

Posudek vedoucího bakalářské práce

Katedra logiky, FF UK

Název: Ramseyovy věty a jejich zobecnění na nespočetné kardinály

Autor: David Roubínek

Vedoucí: Šárka Stejskalová, Ph.D.

Práce se věnuje Ramseyovým větám a jejich zobecněním na nespočetné kardinály. Úkolem práce bylo podat přehled známých výsledků spolu s historickým přehledem a nastudovat a prezentovat důkazy z původních článků. Práce tento úkol do jisté míry naplnila a však místy ne příliš dobře, například kapitoly 5.2. - 5.4. jsou příliš stručné a zkratkovité.

Celková struktura práce je v pořádku. Práce je rozdělena do pěti základních kapitol, obsahuje úvod i závěr. První kapitola zavádí základní pojmy, ve druhé kapitole se autor soustředí na Ramseyův článek, kde byly poprvé publikovány Ramseyovy věty, jak konečná, tak nekonečná. Ve třetí kapitole se autor zaměřuje na nekonečnou Ramseyovu větu a zavádí šipkovací notaci. Ve čtvrté kapitole se autor věnuje konečné Ramseyově větě a nakonec v páté se věnuje jejímu zobecnění na nespočetné kardinály.

Práce má jak matematickou, tak historickou stránku. Historická stránka práce je silnější, především oceňuji kapitolu 2, kde se autor věnuje původnímu Ramseyovu článku. Autor nastudoval velké množství literatury a relevantní články i sám aktivně dohledával. Bohužel i v této části se najdou nedostatky, protože komentáře, které mají výsledky dávat do souvislosti jsou občas nejasné.

Matematická stránka je slabší, důkazy obsahují nepřesné formulace a chyby, které možná na první pohled nepůsobí zásadně, ale velmi snižují čitelnost důkazu. Bohužel také občas chybí i základní definice nebo zavedení notace. Nicméně musím podotknout, že některé důkazy jsou celkem složité a autor důkazy studoval z článků v původním znění, což není jednoduchý úkol. Největší slabinu práce vidím v důkazech, které měl student vymyslet sám jen na základě konzultací, protože nebyla k dispozici žádná tištěná předloha. V těchto částech je vidět, že studentovi občas unikají jemnější souvislosti.

Navíc práce obsahuje velké množství překlepů a evidentně trpí tím, že student na zpracování neměl dostatek času a práci odevzdával ve spěchu. Práce v některých místech vypadá nedodělaně. Například chybí kapitola 6, kterou autor zmiňuje v úvodu.

Práci doporučuji k obhajobě a navrhuji hodnocení známkou **dobře**.

Během obhajoby bych ocenila, kdyby student představil téma a jeho historický kontext, tak aby bylo vidět, že danému tématu rozumí. Není třeba, aby se věnoval konkrétním matematickým chybám uvedeným níže, na to by během obhajoby ani nebyl čas.

Podrobnější komentáře, které ilustrují problémy v práci, seznam není úplný:

1. Strana 3, řádek 8: Autor píše, že malá řecká písmena ze začátku abecedy budou označovat ordinály a malá řecká písmena ze středu abecedy budou označovat kardinály. To v práci nebylo dodrženo, například hned na straně 4 je γ jen množina, a ne ordinál.
2. Strana 3, řádek 10: „kardinálním“ místo „kadinálním“.
3. Strana 3, řádek 20: Věta: „Budeme rozlišovat mezi rozkladem a pokrytím.“ naznačuje, že někdy se mezi rozkladem a pokrytím nerozlišuje, ale rozklad a pokrytí jsou v teorii množin ustálené pojmy a jejich definice jsou různé.
4. Strana 4, Fakt 1: Není definován pojem normality.

