

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Kateřina Stuchlá

# **Různá zavedení goniometrických funkcí**

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.

Studijní program: Matematika se zaměřením  
na vzdělávání

Studijní obor: MNUP

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 16. 7. 2023

Kateřina Stuchlá

## Poděkování

Ráda bych poděkovala RNDr. Jakubu Staňkovi, Ph.D., za odborné vedení této práce, zvláště za cenné připomínky, rady a čas, který mi během psaní věnoval. Mé poděkování patří také doc. RNDr. Jarmile Robové, CSc., za pomoc s hledáním vhodných učebnic, Mgr. Zdeňku Halasovi, DiS., Ph.D., za poskytnuté konzultace ke kapitole z historie a spolužačkám deskriptivářkám za postřehy k obrázkům vytvořeným pro tuto práci.

Kromě toho bych ráda vyjádřila vděčnost své rodině a všem blízkým lidem za to, že mě ve studiu i v mnohých dalších chvílích povzbuzovali a byli mi velikou oporou a inspirací.

Název práce: Různá zavedení goniometrických funkcí

Autor: Kateřina Stuchlá

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato práce představuje, porovnává a propojuje pět různých zavedení sinu a kosinu; základoškolské zavedení pomocí poměrů délek stran v pravoúhlých trojúhelnících, středoškolské zavedení pomocí souřadnic bodů na jednotkové kružnici a vysokoškolská zavedení pomocí mocninných řad, pomocí součtových vzorců a limity a pomocí Eulerových vzorců. Dále práce komentuje, jak je zavedení sinu a kosinu zpracováno v základoškolských a středoškolských učebnicích. Kromě toho práce zmiňuje některé aplikace sinu a kosinu a nabízí také stručný pohled do historie goniometrie.

Klíčová slova: goniometrické funkce, mocninná řada, Taylorův polynom

Title: Several definitions of trigonometric functions

Author: Kateřina Stuchlá

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This thesis introduces, compares and connects five various definitions of sine and cosine; elementary school definition by means of ratios of side lengths of right triangles, secondary school definition by means of the coordinates of points on the unit circle and higher education definition by means of power series, by means of angle addition and subtraction theorems and a limit and by means of Euler's formula. Furthermore, the thesis comments on the definitions of sine and cosine presented in elementary education and secondary education textbooks. Besides, the thesis mentions some applications of sine and cosine and it gives also a brief look at the history of trigonometry.

Keywords: trigonometric functions, power series, Taylor's polynom

# Obsah

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Úvod</b>  | <b>2</b>  |
| <b>1 Historie</b>  | <b>3</b>  |
| <b>2 Zavedení sinu a kosinu na ZŠ</b>                    | <b>6</b>  |
| 2.1 Proč zavádět sinus a kosinus . . . . .               | 6         |
| 2.2 Základoškolské zavedení . . . . .                    | 7         |
| 2.3 Komentář k základoškolským učebnicím . . . . .       | 10        |
| <b>3 Zavedení sinu a kosinu na SŠ</b>                    | <b>13</b> |
| 3.1 Proč zavádět sinus a kosinus podruhé . . . . .       | 13        |
| 3.2 Středoškolské zavedení . . . . .                     | 14        |
| 3.3 Komentář ke středoškolským učebnicím . . . . .       | 22        |
| <b>4 Zavedení sinu a kosinu na VŠ</b>                    | <b>25</b> |
| 4.1 Proč zavádět sinus a kosinus ještě jinak . . . . .   | 25        |
| 4.2 Zavedení pomocí mocninných řad . . . . .             | 25        |
| 4.3 Zavedení pomocí součtových vzorců a limity . . . . . | 30        |
| 4.4 Zavedení pomocí Eulerových vzorců . . . . .          | 35        |
| <b>Závěr</b>   | <b>37</b> |
| <b>Zdroje</b>  | <b>38</b> |

# Úvod

V didaktice matematiky je dnes běžnou praxí budovat teorii goniometrie v rámci různých stupňů vzdělávání. V této práci se zaměříme na funkce sinus a kosinus, které zavádíme několikrát různými způsoby. Podle vzdělávacích plánů objevujeme v deváté třídě základní školy sinus a kosinus přes poměry délek stran v pravoúhlých trojúhelnících, na střední škole pak sinus a kosinus definujeme přes souřadnice bodů na jednotkové kružnici a na vysoké škole nakonec k zavedení sinu a kosinu využijeme jednak mocninné řady, jednak význačné vlastnosti funkcí a dále také souvislosti sinu a kosinu s exponenciálou.

Výše popsané rozvrstvení látky má – jak v této práci ukážeme – dobré důvody, protože v každém stupni vzdělávání pracujeme s různými matematickými objekty a sinus a kosinus aplikujeme jiným způsobem. Rozčlenění teorie goniometrie s sebou ale přináší riziko, že bude látka probírána izolovaně a bez návazností, a tedy nekompaktně. Právě proto se v této práci zaměříme na to, abychom jednotlivá zavedení vzájemně provázali, a tak demonstrovali to, že různá zavedení směřují k jediné teorii.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol.

V první kapitole nahlédneme na to, co vedlo lidi ke zkoumání funkcí sinus a kosinus a jakým způsobem se teorie okolo těchto funkcí rozvíjela.

Ve druhé, třetí a čtvrté kapitole si pak postupně představíme základoškolské, středoškolské a vysokoškolské zavedení sinu a kosinu. Každou z těchto kapitol začneme krátkým motivačním úvodem, ve kterém stručně vysvětlíme, proč a jak sinus a kosinus na daném stupni zavádíme. Druhou a třetí kapitolu navíc zakončíme pohledem do základoškolských a středoškolských učebnic, kde krátce okomentujeme, jaké alternativní cesty zavedení existují, jaké nepřesnosti se v učebnicích objevují a v čem se můžeme danými učebnicemi inspirovat.

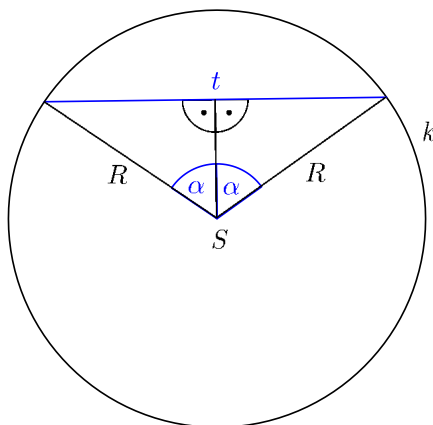
# 1. Historie

Dříve, než budeme zkoumat různá zavedení sinu a kosinu, se podíváme na to, v jaké době a proč se lidé goniometrií zabývali a jakým způsobem teorie okolo sinu a kosinu vznikala. Vyjdeme z článku Výpočty hodnot goniometrických funkcí [1], z knihy Trigonometric delights [2], ze závěrečné práce Definice funkce sinus [3] a z videa Angle sum formulae [4]. Všechny výsledky budeme kvůli srozumitelnosti popisovat v modernizované podobě.

Poznatky z goniometrie provází člověka již od dob starověku. Jak dokládá Rhindův papyrus z 16. stol. př. n. l., na území Egypta se prováděly výpočty tzv. sklonu pyramid, ve kterých vystupuje poměr, který se dnes vyskytuje v definici funkce kotangens („přílehlá odvěsna ku protilehlé odvěsně“).<sup>1</sup> Jednotný sklon pyramid, to jest aby byly všechny stěny pyramidy vůči zemi nakloněny pod stejným úhlem<sup>2</sup>, byl tehdy zásadní pro stavitelství.

V Řecku se zase od 2. stol. př. n. l. kvůli astronomickým výpočtům systematicky zkoumaly délky tětiv kružnice o poloměru  $R$  v závislosti na volbě příslušného středového úhlu. Dokládají to tabulky hodnot délek tětiv od Hipparcha, které K. Ptolemaios sepsal ve 2. stol. v díle Almagest.

Hodnota  $\sin \alpha$  odpovídá ve starověkém pojetí polovině délky tětivy  $t$  příslušné středovému úhlu  $2\alpha$ , která je vydělena poloměrem  $R$  kružnice  $k$ , tedy  $\sin \alpha = \frac{t}{2R}$  (srov. obrázek 1.1).



Obrázek 1.1: Kružnice  $k$  o poloměru  $R$  s tětivou  $t$  příslušící středovému úhlu  $2\alpha$ .

V Almagestu také zazněla známá Ptolemaiova věta, která říká, že součin délek úhlopříček libovolného tětivového čtyřúhelníku  $ABCD$  je roven součtu součinů délek dvojic jeho protilehlých stran, tedy

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|. \quad (1)$$

<sup>1</sup>Sklonem pyramid označovaným jako *seqed* rozumíme z matematického hlediska poměr poloviny délky podstavné hrany a výšky pravidelného čtyřbokého jehlanu. Tento poměr lze vyjádřit funkcí úhlu, který svírá boční stěna jehlanu s podstavou (str. 121 v [1]).

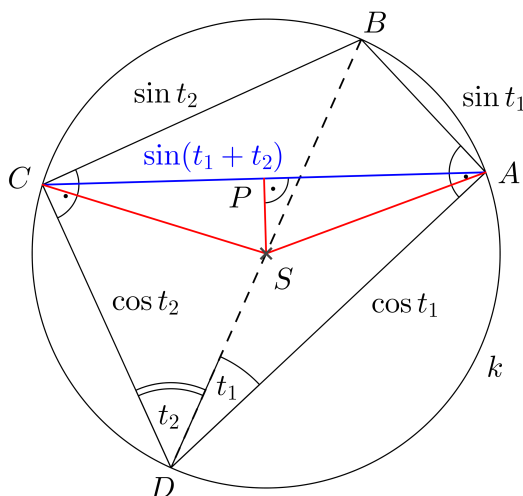
<sup>2</sup>Egyptští matematici ovšem ještě neznali pojem úhel.

Ptolemaiovu větu sice v této práci dokazovat nebudeme, ale ukážeme, že tato věta odpovídá dnešním součtovým vzorcům pro sinus (viz věta 3.2). Zabývat se budeme pouze hodnotou pro sinus součtu argumentů.

Volme kružnici  $k$  se středem  $S$  o průměru

$$|BD| = 1,$$

kde  $B, D \in k$ , a dále body  $A, C$  tak, že  $A, C$  leží na kružnici  $k$  ve dvou různých kruhových obloucích nad  $BD$  (kvůli stručnosti budeme zkoumat jen případ, ve kterém body  $A, S, C$  neleží na přímce a úhel  $ASC$  je středový úhel příslušný obvodovému úhlu  $ADC$ , viz obrázek 1.2). Potom jsou úhly  $\angle BAD$  a  $\angle BCD$  z Thaletovy věty pravé.



Obrázek 1.2: Tětivový čtyřúhelník  $ABCD$  vepsaný do kružnice  $k$  se středem  $S$  o průměru  $|BD| = 1$ .

Jestliže označíme  $\angle BDA$ , resp.  $\angle BDC$  jako  $t_1$ , resp.  $t_2$ , potom z  $\triangle BAD$  a  $\triangle BCD$ , které mají přeponu délky 1, dostaneme

$$|AB| = \sin t_1, |CD| = \cos t_2, |AD| = \cos t_1, |BC| = \sin t_2.$$

Jelikož je  $ABCD$  tětivový čtyřúhelník, můžeme pro něj použít vztah (1) a získat

$$\begin{aligned} |AC| \cdot |BD| &= |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| \\ |AC| \cdot 1 &= \sin t_1 \cdot \cos t_2 + \cos t_1 \cdot \sin t_2. \end{aligned}$$

Zbývá ukázat, že  $|AC|$  odpovídá hodnotě  $\sin(t_1 + t_2)$ .

Uvažujme  $\triangle ACS$ . Tento trojúhelník je rovnoramenný, neboť

$$|CS| = |AS| = \frac{1}{2}.$$

Dále platí, že  $|\angle ASC| = 2(t_1 + t_2)$ , neboť  $\angle ASC$  je středový úhel příslušný obvodovému úhlu  $ADC$ . Najdeme výšku ke straně  $AC$  a patu této výšky označme jako  $P$ . Potom v pravoúhlém  $\triangle APS$  platí, že

$$|AP| = \frac{1}{2} |AC|, |\angle ASP| = t_1 + t_2.$$



Z toho už v  $\triangle APS$  dostaneme, že

$$\sin(t_1 + t_2) = \frac{|AP|}{|AS|} = \frac{\frac{1}{2}|AC|}{\frac{1}{2}} = |AC|.$$

Nyní, po krátké odbočce k souvislosti součtových vzorců a Ptolemaiovy věty, se podívejme na to, jak se goniometrie vyvíjela v dalších stoletích.

Na přelomu 5. a 6. stol. n. l. začal indický matematik Árjabhaṭa pracovat s polovinou délky tětivy, nazýval ji *ardha-džja* nebo zkráceně *džja*, což bylo ve 12. stol. přes arabský překlad *džaiḅ* přeloženo do latiny jako *sinus*, tzn. „záliv, oblouk, záhyb“.

Árjabhaṭa také začal používat sinus doplňkového úhlu, který později na přelomu 16. a 17. stol. mj. anglický matematik E. Gunter označil jako *co.sinus* (odvozením z latinského výrazu *complementi sinus*) a který J. Newton ve svých učebnicích přeznačil na *cosinus*.

Až do 16. stol. se goniometrií (zejm. sférickou trigonometrií) zabývali hlavně astronomové a těžiště jejich bádání spočívalo v aproximaci funkčních hodnot. Od 17. stol. byly popisovány vztahy mezi funkcemi a znalost goniometrie se rozšířila do vícero odvětví, např. v dělostřelectví se siny používaly při výpočtech doletů střel<sup>3</sup> a v mechanice při popisu kmitání kyvadla.

Již od 17. stol. a zejm. v 18. stol. se goniometrie zásluhou A. Moivre, L. Eulera a dalších propojila s analýzou a algebrou.

Významný aplikační potenciál pak goniometrii dodal v 19. stol. mj. J. Fourier. Jak ukázal, každou periodickou funkci lze aproximovat součtem funkcí, které mají ve svém základu sinus a kosinus (str. 227 v [5]). Poznamenejme, že periodickým průběhem lze popsat např. frekvence hudebních tónů, jelikož vznikají pravidelnou vibrací struny nebo jiného materiálu.

---

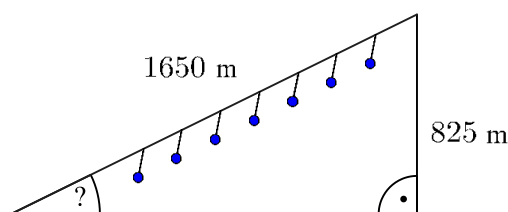
<sup>3</sup>Dolet střely  $R$  se vypočítá dle vzorce  $R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ , kde  $v_0$  je rychlost střely při vystřelení (tzv. ústová rychlost),  $\alpha$  je úhel výstřelu vůči zemi a  $g$  je tíhové zrychlení. Hodnota  $R$  proto závisí pouze na velikosti  $\alpha$  a dosahuje při dané rychlosti svého maxima pro  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  (str. 51 v [2]).

