Univerzita Karlova

Filozofická fakulta

Ústav filosofie a religionistiky

Bakalářská práce

Pavel Šolín

Fregův pojem analytičnosti

Frege's concept of analyticity

Praha 2024

Vedoucí práce: prof. Vojtěch Kolman, Ph.D.

Chtěl bych tímto poděkovat svému školiteli prof. Vojtěchu Kolmanovi, Ph.D, především za inspirativní kurzy, které vedl a které mne přivedli k zájmu o tato témata. Také se mu chci tímto omluvit, že jsem s ním tuto práci v procesu jejího vzniku málo sdílel a konzultoval.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou/diplomovou práci vypracoval/a samostatně, že jsem řádně citoval/a všechny použité prameny a literaturu a že nebyla předložena jako splnění studijní povinnosti v rámci jiného studia nebo předložena k obhajobě v rámci jiného vysokoškolského studia či k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze, dne 14. srpna 2024 …………………...

Pavel Šolín

Klíčová slova (česky)

Frege, Kant, analytické, syntetické, logicismus, filosofie matematiky, analytická filosofie

Klíčová slova (anglicky)

Frege, Kant, analytical, synthetic, logicism, philosophy of mathematics, analytic philosophy

Abstrakt (česky)

Úkolem práce je podívat se na pojem analytičnosti u Gottloba Frega z několika hledisek. Základní hledisko je Fregův pojem analytického samotný, v jeho vymezení vůči Kantovi, jak se nachází zejména v Základech aritmetiky, ale i v jeho Pojmovém písmu a jinde. Zde by mělo hrát roli nejen vyjasnění užitých pojmů mezi Fregem a Kantem (a případně dalšími), ale i otázky přidružené, jako je Fregův údajný realismus ohledně matematických pojmů (který se, zdá se, s analytičností matematiky nemusí snést), tak status některých principů, jako jsou Humův princip nebo Grundgesetz V, které do své „analytické" matematiky musel Frege přidat, aby mohl pojmově uchopit číslo. Další hlediska jsou fakultativní a zahrnují otázky dalšího vývoje matematiky, specificky axiomatickým směrem, v němž je na jednu stranu Kantův pohled na matematiku rozporován, když reaguje mj. na objev alternativních geometrií jako něco, co nejde opřít jednoduše na názoru, na druhé straně podpořen, když chápe matematiku jako záležitost hry se symboly v prostoru a čase.

Abstract (in English)

The purpose of this paper is to look at the notion of analyticity in Gottlob Frege from several perspectives. The basic point of view is Frege's notion of the analytic itself, in its definition vis-à-vis Kant, as found especially in the *Grundlagen der Arithmetik*, but also in his *Begriffschrift* and elsewhere. Here, not only the clarification of the terms used between Frege and Kant (and possibly others) should play a role, but also questions of association, such as Frege's alleged realism about mathematical concepts (which, it seems, he does not have to put up with the analyticity of mathematics), as well as the status of certain principles, such as Hume's principle or Grundgesetz V, which Frege had to add to his "analytic" mathematics in order to grasp number conceptually. Other aspects are facultative and involve questions of the further development of mathematics, specifically in an axiomatic direction, in which Kant's view of mathematics is challenged on the one hand when he responds, among other things, to the discovery of alternative geometries as something that cannot be based simply on intuition, and supported on the other when he understands mathematics as a matter of playing with symbols in space and time.

Obsah

Úvod

Pojem analytičnosti bývá v případě Gottloba Frega na jednu stranu vyzdvihován jako revoluční, ale záhy často opomíjen právě pro tuto historickou roli. Frege přitom hraje v dějinách matematiky stejně důležitou roli, jako např. Daniel Bernoulli s jeho matematizací pravděpodobnosti, John von Neumann s matematizací her či Newton, s jeho matematizací pohybu. Frege totiž takto matematizoval logiku, která před ním sice formalizaci nacházela v aristotelské sylogistice, Frege však matematizoval logiku predikátovou, která je dodnes nejsilnějším a nejhojnějším úplným dokazovacím systémem. Rovněž by se dalo tvrdit, ač to může znít zvláštně, že Frege matematizoval i číslo. To samozřejmě neznamená, že by číslo nebylo předmětem matematiky před Fregem, Frege ovšem jako první filozof vychází z jazyka, který používáme jako z transcendentálního stanoviska pro matematiku a tím se ukazuje, že pojem čísla nebyl nikdy používán matematicky, nýbrž meta-matematicky. To, co chce Frege ukázat je, že tento pojem je nejen matematický a lze ho matematizovat, nýbrž především, že jde i o pojem logický a dá se tak na logiku zcela redukovat. Tomuto programu se říká logicismus a právě toto téma nás přivádí k pojmu analytičnosti. Je-li totiž aritmetika redukovatelná na logiku, která je opřena o čisté pravdy rozumu – analytické výroky, je i aritmetika analytická v tom smyslu, že jsou její věty analytické a nikoli syntetické a priori, jak se domníval Kant. ve svém *Begriffsschriftu* Frege píše:

> „Když jsem si tedy položil otázku, ke kterému z těchto dvou druhů aritmetické soudy patří, musel jsem nejprve zkusit, jak daleko se v aritmetice lze dostat pomocí úsudků samých, pouze s oporou v zákonech myšlení, jež jsou nadřazeny všemu ojedinělému. Postupoval jsem tak, že jsem se nejprve pokusil odvodit pojem uspořádání v řadě logickou cestou, abych odtud mohl pokračovat k pojmu čísla. Aby se při tom nemohlo nepozorovaně vetřít nic z názoru, záleželo vše nutně na spojitosti úsudkového řetězce. Když jsem se snažil tomuto požadavku co nejpřísněji dostát, narazil jsem na překážku v nedostatečnosti jazyka, jenž při všech vznikajících obtížích ve vyjadřování, čím zapletenějšími se vztahy stávaly, tím méně dovoloval dosáhnout přesnosti, které vyžadoval můj cíl. Z této potřeby vyšla myšlenka tohoto pojmového písma. To by tak mělo předně sloužit k tomu, aby mohla být platnost úsudkového řetězce přezkoumána tím nejjistějším způsobem a aby každý

> předpoklad, jenž se chce nepozorovaně vetřít, mohl být předveden, a tím i prozkoumán co do svého původu. Proto jsem také rezignoval na vyjádření všeho, co nemá pro sled úsudků žádný význam.“ [1]

Cílem tohoto textu bude představit Fregův pojem analytického tak, jak je vymezen vůči Kantovi a pak se na něj podívat z širší perspektivy, především na základě třech bodů, které Frege vymezuje v předchozím citátu: formálnost (spojitost úsudkové řetězce), jazyk a Fregova anti-subjektivistická a anti-psychologická polarita (vše, co nemá pro sled úsudků žádný význam). Přístup bude tedy zčásti regresivní, kdy se budeme snažit stopovat analytičnost od Frega ke Kantovi a budeme přitom vycházet z pokud možno nejvíce objektivních interpretací a z části se budeme podávat interpretaci vlastní.

1 Pojem analytičnosti mezi Fregem a Kantem

Je-li naším cílem podat detailní výměr Fregova pojmu analytičnosti, potom se nevyhneme konfrontaci s Kantem, neboť Frege na jednu stranu setrvává u jeho původního rozlišení na analytické a syntetické soudy, ale zároveň Kantovi vyčítá, že úlohu těchto soudů (především těch analytických) podcenil v jeho filozofii matematiky:

> „Kant zjevně podcenil hodnotu analytických soudů – bezpochyby v důsledku příliš úzkého vymezení tohoto pojmu, ačkoli se zdá, že mu tanul na mysli zde používaný širší pojem. […] Abych se dotkl toho, co je zde zcela nasnadě, spatřuji velikou zásluhu Kanta v tom, že uskutečnil rozlišení soudů na analytické a syntetické.“ [2]

Kantova distinkce se tedy ve Fregově práci jednak zachovává, ale druhak implicitně mutuje a vzniká definice explicitně nová. Tento přechod probíhá především mezi Fregovým raným dílem *Begriffsschrift* a jeho stěžejním dílem *Grundlagen der Arithmetik* (dále jen *Grundlagen*). Tato dialektika mezi Kantovým a Fregovým pojmem analytičnosti bude zásadní při negativní odpověď na otázku, jsou-li analytické soudy triviální.

Ve své *Kritice čistého rozumu* Kant představuje následující definici analytických a syntetických soudů:

[1] Gottlob Frege. *Pojmopis*. Oikoymenh: Praha, 2012. Str. 7

[2] Gottlob Frege. Logická zkoumání & Základy aritmetiky. Oikoymenh: Praha, 2011. Str. 243

„Ve všech soudech, v nichž je myšlen vztah nějakého subjektu k predikátu (když uvažuji jen kladné soudy, neboť na záporné je pak aplikace snadná), je tento vztah možný dvojím způsobem. Buď predikát B náleží k subjektu A jako něco, co je v tomto pojmu A (skrytě) obsaženo; nebo B leží zcela mimo pojem A, přestože se s tímto spojuje. V prvním případě nazývám soud *analytickým*, ve druhém *syntetickým*.“ [3]

Tím máme i odpověď na úvodní otázku, kam pojem analytičnosti zařadit a co vůbec může být analytické – totiž soud. Pojem *soudu*, nebo v našem případě k němu ekvivalentní pojmy *výrok* a *propozice*[4], značí oznamovací větu s posouditelným obsahem, tj. nárokem na exkluzivní pravdivostní hodnotu. výrazy „mám se dobře“ a „vrahem je opice“ jsou tedy soudy, neboť u nich lze potenciálně zjistit, jsou-li pravdivé či nepravdivé. Jednoduché výrazy jako „kámen“ nebo tázací a rozkazovací věty tento potenciál nemají a za soudy tak být označeny nemohou. Soud je v nejjednodušším případě větou subjekt-predikátového tvaru, kde *subjekt* věty je tím, čeho, resp. koho se věta týká a *predikát* je ta část věty, která vypovídá o tom, co subjekt dělá, čím je, jakou má vlastnost atp. Jde o nejjemnější možné dělení věty tak, abychom se mohli zabývat jejími logickými vlastnostmi. Tyto pojmy tedy nejsou ekvivalentní s gramatickými pojmy podmětu a přísudku, které ponechávají kategorie předmětů, přívlastků a příslovečných určení , jež jsou pro logické vlastnosti věty irelevantní a do pojmů subjektu a predikátu se rozplývají.

