě tehdy, když $y \notin f(x)$. Pro přehlednost označíme 0 jako modrou a 1 jako červenou.

Teď odůvodníme, proč neexistuje žádná požadovaná homogenní množina. Modrá homogenní množina typu $\omega_\alpha + 2$ neexistuje. Množina $\omega_\alpha + 2$ má část ω_α a prvky a a b s tím, že ω_α část je pod a i b a bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a < b$. Kdyby byla modrá homogenní množina typu $\omega_\alpha + 2$, tak by potom $|f(a) \cap f(b)| = \omega_\alpha$ a to je ve sporu s druhým bodem předchozího lemmatu.

Červená homogenní množina $|H| = \omega_{\alpha+1}$ také neexistuje. Prvky této množiny tvoří nezávislou množinu v $\omega_{\alpha+1}$ vzhledem k množinovému zobrazení f. A tedy podle bodu tři předchozího lemmatu musí platit: $|H| < \omega_{\alpha+1}$.

□

U předchozí věty jsme neuvedli, kde se výsledek v Hajnalově článku nachází. Ve skutečnosti bychom důkaz této relace hledali v článku [8] jenom marně. Hajnal relaci dokázal pro případ $\alpha = 0$ a do poznámky pod čarou poznamenal, že by se tato relace dala velmi podobně dokázat i v obecnější formulaci, kterou jsme zvolili jako znění věty 21.

Na tomto místě dokážeme relaci:

Věta 22. *Pro každý ordinál α takový, že $\aleph_\alpha$ je regulární platí:*

$$ZFC + GCH \vdash \omega_{\alpha+1} \to (\omega_{\alpha+1}, \omega_\alpha + 1)^2.$$

V důkaze této věty použijeme Fodorovo lemma pro podmnožiny, které jsme dokázali v první kapitole. V knize [11] má Jech jako cvičení dokázat relaci $\omega_1 \to (\omega_1, \omega + 1)^2$ s použitím Fodorova lemmatu. Před důkazem ještě poznamenejme, že na důkaz $\omega_1 \to (\omega_1, \omega + 1)^2$ GCH nepotřebujeme, což je vidět také ze znění věty 19.

Důkaz. Nechť je dáno α takové, že $\aleph_\alpha$ je regulární. Domluvme se, že 0 je červená a 1 je modrá a nechť je dáno obarvení$\pi : [\omega_{\alpha+1}]^2 \to 2$.

Pro každý ordinál $\beta < \omega_{\alpha+1}$ budeme R_β chápat jako nějakou (nějakou, protože takových množin může být pod β víc) maximální podmnožinu α takovou, že $[R_\beta \cup \{\beta\}]^2$ je červená, tedy $\pi'' [R_\beta \cup \{\beta\}]^2 = \{0\}$. Teď mohou nastat dvě situace:

1. Pokud pro nějaké β platí, že $|R_\beta| \geq \aleph_\alpha$, pak libovolnou množinu $R \subseteq R_\beta$ takovou, že $|R| = \aleph_\beta$, je $R \cup \{\beta\}$ homogenní množina typu $\omega_{\alpha+1} + 1$.

2. Pokud je pro všechny β množina R_β taková, že $|R_\beta| < \omega_\alpha$, pak nadefinujeme funkci $f : \omega_{\alpha+1} \to [\omega_{\alpha+1}]^{<\omega_\alpha}$ tak, že každému $\beta < \omega_{alpha+1}$ přiřadí libovolné R_β. Pro každé β platí $R_\beta \subset \beta$ (díky definici R_β) a splnili jsme tedy předpoklady, abychom mohli použít Fodorovo lemma pro podmnožiny. To nám dá stacionární podmnožinu $S \subseteq \omega_{\alpha+1}$ takovou, že pro nějaký ordinál δ platí $f''S = R_\delta$. Množina S je modrá homogenní množina, protože kdyby nebyla, pak existují $\gamma_1 \in S$ a $\gamma_2 \in S$ takové, že $f(\{\gamma_1, \gamma_2\}) = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\gamma_1 > \gamma_2$. Pak jsme ale ve sporu s tím, že R_δ je maximální červená podmnožina pro γ_1. Ze stacionarity S plyne, že $|S| = \omega_{\alpha+1}$. Máme tedy S, $\omega_{\alpha+1}$ modrou homogenní podmnožinu.