## 2. Zavedení sinu a kosinu na ZŠ

### 2.1 Proč zavádět sinus a kosinus

Zavedení sinu a kosinu je na základní škole významným aparátem, který nám pomáhá řešit konkrétní problémy z praxe. Uvedme jeden příklad.

Představme si úlohu, ve které máme určit úhel stoupání kabinkové lanovky, jestliže víme, že lanová dráha s trajektorií ve tvaru úsečky délky 1650 m překonává celkové převýšení 825 m (srov. str. 79 v [6]). Poznamenejme, že na tuto úlohu nahlížíme z matematického hlediska jako na úkol určit velikost vnitřního úhlu v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnou protilehlou tomuto úhlu délky 825 m a přeponou délky 1650 m.



Obrázek 2.1: Schematicky zakreslená lanovka (kabinky modrou barvou) s vyznačeným převýšením 825 m a dráhou 1650 m.

S matematickou teorií, kterou na začátku 9. třídy základní školy známe, umíme výsledné řešení najít pouze změřením úhlu stoupání (srov. str. 67 v [7]). Jestliže ovšem nemáme k dispozici vhodné měřicí nástroje, budeme potřebovat objevit jiný způsob řešení.

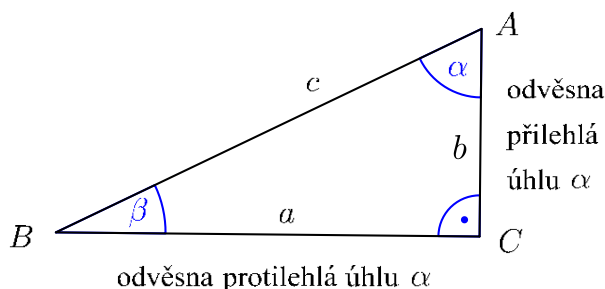
Nabízí se pozorovat, zda mezi délkami stran a velikostmi vnitřních úhlů v pravoúhlých trojúhelnících neplatí nějaké vztahy. Abychom měli více údajů pro porovnání, je dobré pro daný vnitřní ostrý úhel zkoumat více různých pravoúhlých trojúhelníků, u kterých změříme délky stran. Všimněme si, že poměry délek odvěsen (uvažujeme v každém trojúhelníku jednu odvěsnu po druhé a rozlišujeme je dle polohy k danému úhlu) a přepony zůstávají v každém z těchto trojúhelníků zachovány. Je to dáno tím, že všechny zkoumané trojúhelníky se shodují ve dvou úhlech, tedy jsou podobné. Můžeme tak definovat dvě funkce, které budou každému vnitřnímu ostrému úhlu pravoúhlého trojúhelníku jednoznačně přiřazovat poměr délky každé jeho odvěsny a přepony.

Těmito funkcemi budou sinus a kosinus. Jejich zavedení si předvedeme v další části 2.2 na základě učebnic Podobnost a funkce úhlu [7] a Matematika pro 9. ročník základní školy a nižší třídy gymnázia [8]. Poté se vrátíme k úloze o lanovce a ukážeme, jak s pomocí definovaných funkcí nalézt její řešení (viz poznámka 2.7).

## 2.2 Základoškolské zavedení

**Definice 2.1.** Necht' je dán trojúhelník  $ABC$  s pravým úhlem při vrcholu  $C$ . Označíme-li  $\alpha$  úhel při vrcholu  $A$ , pak říkáme, že strany  $AC$ , resp.  $BC$  jsou *odvěsnou přilehlou*, resp. *protilehlou* úhlu  $\alpha$  (viz obrázek 2.2).

**Poznámka 2.1.** Pro úhel  $\beta$  při vrcholu  $B$  platí, že strany  $AC$ , resp.  $BC$  jsou *odvěsnou protilehlou*, resp. *přilehlou* úhlu  $\beta$ .



Obrázek 2.2:  $\triangle ABC$  s označením odvěsny přilehlé, resp. protilehlé úhlu  $\alpha$ .

Uvažujme dva trojúhelníky shodující se v pravém úhlu  $\gamma$  a úhlu  $\alpha$ , označme je  $\triangle ABC$  a  $\triangle A'B'C'$ .

Tzv. věta *uu* nám říká, že mají-li trojúhelníky dva shodné vnitřní úhly, pak jsou tyto trojúhelníky podobné. Podobnost trojúhelníků se vyznačuje tím, že poměry délek příslušných stran trojúhelníků nabývají pro každou dvojici stran stejné hodnoty.

Proto dostáváme pro  $\triangle ABC$  a  $\triangle A'B'C'$  při běžném pojmenování stran následující rovnost:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \wedge \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}.$$

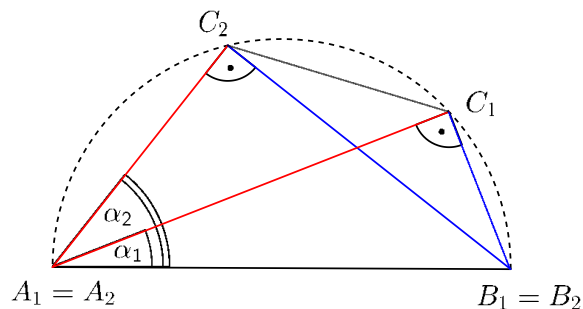
Vidíme, že vnitřnímu úhlu  $\alpha$  v libovolném pravoúhlém trojúhelníku přísluší právě jedna hodnota vyjadřující poměr jeho protilehlé, resp. přilehlé odvěsny a přepony.

**Definice 2.2.** Poměr odvěsny protilehlé úhlu  $\alpha$  (tedy strany  $a$ ) a přepony (tedy strany  $c$ ) nazveme *sinus úhlu*  $\alpha$ . Používáme značení  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ .

**Definice 2.3.** Poměr odvěsny přilehlé úhlu  $\alpha$  (tedy strany  $b$ ) a přepony (tedy strany  $c$ ) nazveme *kosinus úhlu*  $\alpha$ . Používáme značení  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ .

Dále zkoumejme vlastnosti sinu a kosinu. Nejprve získáme představu o tom, jakých hodnot nabývají  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$  pro různé  $\alpha$ , a pak se zaměříme na určení hodnoty  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$  pro konkrétní  $\alpha$ .

Pro  $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$  jsou hodnoty  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$  z intervalu  $(0, 1)$ , jelikož délka odvěsny je vždy kladné číslo ostře menší než délka přepony. Zatímco hodnota sinu s volbou většího ostrého úhlu roste, hodnota kosinu klesá. Toto tvrzení zformulujeme na základě obrázku 2.3 matematicky a následně ho dokážeme (str. 71 v [7]).



Obrázek 2.3:  $\triangle A_1B_1C_1$ , resp.  $\triangle A_2B_2C_2$  ( $A_1B_1 = A_2B_2$ ), s pravým úhlem při vrcholu  $C_1$ , resp.  $C_2$  a s vnitřním ostrým úhlem  $\alpha_1$ , resp.  $\alpha_2$  při vrcholu  $A_1 = A_2$ .

**Věta 2.1.** Necht pro  $\triangle A_1B_1C_1$  a  $\triangle A_2B_2C_2$  s přeponou  $A_1B_1 = A_2B_2$  platí, že  $\alpha_1 < \alpha_2$ . Potom

$$\sin \alpha_1 = \frac{|B_1C_1|}{|A_1B_1|} < \sin \alpha_2 = \frac{|B_2C_2|}{|A_2B_2|} \text{ a } \cos \alpha_1 = \frac{|A_1C_1|}{|A_1B_1|} > \cos \alpha_2 = \frac{|A_2C_2|}{|A_2B_2|}.$$

*Důkaz.* Z obrázku 2.3 vidíme, že skutečně  $|B_1C_1| < |B_2C_2|$  a  $|A_2C_2| < |A_1C_1|$ , neboť v  $\triangle B_2C_1C_2$ , resp.  $\triangle A_1C_2C_1$  leží  $B_2C_2$ , resp.  $A_1C_1$  proti tupému úhlu.  $\square$

Všimněme si, že délka odvěsny protilehlé, resp. přilehlé úhlu  $\alpha$  vzhledem k dané přeponě  $AB$  závisí pouze na velikosti úhlu  $\alpha$ . Jestliže budeme uvažovat každý úhel  $\alpha$  z intervalu  $(0^\circ, 90^\circ)$ , dosáhne tato délka všech možných hodnot (mezi 0 a  $|AB|$ ).<sup>1</sup> Hodnoty všech  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$  tak zcela pokryjí interval  $(0, 1)$  (str. 72 v [7]).

Nyní se podíváme na to, jak hledat hodnoty  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$  pro dané  $\alpha$ .<sup>2</sup>

Hodnoty  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$  *aproximujeme* konstrukčně. Volíme 100 mm dlouhou přeponu, nad ní sestrojíme pravoúhlý trojúhelník s vnitřním ostrým úhlem  $\alpha$  a změříme délku příslušné odvěsny (str. 70 v [7]).

**Poznámka 2.2.** Hodnoty  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$  pro  $\alpha = 0^\circ$  a  $\alpha = 90^\circ$  můžeme dodefinovat následující úvahou (str. 71 a 83 v [7]). Zmenšováním ostrého úhlu při zachování délky přepony zkracujeme jeho protilehlou odvěsnu a přilehlou odvěsnu přibližujeme délce přepony, je tedy logické položit

$$\sin 0^\circ = 0, \text{ resp. } \cos 0^\circ = 1.$$

Zvětšováním ostrého úhlu naopak prodlužujeme odvěsnu protilehlou a přilehlou odvěsnu zkracujeme, proto definujeme

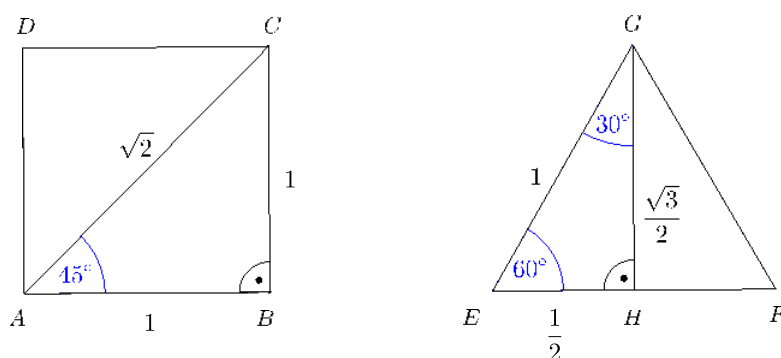
$$\sin 90^\circ = 1, \text{ resp. } \cos 90^\circ = 0.$$

<sup>1</sup>Vyplývá to z věty o nabývání všech mezihodnot, kterou nalezneme na str. 107 v [9], nebo z důkazu založeném na obrázku 3.3 uvedeném ve středoškolském zavedení 3.2.

<sup>2</sup>Učebnice (str. 62, resp. 67 v [6], str. 70 v [7], str. 62, resp. 69-70 v [10], str. 91-92, resp. 95-96 v [11], str. 69, resp. 71 v [12]) nás vedou k tomu určovat hodnoty sinu, resp. kosinu mj. měřením stran trojúhelníků. Touto cestou se dobře ukáže souvislost hodnot sinu, resp. kosinu s jeho definicí 2.2, resp. 2.3.

**Poznámka 2.3.** Hodnoty  $\sin \alpha$  a  $\cos \alpha$  pro  $\alpha = 45^\circ$ , resp.  $\alpha = 30^\circ, \alpha = 60^\circ$  je výhodnější určovat přes čtverec se stranou délky 1, resp. přes rovnostranný trojúhelník se stranou délky 1 (srov. obrázek 2.4) (str. 32-33 v [8]):

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, & \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \cos 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos 60^\circ &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Obrázek 2.4:  $\square ABCD$  a rovnostranný  $\triangle EFG$  s vyznačenými úhly  $30^\circ, 45^\circ$  a  $60^\circ$ .

Hodnoty sinu a kosinu získané z poznámek 2.2 a 2.3 zapišme pro přehlednost do tabulky.

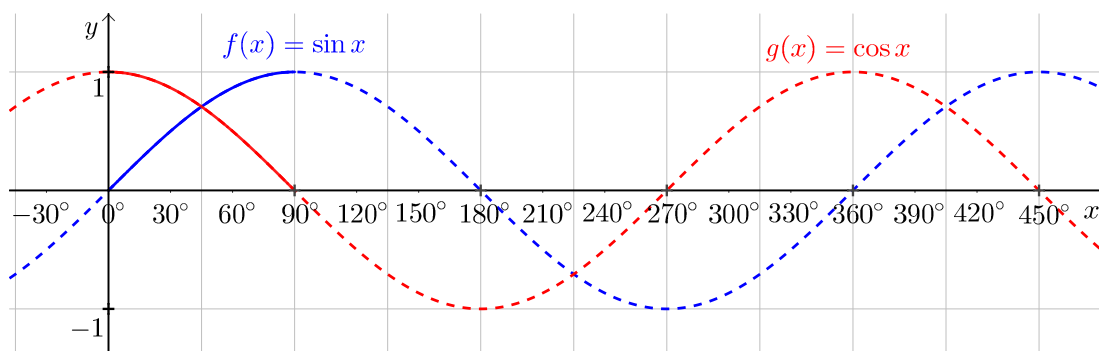
| $\alpha$      | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$ |
|---------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|------------|
| $\sin \alpha$ | 0         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1          |
| $\cos \alpha$ | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0          |

Tabulka 2.1: Hodnoty sinu a kosinu pro vybrané úhly ve stupních.

**Poznámka 2.4.** Konstrukční odvozování hodnot  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$  je (pro úhly  $\alpha$  různé od  $30^\circ, 45^\circ$  a  $60^\circ$ ) obvykle zdoluhavé a málo přesné. Proto k získání *přesných* hodnot  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$  pro dané  $\alpha$  využijeme kalkulačku nebo matematické tabulky.

Nyní již známe několik hodnot  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$ . Pro lepší grafickou představu zakreslíme tyto hodnoty do kartézské soustavy souřadnic (na osu y), stejně tak příslušné úhly  $\alpha$  ve stupňové míře (na osu x).

**Definice 2.4.** *Sinusoidou* resp. *kosinoidou* rozumíme křivku, která zobrazuje hodnotu  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$  v závislosti na velikosti úhlu  $\alpha$ . Ačkoliv nezobrazujeme reálná čísla, ale hodnoty úhlů ve stupních, klasifikujeme zobrazení jako *funkci*. Nazveme ji *sinus* ( $f(x) = \sin x$ ), resp. *kosinus* ( $g(x) = \cos x$ ) (srov. obrázek 2.5).



Obrázek 2.5: Grafy funkcí sinus a kosinus s úhly ve stupních.

**Poznámka 2.5.** Zatím jsme se naučili určovat hodnoty  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$  pouze pro  $\alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$ , tedy sinusoidu neumíme zkonstruovat celou, avšak další kapitola nám ukáže, že funkční hodnoty sinu, resp. kosinu lze jednoznačně najít pro úhel  $\alpha$  libovolné velikosti.