Podle Kantovy definice můžeme tedy věty jako „trojúhelník má tři úhly“ a „na Díkůvzdání se vzdává dík Bohu“ považovat za analytické soudy, jelikož predikáty ‚mít tři úhly‘ a ‚vzdávat dík Bohu‘ náleží po řadě k subjektům ‚trojúhelník‘ a ‚díkůvzdání‘. Náležením se myslí buď sémantický vztah – význam, který bychom běžně přisoudili daným subjektům je přímo vyjádřen danými predikáty, nebo jednoduše identita skrze kopulu, tj. každá tautologická věta typu „a je a“ je triviálním analytickým soudem. Je však možné uvažovat i takové tautologie, které nejsou vyjádřené skrze kopulu – k tomu se vrátíme později v souvislosti s členěním analytických výroků. Je vhodné dodat, že tento

[3] Immanuel Kant. *Kritika čistého rozumu*. Oikoymenh: Praha, 2020. Str. 41

[4] Toto zjednodušení není úplně přesné, neboť jde o terminologii různých autorů. Pojem soudu, který používá Kant je aristotelského ražení a má silnější vazby na epistemologii, než formálnější a dnes častější pojem výroku či propozice. V zájmu této práce je tento rozdíl však zanedbatelný a proto můžeme bez újmy na interpretaci tyto pojmy nadále považovat za ekvivalentní.

sémantický vztah mezi subjektem a predikátem není symetrický, jelikož nebude analyticky pravdivým výrokem, že vše, co má tři úhly je trojúhelník, stejně jako můžeme vzdávat dík Bohu i mimo Díkůvzdání.

Ve stejném duchu můžeme nyní považovat věty „diamant je nejtvrdší přírodní minerál“ a „Země obíhá kolem Slunce“ za syntetické, protože mezi jejich predikáty a subjekty není žádný bezprecedentní vztah. Kromě toho jsou tyto věty empirické a jako takové vyžadují, na rozdíl od vět analytických, předchozí zkušenost k ověření jejich pravdivosti. Tím se dostáváme k dalšímu členění soudů, které Kant představuje:

> „Existuje nějaký takový poznatek nezávislý na zkušenosti, a dokonce na všech smyslových dojmech? Takové poznatky nazýváme poznatky *a priori* a odlišujeme je od empirických poznatků, které mají své zdroje *a posteriori*, totiž ve zkušenosti.“ [5]

Stěží bychom přišli s příkladem analytického soudu *a posteriori*, jak je tomu ale se soudy syntetickými *a priori*? Dosud uvedené příklady se nezdají být vzhledem k podaným definicím problematické, naproti tomu věty matematiky, kupříkladu „$2 + 2 = 4$“ či „součet všech úhlů v trojúhelníku dá $180°$“ se problematické zdáti mohou a jsou to právě ony, kterým Kant přisoudil status *a priori* syntetických soudů, tj. soudů, které rozšiřují naše poznání, ale nevyžadují k tomu žádnou předchozí zkušenost; vyžadují pouze čistý názor. K tomuto tématu se vrátíme později v sekci o Kantově a Fregově aritmetice.

Kromě vět matematiky existuje celá řada vět, které do původního Kantova vymezení buď vůbec nezapadají nebo kolem něho spíše oscilují, čímž rozšiřují filosofické obzory pro další distinkci analytických a syntetických soudů. Jsou to ovšem věty matematiky a logiky, které nás konečně přivádí k Fregovi.

Jak tvrdí Jaakko Hintikka, je poměrně instruktivní a zábavné členit filosofy do obecných kategorií podle jejich hlavního cíle.[6] Kantovi, jako osvícenci, byl hlavním cílem a finálním zdůvodněním všeho člověk, jak ukazuje např. jeho *kategorický imperativ*[7].

---

[5] Immanuel Kant. *Kritika čistého rozumu*. Oikoymenh: Praha, 2020. Str. 36

[6] Jaakko Hintikka. *Knowledge and the known*. Reidel Publishing Company: Dordrecht, 1974. Str. 126

[7] Immanuel Kant. *Základy metafyziky mravů*. Oikoymenh: Praha, 2014.

Stejně tak bychom mohli o Fregovi tvrdit, že jeho hlavním zájmem je matematika, či přesněji zpevnění matematických základů. Ač se zdá tento postřeh triviální, je možné, že se na jeho pozadí učiní zřejmějším záměry přístupů k pojmu analytického soudu u obou autorů. Díváme-li se na celou záležitost tímto prizmatem, můžeme bezpochyby potvrdit, že analytický soud je pro Kanta termínem podpůrným pro důsledné vybudování jeho epistemologie, která je opět podpůrným systémem pro vybudování jeho etiky, tj. systému o dobru člověka jako pro Kanta primárnímu cíli. Pro Frega je naproti tomu pojem analytického soudu právě cílem samým, skrze jeho snahu předvést věty aritmetiky jako analytické. Tento rozdíl v prioritách (mj.) tedy nemůže než vést ke kolizím v základní definici pojmu analytického. Je tedy nasnadě předvést, jak se tyto kolize konkrétně projevují.

Kant předložil svou definici analytického na základě obsahu soudů. Znalost obsahu je podle něj definitivním kritériem určení analytičnosti a tím se jeho pojetí stává statickým. Fregeho pojetí je naproti tomu procesuální, jeho analytičnost není závislá pouze na obsahu soudů, ale na jeho zdůvodnění:

> „Není řídkým případem, že se nejprve získá obsah nějaké věty a pak se jinou obtížnější cestou provede přísný důkaz, jímž se často přesněji poznají podmínky platnosti. Tak musíme obecně oddělit otázku, jak přicházíme k obsahu nějakého soudu, od otázky, odkud bereme zdůvodnění našeho tvrzení. Rozlišování mezi apriorním a aposteriorním, syntetickým a analytickým, se dle mého pojetí týká nikoli obsahu soudu, nýbrž oprávněnosti k jeho vynášení. Tam kde toto chybí, odpadá i možnost onoho dělení.“ [8]

Podle Frega pak můžeme určit, je-li věta jednoduché subjekt-predikátové formy, přes kterou definuje analytičnost Kant, analytická právě skrze její odůvodnění, tedy její důkaz. Tím je zajištěn potenciál Fregova pojetí, zahrnout jako analytické soudy ty, které definoval Kant. Poté Frege podává svou vlastní definici analytického a syntetického:

> „Nyní záleží na tom, aby se nalezl důkaz a sledoval se zpět až k prvotním pravdám. Setkáváme-li se na této cestě jen s obecnými logickými zákony a definicemi, pak máme analytickou pravdu, přičemž se předpokládá,

[8] Gottlob Frege. Logická zkoumání & Základy aritmetiky. Oikoymenh: Praha, 2011. Str. 155

že se do úvahy vzaly i věty, na nichž spočívá přípustnost definice[9]. Jestliže však není možné vést důkaz bez toho, že bychom použili pravdy, které nejsou obecně logické povahy, nýbrž že se vztahují na zvláštní oblast vědění, pak je tato pravda syntetická.“ [10]

Fregova definice je střižena na míru jeho matematickým záměrům, které stojí po celou dobu jeho filosofické práce v popředí. Dále Frege nevymezuje analytičnost a syntetičnost soudů, nýbrž analytickou a syntetickou pravdivost kroků v matematickém důkazu, jakožto způsobu odůvodnění tvrzení, které se pro něho stává kritériem analytičnosti. Procesuální pojetí ale stejně vyžaduje nějaké výchozí pravdy, stejně jako matematický důkaz vyžaduje předpoklady, které už dále odůvodňovat netřeba. Pro Frega jsou těmito předpoklady logické pravdy – tautologie, ze kterých chce odvodit i věty aritmetiky. Všimněme si, že analytičnost tautologií je ve Fregově definici afirmována bez dalšího odůvodnění. Zatímco u Kanta bychom v případě tautologií (ač v základním tvaru identity) mohli určit jejich analytičnost ve srovnání s jeho definicí, u Frega bychom z nich při určování analytičnosti vycházeli. To, že je analytičnost tautologií ve Fregově definici afirmována a ne předpokládána je důležité rozlišení, neboť v případě, kdy by byla předpokládána by se Fregova definice stala *circulus vitiosus* – analytická pravda by byla definována pomocí analytické pravdy. Nelze tedy říci, že by Frege novou definici z něčeho vypozoroval, ale spíše navrhnul a vytvořil takové pojetí, které dokonale odpovídá jeho záměrům, což ho činí velkým pragmatikem.

I přesto, že je Fregovo filosofické zkoumání omezené na povahu matematiky, nelze říct, že by šlo o nějaké skutečné omezení, jak míní sám Frege:

„Otázky o apriorní nebo aposteriorní, syntetické nebo analytické povaze aritmetických pravd zde čekají na své odpovědi, neboť i když tyto problémy samy náležejí do filosofie, přesto jsem přesvědčen, že jejich řešení nelze dosáhnout bez pomoci matematiky.“ [11]

V praxi se tedy Fegovo vymezení analytičností týká především dokazování. Důkazem běžně rozumíme sérii logických kroků od daných předpokladů k závěrečnému

9 Frege definici nebere jako zavádění nových objektů, ale konvenční přidělení znaku objektům již daným.

10 Gottlob Frege. Logická zkoumání & Základy aritmetiky. Oikoymenh: Praha, 2011. Str. 156

11 Tamtéž. Str. 155

tvrzení, které je i dokazovaným tvrzením. Mohla by ovšem nastat situace, kdy jsou použité kroky interpretovány různými matematiky různým způsobem a potenciálně by se mohla zpochybnit i jejich exaktnost (jako tomu bylo s Eukleidovým slavným pátým postulátem o rovnoběžkách, jehož zpochybnění vedlo k zavedení nových, neeukleidovských geometrií). Fregovi šlo o eliminaci této hrozby a o postavení pojmu důkazu na maximálně objektivních základech.[12] Tento úkol od něho však vyžadoval nejen exkurz do filosofie, ale v zásadě založení nového filosofického směru – *analytické filosofie* a také predikátové logiky. Je zřejmé, že pojem analytičnosti bude hrát v této souvislosti centrální roli a je také zřejmé, že vznikne značné napětí mezi Fregovým a Kantovým pojetím.

