MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matěj Půlpán

Mocnost bodu ke kružnici

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
Studijní program: Matematika se zaměřením na vzdělávání
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání se sdruženým studiem Informatika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Tímto bych chtěl poděkovat RNDr. Janě Hromadové, Ph.D., za její čas, pomoc s výběrem tématu a všechny rady, kterých se mi během vypracovávání tohoto textu dostalo.

Název práce: Mocnost bodu ke kružnici

Autor: Matěj Půlpán

katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Práce se zabývá problematikou mocnosti bodu ke kružnici. První kapitola se věnuje motivaci a definici pojmu. V druhé kapitole jsou představeny aplikace mocnosti při dokazování vybraných planimetrických vět. Třetí kapitola obsahuje zajímavé příklady, ve kterých lze mocnost bodu ke kružnici využít. V závěrečné kapitole je zmíněna analogie mocnosti bodu ke kružnic v prostoru, včetně důkazů a příkladu. Dále se zabývá možností zobecnění na mocnost dvou kružnic, u kterého se předvedou a dokážou některé vlastnosti.

Klíčová slova: mocnost bodu ke kružnici, důkaz, Darboux

Title: Power of a point

Author: Matěj Půlpán

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This work deals with the issue of the power of a point with respect to a circle. The first chapter focuses on motivation and the definition of the concept. The second chapter presents applications of power by proving selected geometric theorems. The third chapter shows interesting examples where the power of a point with respect to a circle can be utilized. In the concluding chapter, an analogy of the power of a point with respect to a circle in space is mentioned, including proofs and examples. Furthermore, it addresses the possibility of generalizing to the power of two circles, demonstrating and proving certain properties.

Keywords: power of a point, proof, Darboux

Obsah

Úvod

V této bakalářské práci se čtenář seznámí s pojmem mocnost bodu ke kružnici. Mocnost bodu ke kružnici je téma, které se ze středních škol bohužel postupně vytrácí a když už se objeví, tak většinou pouze jako zavedení pojmu bez ukázek využití. Hlavním cílem této bakalářské práce je tedy ukázat praktické využití a to jak v důkazech, tak i v příkladech. Dalším cílem je vytvořit jednotný text v češtině o tomto tématu.

Práci mohou využít středoškolští studenti, které toto téma zaujalo, nebo studenti vysokoškolští. Doufáme, že v této práci naleznou inspiraci i středoškolští učitelé a ve svých hodinách ji využijí.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. V první kapitole se podíváme na motivaci zavedení mocnosti bodu ke kružnici, samotnou definici tohoto pojmu a popíšeme její základní vlastnosti, z nichž si některé i dokážeme.

V druhé kapitole ukážeme, jak lze mocnost bodu ke kružnici využít při dokazování geometrických vět.

Ve třetí kapitole si představíme využití v příkladech, které jsou vybrány zejména z matematických olympiád.

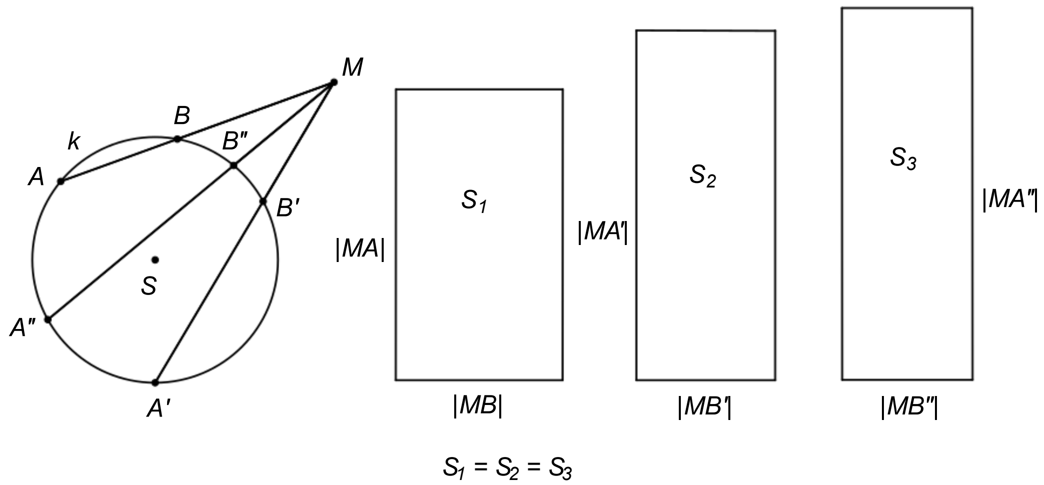
V poslední kapitole se budeme zabývat rozšířením a zobecněním mocnosti bodu ke kružnici. Nejprve se zamyslíme ohledně existence analogie v prostoru a následně si představíme zobecnění v rovině.