**Poznámka 2.6.** Sinus a kosinus řadíme mezi tzv. *goniometrické funkce*. Slovo *goniometrie* je z řeckého  $\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha$  (*góniá* = úhel) a  $\mu\epsilon\tau\rho\acute{\epsilon}\omega$  (*metreó* = měřím).

Díky znalosti  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha \in (0, 1)$  umíme určit velikost vnitřního ostrého úhlu  $\alpha$  v pravoúhlém trojúhelníku.

Vydejme se konstrukční cestou. Vyjádřeme  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$  jako poměr dvou přirozených čísel  $\frac{n}{N}$  a dle věty *Ssu* sestrojme pravoúhlý trojúhelník, kde  $N$  bude jeho přepona a  $n$  jedna z odvěsen. Pak jako  $\alpha$  označíme ten úhel, vůči němuž je odvěsna  $n$  protilehlá, resp. přilehlá. Hodnotu  $\alpha$  stanovíme jednoduše měřením (str. 72 v [7]).

Velikost  $\alpha$  umíme nalézt ovšem i bez rýsování. Poslouží nám k tomu graf, přehled hodnot  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$  pro různé  $\alpha$  v matematických tabulkách, nebo inverzní funkce  $f^{-1}(x) = \arcsin x = \sin^{-1} x$ , resp.  $g^{-1}(x) = \arccos x = \cos^{-1} x$  na kalkulačce.

Tím jsou funkce sinus a kosinus zavedeny.

**Poznámka 2.7.** Vraťme se nyní k části 2.1 této kapitoly, kde jsme určovali úhel stoupání lanovky (označme ho  $\alpha$ ). Nyní už úlohu snadno vyřešíme. Uvědomme si, že převýšení 825 m odpovídá v pravoúhlém trojúhelníku abstrahovaném z této úlohy (srov. obrázek 2.1) odvěsně protilehlé úhlu  $\alpha$  a dráha lanovky 1650 m odpovídá přeponě. Proto platí, že

$$\sin \alpha = \frac{825}{1650} = \frac{1}{2},$$

tedy z poznámky 2.3 a věty 2.1 je  $\alpha = 30^\circ$ .

## 2.3 Komentář k základoškolským učebnicím

Nyní nahlédněme do několika základoškolských učebnic, abychom porovnali, v čem se svým přístupem liší od zavedení sinu a kosinu z části 2.2 této práce.

Pro přehlednost nejprve uvedme seznam učebnic, ze kterých vycházíme:

- Matematika pro 9. ročník základní školy, 2. díl [6],
- Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií. Podobnost a funkce úhlu [7],
- Matematika pro 9. ročník základní školy a nižší třídy gymnázia. Geometrie [8],
- Matematika 9 Geometrie. Učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia [10],
- Matematika pro 8. ročník základní školy, II. díl [11],
- Matematika 9. Učebnice s komentářem pro učitele [12].

Dále se věnujme vybraným otázkám vztahujícím se k zavedení.

### **Jak rozčlenit látku**

Sinus a kosinus jsme zaváděli souběžně (srov. na str. 24-25 v [8] je zaveden souběžně sinus, kosinus i tangens). Tím jsme zvolili stručnější formu výkladu, která se hodí zejména pro shrnutí. Kondenzovanost látky může ale znesnadňovat vnímání samotného obsahu. Některé učebnice tak zavádí sinus a kosinus odděleně v podkapitolách (srov. [6], [7], [10]), popř. je definují souběžně a vlastnosti funkcí pak odvozují zvlášť (srov. [11], [12]).

### **Jak motivovat látku**

Zavedení sinu a kosinu jsme motivovali úlohou s lanovkou (viz část 2.1). Obdobný postup nalezneme na str. 23 v [8], kde jsou tangens a ostatní goniometrické funkce uvedeny aplikační úlohou, ve které se vyjadřuje „strmost“ schodů. Následně jsou v učebnici vykreslena různě prudká schodiště pro odvození funkčních hodnot.

Sinus a kosinus jsou obecně součástí různých aplikačních úloh, které lze k motivaci dobře využít. S pomocí sinu a kosinu je možné např. stanovit výšku věže, od které jsme vzdáleni o určitou nenulovou vzdálenost a jejíž vrchol vidíme pod určitým úhlem (předpokládejme věž postavenou „na rovném prostranství kolmo k zemi“, srov. str. 80 v [13]). Významné je také fyzikální využití sinu a kosinu. Díky těmto funkcím umíme mj. stanovit velikost složek síly působící na těleso na nakloněné rovině, jestliže známe velikost tíhové síly působící na těleso a úhel, který svírá nakloněná rovina s rovinou vodorovnou (str. 120-122 v [7]).

### **Jak pracovat s krajními hodnotami**

Učebnice se ke „krajním“ hodnotám  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$  pro  $\alpha = 0^\circ$  a  $\alpha = 90^\circ$  staví různě.

Některé učebnice (srov. [6], [8] a [12]) nezahrnují do oboru hodnot funkce sinus, resp. kosinus hodnoty 0 a 1, protože sinus, resp. kosinus jako poměr není pro tyto hodnoty definován. Jestliže se držíme tohoto postupu, potom je správné při konstrukci grafu sinu, resp. kosinu úhly  $\alpha = 0^\circ$  a  $\alpha = 90^\circ$  z definičního oboru funkcí úplně vynechat (srov. [6] a [12] vs. [8]).

Jiné učebnice (srov. [10] a [11]) úhly  $0^\circ$  a  $90^\circ$  v definičním oboru sinu a kosinu sice uvažují, ale funkční hodnoty sinu a kosinu pro tyto úhly dodefinují bez odvození.

Jediná z námi vybraných učebnic, která hodnoty  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$  pro  $\alpha = 0^\circ$  a  $\alpha = 90^\circ$  uvažuje, a to včetně odvození (podobně jako v poznámce 2.2), je [7].

### Jak přejít od poměrů k funkcím

V zavedení obvykle sinus a kosinus definujeme nejprve jako poměry a až poté jako funkce (obrácený postup nalezneme na str. 23-25 v [8]).

Přechod od poměrů k funkcím je v učebnicích dán pozorováním, že hodnota poměru  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$  závisí pouze na velikosti  $\alpha$  (str. 75, resp. 81 v [7], str. 61, resp. 71 v [10], str. 88-89 v [11]) a tato hodnota je pro každé  $\alpha$  jediná (str. 63, resp. 68 v [6], str. 75, resp. 81 v [7], str. 61, resp. 71 v [10]). Poznamenejme, že ne všechny učebnice ale odlišují definici sinu, resp. kosinu jako poměru od definice sinu, resp. kosinu jako funkce (např. v [12] je zmíněna pouze definice sinu, resp. kosinu jako poměru, ačkoliv se pak se sinem, resp. kosinem pracuje jako s funkcí).

Všechny učebnice pak implicitně rozlišují definici sinu, resp. kosinu jako poměru a funkce tím, že postupně mění doprovodné úlohy k teorii. Po definici sinu, resp. kosinu jako poměru následují úlohy na aproximaci hodnot  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$ , popř. vyjádření  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$  z konkrétního pravoúhlého trojúhelníku. Jakmile jsou sinus, resp. kosinus definovány jako funkce, pak učebnice vedou žáky k práci s tabulkami a kalkulačkou (str. 66, resp. 68-69 v [6], str. 75-79, resp. 85-87 v [7], str. 35-37 v [8], str. 67, resp. 71 v [10], str. 93, resp. 96 v [11], str. 70-72 v [12]).

### Jak připravit návaznosti na středoškolské zavedení

Už na základní škole je dobré myslet na to, že teorii goniometrických funkcí budeme na střední škole rozšiřovat. Na str. 67 v [7] stojí na začátku kapitoly „Sinus ostrého úhlu“ podotknutí, že nyní se omezíme na pravoúhlé trojúhelníky, ale jednou budeme určovat velikost úhlu také v trojúhelnících obecných. Toto podotknutí je narážkou na budoucí zavedení kosinové věty. Kromě toho je na str. 75 v [7] a str. 65-66 v [10] stejně jako v našem zavedení graf sinu vykreslen pro neomezený definiční obor, jak je tomu v matematice běžným zvykem až na vyšším gymnáziu.

Poznamenejme, že na základní škole nemusíme nutně konstruovat celou sinusoidu, nicméně je potřeba si dát pozor na jednu věc. Věty z učebnic typu „Funkce  $y = \sin x$  je rostoucí“ (str. 35 v [8]) nebo „Funkce sinus je rostoucí. Její obor hodnot tvoří všechna  $y$ , pro která platí  $0 < y < 1$ “ (str. 65 v [6]) jsou sice při zavedení funkce sinus restringované na interval  $(0^\circ, 90^\circ)$  korektní, ale z dlouhodobého hlediska zavádějící. Víme totiž, že sinus je rostoucí pouze na některých intervalech, na intervalech jiných je naopak klesající. Bylo by tedy vhodné k větám citovaným z učebnic dodat, že sinus je rostoucí na intervalu  $(0^\circ, 90^\circ)$ , popř. že je rostoucí pro každý ostrý úhel  $\alpha$ .



# 3. Zavedení sinu a kosinu na SŠ

## 3.1 Proč zavádět sinus a kosinus podruhé

V základoškolském zavedení jsme funkcemi sinus a kosinus popisovali vztahy mezi délkami stran a velikostmi úhlů v pravoúhlých trojúhelnících. Často ale potřebujeme pracovat s trojúhelníky obecnými, např. když triangulací měříme vzdálenosti míst tak, že na známé velikosti úhlů a alespoň jednu známou stranu triangulační sítě aplikujeme sinovou či kosinovou větu (str. 152 v [14]).

Doposud jsme vstupní hodnoty sinu a kosinu omezovali na interval  $\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$  (resp. dle některých učebnic na  $(0^\circ, 90^\circ)$ ). Nyní budeme se znalostí *orientovaných úhlů a jejich velikostí* a s pomocí *jednotkové kružnice*, tj. kružnice o poloměru 1, definiční obor  $D_f$  funkcí sinus a kosinus maximálně rozšiřovat. Rozšířený  $D_f$  sinu a kosinu využijeme např. později u tématu komplexních čísel. Libovolné nenulové  $z \in \mathbb{C}$  ležící v komplexní rovině budeme moci zapsat v goniometrickém tvaru jako

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

kde  $\varphi$  je velikost takového orientovaného úhlu, jehož vrchol leží v počátku soustavy souřadnic, jehož počáteční rameno splývá s kladnou reálnou poloosou a jehož koncové rameno prochází bodem, který odpovídá obrazu čísla  $z$  (str. 42-43 v [15]). Vyjádření komplexních čísel přes goniometrický tvar bude vzhledem k platnosti Moivreovy věty výhodné především pro umocňování a odmocňování v komplexním oboru.

Přejdeme k novým jednotkám, tzv. *radiánům*, a do funkcí budeme namísto počtu stupňů zadávat reálná čísla. Osvojení si práce s radiány nás připraví na vysokoškolskou teorii, ve které hraje významnou roli poznatek, že pro úhly  $\varphi$  v radiánech blízké se svou velikostí nule odpovídá velikost  $\varphi$  téměř hodnotě  $\sin \varphi$  (srov. podmínka (12) ve větě 4.1) (str. 17 v [2]).

Budeme se také zabývat grafy sinu a kosinu popsanych na  $\mathbb{R}$ , které mají významné využití mj. ve fyzice (viz poznámka 3.1), a dále pro sinus a kosinus odvodíme významné vzorce, které nám umožní upravovat goniometrické výrazy a řešit vybrané goniometrické rovnice.

### Definice stupňové a obloukové míry, radiánu

Před samotným středoškolským zavedením sinu a kosinu 3.2 nejprve definujme několik pojmů, ze kterých budeme vycházet (srov. [16] a str. 24-34 v [13]).

*Velikostí úhlu  $ASB$  ve stupňové míře* rozumíme takové nezáporné číslo, kterým když vynásobíme jeden stupeň, dostaneme velikost úhlu  $ASB$  ve stupních.

*Velikostí úhlu  $ASB$  v obloukové míře*, kde  $A, B$  leží na jednotkové kružnici  $k$  se středem v  $S$ , rozumíme délku oblouku  $\widehat{AB}$  jednotkové kružnice  $k$ .

*Radiánem* rozumíme středový úhel, který na jednotkové kružnici  $k$  přísluší oblouku délky jedna.

*Jedním radiánem*<sup>1</sup> rozumíme velikost středového úhlu, který na jednotkové kružnici  $k$  přísluší oblouku délky jedna (obdobně např.  $\frac{\pi}{3}$  radiánům přísluší na jednotkové kružnici  $k$  oblouk délky  $\frac{\pi}{3}$ ). Jelikož  $2\pi$  radiánům odpovídá  $360^\circ$ , pak jednomu radiánu odpovídá  $\frac{180^\circ}{\pi}$ . U velikosti úhlu v radiánech někdy za číselnou hodnotou uvádíme zkratku rad, ale většinou toto značení úplně vynecháváme.

Poznamenejme, že velikostí úhlu  $ASB$  v obloukové míře a velikostí úhlu  $ASB$  v radiánech rozumíme jednu a tu samou hodnotu.

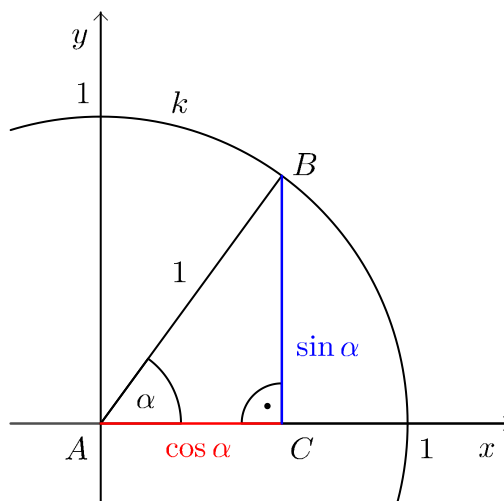
## 3.2 Středoškolské zavedení

Nyní se již přesuneme ke středoškolskému zavedení sinu a kosinu, při kterém vycházíme z učebnic Matematika pro gymnázia, díl Goniometrie [13], Matematika pro střední školy, 5. díl, Funkce II [17] a Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, díl 3. [18].

Uvažujme v soustavě souřadnic  $\triangle ABC$ , kde  $A$  je počátek soustavy souřadnic,  $B$  leží v prvním kvadrantu na jednotkové kružnici se středem v  $A$ ,  $C$  leží na vodorovné ose tak, že  $AC \perp BC$ . Označíme-li  $\alpha$  velikost úhlu při vrcholu  $A$  v radiánech a strany  $\triangle ABC$  běžnou notací jako  $a, b, c$ , potom pro  $\alpha$  platí, že

$$\sin \alpha = \frac{a}{1} = a \quad \wedge \quad \cos \alpha = \frac{b}{1} = b.$$

Tedy bod  $B$  má souřadnice  $[b, a] = [\cos \alpha, \sin \alpha]$  (srov. obrázek 3.1).