Uveďme jednoduchý příklad důkazu matematického tvrzení, abychom předvedli, jaký typ vět může být podle Frega analyticky pravdivý:

Tvrzení. Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že je číslo $\sqrt{2}$ racionální, tj. předpokládejme, že $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, pro nějaká nesoudělná celá čísla p, q. Jestliže $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, pak $2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$, tedy $2q^2 = p^2$ a tedy platí, že p^2 je sudé číslo.

Lemma (*). Pro každé celé číslo k platí, že je sudé právě tehdy, když je sudé k^2.

Důkaz. ($\Rightarrow$) Nechť je dáno celé číslo k a nechť je k sudé, tj. $k = 2n$ pro nějaké celé číslo n. Potom platí, že $k^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$ a tedy k^2 je sudé. ($\Leftarrow$) Nechť je dáno číslo k^2 a nechť je také sudé. Transpozicí ukážeme, že není-li k sudé, pak není sudé ani k^2. Nejsou-li k a k^2 sudá, pak jsou lichá. Je-li k liché, pak je $k = 2n - 1$ pro nějaké celé číslo n a tedy $k^2 = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 2(2n^2 - 2n) + 1$ a k^2 je tedy liché. $\square$

Nyní zpět k důkazu původního tvrzení. Je-li p^2 sudé, pak je podle předchozího lemmatu sudé i p, tj. $p = 2m$ pro nějaké celé číslo m. To ovšem znamená, že $2q^2 = (2m)^2 = 4m^2$ právě tehdy, když $q^2 = 2m^2$ a q je tedy podle lemmatu (*) také

[12] Jaroslav Peregrin. *Kapitoly z analytické filosofie*. Filosofia: Praha, 2014. Str. 36

sudé. To je ve sporu s předpokladem, že jsou p a q nesoudělná a tedy $\sqrt{2}$ je iracionální číslo. ■

Pokud bychom předpokládali, že jsou některé z faktů použitých v důkazu již dokázané – tj., že jde o výchozí analytické pravdy, pak by Frege uznal dokazované tvrzení za analyticky pravdivé. Provedli jsme sérii logických kroků od předpokladu, že je číslo $\sqrt{2}$ racionální, který měl vést ke sporu a také k němu při aplikaci základních aritmetických vět (u kterých opět předpokládáme, že už jsou dokázány[13]) vedl. Ukázalo by s tím, že tedy vskutku nezáleží pouze na obsahu soudů, který máme v případě dokazovaného tvrzení dán snadno, ale na oprávněnosti k jeho vynášení, tj. na jeho důkazu. Každá věta v průběhu důkazu je tedy analytickou větou; tím nejzajímavějším ovšem je, že ne každá z těchto vět zapadá do Kantovy definice analytického soudu. Aniž by Kant udával podobné příklady, můžeme s jistotou říct, že věty „racionální číslo je rovno zlomku dvou nesoudělných celých čísel“ nebo „sudé číslo je rovno dvounásobku nějakého celého číslo“ by do jeho definice analytických soudů zapadali; tyto věty ovšem v důkazu figurují pouze jako předpoklady. Ty věty, které jsou pro důkaz především důležité jsou tvaru „jestliže …, pak …“ a „… právě tehdy, když …“ a jde tedy o věty *logické formy*, jež obsahují tzv. *synkategorematické* výrazy.

Mimo samotné Fregeho vymezení vůči Kantovi se nabízí i širší perspektiva pro demonstraci rozdílnosti jejich přístupů. V současnosti bychom mohli za obecně přijatelnou definici analytických výroků považovat tu, který tvrdí, že analytický výrok je oznamovací věta, jejíž pravdivost je patrná z jejího pouhého významu či tvaru[14]. Tato definice je poněkud vágní, jelikož jsme ukázali, že pravdivost může být patrná okamžitě v případě Kantových analytických soudů, ale i skrze proces zdůvodnění v případě těch Fregových. Tato definice, ač vágní, je dost široká na to, aby významově pokryla Kantovu i Fregovu definici. To však ale neznamená, že je schopná je tímto nahradit, neboť z ní samé není patrné žádné další členění analytických vět, které je ovšem vzhledem ke kolizím mezi podanými definicemi nasnadě. Prvním členěním, které se vzhledem k této obecné definici

[13] To je důležité, jelikož pro Frega je důkaz řetězcem pravd bez mezer – až k prvotním, dále nerozlišitelným pravdám, tj. axiomům.

[14] Jaroslav Peregrin, Stanislav Sousedík (eds.). *Co je analytický výrok?*. Oikoymenh: Praha, 1995. str. 7

nabízí je rozlišení na analytičnost *látkovou* a *formální*.[15] Jak ukážeme, jsou to právě definice Kantova a Fregova, jež jsou hlavními proponenty tohoto členění a je vzhledem k nim vyčerpávající[16].

Výrok nazveme látkově analytickým, je-li jeho pravdivost zjevná na základě významu použitých termínů – tedy pojmů.[17] To odpovídá příkladům, které jsme uvedli při výkladu Kantovy definice. Pro ně platí, že jsme-li s použitými pojmy seznámeni, pak musíme uznat, že jsou dané výroky vskutku analytické. Problém nastává pouze tehdy, není-li význam zcela očividný nebo je-li interpretovatelný vícero způsoby. Takto je např. věta „kohoutek je vodovodní baterie“ analytická pouze tehdy, nemáme-li na mysli malého kohouta. Kant se ovšem jako částečný racionalista spoléhá na lidský rozum a proto ho tato nepříliš závažná vlastnost jím vemezené analytičnosti pochopitelně netrápí.

Naproti tomu řekneme, že je výrok analytický formálně, pokud jeho pravdivost plyne čistě z jeho formy, aniž bychom hleděli na obsah pojmů. Příkladem takových výroku jsou věty typu „buď prší nebo neprší“ či klasický příklad „každý člověk je smrtelný a Sókratés je člověk, potom je Sókratés smrtelný“. Pro každého, kdo respektuje logiku našeho jazyka jsou tyto věty analyticky pravdivé i kdybychom nahradili variabilní výrazy ‚prší‘, ‚člověk‘, ‚smrtelný‘ a ‚Sókratés‘ za libovolné jiné. Tím se také otevírá nová problematika a to sice, které části jsou vzhledem k zachování analytičnosti věty variabilní a které nikoliv. Na tuto otázku Frege odpovídá ve svém *Begriffsschriftu*, když formalizuje synkategorematické výrazy jako funkce na *kategorematických* výrazech. Tento krok byl zásadní pro zrod moderní predikátové logiky, která nahradila logiku aristotelskou. Oproti kategorematickým výrazům, které bychom mohli vystihnout právě tím, že jsou vzhledem k formě věty variabilní, nebo tím, že mají nezávislý obsah, jsou synkategorematické výrazy mimo kontext bezobsažné, ale mohou ovlivňovat obsah komplexnějších výrazů, ve kterých se vyskytují. Typicky jde o logické nebo matematické operátory.

---

[15] Jaroslav Peregrin, Stanislav Sousedík (eds.). *Co je analytický výrok?*. Oikoymenh: Praha, 1995. Str. 8

[16] Analytické výroky lze dělit a definovat mnoha různými způsoby a není pochyb, že by tyto způsoby přinesli bohaté poznatky při aplikaci na Kantovo a Fregovo rozlišení. Pro zajímavost zmíníme článek D.A.T. Gasking. *The analytic-synthetic controversy*. Australasian Journal of Philosophy: 1972, 50:2, Str. 107-123, kde Gasking podává devět různých definic analytických soudů spolu s Quineovými námitkami.

[17] Jaroslav Peregrin, Stanislav Sousedík (eds.). *Co je analytický výrok?*. Oikoymenh: Praha, 1995. Str. 8

Z tohoto hrubého vymezení je evidentní, že pro Kanta je analytičnost záležitostí látkovou, jelikož záleží pouze na vztahu subjektu a predikátu, které jsou tvořeny právě kategorematickými výrazy a nikoliv na komplexní formě věty, která může obsahovat i synkategorematické výrazy. To ovšem neznamená, že by Kant formálně analytické výroky za analytické nikdy nepovažoval, spíše pro něj mohou být soudem pouze atomické výroky. Pokud by tomu tak nebylo, pak by jeho tvrzení, že rozlišení platí na všech subjekt-predikátových kladných soudech, a tyto zahrnují i formálně analytické výroky, nemohlo být platné. Proto může být podle Kantovy definice analytickým výrok „těleso je rozlehlé" či tautologie „těleso je těleso" ale nikoliv složený výrok „pokud je těleso rozlehlé, pak je těleso rozlehlé", jelikož jde o složení dvou výroků synkategorematickým výrazem – implikací. Takovýto složený výrok je navíc apriorní a je evidentní, že nijak nerozšiřuje naše poznání, čímž musí být vyloučen z řady výroků syntetických *a priori* a zbývá mu tak jediné místo v Kantově členění – jde o výrok analytický, který je přesto v rozporu s Kantovou definicí. Širší záběr na roli, kterou při tvoření soudů hraje jazyk a jeho logika předvede Frege svou substituční strategií.