V obou případech jsme tedy dostaly požadovanou homogenní množinu.

□

Na závěr této podkapitoly uvedeme větu, která říká, že v šipkovací notaci nemá moc velký význam uvažovat nekonečný exponent. Ve třetí kapitole jsme při definici použili pro exponent písmeno r jako pro konečný kardinál. Tím jsme předjímaly následující výsledek:

Věta 23. *Pro každý kardinál κ platí: $\kappa \not\to (\omega)_2^\omega$.*

Důkaz.

Pokud je κ konečný kardinál, tak $[\kappa]^\omega = \emptyset$. Potom jistě žádná homogenní množina neexistuje.

Mějme tedy dán nekonečný kardinál κ a snažíme se najít protipříklad. Nechť je $\langle [\kappa]^\omega, \prec \rangle$ dobré uspořádání množiny $[\kappa]^\omega$. Dále zmíníme vlastnost, kterou budeme dále potřebovat. Pro každé $a \in [\kappa]^\omega$ máme $b \in [a]^\omega \to b \in [\omega]^\omega$. Toto vlastně říká, že když máme Y, nekonečnou podmnožinu množiny X a Z bude nekonečná podmnožina Y, potom je Z také nekonečná podmnožina X.

Nyní nadefinujeme obarvení $\pi : [\kappa]^\omega \to 2$ tak, že $\pi(a) = 0$ právě tehdy, když $\forall b \in [a]^\omega - \{a\}$ platí $a \prec b$.

Teď sporem dokážeme, že pro dané obarvení neexistuje nekonečná homogenní množina. Pro spor tedy předpokládejme, že existuje homogenní podmnožina H, $|H| = \omega$. Označme $m = min(\langle [H]^\omega, \prec \rangle)$. Podle toho, že $\prec$ je dobré uspořádání, tak takové m musí existovat. Dále musí platit, že $\pi(m) = 0$.

Teď vytvoříme nekonečnou posloupnost vlastních podmnožin H, kde každá podmnožina bude sama nekonečná. Mohli bychom vzít jakoukoliv, ale ukažme si, že takovou vždy dostaneme. Když máme $|H| = \omega$, pak určitě existuje bijekce $b : H \to \omega$. Teď nadefinujeme podmnožiny: $X_n = \{x \in H \mid b(x) = 2j + 1 \vee (b(x) = 2l \;\&\; l < n)\}$. Máme tedy posloupnost $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset H$. Vlastnost, kterou jsme zmiňovali na začátku důkazu nám teď dává, že $X_m \in [X_n]^\omega - X_n$ platí pro všechny dvojice m, n, $m < n$.

Už víme, že je aspoň jedna podmnožina H, která dostane 0 (m). Aby tedy byla H homogenní, tak musí pro každé n platit $\pi(X_n) = 0$. Potom ovšem z definice obarvení π dostáváme nekonečnou klesající posloupnost $\cdots \prec X_2 \prec X_1 \prec X_0$. Tato posloupnost pak nemá minimální prvek a to je spor s tím, že $\prec$ je dobré uspořádání. Pro dané obarvení tedy nekonečná homogenní podmnožina neexistuje.

□

5.1 Situace na ω

Na ω tedy máme nekonečnou Ramseyovu větu. Dále na ω platí $\omega \to (\omega, \alpha)^2$ pro ordinál α menší než ω^2. Dále pak platí následující věta, která říká, že nemůžeme zvednout počet barev na nekonečno.

Věta 24. $\omega \not\to (3)^2_\omega$.

Důkaz.
Nadefinujeme obarvení $\pi : [\omega]^2 \to \omega$ tak, že pro všechna přirozená čísla $a, b \in \omega$ je $\pi(a, b) = max(a, b)$. Mějme tři přirozená čísla a, b, c. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a < b < c$. Potom platí, že $\pi(a, b) = b$, $\pi(a, c) = c$ a $\pi(b, c) = c$. Žádná homogenní množina velikosti tři (trojúhelník) tedy pro toto obarvení neexistuje.