Obrázek 3.1:  $\triangle ABC$  v prvním kvadrantu, kde  $B [\cos \alpha, \sin \alpha]$ ,  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

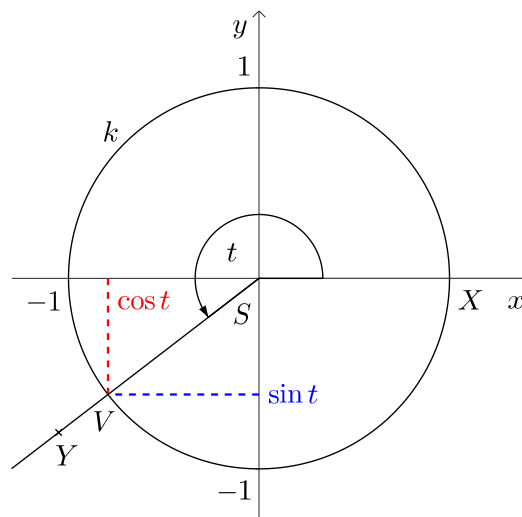
Myšlenku, že hodnoty sinu a kosinu jsou souřadnicemi bodů na jednotkové kružnici, rozvineme v následujících řádcích i pro další kvadranty (str. 36-37 v [13]). Využijeme k tomu definici orientovaného úhlu 3.1 a jeho velikostí 3.2.

<sup>1</sup>Některé učebnice (srov. str. 24 v [13], str. 84 v [14], str. 8 v [18], str. 33 v [21]) zavádí radián pouze jako úhel s komentářem, že jde o jednotkový úhel obloukové míry. Jiné učebnice (srov. str. 42 v [17] a str. 75 v [20]) naopak zavádí radián jako velikost úhlu, nikoliv jako úhel samotný. Naše práce odráží obě pojetí, aby bylo zamezeno nejednoznačností (obdobně v [16]).

**Definice 3.1.** *Orientovaným úhlem  $\widehat{ASB}$  rozumíme uspořádanou dvojici polopřímek  $SA$  a  $SB$ , které mají společný počátek v bodě  $S$ . Bod  $S$  nazýváme vrcholem orientovaného úhlu  $\widehat{ASB}$  a o polopřímce  $SA$ , resp.  $SB$  hovoříme jako o počátečním, resp. koncovém rameni orientovaného úhlu  $\widehat{ASB}$ .*

**Definice 3.2.** Polopřímky  $SA$  a  $SB$  rozdělují rovinu na dva úhly, označme velikosti těchto úhlů jako  $\alpha$  a  $\beta$ . Potom základní velikostí orientovaného úhlu  $\widehat{ASB}$  rozumíme velikost toho z úhlů  $\alpha$  a  $\beta$ , který opíše polopřímka při otočení z polohy počátečního ramene  $SA$  do polohy koncového ramene  $SB$  v kladném smyslu, tj. proti směru pohybu hodinových ručiček (str. 30 v [13]). Jestliže  $\alpha$  je základní velikost orientovaného úhlu  $\widehat{ASB}$ , potom velikostí orientovaného úhlu  $\widehat{ASB}$  rozumíme každé číslo  $\alpha + k \cdot 2\pi$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ .

Nechť je dána jednotková kružnice  $k$  se středem  $S$  v počátku soustavy souřadnic a bod  $X = [1, 0]$ . Každé číslo  $t \in \mathbb{R}$  můžeme chápat jako jednu z velikostí nějakého orientovaného úhlu  $\widehat{XS'Y}$  v obloukové míře. Zanesme tento úhel do soustavy souřadnic<sup>2</sup> a označme průsečík koncového ramene  $SY$  s kružnicí  $k$  jako  $V$  (srov. obrázek 3.2).



Obrázek 3.2: Bod  $V$  na jednotkové kružnici se souřadnicemi  $[\cos t, \sin t]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Definice 3.3.** Funkcí *sinus*, resp. *kosinus* nazýváme zobrazení, které každému číslu  $t \in \mathbb{R}$  přiřadí hodnotu y-ové, resp. x-ové souřadnice odpovídajícího bodu  $V$  na jednotkové kružnici. Používáme předpis  $f(t) = \sin t$ , resp.  $g(t) = \cos t$ .

Nyní vyšetřeme z definice 3.3 průběhy sinu a kosinu, abychom získali informace potřebné k přibližnému sestavení jejich grafů (viz obrázek 3.6). Kvůli přehlednosti budeme postupovat v bodech a jednotlivé poznatky vždy krátce odůvodníme. Vyjdeme při tom ze stran 38-41 v [13].

<sup>2</sup>Zde aplikujeme poznatek, že orientovaný úhel je svou jednou velikostí určen jednoznačně.

## Průběhy funkcí sinus a kosinus

- Periodičnost: Sinus a kosinus jsou periodické funkce s periodou  $2\pi$ .<sup>3</sup> Orientované úhly s velikostí  $t + k \cdot 2\pi$  totiž určují pro  $t \in \mathbb{R}$  a  $k \in \mathbb{Z}$  na jednotkové kružnici stejný bod  $V$ . Perioda  $2\pi$  je zároveň nejmenší periodou funkce sinu, resp. kosinu. Vyplyvá to z toho, že když uvažujeme např. funkční hodnotu 1, pak sinus, resp. kosinus nabývá tuto hodnotu pouze pro úhly o velikostech  $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ , resp.  $k \cdot 2\pi$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ .

Proto  $\forall t \in \mathbb{R}$  a  $\forall k \in \mathbb{Z}$  platí

$$\sin(t + k \cdot 2\pi) = \sin t,$$

$$\cos(t + k \cdot 2\pi) = \cos t.$$

- Omezenost: Funkce jsou omezené shora 1 a zdola  $-1$ , neboť hodnoty y-ové, resp. x-ové souřadnice bodů na jednotkové kružnici jsou z intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ .
- Obor hodnot: Z omezenosti funkcí sinus, resp. kosinus víme, že  $\forall t \in \mathbb{R}$  platí  $\sin t$ , resp.  $\cos t \in \langle -1, 1 \rangle$ . Ukážeme, že oborem hodnot je celý tento interval. Uvažujme přímkou

$$y = c, \text{ resp. } x = c, \quad c \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Pak je tato přímka  $\forall c \in (-1, 1)$  sečnou<sup>4</sup> a pro  $c = \pm 1$  tečnou jednotkové kružnice. Každý průsečík této přímky s jednotkovou kružnicí tak určuje některý bod  $V$  a s ním i číslo  $t \in \mathbb{R}$ , pro které platí:  $y = \sin t$ , resp.  $x = \cos t$ .

Názorně to ukazuje obrázek 3.3.

- Extrémy: Sinus, resp. kosinus má na intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$  maximum v bodě  $t_1 = \frac{\pi}{2}$ , resp.  $t_1 = 0$  a minimum v bodě  $t_2 = \frac{3}{2}\pi$ , resp.  $t_2 = \pi$ , jelikož y-ová, resp. x-ová souřadnice zde nabývá hodnot 1 a  $-1$ .

Je to pěkně vidět na obrázku 3.2.

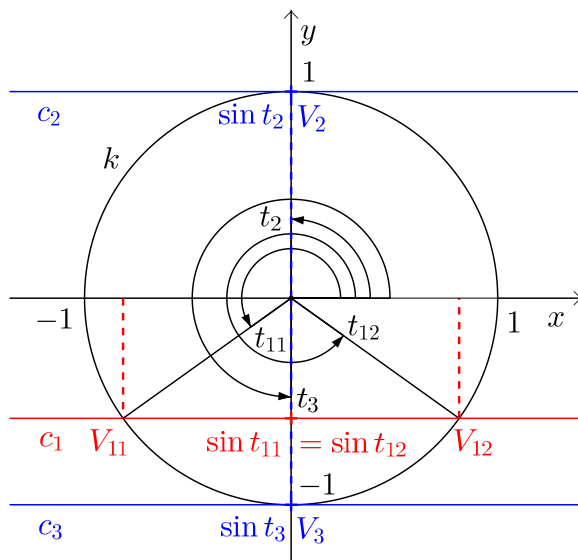
- Znaménka funkčních hodnot: Funkční hodnoty sinu, resp. kosinu (neboli hodnoty y-ové, resp. x-ové souřadnice) jsou kladné na intervalech  $(0, \pi)$ , resp.  $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$  a záporné na intervalech  $(\pi, 2\pi)$ , resp.  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ .
- Monotonie: Sinus, resp. kosinus je rostoucí na intervalech  $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  a  $\langle \frac{3}{2}\pi, 2\pi \rangle$ , resp.  $\langle \pi, 2\pi \rangle$ , jelikož se s volbou větší velikosti úhlu na tomto intervalu zvětší také hodnota y-ové, resp. x-ové souřadnice. Naopak na intervalu  $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \rangle$ , resp.  $\langle 0, \pi \rangle$  se hodnota uvažovaných souřadnic pro větší úhel zmenší, proto jsou funkce na tomto intervalu klesající.<sup>5</sup>

---

<sup>3</sup>Nechť  $f$  je reálná funkce. Jestliže existují taková kladná reálná čísla  $p$ , že  $\forall k \in \mathbb{Z}$  a  $\forall t \in \mathbb{R}$  :  $f(t + k \cdot p) = f(t)$ , potom řekneme, že  $f$  je periodická funkce a čísla  $p$  označíme jako periody funkce  $f$  (viz str. 11 v [13]). Pokud existuje nejmenší číslo  $p$  z množiny všech period funkce  $f$ , nazveme ho nejmenší periodou funkce  $f$ . Poznamenejme, že za periodickou funkci bez nejmenší periody můžeme považovat např. konstantní funkci.

<sup>4</sup>Z toho mj. vyplyvá, že funkce nejsou na celém svém definičním oboru prosté.

<sup>5</sup>Poznatky z monotonie dokazujeme přes derivace, s kterými se ale studenti seznamují obvykle až ve vyšších ročnících. Proto jsme nyní tyto poznatky spíše vypořizovali, než odvodili.



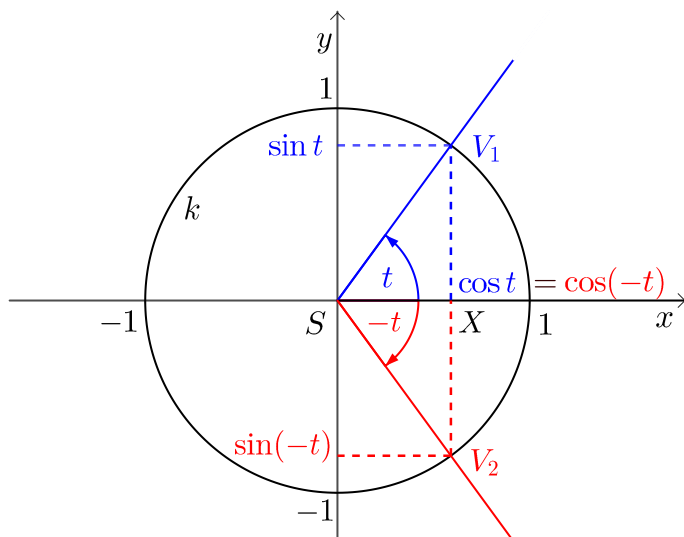
Obrázek 3.3: Přímka  $y = c_1$ , kde  $c_1 \in (-1, 1)$ , jako sečna jednotkové kružnice. Dále přímky  $y = c_{2,3}$ , kde  $c_{2,3} = \pm 1$ , jako tečny jednotkové kružnice.

- Parita: Sinus je lichá funkce a kosinus sudá funkce, tj.  $\forall t \in \mathbb{R}$  platí

$$\sin(-t) = -\sin t, \quad (1)$$

$$\cos(-t) = \cos t. \quad (2)$$

Tyto rovnosti dokážeme bez újmy na obecnosti pro  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$  na základě obrázku 3.4.



Obrázek 3.4: Body  $V_1 [\cos t, \sin t]$  a  $V_2 [\cos(-t), \sin(-t)]$ ,  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

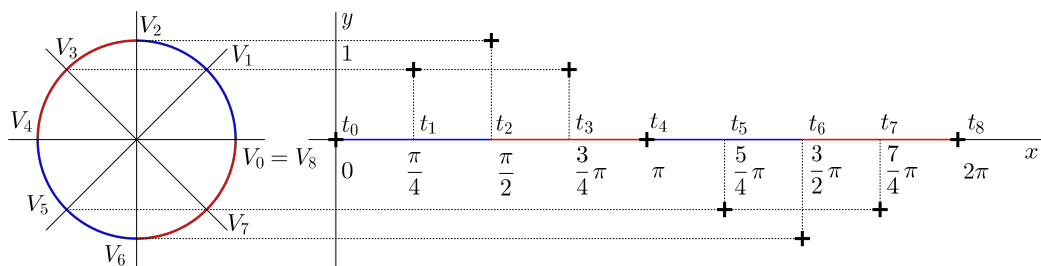
*Důkaz.* Z obrázku 3.4 je zřejmé, že pro  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$  je  $\cos(-t) = \cos t$ .

Dále vidíme, že  $\sin t > 0$  a  $\sin(-t) < 0$ . Aby tedy pro  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$  platila rovnost  $\sin(-t) = -\sin t$ , stačí dokázat, že  $|\sin t| = |\sin(-t)|$ .

$\triangle SXV_1$  a  $\triangle SXV_2$  jsou shodné, neboť se shodují ve dvou stranách ( $|SX|$  a  $|SV_1| = |SV_2|$ ) a úhlu proti větší z nich. Proto  $|XV_1| = |XV_2|$  neboli  $|\sin t| = |\sin(-t)|$ .  $\square$

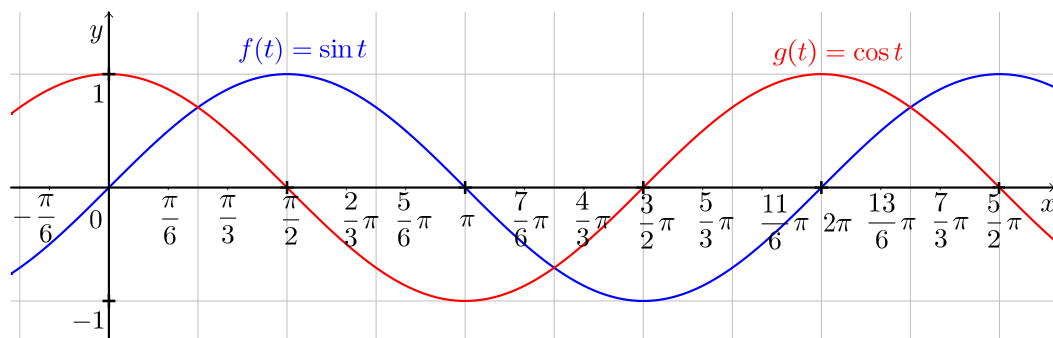
## Grafy funkcí sinus a kosinus

Pro sestrojení grafu funkcí si dále vypomůžeme konstrukcí několika funkčních hodnot. Zvolme reálná čísla  $t_k = k \cdot \frac{\pi}{4}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, 8\}$  a na jednotkové kružnici k nim najděme odpovídající body  $V_k$  (viz definice 3.3). Pak čísla  $t_k$  zanesme na vodorovnou osu soustavy souřadnic a vynesme k nim hodnoty y-ové, resp. x-ové složky souřadnic  $V_k$ . Získané body jsou funkčními hodnotami sinu, resp. kosinu. Pro y-ovou složku, tedy funkci sinus, postup znázorňuje obrázek 3.5 (srov. str. 52 v [17]).