Jak je již asi patrné, bude Frege zastávat analytičnost formální, i když, jak ukážeme, velmi netriviálním způsobem. Nejprve v *Begriffsschriftu* a poté v článku Funkce a pojem Frege definuje:

> „Jestliže se v nějakém výrazu, jehož obsah nemusí být posouditelný, vyskytuje nějaký jednoduchý nebo složený znak na jednom či více místech, a pokládáme-li tento znak za nahraditelný na všech nebo na některých z těchto míst znakem jiným, avšak všude týmž, pak nazýváme tu část výrazu, která se jeví jako neměnná, funkcí, a část nahraditelnou jejím argumentem." [18]

> „Tvrzení lze v obecnosti rozkládat právě tak jako rovnosti nebo analytické výrazy, na dvě části, z nichž jedna je v sobě uzavřená a druhá vyžaduje doplnění, je nenasycená. | Tak např. lze větu ‚Caesar dobyl Galii' rozložit na ‚Caesar' a ‚dobyl Galii'. Druhá část je nenasycená, nese s sebou prázdné místo, a teprve tím, že se toto místo vyplní vlastním jménem nebo

[18] Gottlob Frege. *Pojmopis*. Oikoymenh: Praha, 2012. Str. 30

výrazem, který vlastní jméno zastupuje, vyjeví se uzavřený smysl. I zde nazývám význam této nenasycené části funkcí.“ [19]

Tento Fregův geniální krok dal vzniknout predikátové logice, která svými možnostmi značně převyšuje tu aristotelskou, ale také s ní přichází komplikace – především v jejím matematickém uplatnění. Obecnou formu atomické subjekt-predikátové věty můžeme nyní vyjádřit výrazem $P(x)$, kde P zastupuje predikát (funkci) a x subjekt (argument). Z dnešního hlediska bychom však nehovořili o této formě jako o funkci, nýbrž jako o relaci[20]. O synkategorematických výrazech ovšem jako o funkcích hovořit můžeme, neboť významem věty jednoduché i složené je podle Frega její pravdivostní hodnota[21]. Takto je významem vět „Caesar dobyl Galii“ a „přestupný rok má 366 dní“ pravda, stejně tak ale i vět „Caesar dobyl Galii a přestupný rok má 366 dní“ či „buď Caesar dobyl Galii nebo je $\sqrt{2}$ racionální číslo“, jelikož synkategorematické výrazy „a“ a „nebo“ lze chápat jako funkce na pravdivostních hodnotách[22] o dvou (a potenciálně i více) argumentech:

„Nyní lze dodat ještě něco o funkcích se dvěma argumenty. Výraz funkce dostaneme tak, že složené znaky předmětu rozložíme na nasycenou a nenasycenou část. Tak např. znak ‚$3 > 2$‘ pravdivosti rozložíme na ‚3‘ a ‚$x > 2$‘. Nenasycenou část ‚$x > 2$‘ můžeme dále rozložit týmž způsobem na ‚2‘ a ‚$x > y$‘, kde nyní ‚y‘ činí zřetelným prázdné místo, které dříve bylo vyplněno ‚2‘.“ [23]

Problém může nastat během implikace. U Věty „pokud Caesar dobyl Galii, pak je číslo $\sqrt{2}$ iracionální“ stěží řekneme, že je její pravdivost zjevná čistě vzhledem k významům použitých termínů či jednodušších výroků. Frege se ve svém pojmovém

[19] Gottlob Frege. Logická zkoumání & Základy aritmetiky. Oikoymenh: Praha, 2011. Str. 66

[20] Funkce je speciálním případem relace, která nepřipouští, aby pro jeden argument existovalo více hodnot než jedna.

[21] Všimněme si, že formálním definováním synkategorematických výrazů jsme v rozporu s jejich původní vágní definicí, kde jde o části věty bez samostatného významu. Fregova formalizace a pozdější množinové zacházení dává každému výrazu matematiky a logiky význam a členění na kategorematické a synkategorematické se v tomto ohledu stává redundantním.

[22] Tentokrát o funkce půjde, jelikož nenastane případ, kdy by pravdivostní funkce přiřadila svým argumentům více hodnot než jednu.

[23] Gottlob Frege. Logická zkoumání & Základy aritmetiky. Oikoymenh: Praha, 2011. Str.75

písmu rozhodl pro implikaci materiální, tj. ke splnění pravdivosti stačí, aby byl antecedent nepravdivý. Formálně tedy implikace mezi dvěma výroky odpovídá disjunkci mezi negací antecedentu a konsekventem. Na jednu stranu je tedy materiální implikace očividně problematická, na druhou stranu její přijmutí do logiky značně posiluje sílu pro vedení důkazu. Frege navíc sám na jistá omezení svého Pojmopisu upozorňuje:

> „Domnívám se, že vztah mého Pojmopisu k běžnému jazyku lze učinit nejzřetelnějším pomocí přirovnání mikroskopu k oku. Oko má rozsahem své použitelnosti, pohyblivosti, jíž se může přizpůsobovat nejrůznějším okolnostem, velkou převahu nad mikroskopem. Pohlížíme-li na ně jako na optický přístroj, vykazuje ovšem mnohé nedokonalosti, které zůstávají nepovšimnuty v důsledku jeho intimního spojení s duševním životem. Jakmile však vědecký cíl klade velké požadavky na ostrost rozlišování, ukazuje se oko jako nedostatečné. Mikroskop naproti tomu je právě pro tyto účely neprosto vhodný, avšak právě tím pro všechny ostatní nepoužitelný.“ [24]

Mimo to je to právě možnost tohoto formálního zacházení, která ze strany Frega značně rozšiřuje přistup k analytickým soudům po Kantovi. Pokud totiž vezmeme příklady, které jsme uvedli při Kantově definici, tj. příklady látkově analytických soudů, můžeme s nimi formálně zacházet tak, že použité subjekty definujeme a částí definice bude daný predikát. Např. trojúhelník lze definovat jako útvar v rovině, který má tři strany tvořené úsečkami a tři úhly mezi těmito stranami. Látkově analytická věta „trojúhelník má tři úhly“ by pak na základě substituce byla identická s větou „útvar v rovině, který má tři strany tvořené úsečkami a tři úhly mezi těmito stranami, má tři úhly“, která v sobě zahrnuje tautologii a je tím pádem analytická formálně. To mimochodem ukazuje již Leibniz při svém dělení na faktické a rozumové pravdy.[25] Pro Leibnize jsou tyto výroky na základě definic užitých pojmů v případě analytičnosti identické.

Nyní, když je zcela vyrozuměno, jak lze sloučit Kantovu a Fregovu představu o analytičnosti jednoduchých subjekt-predikátových soudů, můžeme se zaměřit na tu oblast Fregovy definice, která Kantovu převyšuje. Fregovu definici pak můžeme upravit do srozumitelnějšího tvaru, když řekneme, že analytický výrok je buď tautologie (resp.

---

[24] Gottlob Frege. *Pojmopis*. Oikoymenh: Praha, 2012. Str. 8

[25] Hynek Janoušek, Vojtěch Kolman (eds.). Syntetické apriori. Filosofia: Praha, 2012. Str. 24

axiom) nebo výrok z tautologie odvozený nějakým úsudkovým pravidlem (typicky jde o *modus ponens*)[26]. Tím, že je do celé záležitosti zařazen pojem axiomu, si tato definice stále drží potenciál pokrýt i látkové analytické soudy.[27] Tento krok je tedy spíše jakousi rekonstrukcí než inovací a nevznikají tedy žádné nové pravdy. Přesunutí základních pravd myšlení do formálního světa má však svá úskalí, jak podrobně předvedeme v sekci o Kantově a Fregově filosofii matematiky.

Určit úspěšnost Fregových námitek vůči Kantově definici je celkově složité. Na jednu stranu má Frege pravdu, že je Kantova definice nedostatečná pro celek matematické praxe, především dokazování, kde je znalost obsahu soudů triviální, ale Fregova kritika se kolem Kanta spíše točila, než že by se ho přímo dotýkala. Frege se také domnívá, že argumentuje proti syntetičnosti aritmetických soudů v Kantově smyslu; jeho argumenty se tedy musí týkat Kantova rozlišení, což se ovšem neděje a fakt, že lze Fregovou definicí obsáhnout i soudy, které jsou analytické pro Kanta nestačí, neboť se tím vůbec nic netvrdí o syntetických soudech. Ty však nejsou předmětem této práce a otázku toho, jak blízko si jsou Fregova a Kantova definice ponecháváme stranou, neboť co bylo třeba vymezit pro nahlédnutí Fregova pojetí samotného – mimo tuto komparatistiku – již vymezeno bylo. Tím by bylo řečeno vše, co bylo třeba říci ohledně Fregova vymezení, v jakých pojmových rámcích se vlastně pohybuje, mluví-li o analytickém a syntetickém. Nyní je nasnadě ukázat, k čemu bylo takové vymezení vlastně užitečné.

2 Je aritmetika analytická nebo syntetická *a priori*?

Aby byla matematika skutečně exaktní vědou, míní Frege, musí reflektovat své základní pojmy. Podle toho, jak daleko nás tyto základní pojmy dovedou pak určíme, je-li analytická či syntetická:

> „Zde je to především počet, který se musí buďto definovat, nebo uznat za nedefinovatelný. To je také úloha této knihy. Na řešení této úlohy bude záviset rozhodnutí o povaze aritmetických vět.“ [28]

---

[26] Jaroslav Peregrin, Stanislav Sousedík (eds.). *Co je analytický výrok?*. Oikoymenh: Praha, 1995. Str. 16.

[27] Můžeme totiž položit axiom či definici pro libovolné termíny. To se stane zřejmějším, až vysvětlíme rozdíl mezi logickými a konvenčními axiomy.

[28] Gottlob Frege. Logická zkoumání & Základy aritmetiky. Oikoymenh: Praha, 2011. Str. 157

Před tím, než bude vůbec možné hovořit o Fregově filosofii matematiky a jeho definici čísla, je třeba podat a vysvětlit výčet zásad, které si Frege sám stanovuje a bez kterých by jeho interpretace nebyla na místě:

(1) „Je třeba ostře oddělovat psychologické od logického, subjektivní od objektivního;
(2) Na význam slov je třeba se ptát v souvislosti věty a nikoli v jejich izolaci;
(3) Je třeba mít na zřeteli rozdíl mezi pojmem a předmětem.“ [29]

Tyto zásady pro Frega určují, jak přistupovat k abstraktním objektům jako jsou čísla. První zásada je nutná z toho důvodu, že každé číslo a obecně každý matematický objekt, který je předmětem výzkumu musí být jedinečný. Takové číslo 2 může být vyjádřeno různými znaky: „$1+1$“, „*II*“, „dva“, ale tyto znaky musí vždy referovat ke stejnému objektu – nemůže jít tedy o libovolné subjektivní představy, které jsou předmětem psychologie, nýbrž o znaky s jednoznačně daným významem, jež budou předměty logiky. Status matematických objektů touto zásadou Frege zatím nestipuluje, pouze upozorňuje na nutnost rozlišení – zabývat se jím bude později. Druhou zásadu nazveme tradičně *principem kontextuality*. Jelikož jsou čísla zastoupené znaky a každý znak má potenciálně nekonečnou možnost uplatnění, je u každého použití číselného znaku nutné zkoumat i jeho kontext, neboť kupříkladu výraz „magická sedmička“ není výrazem aritmetiky. Třetí zásada pak souvisí s Fregovou sémanticko-ontologickou distinkcí pojem – předmět, která je předmětem jeho logických článků *O smyslu a významu*[30] a *Pojem a předmět*[31]. Spokojme se s poněkud zjednodušujícím vymezením, že předmět je ontologický korelát toho, co označujeme vlastním jménem, zatímco předmět je ontologický korelát toho, co označujeme *apelativem* – pojmovým výrazem. Zatímco „Michelangelo Buonarroti“ označuje konkrétní osobu, označuje apelativ „renesanční umělec“ několik osob a pojem jako „trojúhelník“ je pak potenciálně nekonečný. Pro Frega je tato zásada nutná pro to, aby bylo v posledku možné určit, ke které z těchto kategorií vlastně patří číslo.