□

Výsledek z předchozí sekce nám říká, že nemůžeme obarvovat nekonečnatice:

Věta 25. $\omega \not\to (\omega)^\omega_2$.

Důkaz.
Důsledek věty 23.

□

A dokonce ani konečnatice:

Věta 26. $\omega \not\to (\omega)^{<\omega}_2$.

Důkaz.
Každou konečnatici můžeme chápat jako ostře rostoucí konečnou posloupnost přirozených čísel.

Chceme opět najít nějaký protipříklad. Definujme tedy obarvení $\pi : [\omega]^{<\omega} \to 2$ tak, že $\pi(k_1, \ldots, k_n) = 1$ právě tehdy, když je $k_1 < n$. Takže pro ilustraci $\pi(3, 4, 5, 6) = 1$, protože $3 < 4$, ale $\pi(3, 4) = 0$.

Pro spor teď předpokládejme, že existuje homogenní množina H, $|H| = \omega$. Ukážeme, že taková množina není homogenní tím, že sestrojíme dvě její konečné podmnožiny, které musí dostat jinou barvu.

Položme $min(H) = m$. Množina H je nekonečná podmnožina ω, takže je zhora neomezená. Fixujme nyní nějaké $k \in H$, $k > m$. Takové k z důvodu neomezenosti množiny H vždy najdeme. Podle definice musí tedy všechny ká-tice začínající m dostat 1. Teď fixujeme nějaký prvek nad k, například $l \in H$, $l > k$. Sestrojíme ká-tici, která dostane 0. K tomuto účelu vezmeme $k - 1$ libolovných různých prvků množiny H, které jsou nad l (zase je vždy najdeme kvůli neomezenosti H zhora). Označme je, seřazené od nejmenšího, jako $y_1, \ldots, y_{k-1}$. Potom platí, že $\pi(l, y_1, \ldots, y_{k-1}) = 0$, protože je to ká-tice začínající l a $l > k$.

Ukázali jsme tedy, že π není konstantní na $[H]^k$ pro pevné k. Tím spíše není konstantní na $[H]^{<\omega}$.

□

[2] Mohli bychom uvést pro přirozené a, ale chceme položit důraz na podobnost s výsledkem 32

5.2 Situace na ω_1

Na ω_1 nejdříve uvedeme výsledek Sierpińského. Původně byl publikovaný v článku [17], ale uvedeme zde moderní znění v interpretaci pro *Partition Calculus.* Původní znění s anglickým překladem lze najít v [12].

Věta 27. $\omega_1 \not\rightarrow (\omega_1)^2_2$.

Důkaz. Nechť je $\langle \mathbb{R}, \prec \rangle$ dobré uspořádání reálných čísel. Vezmeme libovolnou prostou funkci $f : \omega_1 \to \mathbb{R}$ a nadefinujeme relaci R na ω_1 tak, že $\alpha R \beta$ právě tehdy, když $f\left(min\left(\alpha, \beta\right)\right) \prec f\left(max\left(\alpha, \beta\right)\right)$.

Nechť je obarvení $\pi : [\omega_1]^2 \to 2$ definováno tak, že $\pi\left(\{\alpha, \beta\}\right) = 1$ právě tehdy, když platí $\alpha R \beta$.

Teď pro spor předpokládejme, že existuje homogenní množina $|H| = \omega_1$ a pro přehlednost nazveme 0 červenou a 1 modrou. Mohou nastat dva případy.

Pokud je H červená, tak nadefinujeme funkci $g : f''H \to \mathbb{Q}$ tak, že každému reálnému číslu $r \in f''H$ přiřadíme $q \in \mathbb{Q}$ tak, aby platilo, že $q > r$ a zároveň $\forall s \in f''H \left(s \succ r \to s > q\right)$. A to je spor, protože $g\left(f\left(x\right)\right)$ je potom prostá funkce z ω_1 do ω.