Obrázek 3.5: Konstrukce funkčních hodnot  $f(t) = \sin t$  pro  $t \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi\}$ .

Na základě sestrojených funkčních hodnot, periodičnosti funkcí a také ostatních vlastností z průběhu funkcí již můžeme přibližně sestrojit grafy funkcí. Dostaneme tvar nám z předchozí kapitoly již známé křivky *sinusoidy*, resp. *kosinusoidy* (viz definice 2.4) s tím jediným rozdílem, že úhly tentokrát uvažujeme v obloukové míře (srov. obrázek 2.5 a 3.6).



Obrázek 3.6: Grafy funkcí sinus a kosinus s úhly v obloukové míře.

**Poznámka 3.1.** Graf funkce sinus má využití ve fyzice, mj. průběhy střídavého proudu, střídavého napětí, vlnění a harmonického kmitavého pohybu v čase se znázorňují křivkou odvíjející se od sinusoidy (str. 216-217 v [5], str. 103 v [14], str. 93, 98 a 142 v [19]). Pro znázornění těchto grafů je vhodné vědět, jak se tvar křivky mění s přidáním nenulových koeficientů do předpisu funkce (viz str. 50-51 v [13], str. 55-57 v [17]). Tento krok ovšem v našem zavedení vynecháme, protože není pro srovnávání různých zavedení podstatný.

## Goniometrické vzorce

Dosud jsme z definice sinu a kosinu na jednotkové kružnici popsali významné vlastnosti těchto funkcí, které nám pomohly k sestrojení jejich grafů. Nyní budeme pro sinus a kosinus odvozovat vybrané vzorce (viz věty 3.1, 3.2 a 3.3).

**Věta 3.1** (Goniometrická jednička).  $\forall t \in \mathbb{R}$  :

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1. \quad (3)$$

**Poznámka 3.2.** Než uvedeme důkaz věty 3.1, poznamenejme, že zápisem  $\sin^2 t$ , resp.  $\cos^2 t$ , kde  $t \in \mathbb{R}$ , rozumíme hodnoty  $(\sin t)^2$ , resp.  $(\cos t)^2$  (str. 25 v [18]).

*Důkaz.* Každému  $t \in \mathbb{R}$  přísluší na jednotkové kružnici se středem v bodě  $S$  nějaké  $V$  se souřadnicemi  $[\cos t, \sin t]$ .

Potom pro  $t \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ , je  $|SV| = 1$  přeponou trojúhelníku s odvěsnami délek  $|\sin t|$  a  $|\cos t|$ , tedy z Pythagorovy věty rovnost (3) platí.

Pro  $t = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ , je  $\sin^2 t = 1$  a  $\cos^2 t = 0$  a pro  $t = 2k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ , je  $\sin^2 t = 0$  a  $\cos^2 t = 1$ , proto vztah (3) platí obecně  $\forall t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

### K důležitosti součtových vzorců

Nyní vyjdeme ze str. 84-88 v [13] a str. 59-64 v [18] a zformulujeme a dokážeme tzv. součtové vzorce 3.2. Tyto vzorce budou základem pro jedno z vysokoškolských zavedení sinu a kosinu (viz část 4.3). Na střední škole součtové vzorce využijeme mj. při odvozování dalších goniometrických vzorců (např. věty 3.3) nebo třeba při určování hodnot jako  $\sin \frac{5}{12}\pi$ , které zatím neumíme bez užití kalkulačky vypočítat.

Jestliže si  $\sin \frac{5}{12}\pi$  vyjádříme ve tvaru  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$ , budeme díky součtovým vzorcům moci tento výraz rozložit následujícím způsobem:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4}.$$

Úhlům o velikostech  $\frac{\pi}{6}$ , resp.  $\frac{\pi}{4}$  radiánů odpovídají ve stupních úhly  $30^\circ$ , resp.  $45^\circ$ , pro které už známe hodnoty sinu a kosinu (viz tabulka 2.1).

**Věta 3.2** (Součtové vzorce).  $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  :

$$\sin(t_1 + t_2) = \sin t_1 \cos t_2 + \cos t_1 \sin t_2, \quad (4)$$

$$\sin(t_1 - t_2) = \sin t_1 \cos t_2 - \cos t_1 \sin t_2, \quad (5)$$

$$\cos(t_1 + t_2) = \cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2, \quad (6)$$

$$\cos(t_1 - t_2) = \cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2. \quad (7)$$

*Důkaz.* Nejprve dokážeme vzorce (7) a (6) pro kosinus a poté (4) a (5) pro sinus.

- Jako první dokážeme  $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  rovnost

$$\cos(t_1 - t_2) = \cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2 \quad (7).$$

Volme čísla  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ . Těmto číslům odpovídají v kartézské soustavě souřadnic na jednotkové kružnici body

$$V_1 = [\cos t_1, \sin t_1] \quad \text{a} \quad V_2 = [\cos t_2, \sin t_2] \quad (\text{srov. obrázek 3.7a}),$$

pro které můžeme určit vzdálenost

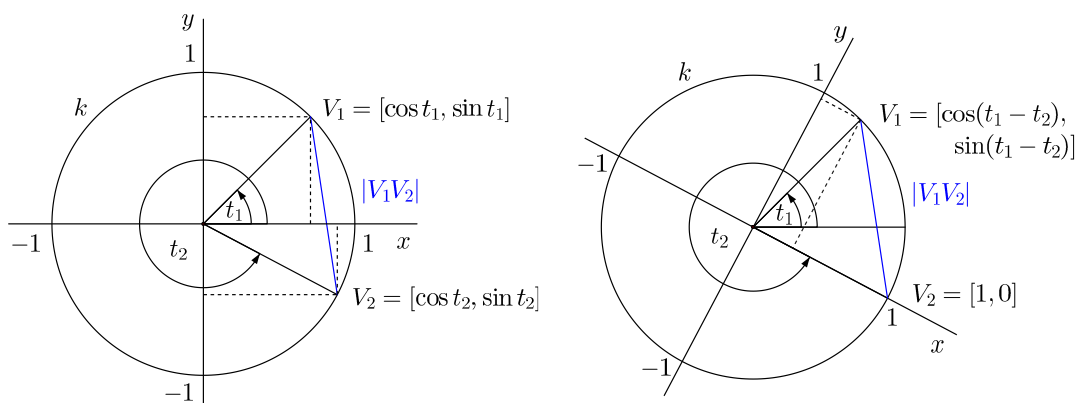
$$|V_1V_2| = \sqrt{(\cos t_1 - \cos t_2)^2 + (\sin t_1 - \sin t_2)^2}.$$

Pokusme se tuto vzdálenost vyjádřit ještě jiným způsobem. Uvažujme soustavu souřadnic, která vznikne otočením původní soustavy souřadnic v kladném smyslu o úhel velikosti  $t_2$ . Jestliže nyní popíšeme souřadnice  $V_1$  a  $V_2$ , dostaneme

$$V_1 = [\cos(t_1 - t_2), \sin(t_1 - t_2)] \text{ a } V_2 = [1, 0] \text{ (srov. obrázek 3.7b),}$$

tedy

$$|V_1V_2| = \sqrt{(\cos(t_1 - t_2) - 1)^2 + (\sin(t_1 - t_2))^2}.$$



(a) Kartézská soustava souřadnic.

(b) Kartézská soustava souřadnic otočená o úhel velikosti  $t_2$ .

Obrázek 3.7: Vzdálenost bodů  $V_1$  a  $V_2$  ležících na jednotkové kružnici vyznačená v různých soustavách souřadnic.

Získali jsme dvě různá vyjádření  $|V_1V_2|$ , která můžeme dát do rovnosti. Dostaneme

$$\begin{aligned} \sqrt{(\cos t_1 - \cos t_2)^2 + (\sin t_1 - \sin t_2)^2} &= \sqrt{(\cos(t_1 - t_2) - 1)^2 + (\sin(t_1 - t_2))^2} \\ (\cos t_1 - \cos t_2)^2 + (\sin t_1 - \sin t_2)^2 &= (\cos(t_1 - t_2) - 1)^2 + \sin^2(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

Výraz na levé straně rovnosti lze s využitím věty 3.1 upravit do tvaru

$$\begin{aligned} \cos^2 t_1 - 2 \cos t_1 \cos t_2 + \cos^2 t_2 + \sin^2 t_1 - 2 \sin t_1 \sin t_2 + \sin^2 t_2 &= \\ = 2 \cdot (1 - \sin t_1 \sin t_2 - \cos t_1 \cos t_2) \end{aligned}$$

a výraz na pravé straně zase do tvaru

$$\cos^2(t_1 - t_2) - 2 \cos(t_1 - t_2) + 1 + 1 - \cos^2(t_1 - t_2) = 2 - 2 \cos(t_1 - t_2).$$

Porovnáním pravé a levé strany už dostaneme

$$\cos(t_1 - t_2) = \cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2.$$



- Z (7), lichosti sinu a sudosti kosinu plyne (6), tj.  $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  platí

$$\begin{aligned}\cos(t_1 + t_2) &= \cos(t_1 - (-t_2)) \stackrel{(7)}{=} \cos t_1 \cos(-t_2) + \sin t_1 \sin(-t_2) = \\ &= \cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2.\end{aligned}$$

Součtové vzorce pro sinus lze přepsat na součtové vzorce pro kosinus použitím následujících dvou vztahů platných  $\forall t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \cos\frac{\pi}{2} \cos t + \sin\frac{\pi}{2} \sin t = 0 \cdot \cos t + 1 \cdot \sin t = \sin t, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] = \cos t.\end{aligned}$$

- Tak dostáváme  $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  rovnost (4):

$$\begin{aligned}\sin(t_1 + t_2) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (t_1 + t_2)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - t_1\right) - t_2\right] \stackrel{(7)}{=} \\ &\stackrel{(7)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - t_1\right) \cos t_2 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - t_1\right) \sin t_2 = \\ &= \sin t_1 \cos t_2 + \cos t_1 \sin t_2.\end{aligned}$$

- Z (4), lichosti sinu a sudosti kosinu plyne (5), tj.  $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  platí

$$\begin{aligned}\sin(t_1 - t_2) &= \sin(t_1 + (-t_2)) \stackrel{(4)}{=} \sin t_1 \cos(-t_2) + \cos t_1 \sin(-t_2) = \\ &= \sin t_1 \cos t_2 - \cos t_1 \sin t_2.\end{aligned} \quad \square$$

Jednoduchým důsledkem věty 3.2 je následující věta 3.3.

**Věta 3.3** (Vzorce pro dvojnásobný úhel).  $\forall t \in \mathbb{R}$ :

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t, \quad (8)$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t. \quad (9)$$

*Důkaz.* K odvození platnosti (8) a (9) využijeme součtové vzorce z věty 3.2. Pokud totiž  $2t$  vyjádříme jako součet dvou  $t$ , dostaneme  $\forall t \in \mathbb{R}$  následující rovnosti:

$$\begin{aligned}\sin 2t &= \sin(t + t) \stackrel{(4)}{=} \sin t \cos t + \cos t \sin t = 2 \sin t \cos t, \\ \cos 2t &= \cos(t + t) \stackrel{(6)}{=} \cos t \cos t - \sin t \sin t = \cos^2 t - \sin^2 t.\end{aligned} \quad \square$$

Na tomto místě odvozování vzorců ukončíme, ačkoliv bychom mohli ze součtových vzorců odvozovat ještě další vztahy, např. vzorce pro poloviční úhel. Poznamenejme, že se nebudeme věnovat ani goniometrickým rovnicím, protože nejsou z kontrastivního hlediska klíčové. Ve středoškolské látce mají ale své místo, zejména kvůli průpravě studentů, kteří se budou věnovat technickým či matematickým oborům. Trigonometrické věty, které staví na středoškolském zavedení sinu a kosinu, zmíníme v další části 3.3 (sekce „Jaké nové úlohy z praxe řešíme“) v souvislosti s aplikacemi funkcí.

### 3.3 Komentář ke středoškolským učebnicím

Podobně jako u základoškolského zavedení (srov. část 2.3) zmiňme krátce také v této části 3.3, jakým způsobem je zavedení sinu a kosinu zpracováno ve středoškolských učebnicích.

Na začátek uveďme seznam učebnic, ze kterých vycházíme:

- Matematika pro gymnázia. Goniometrie [13],
- Matematika pro střední školy. Funkce [14],
- Matematika pro střední školy – 5. díl: Funkce II [17],
- Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 3. díl [18],
- Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU, 3. část [20],
- Matika pro spolužáky. Goniometrie [21].

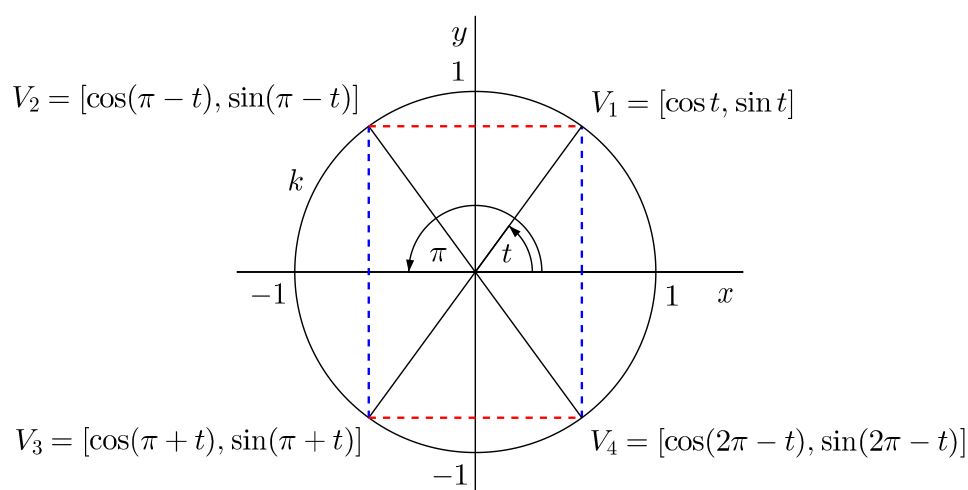
Nyní se věnujme několika vybraným otázkám.