Stanovením těchto zásad dochází k zásadnímu milníku v dějinách filosofického myšlení. Pokud bychom se rozhodli je dodržovat, pak se po vzoru tradičních filosofických

---

[29] Gottlob Frege. Logická zkoumání & Základy aritmetiky. Oikoymenh: Praha, 2011. Str. 152

[30] Tamtéž. Str. 17

[31] Tamtéž. Str. 79

otázek nemůžeme jednoduše ptát „co je x?“, pro nějaké x, ať už je čímkoli, nýbrž musíme se ptát „jaký je význam x?“ a vzhledem k principu kontextuality také „jak se výraz x používá?“, což je jakožto filosofická metoda typicky přisuzováno až pozdnímu Wittgensteinovi. Zde vidíme, že to byl Frege, který pochopitelně uskutečnil tzv. *obrat k jazyku*, ale kromě toho i předznamenal tzv. *obrat pragmatický*.

Co je tedy číslo (*počet*[32])? Na tuto otázku Frege odpovídá skrze kritiku jiných autorů a jejich mínění o pojmu počtu. Navzdory tomu, že Fregův pojem čísla vzniká na pozadí této kritiky, však nelze tvrdit, že by Frege jejich myšlenky zahazoval – tj. např. o induktivním, či přirozeném vzniku čísla. Jedinou myšlenku, která je pro něho nepřijatelná je, že je číslo předmětem psychologie:

> „Číslo je totiž právě tak málo předmětem psychologie nebo výsledkem psychických postupů jako třeba Severní moře. Objektivitě Severního moře není nijak na újmu to, že na naší libovůli závisí, kterou část vod na zemském povrchu vymezíme a rozhodneme se opatřit jménem ‚Severní moře‘. To není důvod ke zkoumání tohoto moře psychologickými metodami.“ [33]

Fregova kritika je postavená spíše na tom, že jsou dosavadní pojetí o číslech nepoužitelná pro vynášení soudů o číslech. Neříkají nic o jejich vlastnostech, jejich jedinečnosti atp. Poté, co se Frege s těmito autory vypořádá, přichází se svou vlastní definicí počtu. Nejprve poznamenává, že výskyt počtu se vždy dává v souvislosti s něčím, nikoli samostatně, a jde tedy vždy o ‚počet něčeho‘. Nejde však o vlastnost věcí, jakou jsou například barvy, které u věcí nemůžeme libovolně určit:

> „Podstatný rozdíl mezi barvou a počtem spočívá podle toho v tom, že modrá barva plochy nezávisí na naší libovůli. […] Naproti tomu nemohu říci, že nějakému balíčku karet náleží počet 1 nebo 100 nebo nějaký jiný o sobě, nýbrž nejvýše jen ve vztahu k našemu libovolnému způsobu pojímání“ [34]

Pokud čísla nejsou vypovídána v souvislosti s předměty, dochází Frege k závěru, že počet je vlastností pojmů, kterým náleží jako jejich rozsah. Čísla jsou tedy předměty:

[32] Tento pojem volí Frege pro kardinální čísla. Frege se totiž vymezoval proti založení kardinálních čísel na pojmu ordinálních čísel, jak to činil Georg Cantor.

[33] Gottlob Frege. Logická zkoumání & Základy aritmetiky. Oikoymenh: Praha, 2011. Str. 185

[34] Tamtéž. Str. 180

„Zde je namístě poněkud upřesnit náš výraz, že údaj o počtu obsahuje výpověď o pojmu. Ve větě ‚pojmu F přísluší počet 0‘ je 0 částí predikátu, pokládáme-li za věcný subjekt pojem F. Proto jsem se vyhýbal tomu, abych nazval číslo, jako je $0,1,2,$ vlastností pojmu. Jednotlivé číslo se jeví jako samostatný předmět teprve tím, že je součástí nějakého výroku. […] Tato samostatnost se v aritmetice projevuje všude, např. v rovnosti $1+1=2$. Protože nám zde záleží na tom, abychom uchopili pojem čísla tak, jak se používá ve vědě, nesmí nás rušit, že v běžném používání jazyka se číslo vyskytuje i atributivně.“ [35]

Atributivnímu pojetí jazyka jsme nevěnovali pozornost právě kvůli tomuto momentu, jelikož není relevantní pro věty aritmetiky. Dále Frege s ostatními autory souhlasí s tím, že počet je něčím, co lze přisoudit všemu:

„Nespočívá základ aritmetiky hlouběji než základ veškerého empirického vědění, ba dokonce hlouběji než základ geometrie? Aritmetické pravdy panují v oblasti počitatelného. Tato oblast toho zahrnuje nejvíce, neboť do této oblasti patří nejen to, co je skutečné, nejen to, co je názorné, nýbrž vše, co je myslitelné. Neměly by se tudíž zákony čísel nacházet v nejintimnějším spojení se zákony myšlení?“ [36]

Budí-li takové tvrzení pochybnosti, pak je dobré je usměrnit vysvětlením, že pro Frega zde již implicitně platí jeho ontologicko-sémantická distinkce na předměty jako významy vlastních jmen, pojmy jako významy apelativ a pravdivostní hodnoty jako významy vět. Pokud na toto přistoupíme, pak lze skutečně o všem myslitelném říci, že je to počitatelné.

Pojem počtu můžeme při zkoumání navíc omezit na pojem kladného celého čísla (přirozeného čísla), neboť je-li tento pojem dán, není problém pomocí něho zkonstruovat čísla celá a z nich pak čísla racionální (o něco problematičtější je konstrukce reálného čísla, které se věnoval Fregův současník Richard Dedekind)[37]. Kladných celých čísel je

[35] Gottlob Frege. Logická zkoumání & Základy aritmetiky. Oikoymenh: Praha, 2011. Str. 216

[36] Tamtéž. Str. 173

[37] S dnešní teorií množin bychom řekli, že celá čísla jsou množinou všech ekvivalenčních tříd na množině všech dvojic přirozených čísel vzhledem k relaci, která umožňuje uzávěr na odčítání. Podobně jsou

však potenciálně nekonečně mnoho a proto stačí obecné kritérium k získání všech takových čísel. Tomuto kritériu se říká *matematická indukce* a zakládá se na tom, že nám stačí mít nejmenší přirozené číslo (případně nejmenší číslo nějaké jiné posloupnosti čísel) a poté přechodovou funkci k číslům ostatním, typicky se tedy jako základní číslo volí 0 nebo 1 a jako přechodová funkce se volí tzv. funkce *následníka* (*successor function*), $n+1$.[38] Fregovi šlo tedy o to definovat 0, 1 a přechodovou funkci a pokud možno, pomocí čistě logických prostředků. Mimo to je nutné mít k dispozici kritérium identity, abychom mohli za každé okolnosti určit, jsou-li si dva aritmetické výrazy rovny či nikoli.

Frege tedy definuje nulu skrze pojem, který je vyjádřen nějakou nesplnitelnou podmínkou: „0 je počet, který přísluší pojmu ‚sám sobě nerovný'."[39] Tuto definici bychom v dnešní množinové notaci, kterou můžeme v tomto případě Fregovu definici zapsat bez újmy na interpretaci, definovali takto:

$$0 \leftrightharpoons \{x\,;\, x \neq x\}.$$

Nula je tedy množinou všech prvků, které si nejsou rovny; jelikož je vztah „být sobě roven" triviální vlastností všech předmětů, je jasné, že tato množina nebude mít žádné prvky, či ve Fregových termínech: půjde o pojem, pod který nespadá žádný předmět a tím pádem mu náleží počet 0. Podobně je pak definována jednička:

„Zkoumejme pojem – nebo, chcete-li raději, predikát – ‚roven 0'! Pod tento predikát spadá 0. Pod pojem ‚roven 0, nikoli však roven 0' naproti tomu nespadá žádný předmět, takže 0 je ten počet, který přísluší tomuto pojmu. Máme tedy pojem ‚roven 0' a pod něj spadající předmět 0 a o nich platí: počet, který přísluší pojmu ‚roven 0', je roven počtu, který přísluší pojmu ‚roven 0'; počet, který přísluší pojmu ‚roven 0, nikoli však roven 0', je 0. Podle naší definice tedy počet, který přísluší pojmu ‚roven 0', následuje v řadě přirozených čísel bezprostředně za 0. jestliže nyní definujeme: 1 je počet, který

---

racionální čísla množinou všech ekvivalenčních tříd na množině všech dvojic celých čísel vzhledem k relaci, která umožňuje uzávěr na dělení. Reálná čísla mohou být definována jako tzv. *Dodekindovy řezy* nebo jako limity všech *Cauchyovských posloupností*.

[38] Když už máme definovanou nulu, musíme jedničku definovat kvůli funkci $n+1$.