Práce je vysázena pomocí systému LaTeX a obrázky vytvořené pomocí softwaru geogebra.

1. Zavedení a motivace

První kapitola byla inspirována zdroji [1] a [2].

Nechť je dána kružnice $k(S,r)$ a bod M, ležící ve vnější oblasti kružnice k. Rádi bychom tuto dvojici objektů popsali nějakým číslem, které nám co nejpřesněji popíše vztah mezi nimi. Každého asi jako první napadne, spojit střed kružnice s daným bodem. Když tuto úsečku změříme, tak sice číslo dostaneme, nicméně mnoho informací z něj nezískáme. Dále jsme takto ještě získali jeden bod na kružnici. Hlavní problém spočívá v tom, že jsme vůbec nevzali v potaz poloměr dané kružnice. Zkusme to lépe. Co se stane, když sestrojenou úsečku prodloužíme? Získáme sečnu kružnice vedenou zadaným bodem a dva její průsečíky s kružnicí. Sestrojme několik dalších sečen, viz sečny AB, $A'B'$ a $A''B''$ na obrázku (1.1)

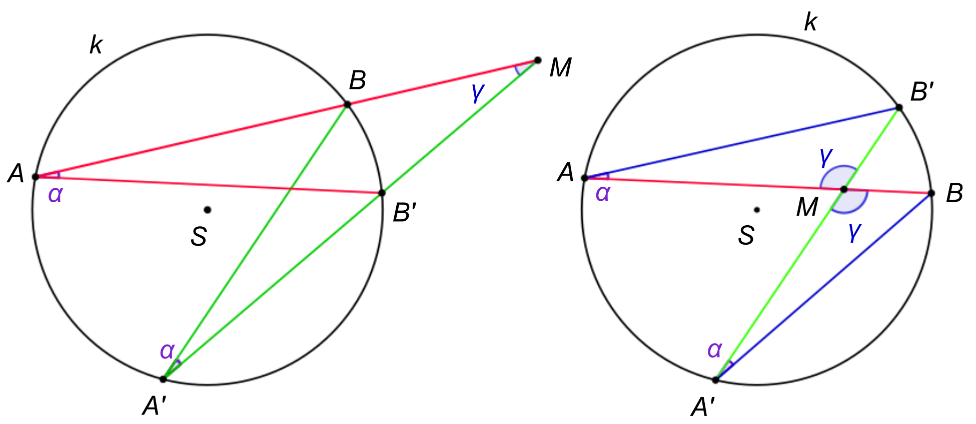


Obrázek 1.1: Obsahy obdélníků.

Pro každou sečnu jsme určili dva průsečíky s kružnicí. Když budeme zkoumat vztahy mezi těmito průsečíky a zadaným bodem, zjistíme, že obdélníky, jehož strany se rovnají vzdálenostem průsečíků a zadaného bodu, mají ve všech případech stejný obsah[1]. Tedy bychom mohli vztah bodu ke kružnici popsat pomocí obsahu obdélníku, jehož délky stran jsou vzdálenosti daného bodu od průsečíků sečny s kružnicí. Zavedení tohoto vztahu je pro nás velmi výhodné, neboť jak jsme již mohli vidět v přiloženém appletu, nezáleži na volbě polohy sečny, což si hned na další stránce dokážeme. O tomto vztahu (souvisejícím s obsahem popsaného obdélníku) budeme v této a dalších kapitolách mluvit jako o mocnosti bodu ke kružnici.

[1] Toto lze hezky ukázat např. v geogebře, viz: `https://www.geogebra.org/m/bjcgt4ak`.

Věta 1. *Mějme kružnici $k(S, r)$ a bod M, který neleží na kružnici k. Tímto bodem veďme dvě libovolné sečny ke kružnici k, které ji protnou v bodech A, B respektive A', B'. Pak platí: $|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'|$.*



Obrázek 1.2: Bod ve vnější a vnitřní oblasti kružnice.

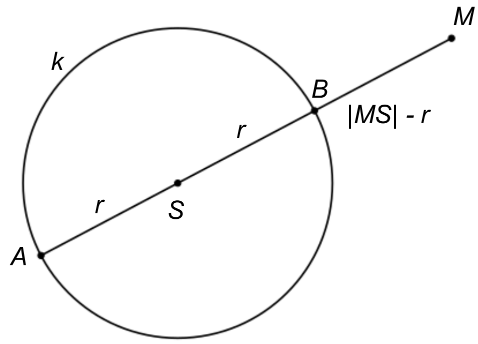
Důkaz. Důkaz rozdělíme na dva případy, v závislosti na tom, jestli se bod M nachází ve vnitřní nebo ve vnější oblasti kružnice k. Případ 1: Využijeme podobnosti trojúhelníků a nahlédneme, že trojúhelníky MAB' a $MA'B$ si jsou podobné. Trojúhelníky mají zjevně stejný úhel u vrcholu M, jelikož ho sdílejí. A dále jsou si také rovny úhly u vrcholů A a A', jelikož to jsou obvodové úhly příslušící témuž oblouku kružnice k, a to oblouku BB'. Trojúhelníky si tedy jsou podobné, pro poměry jejich stran platí:

$$\frac{|MA|}{|MB'|} = \frac{|MA'|}{|MB|} \quad / \cdot |MB'| \cdot |MB|$$
$$|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'|$$