#### Jak určovat hodnoty funkcí sinus a kosinus

Některé učebnice předkládají postup, jak určit hodnotu reálné funkce  $\sin t$ , resp.  $\cos t$ , kde  $t \in (0, 2\pi)$ , na základě hodnoty  $\sin t$ , resp.  $\cos t$ , kde  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

Vztahy mezi hodnotami sinu, resp. kosinu jako souřadnice bodů v různých kvadrantech jsou často popsány množstvím rovností, což pak může vést ke ztrátě přehlednosti (srov. str. 50-52 v [17], str. 29-30 v [18]). Proto upozorníme na str. 102 v [20], kde jsou vztahy hodnot sinu, resp. kosinu v jednotlivých kvadrantech popsány přehledně na třech řádcích, které vyplývají z názorného obrázku (srov. obrázek 3.8).  $\forall t \in (0, \frac{\pi}{2})$  totiž platí

$$\begin{aligned}\sin t &= \sin(\pi - t) = -\sin(\pi + t) = -\sin(2\pi - t), \\ \cos t &= -\cos(\pi - t) = -\cos(\pi + t) = \cos(2\pi - t).\end{aligned}$$



Obrázek 3.8: Body  $V_1, V_2, V_3$  a  $V_4$  ležící na jednotkové kružnici, jejichž souřadnice jsou  $V_1 = [\cos t, \sin t]$ ,  $V_2 = [\cos(\pi - t), \sin(\pi - t)]$ ,  $V_3 = [\cos(\pi + t), \sin(\pi + t)]$  a  $V_4 = [\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t)]$ , kde  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

## Jak konstruovat grafy sinu a kosinu

Na str. 54 v [17] je zmíněno, že dobře zkonstruovaná sinusoida s předpisem  $f(t) = \sin t, t \in \mathbb{R}$ , se v okolí počátku blíží lineární funkci  $g(t) = t, t \in \mathbb{R}$ . Touto souvislostí je mj. možné přiblížit studentům známou limitu

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

kteřá bude důležitá pro vysokoškolské zavedení (viz část 4.3).

Sinusoidu je pak možné využít ke konstrukci kosinusoidy (viz str. 103 a 124 v [14] a srov. str. 35-36 v [18]), protože  $\forall t \in \mathbb{R}$  platí

$$\cos t = \sin t \cdot 0 + \cos t \cdot 1 = \sin t \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \cos t \cdot \sin \frac{\pi}{2} \stackrel{(4)}{=} \sin \left( t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (10)$$

Pokud bychom tedy v rámci zavedení sinu, resp. kosinu prozkoumali změny grafů s přidáním nenulových koeficientů do předpisu funkcí (srov. poznámka 3.1), lze z (10) kosinusoidu získat posunutím grafu sinu o  $|\frac{\pi}{2}|$  ve směru záporné poloosy  $x$ . Kosinusoidu pak není potřeba konstruovat přes několik bodů (srov. str. 45 v [13], str. 52 v [17] a str. 87 v [20]). Lze kriticky podotknout, že na str. 57 v [21] je graf kosinu vykreslen bez jakéhokoliv odvození.

Poznamenejme, že některé učebnice (str. 52-54 v [17], str. 51-54 v [21]) popisují průběh sinu, resp. kosinu na základě zkonstruovaného grafu funkcí místo toho, aby konstruovali sinusoidu, resp. kosinusoidu na základě odvození průběhu funkcí z jednotkové kružnice (str. 96-102 v [14], str. 39-45 v [13], str. 25-32 v [18], str. 84-88 v [20]). Riziko odvozování vlastností funkce sinus, resp. kosinus přímo z grafů spočívá v tom, že se tak může vytratit souvislost vlastností sinu, resp. kosinu s jejich definicí (srov. definice 3.3).

## Co v učebnicích nenalezneme

Některá tvrzení učebnice uvádí bez důkazu, např. žádná z námi uvažovaných učebnic nedokazuje, že  $2\pi$  je nejmenší perioda funkce sinus, resp. kosinus. Více učebnic (srov. str. 124 v [14], str. 81 v [17] a str. 113 v [21]) také nedokazuje součtové vzorce, popř. je dokazuje jen částečně (srov. str. 117-120 v [20]).

## Jaké nové úlohy z praxe řešíme

Na základní škole jsme sinus a kosinus aplikovali typicky v pravoúhlých trojúhelnících (srov. sekce „Jak motivovat látku“ v části 2.3). Na střední škole pak sinus a kosinus využijeme také v úlohách s obecnými trojúhelníky; odvozují se zde totiž tzv. trigonometrické věty<sup>6</sup>, které s pomocí sinu a kosinu vyjadřují vztahy mezi vnitřními úhly a délkami stran v obecných trojúhelnících.

<sup>6</sup>Mezi trigonometrické věty patří sinová a kosinová věta, které vychází ze základoškolské a středoškolské definice sinu a kosinu. Při běžném označení vnitřních úhlů a stran obecného  $\triangle ABC$  se dá tvrzení sinové, resp. kosinové věty zapsat ve tvaru

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c},$$

resp.  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ .

Nově tak řešíme mj. úlohy typu, jak velkou silou musíme působit, abychom zrušili účinek dvou sil o daných velikostech a směrech působících na těleso v jednom bodě (srov. str. 122 v [13]).

Trigonometrické věty nám také častou pomohou při řešení úloh, kdy vidíme některý objekt pod daným zorným, výškovým či hloubkovým úhlem. Uvažujme např. dvě různá místa  $M_1$  a  $M_2$ , u kterých známe vzdálenost  $|M_1M_2|$  a dále předpokládejme, že na přímce  $M_1M_2$  leží (mimo úsečku  $M_1M_2$ ) pata věže. Jestliže pozorujeme věž z  $M_1$  a  $M_2$  pod dvěma různými výškovými úhly, potom můžeme pomocí sinové věty stanovit její výšku (srov. str. 91 v [17]).

# 4. Zavedení sinu a kosinu na VŠ

## 4.1 Proč zavádět sinus a kosinus ještě jinak

Na základní a střední škole jsme se s funkcemi jako objekty setkali primárně při řešení geometrických úloh, a proto bylo vhodné zavést funkce sinus a kosinus geometrickou cestou (viz definice 2.4 a 3.3). Po přechodu na vysokou školu pak na funkce nahlížíme zejm. skrze jejich vlastnosti, např. zkoumáme, které funkce jsou monotónní, omezené, spojité a diferencovatelné, také integrujeme či řešíme diferenciální rovnice. Proto bude přirozené zavést sinus a kosinus tak, že vyjdeme z vlastností, které tyto funkce jednoznačně definují (viz věta 4.1).

Významná část vysokoškolského zkoumání funkcí se týká souvislosti funkcí a mocninných řad, a tak pro různé funkce hledáme vyjádření ve tvaru Taylorovy řady. Jestliže nalezneme Taylorovu řadu v bodě 0 pro reálné funkce sinus a kosinus, dá se ukázat, že sinus a kosinus lze přes její předpis dobře definovat (viz definice 4.2 a poznámky 4.1 a 4.2, které ověřují korektnost definice).

Jelikož teorii mocninných řad budujeme také v komplexním oboru, nabízí se rozšířit definici sinu a kosinu jako reálných funkcí reálné proměnné na definici sinu a kosinu jako komplexních funkcí komplexní proměnné (viz definice 4.3, která vychází z řad (18) a (19)).

Představíme si tedy celkem tři různá vysokoškolská zavedení sinu a kosinu. V části 4.2, resp. 4.3 zavedeme „reálný“ sinus a kosinus pomocí mocninných řad, resp. pomocí význačných vlastností (tj. pomocí součtových vzorců a limity) a v části 4.4 zavedeme „komplexní“ sinus a kosinus pomocí tzv. Eulerových vzorců.

## 4.2 Zavedení pomocí mocninných řad

V prvním vysokoškolském zavedení sinu a kosinu budeme vycházet ze skript *Matematická analýza 1* [22] a z učebnice *Základy matematické analýzy* [23].

Na střední škole se u tématu derivace funkcí uvádí bez důkazu (srov. str. 338 v [24]), že  $\forall t \in \mathbb{R}$  platí

$$\sin' t = \cos t, \quad \text{resp.} \quad \cos' t = -\sin t. \quad (1)$$

Důkazy derivací sinu, resp. kosinu odvodíme v této práci později v rámci zavedení 4.3 pomocí součtových vzorců a limity  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ .

Z grafů funkcí sinus a kosinus 3.6 je navíc

$$\sin 0 = 0, \quad \text{resp.} \quad \cos 0 = 1. \quad (2)$$

Jestliže známe derivace sinu, resp. kosinu (srov. (1)) a pro tyto derivace jsme schopni najít jejich hodnotu v bodě 0 (srov. (2)), můžeme určit Taylorovu řadu reálné funkce  $\sin t$ , resp.  $\cos t$  (srov. definice 3.3) v bodě 0. Definici Taylorovy řady v bodě 0 uvádíme pro připomenutí níže (viz definice 4.1).

**Definice 4.1.** Uvažujme reálnou funkci  $y(t)$ , která má v bodě 0 derivace pro všechny řády (tj. pro každý řád  $n$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ ). Potom řadu ve tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^{(n)}(0) \cdot \frac{t^n}{n!}, \quad t \in \mathbb{R}$$

nazýváme *Taylorovou řadou funkce  $y(t)$  v bodě 0* (str. 204 v [23]).

### Taylorova řada funkce sinus, resp. kosinus v bodě nula

Abychom našli Taylorovu řadu funkce sinus, resp. kosinus v bodě nula, určíme nejprve hodnoty derivací sinu, resp. kosinu v bodě 0.

Platí, že

$$\begin{aligned} \sin'(0) &= \cos 0 = 1, & \text{resp. } \cos'(0) &= -\sin 0 = 0, \\ \sin''(0) &= -\sin 0 = 0, & \text{resp. } \cos''(0) &= -\cos 0 = -1, \\ \sin^{(3)}(0) &= -\cos 0 = -1, & \text{resp. } \cos^{(3)}(0) &= \sin 0 = 0, \\ \sin^{(4)}(0) &= \sin 0 = 0, & \text{resp. } \cos^{(4)}(0) &= \cos 0 = 1. \end{aligned}$$

tedy derivace sinu, resp. kosinu v bodě 0 nabývají postupně cyklicky hodnot

$$\{1, 0, -1, 0\}, \quad \text{resp.} \quad \{0, -1, 0, 1\}.$$

Taylorova řada reálné funkce  $\sin t$ , resp.  $\cos t$  v bodě 0 má tedy tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nyní známe Taylorovy řady funkcí sinus a kosinus v bodě 0. Nabízí se tak otázka, zda tyto funkce nelze pomocí těchto řad definovat.

**Definice 4.2.** Funkce  $f(t)$  a  $g(t)$  definované  $\forall t \in \mathbb{R}$  předpis

$$f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - \dots, \quad (3)$$

$$g(t) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} - \dots \quad (4)$$

nazýváme *sinus* a *kosinus*, tedy  $\forall t \in \mathbb{R}$ :  $f(t) = \sin t$  a  $g(t) = \cos t$  (str. 359 v [22]).

**Poznámka 4.1.** Na předpis  $f(t)$  (3), resp.  $g(t)$  (4) se můžeme dívat jako na funkci, která danému bodu  $t \in \mathbb{R}$  přiřadí součet řady v tomto bodě.

Pak je definice 4.2 korektní, jelikož je  $\forall t \in \mathbb{R}$  řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!},$$

konvergentní. Pro  $t = 0$  má řada nulové členy a konverguje k 0 a pro  $t \neq 0$  dostaneme konvergenci řady aplikací limitního podílového kritéria<sup>1</sup> ( $n$ -tý člen řady si označíme jako  $a_n$ ) (str. 202 v [22]):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+3}}{(2n+3)!} \right|}{\left| \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0,$$

$$\text{resp. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{(2n+2)!} \right|}{\left| \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$$

**Poznámka 4.2.** Korektnost definice 4.2 lze ověřit ještě jiným způsobem, a sice aplikací teorie mocninných řad. Na předpis  $f(t)$  (3), resp.  $g(t)$  (4) se totiž můžeme dívat také jako na mocninnou řadu se středem v bodě 0, u které můžeme určit poloměr konvergence.

Poloměr konvergence  $R$  řady  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  lze vypočítat např. ze vztahu

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad (\text{pokud tato limita existuje}),$$

který lze dokázat přímou aplikací limitního podílového kritéria.<sup>2</sup> Pro řadu

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{resp. } g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!},$$

kde  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dostáváme

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|}{\left| \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+3}}{(2n+3)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)(2n+2)}{t^2} = +\infty,$$

$$\text{resp. } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \right|}{\left| \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{(2n+2)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{t^2} = +\infty.$$

Zároveň pro  $t = 0$  řada  $f(t)$ , resp.  $g(t)$  konverguje k 0.

Poloměr konvergence řady  $f(t)$ , resp.  $g(t)$  je nekonečno, a proto řada konverguje na celém reálném oboru, tedy je její součet dobře definován.

Konvergence Taylorovy řady nám ještě nedává informaci, že tato řada konverguje k hodnotám funkce, ze které jsme tuto řadu dělali. Na to by bylo třeba pracovat s Taylorovým zbytkem. Pro ověření korektnosti definice 4.2 nám ovšem stačí informace, že řada  $f(t)$ , resp.  $g(t)$  konverguje.

Dále zkoumejme, jaké mají reálné funkce  $f(t) = \sin t$  a  $g(t) = \cos t$  definované předpisy (3) a (4) derivace a jestli platí, že „derivace sinu je kosinus“ a „derivace kosinu je mínus sinus“ (srov. (1)).

K tomuto účelu zformulujeme lemma 4.1, které převezmeme včetně důkazu ze str. 358-360 v [22]. Tvrzení lemmatu využijeme mj. v dalším zavedení sinu a kosinu 4.3 při důkazu věty 4.1.

<sup>1</sup>Limitní podílové kritérium nalezneme na str. 139 (bod c u věty 3.2.11) v [22].

<sup>2</sup>Uvedený vztah pro poloměr konvergence  $R$  nalezneme na str. 45 (poznámka 2.3.2.) v [25].

**Lemma 4.1.** Pro derivace reálných funkcí  $f(t)$  a  $g(t)$  definovaných předpisy (3) a (4) platí, že  $\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = g(t)$  a  $g'(t) = -f(t)$ .