[39] Gottlob Frege. Logická zkoumání & Základy aritmetiky. Oikoymenh: Praha, 2011. Str. 233

přísluší pojmu ‚roven 0‘, pak můžeme poslední větu vyjádřit takto: 1 následuje v přirozené číselné řadě bezprostředně za 0.“ [40]

Dnešní notací bychom mohli opět definici jedničky zapsat jako

$$1 \leftrightharpoons \{0\}.$$

Postupnou iterací předchozího argumentu pro definici čísla 1 pak můžeme dospět k definici následníka pro libovolné n:

$$n + 1 \leftrightharpoons \left\{ y\,;\ \bigvee_{i=0}^{n} y = i \right\}.$$

Tím máme danou řadu přirozených čísel, ovšem bez kritéria rovnosti nebude možné určit, kdy jsou si dva různé výrazy označující stejné číslo rovny. Jako kritérium rovnosti musí Frege do své aritmetiky začlenit tzv. *Humův princip*. Ten je Georgem Boolosem pojmenován podle Humova precedentu k tomuto principu:

> „Jsou-li dvě čísla zkombinována tak, že jedno má vždy jednotku odpovídající každé jednotce čísla druhého, pak tato čísla prohlašujeme za sobě rovná.“ [41]

Humův princip tak, jak ho určuje Frege se zakládá na myšlence vzájemně jednoznačného přiřazení (bijekce) dvou pojmů. Frege vyjadřuje číslo, jako rozsah pojmu skrze pojem rovnopočetnosti; pro jednomístný predikát F pak pojem „rovnopočetný s F“ referuje k předmětu – k číslu a dává Fregovu obecnou definici čísla explikací: počet příslušný pojmu F je při množinovém zjednodušení definován jako množina všech pojmů rovnopočetných s F.

Humův princip lze pak definovat následovně:

> Počet příslušný pojmu F je orven počtu, který je příslušný pojmu G právě tehdy, když jsou pojmy F a G rovnopočetné.

Tím je podle Frega zajištěno vše, co bylo třeba zajistit v souvislosti s logickou definicií čísla. Všimněme si však, že Frege naprosto opomíjí exaktní určení matematických

[40] Gottlob Frege. Logická zkoumání & Základy aritmetiky. Oikoymenh: Praha, 2011. Str. 235

[41] Tamtéž. Str. 220

operací sčítání, násobení a operací k těmto inverzním. Nanejvýše by se Frege mohl odvolat ne své pojetí funkce a tomuto pojetí tyto operace podřídit.

Nyní se zaměřme na povahu celých aritmetických vět. Před tím, než Frege začal budovat svou analytickou aritmetiku se totiž pokusil vypořádat s tou Kantovu - syntetickou. Kantův argument ve prospěch syntetičnosti aritmetických soudů zněl takto:

> „Zpočátku bychom si sice mohli myslet, že věta $7 + 5 = 12$ je čistě analytická věta, která vyplývá z pojmu součtu sedmi a pěti podle zásady sporu. Když si však věci povšimneme blíže, zjistíme, že pojem součtu 7 a 5 neobsahuje nic víc než spojení obou čísel v jedno jediné, čímž se ani zdaleka nauvažuje o tom, jaké je toto jediné číslo, které obě čísla zahrnuje. Pojem dvanácti není v žádném případě myšlen už tím, že si pouze myslím ono spojení sedmi a pěti; a ať si svůj pojem takového možného součtu rozebírám sebedéle, číslo dvanáct v něm přesto neobjevím. Je třeba vykročit za tyto pojmy a vzít si na pomoc názor odpovídající jednomu z nich, například svých pět prstů nebo [...] pět bodů, a pak k pojmu sedmi postupně přidávat jednotky takto názorně daného čísla pět.“ [42]

Podle Kanta je tedy matematika syntetická, protože v rovnosti mezi aditivní operací na dvou číslech a jejím výsledkem dochází k absenci predikátu v subjektu, tj. číslo 12 nelze bez pomoci názoru odvodit ze součtu $7 + 5$. Názor, který podle Kanta potřebujeme je geometrické povahy – můžeme si pomoci buď prsty na ruce nebo body v prostoru.

Nehledě na to, že se věty aritmetiky ani zdaleka neomezují na relační výrazy ($5 + 7 = 12$), ale na kvantifikované výrazy, jako „existuje sudé prvočíslo“, „každé sudé číslo větší než 2 je rovno součtu dvou prvočísel“[43], Frege Kantovi vyčítá jeho geometrické analogie:

> „Bude vůbec dobré nepřeceňovat příbuznost s geometrií. [...] Geometrický bod vzat sám o sobě je úplně neodlišitelný od jakéhokoli jiného; totéž platí pro přímky a roviny. Až když jsou do jednoho názoru současně pojaty víceré body, přímky, či roviny, lze je odlišit. Jsou-li v geometrii z

[42] Immanuel Kant. *Kritika čistého rozumu*. Oikoymenh: Praha, 2020. Str. 45

[43] Tato věta je slavnou Goldbachovou domněnkou.

názoru získávány obecné věty, pak je to vysvětlitelné tím, že ony názorné body, přímky, či roviny vlastně nejsou nijak zvláštní, a mohou tedy sloužit jako zástupci celého svého druhu. Jinak je tomu u čísel: každé má svoji jedinečnost. Do jaké míry může určité číslo zastupovat všechny ostatní, a kde se dostává ke slovu jeho osobitost, se nedá jen tak beze všeho říci.“ [44]

„Bod prostoru se totiž nedá odlišit od jiného bodu, přímka nebo rovina od jiné přímky nebo roviny, odlišit se nedají shodná tělesa, shodné části ploch nebo křivek, pokud je zkoumáme samy o sobě.“ [45]

Frege zde vystupuje mnohem více jako matematik, než jako filosof. Jeho argument je založen na prostém výčtu matematických faktů, jež demonstrují nemožnost budování analogie mezi geometrií a aritmetikou, které se ve svém argumentu dopouští Kant. V první řadě platí jistá kongruence mezi geometrickými objekty: dva libovolné body, dvě libovolné přímky, či dvě libovolné roviny budou vždy za každé situace kongruentní. To ovšem nemůže za netriviálních podmínek platit pro dvě různá čísla. Stejně tak všechny netriviální vlastnosti jako prvočíselnost, sudost, lichost a nekonečně mnoho dalších nemůžou platit pro všechna čísla. Za druhé, podle Frega nemůže názor sloužit k opodstatnění aritmetických zákonů:

„Nespočívá základ aritmetiky hlouběji než základ veškerého empirického vědění, ba dokonce hlouběji než základ geometrie? Aritmetické pravdy panují v oblasti počitatelného. Tato oblast toho zahrnuje nejvíce, neboť do této oblasti patří nejen to, co je skutečné, nejen to, co je názorné, nýbrž vše, co je myslitelné. Neměli by se tudíž zákony čísel nacházet v nejintimnějším spojení se zákony myšlení?

[...] Musím také odporovat obecnosti následující Kantovi věty: ‚bez smyslovosti by nám nebyl dán žádný předmět‘. Nula i jednička jsou předměty, které nám nemohou být dány smyslově. I ti, kteří považují malá čísla za názorná, budou muset přiznat, že jim nemohou být názorně dána žádná z čísel, která jsou větší než 1000 (1000^{1000}), a že přesto mnohá z nich známe. Snad

[44] Jaroslav Peregrin, Stanislav Sousedík (eds.). *Co je analytický výrok?*. Oikoymenh: Praha, 1995. Str. 37

[45] Tamtéž.

používal Kant slovo ‚předmět‘ v poněkud jiném smyslu, pak se ale nula, jednička i naše ∞_1 vůbec vymykají tomu, o čem pojednává; protože pojmy to také nejsou, a i pro pojmy Kant požaduje, aby jim v názoru připojil předmět.“ [46]

Podle Kanta jsou operace s čísly spojeny s čistým časovým názorem. I tuto myšlenku se však Frege snaží zavrhnout:

> „Čas je jen psychologický požadavek počítání, nemá však s pojmem čísla nic do činění. Znázorníme-li neprostorové a nečasové předměty prostorovými nebo časovými body, může to usnadnit počítání. V zásadě to však předpokládá použitelnost pojmu čísla na neprostorové a nečasové. […] Časové body jsou odděleny kratšími či delšími, stejnými či nestejnými časovými intervaly. To vše jsou vztahy, které s číslem nemají vůbec nic do činění. Všude je zde přimíseno něco zvláštního, nad co je číslo ve své obecnosti povýšeno.“ [47]

Frega navíc oproti Kantovi kromě názornosti trápí při určování analytičnosti (aritmetiky) také jazyk, který nebere jako prostý fakt světa, ale jako transcendentální rámec, ve kterém teprve o světě něco vypovídáme[48]. Jde v podstatě o nový transcendentální projekt, který ten Kantův rozšiřuje.

V posledku stojí za zmínku Fregovo přiznání zásluh Kantovi. Podle Frega je Kantovo rozlišení soudů na analytické a syntetické velmi podstatné a sám ho označuje „veleduchem, k němuž můžeme vzhlížet jen s vděčným obdivem“[49]. Dále Frege souhlasí s tím, že Kant nazval geometrické soudy syntetickými *a priori*. To je velmi podstatné, neboť bez tohoto faktu, bychom mohli Fregovu pozici v distinkci analytického a syntetického považovat co do významu za regresivní, až k Leibnizovu pojetí na rozumové a faktické pravdy. Podle Frega ovládají geometrické zákony oblast prostorově názorného, ať už je to skutečnost, či výplod představivosti – vždy jsou vázány axiomy (eukleidovské) geometrie.

[46] Jaroslav Peregrin, Stanislav Sousedík (eds.). *Co je analytický výrok?*. Oikoymenh: Praha, 1995. Str. 42

[47] Gottlob Frege. Logická zkoumání & Základy aritmetiky. Oikoymenh: Praha, 2011. Str. 202

[48] Vojtěch Kolman. *Idea, číslo, pravidlo*. Filosofia: Praha, 2011. Úvod

[49] Gottlob Frege. Logická zkoumání & Základy aritmetiky. Oikoymenh: Praha, 2011. Str. 245

Takto je geometrie syntetická, zároveň jsou však její pravdy nutné, je tudíž *a priori* a to činí Kanta ve Fregových očích jeho výsledky téměř nedotčeným velikánem, neboť mu šlo především o to, objevit soudy, které jsou syntetické a *a priori*, což se mu podle Frega podařilo, a že k těmto soudům nepatří aritmetika není nijak podstatné.

