

OPONENTSKÝ POSUDEK BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Autor bakalářské práce: David Roubínek

Název práce: Ramseyovy věty a jejich zobecnění na nespočetné kardinály

Katedra: Katedra logiky FF UK

Oponent: doc. Radek Honzík, Ph.D.

Praha, 24.8.2024

SHRNUTÍ

Práce se věnuje Ramseyově větě, jak konečné, tak nekonečné, a rovněž se soustředí na zobecnění této věty na nespočetné kardinály (Kapitola 5). Nemá se jednat pouze o matematický text, podstatnou složkou práce bylo popsat historický kontext věty a věnovat se také původnímu článku.

Historický kontext se práci přes některé výtky podařilo naplnit: v Kapitole 2 se čtenář dozví informace o původním Ramseyově článku a nalezne i širší kontext.

Celková hodnota práce je ale snížena tím, že student viditelně zápasí s matematickou částí práce, a mnoho důkazů je proto neúplných a chybných. Čtenář pak pochybuje o některých historických komentářích, protože si není jistý, jestli autor matematické výsledky správně popisuje a interpretuje. To se např. týká komentáře o vhodnosti „dvojitě indukce“ a lepší čitelnosti Ramseyova důkazu oproti modernímu důkazu (komentář na straně 12).

V neposlední řadě je zřejmé, že práce byla původně autorem plánována rozsáhlejší, přičemž kapitoly 1 až 4 měly být spíše jejím úvodem (např. chybí kapitola 6, na kterou se autor odkazuje na straně 5). Kapitola 5, což má být podle Úvodu nejdůležitější kapitola, je už jen katalogem výsledků (s nepřehlednými důkazy) bez historického kontextu, na které už zřejmě nezbyl čas. Nedostatek času se také zřejmě projevil na množství překlepů v textu.

Nicméně hodnotím pozitivně část věnovanou původnímu Ramseyovu článku a snahu motivovat některé pojmy. Kdyby se student soustředil více na historický kontext, a dokazoval (pečlivě) jen vhodně vybrané věty, byla by práce přínosnější.

Práci doporučuji k obhajobě a navrhuji známku

„dobře“ (3).

PODKLADY PRO OBHAJOBU

Níže uvádím příklady chyb či nejasných míst, které mohou sloužit jako podklad pro obhajobu.

- (1) Strana 3. „...pak $P(X)$ značí rozklad množiny a ...“ $P(X)$ nemá jednoznačný význam, protože rozkladů dané množiny je mnoho. Jaký je smysl této notace? Dále už se nevyskytuje.
- (2) Strana 4. Ačkoli je často vhodné nedokazovat všechno a uvádět výsledky ve formě faktů, je dobré uvádět definice, které se ve výsledcích vyskytují. Čtenář tak má představu o smyslu vět, i když třeba nezná jejich důkaz. Je to také důležité pro samotného autora, aby se vyhnul mechanickému zobecňování korektních výsledků na nekorektní.

Jedním příkladem za všechny je pojem „normální funkce“ a její využití v důkazu Věty 3 (Fodorovo lemma). Kdyby si autor dal práci a uvedl její definici, možná by se domyslel, že funkce g definovaná v důkazu normální není. Nejenom že nemusí

být striktně rostoucí (což se ale dá snadno opravit), ale na limitních ordinálech $\alpha < \kappa^+$ nemusí být ani spojitá, vyjma případu kdy $\text{cof}(\alpha) = \kappa$, což už obecně opravit nejde. Tak jak je věta formulována, tak v principu platí pro $\kappa = \omega$, ale uvedené zobecnění je chybné.

Student by se měl pro obhajobu rozmyslet, jak tuto větu formulovat a dokázat správně: např. jestli není třeba přidat nějaké předpoklady o stacionární množině S ve znění věty. Student by také měl zvážit tvrzení (ve znění věty), že existuje club $C \subseteq S$ (sic!).

- (3) Strana 5. Nekonzistentní značení, někdy (V, E) někdy (V_g, E_g) . Obecně je nevhodné indexovat malými písmeny, když se odkazujeme na strukturou značenou velkým písmenem. Tedy pokud vůbec zavádět tuto notaci (a moc pro ni důvodů není), pak $G = (V_G, E_G)$.
- (4) Nepřehledné indexy a překlepy. Důkazy se často obtížně sledují kvůli množství překlepů, např. v důkazu Věty 8 (uvádíme pro ilustraci typických problémů):
 „... dvojitou indukcí...Potom použijeme indukci na k .“ Bylo by dobré nejprve označit obě proměnné a pak říci, co se „dvojitou indukcí“ míní.
 „Všechna x jsou potom různá...“ Žádné x se zde nevyskytuje, má být x_i .
 Ve druhé odrážce má být $\{y_1\}$.
- (5) Kapitola 3.1. Jaký důkaz jsme v předchozí části vynechali?
- (6) Strana 12 a komentář srovnávající původní důkaz a moderní důkaz. Diskuze není příliš přehledná ani přesvědčivá, je možné během obhajoby vysvětlit lépe?
- (7) Strana 15. V textu je mnoho vágních formulací, které mají dávat kontext a vysvětlení pro některá tvrzení, ale bohužel jsou často spíše matoucí. Co má např. znamenat „Věty slouží k odvození nových relací, pokud víme, že už nějaké relace platí.“ V dané sekci žádné věty nejsou a celkový smysl je nejasný.
- (8) Strana 16. Co znamená „...protože funkcí tvaru $\pi N + 1$ je konečně,“? Je zde překlep a nejasný význam (čtenář si nemá domýšlet, co chtěl autor říct, má to být napsáno jasně).
- (9) Věta 17, chybí citace.
- (10) Důkaz Věty 19. Značení $\text{ims}(X)$, zřejmě za „immediate successors“, není příliš vhodně zvolené (evokuje „image(s)“). V každém případě se má zapisovat jako $\text{ims}(X)$, když už se používá („ims“ v matematickém režimu se sází jako řada proměnných, ne jako slovo).
- (11) Závěrečné kapitoly 5.2 – 5.4 jsou hodně zkratkovité, což je na hlavní kapitoly málo.
- (12) Kapitola Závěr je velmi krátká a plná nejasných komentářů. Autor by měl vysvětlit, co míní tím, že „...neexistuje tvrzení ostře silnější než Ramseova věta.“ (tvrzení je třeba zpřesnit, protože čistě formálně takových tvrzení existuje nekonečně). Navíc, celá práce je o různých verzích Ramseových vět, zatímco zde se zřejmě mluví o jedné konkrétní, a bylo by tedy vhodné na ni odkázat. Co se myslí výrazem „... nebo r -tice pro větší r “?