*Důkaz.* Ukážeme, že v každém bodě  $t \in \mathbb{R}$  platí rovnost

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = g(t),$$

tedy, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(t+h) - f(t) - g(t) \cdot h}{h} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(t+h) - f(t) - g(t) \cdot h|}{|h|} = 0. \quad (5)$$

Pro limitu (5) budeme hledat omezení shora. Pro pevné  $t \in \mathbb{R}$  a  $h \in (-1, 1)$  si čitatel zlomku v limitě můžeme z předpisů  $f(t)$  a  $g(t)$  rozepsat jako

$$|f(t+h) - f(t) - g(t) \cdot h| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+h)^{2n+1} - t^{2n+1} - (2n+1)t^{2n} \cdot h}{(2n+1)!} \right|. \quad (*)$$

Z binomické věty víme, že

$$(t+h)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} t^{(2n+1-k)} h^k. \quad (6)$$

Pro  $k=0$  dostaneme v binomickém rozvoji (6) člen

$$\binom{2n+1}{0} t^{(2n+1-0)} h^0 = t^{2n+1}$$

a pro  $k=1$  člen

$$\binom{2n+1}{1} t^{(2n+1-1)} h^1 = (2n+1)t^{2n}h.$$

Proto  $\forall n \in \mathbb{N}$  platí, že

$$\begin{aligned} |(t+h)^{2n+1} - t^{2n+1} - (2n+1)t^{2n} \cdot h| &= \left| \sum_{k=2}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} t^{(2n+1-k)} h^k \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=2}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} |t|^{(2n+1-k)} |h|^k = h^2 \sum_{k=2}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} |t|^{(2n+1-k)} |h|^{k-2} \leq \\ &\leq h^2 \sum_{k=2}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (|t|+1)^{(2n+1-k)} 1^{k-2} = h^2 \sum_{k=2}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (|t|+1)^{(2n+1-k)} \leq \\ &\leq h^2 \sum_{k=2}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (|t|+1)^{(2n+1-2)} \leq h^2 (|t|+1)^{(2n-1)} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \leq \\ &\leq h^2 (|t|+1)^{(2n+1)} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}. \end{aligned} \quad (7)$$

Jelikož

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 1^{2n+1-k} 1^k = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1}$$



(srov. str. 54 v [22]), dostaneme ze (7) omezení (\*)

$$\begin{aligned} |f(t+h) - f(t) - h \cdot g(t)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+h)^{2n+1} - t^{2n+1} - (2n+1)t^{2n} \cdot h}{(2n+1)!} \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(t+h)^{2n+1} - t^{2n+1} - (2n+1)t^{2n} \cdot h}{(2n+1)!} \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^2 (|t|+1)^{2n+1} 2^{2n+1}}{(2n+1)!} = h^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2|t|+2)^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Pokud na řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2|t|+2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (8)$$

aplikujeme limitní podílové kritérium (n-tý člen řady (8) si označíme jako  $a_n$  s tím, že začínáme od nultého členu), dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2|t|+2)^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{(2|t|+2)^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2|t|+2)^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0.$$

Z toho víme, že (8) je konvergentní řada, tedy má konečný součet.

Proto  $\forall t \in \mathbb{R}$  platí pro (5)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(t+h) - f(t) - h \cdot g(t)|}{|h|} &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left| h^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2|t|+2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|}{|h|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} |h| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2|t|+2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0. \end{aligned}$$

Důkaz vztahu  $g'(t) = -f(t)$  platného  $\forall t \in \mathbb{R}$  by proběhl obdobně.  $\square$

**Poznámka 4.3.** Důkaz lemmatu 4.1 jsme mohli vést přes mocninné řady. Je to kratší způsob, který ale vyžaduje znalost pokročilejší teorie. Na dalších rádcích si ho předvedeme.

*Důkaz.* Víme, že uvnitř poloměru konvergence můžeme mocninné řady derivovat člen po členu.<sup>3</sup> Ukázali jsme, že poloměr konvergence  $f(t)$  a  $g(t)$  je  $+\infty$ , proto  $\forall t \in \mathbb{R}$  platí

$$\begin{aligned} (f(t))' &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left( (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \\ &= (t)' - \left( \frac{t^3}{3!} \right)' + \left( \frac{t^5}{5!} \right)' - \left( \frac{t^7}{7!} \right)' + \left( \frac{t^9}{9!} \right)' - \dots = \\ &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} - \dots = \\ &= g(t). \end{aligned}$$

Důkaz vztahu  $g'(t) = -f(t)$  platného  $\forall t \in \mathbb{R}$  by proběhl obdobně.  $\square$

<sup>3</sup>Příslušnou větu o „derivaci mocninné řady“ nalezneme na str. 406 v [22].

O funkcích  $f(t)$  a  $g(t)$ , které jsme zavedli pomocí Taylorovy řady (srov. definice 4.2), jsme zjistili, že tyto funkce jsou korektně zavedené a že  $\forall t \in \mathbb{R}$  platí  $f'(t) = g(t)$  a  $g'(t) = -f(t)$  (srov. (1)).

Navíc dosazením 0 do předpisů  $f(t)$  a  $g(t)$  získáme

$$f(0) = 0 - \frac{0^3}{3!} + \frac{0^5}{5!} - \frac{0^7}{7!} + \frac{0^9}{9!} - \dots = 0,$$

$$g(0) = 1 - \frac{0^2}{2!} + \frac{0^4}{4!} - \frac{0^6}{6!} + \frac{0^8}{8!} - \dots = 1$$

(srov. (2)). Dvojice funkcí  $f(t)$ ,  $g(t)$  tedy odpovídá  $\forall t \in \mathbb{R}$  svými derivacemi a funkčními hodnotami v 0 dvojici funkcí  $\sin t$ ,  $\cos t$  definované středoškolsky.

Poznamenejme, že na poznatky ze zavedení sinu a kosinu pomocí mocninných řad navážeme i v dalších dvou zavedeních, v zavedení pomocí součtových vzorců a limity 4.3 a také v zavedení pomocí Eulerových vzorců 4.4.

### 4.3 Zavedení pomocí součtových vzorců a limity

V této části budeme kromě skript Matematická analýza 1 [22] a učebnice Základy matematické analýzy [23] vycházet také z knihy Diferenciální počet 1 [26].

V rámci středoškolského zavedení uvádíme, že sinus a kosinus splňují tzv. součtové vzorce (viz věta 3.2). Ukážeme si, že součtové vzorce dokážou funkce sinus a kosinus už částečně definovat.

#### Vlastnosti funkcí splňující součtové vzorce

Jestliže některé reálné funkce (označme je  $s(t)$  a  $c(t)$ ) splňují  $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  součtové vzorce

$$s(t_1 - t_2) = s(t_1)c(t_2) - c(t_1)s(t_2), \quad (9)$$

$$c(t_1 - t_2) = c(t_1)c(t_2) + s(t_1)s(t_2), \quad (10)$$

umíme již tyto funkce částečně popsat. Dokážeme najít hodnoty  $s(t)$  a  $c(t)$  v nule a jsme také schopni určit paritu  $s(t)$  a  $c(t)$ . Víme, že

- $s(0) = 0$ , neboť pro  $t_1 \in \mathbb{R}$  platí

$$s(0) = s(t_1 - t_1) = s(t_1)c(t_1) - c(t_1)s(t_1) = 0.$$

- $c(0) = 1$ , neboť pro  $t_1 \in \mathbb{R}$  platí

$$s(t_1) = s(t_1 - 0) = s(t_1)c(0) - c(t_1)s(0) = s(t_1)c(0).$$

- $s(-t) = -s(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$  (tj.  $s(t)$  je lichá funkce), neboť pro  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  platí

$$\begin{aligned} s(-(t_1 - t_2)) &= s(t_2 - t_1) = s(t_2)c(t_1) - c(t_2)s(t_1) = \\ &= -(s(t_1)c(t_2) - c(t_1)s(t_2)) = -s(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

- $c(-t) = c(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$  (tj.  $c(t)$  je sudá funkce), neboť pro  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  platí

$$\begin{aligned} c(-(t_1 - t_2)) &= c(t_2 - t_1) = c(t_2)c(t_1) + s(t_2)s(t_1) = \\ &= c(t_1)c(t_2) + s(t_1)s(t_2) = c(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

Ze součtových vzorců (9) a (10) ale neumíme popsat celý průběh  $s(t)$  a  $c(t)$ , např. neumíme určit derivace funkcí  $s(t)$  a  $c(t)$ .

Abychom tedy  $s(t)$  a  $c(t)$  popsali jednoznačně, budeme pro  $s(t)$  a  $c(t)$  potřebovat přidat nějakou další definující podmínku. Za tuto podmínku zvolme vyjádření sklonu  $s(t)$  v bodě nula.

Z předchozího zavedení 4.2 víme, že

$$\sin'(0) = 1,$$

proto jako podmínku položíme

$$s'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(t) - s(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(t)}{t} = 1.$$

Nyní již dokážeme najít  $\forall t \in \mathbb{R}$  derivace  $s(t)$  a  $c(t)$  (viz poznámka 4.4).

**Poznámka 4.4.** Při odvozování derivací se nám bude hodit pro hodnoty  $[s(t)]^2$  a  $[c(t)]^2$ , kde  $t \in \mathbb{R}$ , používat kratší zápis  $s^2(t)$  a  $c^2(t)$  (srov. poznámka 3.2).

Víme, že

- $s'(t) = c(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , jelikož platí rovnost

$$\begin{aligned} s'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t - (-h)) - s(t)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t)c(-h) - c(t)s(-h) - s(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} s(t) \frac{c(h) - 1}{h^2} h + \lim_{h \rightarrow 0} c(t) \frac{s(h)}{h} = \\ &= s(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(h) - 1}{h^2} h + c(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(h)}{h}. \end{aligned}$$

Hodnotu výrazu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(h) - 1}{h^2} \tag{11}$$

určíme z následujících vztahů platných  $\forall h \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} c(h) &= c\left(\frac{h}{2} - \left(-\frac{h}{2}\right)\right) = c\left(\frac{h}{2}\right)c\left(-\frac{h}{2}\right) + s\left(\frac{h}{2}\right)s\left(-\frac{h}{2}\right) = \\ &= c^2\left(\frac{h}{2}\right) - s^2\left(\frac{h}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{a } 1 = c\left(\frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right) = c\left(\frac{h}{2}\right)c\left(\frac{h}{2}\right) + s\left(\frac{h}{2}\right)s\left(\frac{h}{2}\right) = c^2\left(\frac{h}{2}\right) + s^2\left(\frac{h}{2}\right),$$

kteřé po dosazení do výrazu (11) dají

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(h) - 1}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2s^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \cdot \frac{s\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \frac{s\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Proto  $\forall t \in \mathbb{R}$  platí

$$\begin{aligned} s'(t) &= s(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(h) - 1}{h^2} h + c(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(h)}{h} = \\ &= s(t) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + c(t) \cdot 1 = c(t). \end{aligned}$$

- $c'(t) = -s(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , jelikož  $\forall t \in \mathbb{R}$  platí rovnost

$$\begin{aligned} c'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t - (-h)) - c(t)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t)c(-h) + s(t)s(-h) - c(t)}{h} = \\ &= c(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(h) - 1}{h^2} h - s(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(h)}{h} = \\ &= c(t) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 - s(t) \cdot 1 = -s(t). \end{aligned}$$

Jak ukážeme dále, součtové vzorce a fixace sklonu  $s(t)$  v nule jednoznačně definují dvojici reálných funkcí  $s(t) = \sin t$  a  $c(t) = \cos t$ .

**Věta 4.1.** Existuje právě jedna dvojice funkcí  $s(t), c(t)$  definovaná na  $\mathbb{R}$ , která splňuje podmínku

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(t)}{t} = 1 \tag{12}$$

a  $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  navíc platí

$$s(t_1 - t_2) = s(t_1)c(t_2) - c(t_1)s(t_2), \tag{13}$$

$$c(t_1 - t_2) = c(t_1)c(t_2) + s(t_1)s(t_2). \tag{14}$$

Tato dvojice se nazývá *sinus* a *kosinus* neboli  $\forall t \in \mathbb{R} : s(t) = \sin t$  a  $c(t) = \cos t$ .

V důkazu věty 4.1, který se opírá o zavedení sinu a kosinu pomocí mocninných řad 4.2, vyjdeme ze str. 360-363 v [22].

*Důkaz.* Postupovat budeme ve dvou krocích. Nejprve ukážeme, že dvojice funkcí  $f(t), g(t)$  z definice 4.2 s předpisy

$$\begin{aligned} f(t) &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - \dots, \quad t \in \mathbb{R}, \\ g(t) &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} - \dots, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

splňuje předpoklady věty 4.1. Poté předvedeme, že žádná jiná dvojice funkcí tyto předpoklady nesplňuje.

1) Dokažme, že dvojice  $f(t), g(t)$  splňuje předpoklady věty 4.1.

- Funkce  $f(t)$  a  $g(t)$  jsou definovány  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

- Pro  $f(t)$  platí podmínka

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 1.$$

Platí totiž, že

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - \dots}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} \cdot \frac{1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \frac{t^8}{9!} - \dots}{1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} 1 - \left( \frac{t^2}{3!} - \frac{t^4}{5!} + \frac{t^6}{7!} - \frac{t^8}{9!} + \dots \right), \end{aligned}$$

kde

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{3!} - \frac{t^4}{5!} + \frac{t^6}{7!} - \frac{t^8}{9!} + \dots = 0. \quad (15)$$

Rovnost (15) vychází z toho, že pro  $t \in (-1, 1)$  je

$$\begin{aligned} &\left| t^2 \cdot \left( \frac{1}{3!} - \frac{t^2}{5!} + \frac{t^4}{7!} - \frac{t^6}{9!} + \dots \right) \right| \leq \\ &\leq |t^2| \cdot \left| \frac{1}{3!} - \frac{t^2}{5!} + \frac{t^4}{7!} - \frac{t^6}{9!} + \dots \right| \leq \\ &\leq t^2 \cdot \left( \left| \frac{1}{3!} \right| + \left| \frac{t^2}{5!} \right| + \left| \frac{t^4}{7!} \right| + \left| \frac{t^6}{9!} \right| + \dots \right) \leq \\ &\leq t^2 \cdot \left( \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} + \dots \right) \leq \\ &\leq t^2 \cdot \left( \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots \right) = \\ &= t^2 \cdot e. \end{aligned}$$

Pro  $t \rightarrow 0$  dostaneme omezení

$$\left| t^2 \cdot \left( \frac{1}{3!} - \frac{t^2}{5!} + \frac{t^4}{7!} - \frac{t^6}{9!} + \dots \right) \right| \leq 0.$$

- Zbývá dokázat, že  $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  platí

$$\begin{aligned} f(t_1 - t_2) &= f(t_1)g(t_2) - g(t_1)f(t_2), \\ g(t_1 - t_2) &= g(t_1)g(t_2) + f(t_1)f(t_2). \end{aligned}$$

Kdybychom si výše uvedené rovnosti převedli na jednu stranu, dostali bychom  $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$f(t_1 - t_2) - f(t_1)g(t_2) + g(t_1)f(t_2) = 0, \quad (16)$$

$$g(t_1 - t_2) - g(t_1)g(t_2) - f(t_1)f(t_2) = 0. \quad (17)$$

Levá strana rovnosti (16), resp. (17) má  $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  nulovou hodnotu, proto i její druhá mocnina bude nulová. Nulový bude i součet druhých mocnin levých stran rovností (16) a (17).

Na základě těchto úvah volme  $t_2 \in \mathbb{R}$  a definujme reálnou funkci

$$L(t) := [f(t - t_2) - f(t)g(t_2) + g(t)f(t_2)]^2 + [g(t - t_2) - g(t)g(t_2) - f(t)f(t_2)]^2.$$

Ukážeme, že  $L(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$ . Využijeme k tomu vztahy  $f'(t) = g(t)$  a  $g'(t) = -f(t)$  platné  $\forall t \in \mathbb{R}$ , které jsme si ukázali v lemmatu 4.1.