K tomu dodáme, že syntetičnost geometrie však nachází jisté úskalí, vzhledem k objevu neeukleidovských geometrií. Kantův domněle syntetický *a priori* výrok, že „nejkratší vzdálenost mezi dvěma body je rovná čára" pak může působit problémy, když se pohybujeme v neeukleidovském zakřiveném prostoru, který mimo jiné nelze jednoduše zkonstruovat v čistém názoru.

3 Je Fregův logicismus konzistentní?

Po všem, co již bylo řečeno je nyní nutné položit otázku, zda-li byl Frege při svém logicistickém podniku konzistentní. Tato nutnost ovšem není podmíněna Fregem samým, který, jak sám říká, chtěl analytickou povahu vět aritmetiky učinit pouze nanejvýš pravděpodobnou:

> „Doufám, že se mi podařilo v tomto spisu učinit pravděpodobným, že aritmetické zákony jsou analytické soudy, a tedy soudy apriorní." [50]

A také:

> „Nečiním si nárok na to, že jsem učinil analytickou povahu aritmetických vět více než jen pravděpodobnou, neboť lze stále pochybovat, zda lze jejich důkazy vést výhradně z čistě logických zákonů, zda se někde nepozorovaně nepřimísil jiný druh premisy." [51]

Pokud ho nyní chceme podrobit testu konzistence, musíme mít Fregeho přání na paměti. Nepůjde o snadný úkol, jelikož nemáme žádné kritérium, na základě kteréhož bychom mohli určit takovouto pravděpodobnost. Budeme tedy opět nuceni zkoumat, které z Fregových argumentů – ač by mohli vést k nekonzistenci teze o analytičnosti aritmetiky – jsou potenciálně špatně vyložené a nejsou tak přímo smrtící ranou pro jeho systém. V tomto ohledu bude především nutné zkoumat Fregův údajný platonismus a některé logické principy, které Frege do své logiky začlenil, a které by mohli pro Fregem pojatou

[50] Gottlob Frege. Logická zkoumání & Základy aritmetiky. Oikoymenh: Praha, 2011. Str. 243

[51] Tamtéž. Str. 246

analytičnost představovat určitý problém. Tuto diskuzi uzavřeme dvěma tématy, které jsou historicky pro Fregův logicismus nejvíce problematické. Nepůjde o nic jiného než o slavný *Russellův paradox* a ještě slavnější *Gödelovy věty o neúplnosti aritmetiky*.

3.1 Je Fregův platonismus analytický?

Platonismem se obvykle myslí ontologický realismus ideálních objektů, jako jsou čísla, funkce, množiny atp. V takovém případě jsou čísla *o sobě* považována za reálné entity mimo prostor a čas, ale také mimo lidskou mysl – nejsou představami. Poznání těchto ideálních objektů se pak musí spoléhat o nějakou formu Platónovy *anamnézis* a věty o číslech by tak pro nás představovali syntetické soudy, které naše poznání rozšiřují. Frege tedy čelí otázce, jak je možné poznávat abstraktní entity, které jsou mimo dosah smyslové zkušenosti. V tomto ohledu se by se Fregeho platonismus vyznačoval tím, že by předpokládal schopnost lidského rozumu přistupovat k těmto entitám přímo, prostřednictvím intelektuální intuice. Tato schopnost není empirická, ale apriorní. Pokud na tento platonismus přistoupíme, bude matematické poznání druhem racionálního poznání, které je nezávislé na empirii, ale přesto je objektivní a univerzálně platné. Problémem však je, že Frege představuje čísla jako zcela nezávislá na člověku, přičemž Fregův platonismus skutečně bývá interpretován ontologicky. Zapomíná se ale na zásadu, kterou Frege pro své zkoumání vymezil a kterou jsme již zmínili výše: slova musí mít význam jedině v souvislosti věty. Tato doktrína se nazývá *větným holismem*. Jelikož se Fregův platonismus týká významů výrazů, musíme tuto doktrínu srovnat s ontologickým výkladem. V souvislosti s významy a jejich nezávislosti na lidské mysli a jevové skutečnosti se často mluví o Fregeho *třetí říši* objektivních předmětů, které nemusí být jen předměty matematiky:

> „Rovník se často nazývá myšlenou čarou. Bylo by však nesprávné, nazvat jej vymyšlenou čarou; nevznikl myšlením, není výsledkem duševního pochodu, myšlením byl jen poznán, uchopen. Kdyby ‚být poznán‘ znamenalo ‚vzniknout‘, pak bych o něm nemohl vypovídat nic pozitivního ve vztahu k době, která tomuto údajnému vzniku předcházela.“ [52]

Zprvu to tedy není přímo existence, ale objektivita a nezávislost, co bychom mohli považovat za kritéria Fregova platonismu. Frege přitom tvrdí:

---

[52] Gottlob Frege. Logická zkoumání & Základy aritmetiky. Oikoymenh: Praha, 2011. Str. 185

„Objektivní je […] zákonité, pojmové, souditelné, to, co lze vyjádřit slovy. […] Objektivitou rozumím tedy nezávislost na našem vnímání, nazírání a na našich představách, na rozvrhu vnitřních obrazů ze vzpomínek dřívějších počitků, nikoli však nezávislost na našem rozumu; neboť zodpovědět otázku, co věci jsou, nezávisle na rozumu, by znamenalo soudit, aniž bychom soudili, prát kožich, aniž bychom jej namočili.“ [53]

Stejně jako „Slunce nezmizí, když zavřu oči“[54], tak nepřestane platit ani Pythagorova věta. Co ovšem zaručuje platnost Pythagorovy věty je její důkaz a fakt, že se u použitých výrazů zachová obsah. Stejně jako Fregův pojem analytičnosti závisí na procesu odůvodnění a nikoli na nahlédnutí obsahu, je i jeho platonismus závislý na tom, že nepřestáváme hájit výroky, které tvrdíme o čemkoli. Proto můžeme dojít k závěru, že Fregův údajný platonismus pro jeho analytičnost přímo vadný není.

3.2 Jsou *Humův princip* a *Grundgesetz V* analytické?

Mimo Humův princip, jehož definici jsme už předvedli, předkládá Frege ještě jeden princip, který by mohl pro analytičnost aritmetiky představovat problém; konkrétně jde o princip *Grundgesetz V*, jež je definován následovně:

„Rozsah pojmu F je rovný rozsahu pojmu G právě tehdy, když pro každý předmět, který má vlastnost F ji má právě tehdy, když má i vlastnost G.“

Ve skutečnosti pak teprve z tohoto principu Frege odvozuje princip Humův. Je zřejmé, že analytičnost Fregovy aritmetiky by se bez přibrání Humova principu a Grundgesetz V rozpadla, neboť bychom přišli o kritérium rovnosti či zachování extenze pojmů. Nerozpadne se však analytičnost Fregovy aritmetiky, pokud si tyto principy zachová? Tato na první pohled nenápadná otázka vedla velkým objevům.

Humeův princip je do Fregova systému přijat jako základní předpoklad, ale nezdá se, že by byl sám o sobě odvozen z čistě logických principů. Přestože Humeův princip umožňuje logickou konstrukci čísel, nelze jej odvodit čistě analyticky z definice nebo z principů formální logiky – z tautologií, jak požadovala Fregova definice. Přesto jde o princip elegantní a jeho strategie, ať už vyhovuje Fregovu logicismu či nikoli je geniální

[53] Vojtěch Kolman. *Idea, číslo, pravidlo*. Filosofia: Praha, 2011. Str. 111

[54] Gottlob Frege. Logická zkoumání & Základy aritmetiky. Oikoymenh: Praha, 2011. Str. 149

sama o sobě, neboť mění otázku „co je číslo?“ na otázku „kdy se číslo zachovává?“, čímž se vyhýbá značným ontologickým obtížím, které tato otázka běžně přináší. Může být nanejvýš přijatelný na základě intuice, což by mohlo znamenat, že může mít povahu nějakého syntetického axiomu jako předpokladu pro usuzování. Fregeho záměr ukázat, že celá aritmetika je čistě analytická je tedy narušen, protože přijetí Humeova principu by mohlo vyžadovat jakýsi syntetický krok, který není ryze logický. Jeho analytičnost lze navíc zpochybnit právě kvůli tomu, že se předpokládají věty tvaru „n je počet, který náleží pojmu F“ a pojmy tvaru „stejnopočetný s pojmem F“. Ani u těchto vět nemůžeme říci, že by tyto věty byly striktně analytické v souladu s Fregovou definicí, bez dalšího zkoumání. Dalším důvodem pro pochybnost je, že vzájemně jednoznačné přiřazení, o které se Humův princip opírá, se může zdát záležitostí názoru.

Když Frege Humův princip vyvozuje z Grundgesetz V, nic se tím neřeší a celá situace je vlastně mnohem horší. Představme ještě jednu definici analytičnosti, která je ekvivalentní s tou Fregovou: výrok je analytický, pokud z něho nelze vyvodit spor.[55] Grungesetz V, který do svého systému Frege zahrnul, jako vlastní variantu axiom extenzionality a zčásti i naivní komprehenze, totiž ke sporu vede, jak ukázal ve svém dopisu Fregovi Bertrand Russell, když představil tzv. Russellův paradox. Fregovo naivní uchopení tedy vede ke sporu a tím je, alespoň prozatím (vzhledem k jeho zásadám) zasazena jeho logicismu smrtelná rána.