5. Strana 4, Fakt 2: Není definován pojem regresivity, který se ve faktu objevuje a má být „stacionární“ místo „stacionální“.
6. Strana 4: Věta 3: Pro čtenáře, který neví, co chce autor danou větou říci, může být jen těžko čitelná. Už samotná definice regresivity je problematická, autor by měl zvážit, jestli místo požadavku „ $f(x) \subseteq x$ “, není lepší „ $f(x)$ je podmnožina x , která je omezená v x “. Definici takto důležitého pojmu by bylo dobré dát do prostředí definice a říct, pro jaké funkce f je tento pojem definován; t.j. co je definiční obor a co je obor hodnot. Doopravdy chce autor ve znění věty tvrdit, že může najít club $C \subseteq S$ pro danou stacionární množinu S ? Pokud používáme nějaký předpoklad, předpoklad se většinou vyskytuje na začátku věty. Je třeba předpoklad GCH i pro $\kappa = \omega$? Navíc, důkaz také není v pořádku, funkce g nemusí být normální na celém κ^+ , v důkazu se neobjevuje stacionární množina S ze znění věty a nevyužívá se, že f je na S regresivní. Důkaz také obsahuje překlepy, funkce b má být bijekce na κ^+ a ne na κ , místo S má být Y .
7. Strana 5, Definice 7: Značení „otp“ není nikde zavedeno. Místo $[\alpha]$ má být $T[\alpha]$.
8. Strana 5, -14: Šestá kapitola v práci není.
9. Strana 5, Definice 12: Definice kliky grafu je už v definici 11 hned nad definicí 12.
10. Strana 8, řádek 12: Překlep: „všechny dvojí obarvení“.
11. Strana 8, řádek 19: x se v důkazu nevyskytuje.
12. Strana 8, řádek 23: Není zřejmé, co autor myslí větou: „Najdeme x_j , které má v dané n -tici index j .“ Pravděpodobně chtěl autor vzít nejmenší j takové, že $x_j \in N$, jinak není pravda, že $N - \{x_j\} \subseteq \Gamma_j$.
13. Strana 8, řádek 25: Zápis $[L]^{n-1}$, pro $L \in \Gamma_l$, nedává moc smysl.
14. Strana 8, řádek 32: „ y_1 “ místo „ y “.
15. Strana 9, řádek 14: „ $v - 2$ “ místo „ $v - 1$ “.
16. Strana 11, úvodní odstavec kapitoly 3.1. Není zřejmé jaký důkaz jsme v předchozí kapitole vynechali.
17. Strana 12, řádek 19: „ultrafiltry“ místo „ultraprodukty“.
18. Strana 12 a 13, Definice 15 a Definice 16: Obě definice obsahují překlepy.
19. Strana 13, Definice 17: Bylo by dobré přeložit „order isomorphic“.
20. Strana 13, Definice 18: V definici 18 je definován typ uspořádání částečně uspořádané množiny $\langle X, < \rangle$ a zavedena notace $otp\langle X, < \rangle$. Toto značení se ale již objevuje dříve pro dobře uspořádané množiny, navíc se tím pravděpodobně myslí něco jiného (jedinečný ordinál, který je dané dobře uspořádané množině isomorfní). Autor by měl v definici 18 uvažovat jen množiny, které jsou částečně uspořádané množiny, ale ne dobře uspořádané a zavést typ částečně uspořádané množiny i pro takové uspořádání. Takto to je také v knize, podle které autor, jak sám píše, postupuje.
21. Strana 17, řádek 10: „...formulace je balanced partition a druhá unbalanced.“ Autor pro pojmy „balanced“ a „unbalanced“ zavedly český překlad na straně 15, měl by ho tedy používat.