Pokud je H modrá, tak postupujeme obdobně, jen funkce $g : f''H \to \mathbb{Q}$ bude nadefinovaná tak, že $q < r$ a zároveň $\forall s \in f''H \left(s \prec r \to s < q\right)$.

□

Předchozí věta se někdy uvádí ve verzi $2^{\aleph_0} \not\rightarrow (\aleph_1)^2_2$. V takovém případě by ve funkci výše nešlo pouze o prostou funkci, ale rovnou o bijekci. Zvolili jsme tento tvar, protože lépe odpovídá Sierpińského původnímu článku [17], kde hledá prostou funkci. Sierpiński v úvodu své práce píše, že řeší otázku, kterou položil Knaster. Tu uvádíme v překladu Larsonové:

„*Is there a symmmetric relation R, of which the domain is uncountable, such that in every uncountable subset of E there are two different elements α and β, such that $\alpha R \beta$ and two different elements γ and δ such that not $\gamma R \delta$.*“[12]

Dále uvedeme dva důsledky předchozích vět.

Věta 28. $\omega_1 \to (\omega_1, \omega)$.

Důkaz. Důsledek věty 17 pro $\kappa = \omega_1$.

□

Věta 29. $\omega_1 \to (\omega_1, \omega + 1)$.

Důkaz. Důsledek věty 19 pro $\kappa = \omega_1$.

□

Máme tedy důkaz relace $\omega_1 \to (\omega_1, \omega + 1)^2$ a chtěli bychom zjistit, jestli je možné zvednout druhý cíl na $\omega + 2$. Jak dokázal Hajnal v článku [8], GCH tuto možnost vyvrací:

Věta 30. $ZFC + GCH \vdash \omega_1 \not\rightarrow (\omega_1, \omega + 2)^2$.

Důkaz. Důsledek věty 21 pro $\alpha = 0$.

□

Ve skutečnosti platí:

Fakt 31. $ZFC + CH \vdash \omega_1 \not\to (\omega_1, \omega + 2)^2$.

Tuto větu jsme uvedli jako fakt, protože jsme v důkazu věty 21 použili jako lemma fakt 20. GCH je potřeba právě v důkaze faktu 20. Není proto jasně zdůvodněno, že v případě $\alpha = 0$ vystačíme s předpokladem CH.

Další výsledek, publikovaný v roce 1983 v článku [19] ukazuje, že za jiného předpokladu je možné cíl zvýšit, a to nejen na $\omega + 2$:

Fakt 32. *Pro všechny ordinálny* $\alpha < \omega_1$ *platí:* $ZFC + PFA \vdash \omega_1 \to (\omega_1, \alpha)^2$.

Takto se věta výše tradičně cituje. Ve skutečnosti ale Todorčević dokázal něco trošku jiného.

Fakt 33 (*Theorem 1*, [19])**.** *Pokud je* ZF *konzistentní, pak je konzistentní i* ZFC *a následující tvrzení:*

1. $MA + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$,
2. $\omega_1 \to (\omega_1, (\omega_1; fin\omega_1))^2$,
3. $\omega_1 \overset{*}{\to} (\omega_1)^2_{\aleph_0}$.

Fakt 34 (*Theorem 5*, [19])**.** *Předpokládejme* $MA_{\aleph_1}$. *Pak* $\omega_1 \to (\omega_1, (\omega_1; fin\omega_1))^2$ *implikuje* $\omega_1 \to (\omega_1, \alpha)^2$ *pro všechny* $\alpha < \omega_1$.

Ve dvou předchozích faktech jsou věci, které jsme řádně nedefinovali, ale účel našeho komentáře má být, že Todorčević dokazoval ze slabšího předpokladu než PFA.

5.3 Situace na ω_2

Věta 35. $\omega_2 \to (\omega_2, \omega)^2$.

Důkaz. Důsledek věty 17.

□

Věta 36. $\omega_2 \to (\omega_2, \omega + 1)^2$.

Důkaz. Důsledek věty 19.

□

Věta 37. $ZFC + CH \vdash \omega_2 \to (\omega_2, \omega_1 + 1)^2$.