3.3 Důsledky Fregova logicismu

Již jsme ukázali, že Fregův pojem analytičnosti vede k axiomatickým systémům. Podle definice analytičnosti, kterou jsme v souvislosti s tímto podali stačí mít výčet základních axiomů spolu s odvozovacím pravidlem, které nám umožní z těchto axiomů získávat další pravdy. Dosud jsme ovšem neřekli, jaký má být status těchto axiomů, tj. musejí-li to být analytické pravdy nebo libovolné věty dané konvencí. Pokud bychom přijali premisu, že axiomy mohou být libovolná tvrzení, pak by se tato nová definice stala velmi širokou. Otázkou však je, je-li tento krok žádoucí. Frege za axiomy považuje věty logiky, tedy tautologie. Z těchto se snaží vyvodit všechny věty matematiky, jak podrobněji ukážeme při interpretaci jeho logicismu. Matematik David Hilbert, který byl Fregovým

[55] D.A.T. Gasking. *The analytic-synthetic controversy*. Australasian Journal of Philosophy: 1972, 50:2, Str. 107-123

sokem v oboru s Fregem nesouhlasí ohledně statusu axiomů. Podle něj totiž může být axiomem cokoli, z čeho neodvodíme spor:

> „Píšete: ‚Z pravdivosti axiomů vyplývá, že nemohou být ve vzájemném rozporu.‘ Zaujala mě právě tato vaše věta, protože pokud jde o mě, pak od počátku, co o těchto věcech přemýšlím, píšu a přednáším, jsem si zvykl říkat pravý opak: nejsou-li libovolně ustanovené axiomy ve vzájemném rozporu s celkem svých důsledků, pak jsou pravdivé – věci, které jsou těmito axiomy definovány, existují.“ [56]

Systém s konvenčně zvolenými axiomy by ve Fregově případě byl pod hrozbou, že nebude vykazovat známky analytičnosti, neboť je stejně třeba určit jsou-li analytické či syntetické tyto axiomy:

> „[…] Kdyby byl (69) syntetický soud, pak by syntetické byly i všechny věty z něj odvozené.“ [57]

Z obecné teze logicismu, že všechny věty aritmetiky lze postavit na logice se může dále zdát, že se rozpadá, když Kurt Gödel představil své věty o neúplnosti aritmetiky. Pro zdejší účely zjednodušená první Gödelova věta tvrdí, že rekurzivně axiomatizované struktury se základní aritmetikou (tzv. *Robinsonovou*) budou vždy obsahovat věty, které stejně z těchto axiomů nelze dokázat ani vyvrátit - těmto větám se říká *nezávislé sentence*. Jelikož Fregův systém Robinsonovu matematiku obsahuje, týká se tato neúplnost i jeho aritmetiky. V tomto případě však nejde přímo o kolizi analytičnosti nýbrž kolizi tzv. *Hilbertova programu*, který měl za jeden z cílů ukázat, že je matematika úplná.

Fregův logicismus se dále reviduje právě skrze pojetí axiomů, na které jsme ukázali rozlišný pohled mezi Fregem a Hilbertem. Kdybychom přijali ideu, že mohou být axiomy voleny konvenčně, pak nejde sice o analytičnost Fregovu ale o jakousi analytičnost relativní – k k daným zvoleným axiomům. Takto je axiomatizována i současná, tzv. *Zermelo-Fraenkelova teorie množin*. V ní je formalizována takřka celá současná matematika a chtěli bychom se nyní ptát, je-li matematika jakkoli analytická, museli bychom se přitom ohlížet na toto relativní pojetí analytičnosti a nikoli to Fregovo. To

---

[56] Jaroslav Peregrin, Stanislav Sousedík (eds.). *Co je analytický výrok?*. Oikoymenh: Praha, 1995. Str. 17

[57] Gottlob Frege. *Pojmopis*. Oikoymenh: Praha, 2012. Str. 101

můžeme nazvat nějakou slabší verzí logicismu, která ovšem narozdíl od toho Fregova původního, je udržitelná.

Konečně se tak dostáváme k zásadnímu pozorování. Frege neobjevuje matematiku jako analytickou, nýbrž ji takovou vynalézá, resp. se ji takovou pokouší vynalézt, stejně jako svou logiku, kde je poněkud úspěšnější. Fregova snaha ukázat, že jsou věty aritmetiky analytické vyústila v novou matematickou metodu, dosud nevídanou. Logicismus není pouze filosofický myšlenkový směr, ale matematická škola. – Takové Gödelovy věty, které zdánlivě demonstrují meze logicismu jsou naopak možné právě díky němu. Po tom, co se po Fregově objevu moderní logiky začali logiky rozrůzňovat, a když se přistoupilo na relativní analytičnost, množiny všech analytických pravd, tedy tautologií, jsou relativní vzhledem ke zvoleným logikám. V prvořádové predikátové logice je například nepravdivé že z věty „všichni sloni mají chobot“ plyne věta „existuje slon, který má chobot“, jelikož jejich formalizace to nedovoluje:

$$\forall x\big(S(x) \rightarrow Ch(x)\big), \exists x\big(S(x) \wedge Ch(x)\big).$$

Závěr

Nejčastěji bývá Frege interpretován metafyzicky a ze strany matematických logiků pouze historicky. Interpretace, která mi přijde nejrozumnější je ta transcendentálně-pragmatická: Frege se rozhodl pro určitý rámec a na pozadí tohoto rámce jednal co nejdůsledněji. Takto jsme ukázali, že Frege svůj pojem analytičnosti nejen vymezoval vůči Kantovi, ale vytvořil pojem nový. Stejně tak jsme řekli, že Frege, při své snaze ukázat aritmetiku jako analytickou implicitně mění i obor matemtiky – nemůže jít o stejný obor, jako u jeho předchůdců, když je od základů pojatý jinak. I když je logicismus v aritmetice dnes zásadně neudržitelný, jeho filosofický vliv je stále nedozírný. K tomuto odhalení poslouží čtenáři spíše srovnání s pozdějšími mysliteli, než s těmi předešlými. Na pozadí tohoto srovnání nám může být zjevné, co z Fregeho zůstalo i přes léta, která nás od něho dělí. Srovnání bude vzhledem k požadované interpretaci nejvhodnější s raným Wittgenstinem. Wittgenstein ve svém Traktátu představuje analytické soudy jako takové, které vznikají volbou určitého vztahu k zobrazované skutečnosti, a které nejsou rysem určité logiky. Jde tedy o relativní analytičnost, o které jsme mluvili výše.

Frege zvolil určitou logiku a zabýval se povahou aritmetických soudů na pozadí této volby bez jakýchkoliv vodítek. Jeho logika spočívala v tom, že si uvědomil potřebu zachování určité formální stránky jazyka – synkategorematických výrazů a na určitém zacházení se subjekt-predikátovou větou jako s funkcí. Pro rozhodnutí povahy aritmetických soudů vzhledem k této logice přistoupil Frege na Kantovu distinkci soudů a po celou dobu pracoval s pojmem analytického v jeho relačnosti k pojmu syntetického. Po celou dobu mu nešlo o příspěvek k metafyzice, ale o posílení přístupu k matematice, v tomto ohledu je jeho postoj transcendentální, zabývající se podmínkami možností aritmetiky a pragmatický, jelikož stojí na jistém odkazu k fungující jazykové praxi a na vybudování logického systému na základě této praxe. Můžeme říci, že Fregův kreativní přístup k logice byl tak spíše abduktivní než deduktivní, po vzoru abdukce tak, jak o ní mluví Charles Sanders Peirce, když říká, že to nejsou indukce a dedukce, co jsou základní úsudkové principy vědy, nýbrž kreativní abdukce, kdy se po pozorování nejprve navrhují hypotézy a teprve na základě nich se ověřuje jejich korespondenčnost se světem. S abduktivním základem logiky vědy navíc souhlasí i Kant, když v úvodu ke své Kritice tvrdí:

„Když Galilei nechal valit po nakloněné rovině koule s tíží, kterou sám zvolil, právě tak jako když Torricelli nechal vzduchu nést určitou hmotnost, jejíž velikost pokládal za rovnou předem známé hmotnosti vodního sloupce, a právě tak, když ještě později Stahl proměňoval kovy ve vápenec a ten opět v kovy tím, že jim něco odnímal a opět vracel, svitlo všem přírodovědcům. Pochopili, že rozum nahlíží jen to, co sám podle svého rozvrhu vytváří, že musí s principy svých soudů postupovat vpřed podle stálých zákonů a nutit přírodu, aby odpovídala na jeho otázky, a nesmí se jí jenom nechat vodit jako na vodítku. Náhodná pozorování, učiněná bez jakéhokoli předem rozvrženého plánu, spolu totiž jinak nesouvisejí v žádném nutném zákoně, který ovšem rozum hledá a vyžaduje.“ [58]

Tento postřeh samozřejmě platí pro přírodní vědy a nikoli pro matematiku, já ale doufám, že jsem se touto prací alespoň zčásti podílel na tom ukázati, že něčím jako je tento typ myšlení – geniální abdukce a značná vynalézavost – je i Fregova snaha ukázat aritmetiku jako analytickou.

[58] Immanuel Kant. *Kritika čistého rozumu*. Oikoymenh: Praha, 2020. Str. 18

Seznam použité literatury

1) BEANEY Michael (eds.). *The Frege Reader*. Blackwell Publishing: Malden, Oxford, Carlton, 1997.
2) FREGE Gottlob. *Logická zkoumání & Základy aritmetiky*. Oikoymenh: Praha, 2011.
3) FREGE Gottlob. *Pojmopis.* Oikoymenh: Praha, 2012.
4) GASKING D.A.T. *The analytic-synthetic controversy*. Australasian Journal of Philosophy: 1972, 50:2.
5) HINTIKKA Jaakko. *Knowledge and the known*. Reidel Publishing Company: Dordrecht, 1974.
6) JANOUŠEK Hynek, KOLMAN Vojtěch (eds.). *Syntetické apriori*. Filosofia: Praha, 2012.
7) KANT Immanuel. *Kritika čistého rozumu*. Oikoymenh: Praha, 2020.
8) KANT Immanuel. *Základy metafyziky mravů*. Oikoymenh: Praha, 2014
9) KOLMAN Vojtěch, PUNČOCHÁŘ Vít. *Formy jazyka*. Filosofie: Praha, 2015.
10) KOLMAN Vojtěch. *Filosofie čísla*. Filosofia: Praha, 2008.
11) KOLMAN Vojtěch. *Idea, číslo, pravidlo*. Filosofia: Praha, 2011.
12) KOLMAN Vojtěch. *Logika Gottloba Frega*. Filosofia: Praha, 2002.
13) MACBETH Danielle. *Frege's Logic*. Arvard University Press: Cambridge, Massachusetts, London, 2005.
14) PEREGRIN Jaroslav, SOUSEDÍK Stanislav (eds.) *Co je analytický výrok?*. Oikoymenh: Praha, 1995.
15) PEREGRIN Jaroslav. *Kapitoly z analytické filosofie*. Filosofia: Praha, 2014.
16) POTTER Michael. *Reason's Nearest Kin*. Oxford University Press: Oxford, 2000.
17) WITTGENSTEIN Ludwig. *Tractatus logico-philosophicus*. Oikoymenh: Praha, 2017.