Z předpisů  $f(t)$  a  $g(t)$  dostaneme  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L'(t) &= 2 \cdot [f(t - t_2) - f(t)g(t_2) + g(t)f(t_2)] \cdot \\ &\quad \cdot [f'(t - t_2) - f'(t)g(t_2) + g'(t)f(t_2)] + \\ &\quad + 2 \cdot [g(t - t_2) - g(t)g(t_2) - f(t)f(t_2)] \cdot \\ &\quad \cdot [g'(t - t_2) - g'(t)g(t_2) - f'(t)f(t_2)] = \\ &= 2 \cdot [f(t - t_2) - f(t)g(t_2) + g(t)f(t_2)] \cdot \\ &\quad \cdot [g(t - t_2) - g(t)g(t_2) - f(t)f(t_2)] + \\ &\quad + 2 \cdot [g(t - t_2) - g(t)g(t_2) - f(t)f(t_2)] \cdot \\ &\quad \cdot [-f(t - t_2) + f(t)g(t_2) - g(t)f(t_2)] = 0. \end{aligned}$$

$L(t)$  má na  $\mathbb{R}$  nulovou derivaci, tedy je konstantní.<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} L(0) &= [f(-t_2) - f(0)g(t_2) + g(0)f(t_2)]^2 + \\ &\quad + [g(-t_2) - g(0)g(t_2) - f(0)g(t_2)]^2 = \\ &= [-f(t_2) - 0 \cdot g(t_2) + 1 \cdot f(t_2)]^2 + \\ &\quad + [g(-t_2) - 1 \cdot g(t_2) - 0 \cdot g(t_2)]^2 = 0. \end{aligned}$$

Jelikož má  $L(t)$  v nule funkční hodnotu 0, jde o konstantní nulovou funkci.

2) Jednoznačnost dvojice funkcí dokážeme tak, že volíme dvojice funkcí  $s(t)$ ,  $c(t)$  a  $\tilde{s}(t)$ ,  $\tilde{c}(t)$ , které splňují předpoklady věty 4.1.

- Dokážeme, že potom  $\forall t \in \mathbb{R}$  platí

$$\begin{aligned} s(t) &= \tilde{s}(t), \\ c(t) &= \tilde{c}(t). \end{aligned}$$

Použijme obdobný postup jako v části 1) důkazu a definujme  $\forall t \in \mathbb{R}$  funkci

$$M(t) := (s(t) - \tilde{s}(t))^2 + (c(t) - \tilde{c}(t))^2.$$

Ukážeme, že  $M(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$ . Využijeme k tomu poznámku 4.4, ve které jsme ukázali, že splnění předpokladů věty 4.1 implikuje rovnosti  $s'(t) = c(t)$  a  $c'(t) = -s(t)$  platné  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

<sup>4</sup>Vyplývá to z věty 5.2.9. uvedené na str. 262 v [22].

$M(t)$  je konstantní nulová funkce, jelikož  $\forall t \in \mathbb{R}$  je

$$\begin{aligned} M'(t) &= 2 \cdot (s(t) - \tilde{s}(t))(c(t) - \tilde{c}(t)) + 2 \cdot (c(t) - \tilde{c}(t))(-s(t) + \tilde{s}(t)) = 0, \\ M(0) &= (s(0) - \tilde{s}(0))^2 + (c(0) - \tilde{c}(0))^2 = (0 - 0)^2 + (1 - 1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Proto je  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$s(t) = \tilde{s}(t) \text{ a } c(t) = \tilde{c}(t). \quad \square$$

## 4.4 Zavedení pomocí Eulerových vzorců

Doposud jsme sinus a kosinus zaváděli jako reálné funkce reálné proměnné. Protože je ale v matematice teorie mocninných řad vybudována také pro funkce komplexní proměnné, budeme dále sinus a kosinus uvažovat v komplexním oboru.

Ukážeme si, že komplexní sinus a kosinus úzce souvisí s exponenciálou, a také krátce porovnáme reálný a komplexní sinus a kosinus (viz poznámka 4.6).

### Rozšíření Taylorovy řady sinu a kosinu na obor komplexních čísel

Taylorovu řadu funkcí sinus a kosinus v bodě 0 rozšíříme na obor komplexních čísel  $\forall z \in \mathbb{C}$  následujícím způsobem (srov. definice 4.2):

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \dots, \quad (18)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \dots \quad (19)$$

Kdybychom našli Taylorovu řadu v bodě 0 (viz definice 4.1) také pro exponenciálu a rozšířili ji na obor komplexních čísel, dostali bychom  $\forall z \in \mathbb{C}$  vyjádření

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \quad (20)$$

Všimněme si, že Taylorovy řady funkcí sinus (18) a kosinus (19) v bodě 0 se skládají z vybraných členů Taylorovy řady pro exponenciálu (20) opatřených znaménky.

Z (20) dále  $\forall z \in \mathbb{C}$  platí

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \dots, \\ e^{-iz} &= 1 - iz - \frac{z^2}{2!} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Jestliže od sebe rovnosti odečteme, dostaneme  $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} e^{iz} - e^{-iz} &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \dots - \\ &\quad - \left( 1 - iz - \frac{z^2}{2!} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) = \\ &= 2i \cdot z - 2i \cdot \frac{z^3}{3!} + 2i \cdot \frac{z^5}{5!} - \dots = 2i \cdot \sin z. \end{aligned}$$

Jestliže naopak k sobě rovnosti přičteme, dostaneme  $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} e^{iz} + e^{-iz} &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \dots + \\ &+ 1 - iz - \frac{z^2}{2!} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \\ &= 2 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{z^2}{2!} + 2 \cdot \frac{z^4}{4!} - 2 \cdot \frac{z^6}{6!} + \dots = 2 \cdot \cos z. \end{aligned}$$

Na základě předchozích úvah dojdeme k tzv. „Eulerovým vzorcům“. Pomocí těchto vzorců budeme komplexní sinus a kosinus definovat. Vyjdeme při tom z knihy Komplexní analýza pro učitele [25], str. 66.

**Definice 4.3** (Eulerovy vzorce). Funkce  $f(z)$  a  $g(z)$  definované  $\forall z \in \mathbb{C}$  vzorci

$$\begin{aligned} f(z) &:= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), \\ g(z) &:= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \end{aligned}$$

nazýváme (*komplexní*) *sinus* a *kosinus*,  $\forall z \in \mathbb{C}$  tak platí  $f(z) = \sin z, g(z) = \cos z$ .

**Poznámka 4.5.** V literatuře (str. 198 v [2]) můžeme narazit na to, že pojem „Eulerův vzorec“ odkazuje na následující vztah platný  $\forall z \in \mathbb{C}$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

který plyne přímo z definice 4.3.

**Poznámka 4.6.** Komplexní sinus a kosinus se od reálného sinu a kosinu liší v některých vlastnostech, např. komplexní kosinus není shora omezená funkce (str. 241 v [23]), jelikož

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \cos(iz) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) = \frac{1}{2} \left( \lim_{z \rightarrow \infty} e^z + \lim_{z \rightarrow \infty} e^{-z} \right) = \infty.$$

Další vlastnosti, např. lichost sinu a sudost kosinu, zůstávají v komplexním oboru zachovány, jelikož  $\forall z \in \mathbb{C}$  platí

$$\begin{aligned} \sin(-z) &= \frac{1}{2i} (e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}) = \frac{1}{2i} (e^{-iz} - e^{iz}) = \\ &= -\frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z, \\ \cos(-z) &= \frac{1}{2} (e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}) = \frac{1}{2} (e^{-iz} + e^{iz}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z. \end{aligned}$$

Definice sinu a kosinu pomocí Eulerových vzorců 4.3 vychází z komplexní exponenciály, kterou jsme definovali pomocí Taylorovy řady (20). Tak jsme sinus a kosinus zavedli de facto opět pomocí mocninných řad (srov. zavedení 4.2).



# Závěr

V této práci jsme nejprve nahlédli do historie goniometrie a poté jsme si představili různá zavedení sinu a kosinu, porovnali jsme je a ukázali jsme, co nám daná zavedení přináší za nové možnosti. Kromě toho jsme zkoumali, jak na sebe jednotlivá zavedení navazují a jak jsou zpracována v učebnicích.

Zjistili jsme, že jednotlivá zavedení představují „jen“ různý popis týchž funkcí. Všechna zavedení – od základní přes střední až po vysokou školu – jsou totiž vzájemně provázána. Přesto pro nás bylo výhodné definovat sinus a kosinus několika způsoby, každý způsob nám totiž napomohl řešit jiné problémy. Díky zavedení sinu a kosinu přes poměry délek stran v pravoúhlém trojúhelníku jsme dokázali mj. vypočítat sklon lanovky, díky definici přes jednotkovou kružnici jsme mohli najít např. goniometrický tvar komplexního čísla a s pomocí vysokoškolských zavedení jsme teorii okolo sinu a kosinu vystavěli mj. na základě vlastností funkcí. Pohled do učebnic nám pomohl získat větší nadhled nad tím, jak funkce sinus a kosinus na jednotlivých stupních z didaktického pohledu dobře uvést.

Pro výuku matematiky je vhodné mít přehled o celé posloupnosti zavedení včetně jejich aplikací, protože pak můžeme plynule vyvozovat jedno zavedení ze druhého, a navíc budeme vědět, proč sinus a kosinus definujeme danou cestou.

Poznamenejme, že jsme nevyčerpali úplně všechny možnosti zavedení sinu a kosinu (např. pomocí integrálů viz str. 153-162 v [27]) a také jsme se v práci nevěnovali mnohým aplikacím funkcí. V tomto ohledu se tedy otevírá prostor, jak na práci navázat.

# Zdroje

- [1] HALAS, Zdeněk. Výpočty hodnot goniometrických funkcí. In: BEČVÁŘ, Jindřich a BEČVÁŘOVÁ, Martina. *Matematika v proměnách věků. VI*. Praha: Matfyzpress, 2010, 231 s. ISBN 978-80-7378-146-0.  
Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/401732>
- [2] MAOR, Eli. *Trigonometric delights*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1998, 236 s. ISBN 0-691-20220-6.
- [3] ČADILOVÁ, Petra. *Definice funkce sinus*. Závěrečná práce ČŽV. Praha: MFF UK, 2023.
- [4] DR BARKER. *Angle Sum Formulae: Proof using Ptolemy's Theorem*. Youtube video, 2023.  
Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=YbPFLUmHD-8>
- [5] SVOBODA, Emanuel. *Přehled středoškolské fyziky*. 5. vydání. Praha: Prometheus, 2016, 551 s. ISBN 978-80-7196-438-4.
- [6] ODVÁRKO, Oldřich a KADLEČEK, Jiří. *Matematika pro 9. ročník základní školy. 2, Funkce, Podobnost, Goniometrické funkce*. Praha: Prometheus, 2000, 91 s. ISBN 80-7196-208-2.
- [7] HERMAN, Jiří. *Matematika. Kvarta. Podobnost a funkce úhlu*. Praha: Prometheus, 2000, 175 s. ISBN 80-7196-206-6.
- [8] KUŘINA, František a HÁVOVÁ, Jaroslava. *Matematika pro 9. ročník základní školy a nižší třídy gymnázia: geometrie*. Praha: Fortuna, 1991, 139 s. ISBN 80-85298-18-X.
- [9] KOPÁČEK, Jiří. *Matematická analýza nejen pro fyziky (I)*. 4. přepracované vydání. Praha: Matfyzpress, 2004, 187 s. ISBN 80-86732-25-8.
- [10] BINTEROVÁ, Helena; FUCHS, Eduard a TLUSTÝ, Pavel. *Matematika 9: pro základní školy a víceletá gymnázia. Geometrie*. Plzeň: Fraus, 2010, s. ISBN 978-80-7238-691-8.
- [11] ŠEDIVÝ, Ondrej; DRLÍK, Petr; KRIŽALKOVIČOVÁ, Mária; MÜLLEROVÁ, Jana; MACHÁČEK Vlastimil a ŽIDEK, Stanislav. *Matematika pro 8. ročník základní školy. Díl 2*. Praha: Prometheus, 1993, 248 s. ISBN 80-901619-2-8.
- [12] MOLNÁR, Josef. *Matematika 9: učebnice s komentářem pro učitele*. Olomouc: Prodos, 2001, 127 s. ISBN 80-7230-108-X.
- [13] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia. Goniometrie*. 3. upravené vydání. Praha: Prometheus, 2000, 139 s. ISBN 80-7196-203-1.
- [14] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro střední školy. Funkce*. Praha: Prometheus, 2018, 176 s. ISBN 978-80-7196-466-7.

- [15] CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia. Komplexní čísla*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2018, 134 s. ISBN 978-80-7196-364-6.
- [16] MOTYČKOVÁ, Marie. *Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole*. Diplomová práce. Praha: MFF UK, 2006, 24 s. [80 s.]  
Dostupné z: [https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~robova/stranky/motyckova/Stranky\\_s\\_aplety/index.html](https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~robova/stranky/motyckova/Stranky_s_aplety/index.html)
- [17] ZEMEK, Václav; KODEJŠKA, Čeněk a ORT, Jiří. *Matematika pro střední školy. 5. díl, Funkce II*. Brno: Didaktis, 2014, 128 s. ISBN 978-80-7358-217-3.
- [18] CALDA, Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU. Díl 3*. Praha: Prometheus, 1998, 251 s. ISBN 80-7196-109-4.
- [19] TARÁBEK, Pavol a ČERVINKOVÁ, Petra. *Odmaturuj! z fyziky*. 2. vydání. Brno: Didaktis, 224 s. ISBN 80-7358-058-6.
- [20] ŘEPOVÁ, Jana a ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť. Část 3*. 2. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986, 200 s.
- [21] LIŠKA, Marek; VALENTA Tomáš a KRÁL, Lukáš. *Matika pro spolužáky. Goniometrie*. 3. vydání. Praha: ProSpolužáky.cz s.r.o, 2018, 78 s. ISBN 978-80-88255-26-0.
- [22] PICK, Luboš; HENCL Stanislav; SPURNÝ, Jiří a ZELENÝ, Miroslav. *Matematická analýza 1*. 895 s.  
Dostupné z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~hencl/skripta.pdf>
- [23] VESELÝ, Jiří. *Základy matematické analýzy. První díl*. 2. vydání. Praha: Matfyzpress, 2019. ISBN 978-80-7378-389-1.
- [24] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 8. vydání. Praha: Prometheus, 2003, 608 s. ISBN 80-7196-267-8.
- [25] VESELÝ, Jiří. *Komplexní analýza pro učitele*. Praha: Karolinum, 2000, 244 s.  
Dostupné z: <https://math.cuni.cz/dl/vesely/kompl.pdf>
- [26] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet 1*. Praha: Academia, 1974, 391 s. ISBN 2110174.  
Dostupné z: <http://dml.cz/dmlcz/401989>
- [27] JARNÍK, Vojtěch. *Integrální počet 1*. Praha: Academia, 1984, 243 s.  
Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/402112>