22. Strana 18, Malá Ramseyova čísla: Komentář ohledně „malých“ a „velkých“ Ramseyových čísel je nejasný, mohl by autor uvést, v které literatuře našel rozdělení na „malá“ a „velká“ Ramseyova čísla? Dolní a horní mez se určuje jen u „velkých“ Ramseyových čísel?
23. Strana 18, řádek -3: „Je třeba známo, že $R(10, 15) = 1313$.“ Toto určitě není známo. Literatura, kterou autor uvádí, zmiňuje 1313 jen jako dolní odhad pro $R(10, 15)$.
24. Strana 19, řádek 5 a 7: Chybí citace na článek.
25. Strana 19, řádek -15: „ $|X_n| = \kappa$ “ místo „ $|X_n|$ “.
26. Strana 19, řádek -15: „Nadefinujeme $x_n \in X_n$ tak, aby $|B(x_n) \cap X_n| = \kappa$ “: bylo by vhodné napsat, proč takové x_n existuje.
27. Strana 19, řádek -11: „...rozlišíme 2 případy“: Autor nepíše jaké dva případy, ale rozlišuje případy, kdy κ je regulární a singulární. Nicméně, když začne dokazovat větu pro singulární κ , v důkazu to nezmíní. Vlastně v celém důkazu se neobjeví pojem singulární kardinál.
28. Strana 19, řádek -8: „Opět budeme dokazovat obměnnou.“: Důkaz není veden obměnou, ale použije se obměna lemma 18.
29. Strana 19, řádek - 5: „ $R \subseteq X$ budeme chápat jako maximální červenou homogenní podmnožinu κ “ není vhodná matematická formulace.
30. Strana 20, řádek 4: „Tím jsme dokázali negaci lemmatu, takže máme homogenní množinu.“: Jakého lemmatu a homogenní množinu jaké barvy?
31. Strana 20, řádek 6: „Aplikujeme lemma a dostáváme...“: Jaké lemma?
32. Strana 20, řádek 14: „Pro regulární kardinály už máme dokázáno $\kappa \rightarrow (\kappa, \omega)^2$.“: Nevhodná notace, κ je v důkazu fixováno jako singulární kardinál.
33. Strana 20, řádek -11: „Položme $\beta = h_\lambda$ “: Je třeba říci, co β splňuje a pro které λ definujeme h_λ , následně na dalším řádku by mělo být „ κ_{h_λ} “ místo „ κ_β “.
34. Strana 20, řádek -9: „Máme nějakou posloupnost κ_λ .“: κ_λ není posloupnost.
35. Strana 24, Věta 22: Autor v důkazu občas zaměňuje β a α . Následující tvrzení je problematické a obsahuje alespoň dva překlupy, chybí slovo „pro“ a neřekne se, jakou barvu má daná homogenní množina mít: „Pokud pro nějaké β platí, že $|R_\beta| \geq \aleph_\alpha$ pak libovolnou množinu $R \subseteq R_\beta$ takovou, že $|R| = \aleph_\beta$, je $R \cup \{\beta\}$ homogenní množina typu $\omega_{\alpha+1} + 1$.“: Množina R_β nemůže mít velikost větší než \aleph_α , tedy nedává smysl vybírat podmnožinu, která má velikost \aleph_α . Za množinu, která svědčí, že existuje homogenní podmnožina typu $\omega_\alpha + 1$ červené barvy je třeba vzít $R \cup \{\beta\}$, kde $R \subseteq R_\beta$ je typu ω_α a ne velikosti \aleph_α .
36. Strana 25, řádek 2: „ $\omega_{\alpha+1}$ “ místo „ $\omega_{\alpha+1}$ “.
37. Strana 28, Fakt 33: Autor nezavede notaci pro $fin\omega_1$ a také nedefinuje, co znamená $\omega_1 \rightarrow (\omega_1; (\omega_1; fin\omega_1))$ a $\omega_1 \xrightarrow{*} (\omega_1)_{\aleph_0}^2$.
38. Strana 29, Věta 38: Odůvodnění, že dané obarvení neobsahuje homogenní množinu modré barvy není správně, nejde jen o to, že „množin R_n je pouze ω “, ale že jsou „kofinální“ v \aleph_ω . Samotná definice obarvení by si také zasloužila přesnější matematické zavedení a ne jen například: „Všechny ostatní dvojice dostanou modrou barvu.“
39. Strana 30: Není jasné, co chce autor říci větou: „...tvrzení, které by bylo silnější než Ramseyho věta a zároveň Ramseyho větu implikovalo, jsme nenašli.“