Důkaz. Stejně jako v důkazu věty 22. Na důkaz Fodorova lemmatu pro podmnožiny nám ovšem v tomto případě stačí CH.

□

5.4 Situace na $\aleph_\omega$

Věta 38. $\aleph_\omega \to (\aleph_\omega, \omega)^2$.

Důkaz. Důsledek věty 17 pro $\kappa = \aleph_\omega$.

□

Věta 39. $\aleph_\omega \not\to (\aleph_\omega, \omega+1)^2$.

Důkaz. Chceme definovat obarvení $f : [\aleph_\omega]^2 \to 2$. Řekneme, že 0 je červená a 1 je modrá. Pro $n \in \omega$ máme kardinál $\aleph_n$ a pro každé $\aleph_n$ definujeme R_n jako maximální červenou homogenní podmnožinu $\aleph_n$. Pro $\aleph_0$ je $R_0 = \omega$. Pro $n \geq 1$ je $R_n = \aleph_n - \aleph_{n-1}$. Všechny ostatní dvojice dostanou modrou barvu.

Teď zbývá ukázat, že dané obarvení neobsahuje červenou homogenní množinu velikosti $\aleph_\omega$, ale ani modrou homogenní množinu typu $\omega + 1$.

Pro červenou uděláme důkaz sporem. Nechť tedy existuje červená homogenní množina velikosti $\aleph_\omega$ a označme ji R. Každá červená homogení množina je ale podmnožina nějakého $\aleph_n$ pro $n \in \omega$. Potom by ale pro nějaké přirozené číslo a platilo: $\aleph_\omega = |R| \subseteq \aleph_a$, spor.

Pro dané obarvení neexistuje ani modrá homogenní množina typu $\omega + 1$ protože modrou jsou obarveny jen dvojice, které se skládají z prvků z různých R_n a množin R_n je pouze ω.

□

To, co jsme dokázali, by se dalo zobecnit. V důkazu jsme použili kofinální podmnožinu singulárního kardinálu na to, abychom vytvořili množiny R_n a to tak, aby byly vždy mezi dvěma prvky kofinální množiny, nebo pod prvním prvkem v případě R_0. Velmi podobným způsobem by se tedy dokázala následující věta:

Věta 40. *Nechť je κ singulání kardinál a nechť $cf(\kappa) = \lambda$, pak platí $\kappa \not\to (\kappa, \lambda+1)^2$.*

Důkaz. Vezmi kofinální podmnožinu κ a pak postupuj stejným způsobem jak v důkazu předchozí věty.

□

Jen bez důkazu uvedeme, že Shelah v roce 2009 dokázal v článku [16] následující vztah:

Věta 41. *Nechť jsou κ a λ kardinály. Nechť dále platí $\aleph_0 < \kappa = cf(\lambda)$ a $2^\kappa < \lambda$, pak $\lambda \to (\lambda, \omega+1)^2$.*

Tato podkapitola je v práci z několika důvodů. Jednak se někdy šipkovací notace definuje pouze pro regulární kardinály. Tato kapitola má ilustrovat, že se to udělat může, ale je také možné zkoumat jaké *partition relations* platí pro singulární kardinály. Dále máme singulární kardinál, kde věta 19 neplatí, takže restrikce na regulární kardinály je ve znění věty důležitá. V neposlední řadě máme příklad *partition relation*, které někde selže, ale, jak lze vidět z Shelahova výsledku [16], nelze z toho usoudit, že selže i všude výše.

Závěr

V této práci jsme se zabývali otázkou možného zobecnění Ramseyových vět. Jak se píše i v knize [4], tvrzení, které by bylo silnější než Ramseyova věta a zároveň Ramseyovu větu implikovalo (tedy skutečné zobecnění) neexistuje. I kdybychom našli kardinál, který splňuje nějakou silnou *partition relation*, tak není snadný přechod od tohoto kardinálu k nížším zdrojům.

Z otevřených otázek nejdříve zmíníme problém, který se týká Todorčevićova výsledku v článku [19]. V páté kapitole jsme se přesně snažili popsat, za jakých předpokladů Todorčević dokazuje. Je otevřenou otázkou, zda by předpoklady nešlo oslabit a dokázat stejný výsledek pouze v $ZFC + MA_{\aleph_1}$. Dále není známo, jestli existuje model $ZFC + CH$, kde platí $\omega_2 \to (\omega_2, \omega_1 + 2)$.

Dále je možné zkoumat, co platí, když barvíme trojice, nebo r-tice pro větší r.

Seznam použité literatury

[1] Brualdi, Richard A. *Introductory Combinatorics, Fifth Edition.* Pearson, 2009. ISBN 978-0-13-602040-0.

[2] Dushnik, Ben; Erdős, Paul. *Partially Ordered Sets.* American Journal of Mathematics 1941, **64**(3).

[3] Edgington, Dorothy; Elliott, Edward; Frápolli, María José; Lutz, Sebastian; MacBride, Fraser; Marion, Mathieu a Paris, Jeffrey. *Frank Ramsey.* In: Nodelman, Uri; Zalta, Edward N. (eds.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* [online]. Metaphysics Research Lab, Stanford, 2023 [cit. 27.7.2024]. Dostupné z: `https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/ramsey/`.

[4] Erdős, Paul; Hajnal, András; Maté, Attila; Rado, Richard. *Combinatorial Set Theory:* Partition Relations for Cardinals. North-Holland Publishing Company, 1984. ISBN 0-444-86157-2.

[5] Erdős, Paul; Rado, Richard. *A Problem on Ordered Sets.* The Journal of the London Mathematical Society, 1953, **s1-28**(2).

[6] Erdős, Paul; Szekeres, George. *A Combinatorial Problem in Geometry.* Compositio Mathematica, 1935, (2).

[7] Graham, Ronald L.; Rothschild, Bruce L. a Spencer, Joel H. *Ramsey Theory,* Second Edition. John Wiley and & Sons, Inc, 1990. ISBN 0-471-50046-1.

[8] Hajnal, András. *Some results and open problems on set theory.* Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1960, **11**(3-4).

[9] Hajnal, András; Larson, Jean A. *Partition Relations.* In: Foreman, Matthew; Kanamori, Akihiro (eds.). Handbook of Set Theory. Springer, 2010. ISBN 978-1-4020-4843-2.

[10] Halbeisen, Lorenz J. *Combinatorial Set Theory:* With a Gentle Introduction to Forcing. Springer, 2012. ISBN 978-1-4471-2173-2.

[11] Jech, Thomas. *Set Theory: Third Millenium Edition, revised and expanded.* Sprinder, 2013. ISBN 978-3-642-07899-6.

[12] Larson, Jean A. *Infinite Combinatorics.* In: Gabbay, Dov M.; Kanamori, Akihiro a Woods, John (eds.). Handbook of the History of Logic, Volume 6: Sets and Extensions in the Twentieth Century. North-Holland, 2012. ISBN 978-0-444-51621-3.

[13] Matoušek, Jiří; Nešetřil, Jaroslav. *Kapitoly z diskrétní matematiky.* Karolinum, 2009. ISBN 978-80-246-1740-4.

[14] Radziszowski, Stanisław P. *Small Ramsey Numbers.* The Electronic Journal of Combinatorics [online]. 2021. Dostupné z: https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/DS1.

[15] Ramsey, Frank P. *On a Problem of Formal Logic.* Proceedings of the London Mathematical Society, 1930, **s2-30**(1).

[16] Shelah, Saharon. *The Erdős-Rado Arrow for Singular Cardinals.* Canadian Mathematical Bulletin, 2009, **52**(1).

[17] Sierpiński, Wacław F. *Sur un problème de la théorie des relations.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Scienze Fisiche e Matematiche, 1933, **2**(3).

[18] Skolem, Thoralf A. *Ein kombinatorischer Satz mit Anwendung auf ein logisches Entscheidungsproblem.* Fundamenta Mathematicae, 1933, **20**(1).

[19] Todorčević, Stevo. *Positive Partition Relations.* Transactions of the American Mathematical Society, 1983, **280**(2).