Čímž je dokázán případ 1. Případ číslo 2, kde je bod M vnitřním bodem kružnice k ponecháme jako lehké cvičení čtenářovi, bude se postupovat analogicky.

□

Dokázali jsme tedy, že hodnota součinu $|MA'| \cdot |MB'|$ nezáleží na volbě sečny. Pojďme se nyní podívat na speciální případ, kdy sečna bude procházet středem kružnice:



Obrázek 1.3: Zvláštní případ sečny.

Pak bude poměrně jednoduché zjistit hodnotu součinu $|MA| \cdot |MB|$, jelikož $|MA| = ||MS| + r|$ a $|MB| = ||MS| - r|$. Tedy:

$$|MA| \cdot |MB| = ||MS|^2 - r^2|$$

To vypadá slibně, nicméně pokud bychom chtěli mocnost definovat už přímo jako výraz na pravé straně této rovnosti, dostali bychom se do problémů, jelikož pro body ve vnitřní oblasti kružnice bychom mohli dostat stejné hodnoty jako pro body ve vnější oblasti kružnice. Což je něco, co určitě nechceme, protože definice pak nebude jednoznačná. Tento problém ale lze poměrně jednoduše vyřešit odstraněním absolutní hodnoty. Tím pro body ležící ve vnitřní oblasti kužnici získáme záporné[2] hodnoty a pro body ve vnější oblasti kružnice zůstanou kladné hodnoty. Mocnost bodu můžeme tedy už přímo definovat takto:

Definice 1. *„Je dán bod M a kružnice $k(S,r)$. Číslo $m_k^M = |MS|^2 - r^2$ nazýváme mocností bodu M ke kružnici k[3].“[2]*

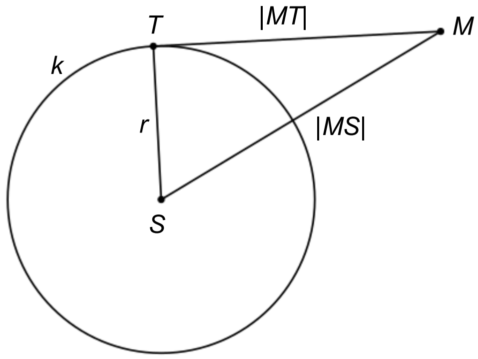
Přímo z definice hned vidíme:

„Je-li bod M vnějším bodem kružnice k, pak $m_k^M > 0$.
Je-li bod M vnitřním bodem kružnice k, pak $m_k^M < 0$.
Leží-li bod M na kružnici k, je $|MS| = r$ a $m_k^M = 0$.“[2]

Doposud jsme uvažovali pouze sečny vedené z bodu, zkusme se podívat, co se stane, když z bodu povedeme tečnu. Označme T bod dotyku tečny vedené z bodu M ke kružnici k. V trojúhelníku SMT je úhel u vrcholu T pravý.

[2]Doporučení pro čtenáře: nakreslit si obr. (1.3) s bodem M ve vnitřní oblasti kružnice. Z toho snadno nahlédneme, že $|MA| \cdot |MB| = r^2 - |MS|^2$.

[3]Pojem mocnost bodu ke kružnici poprvé použil německý matematik Jacob Steiner v roce 1826 ve své knize Einige geometrische Betrachtungen [3].



Obrázek 1.4: Případ tečny.

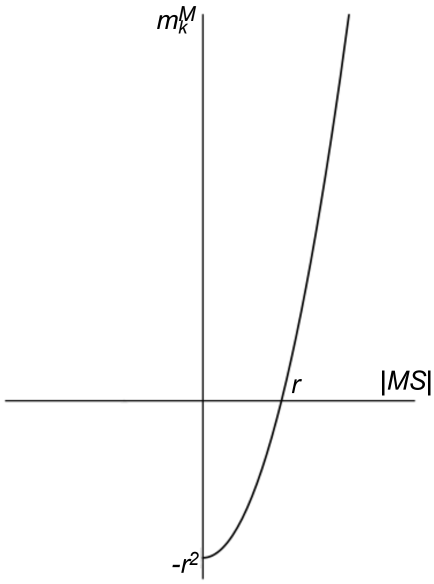
Jelikož u vrcholu T je pravý úhel, můžeme použít Pýthagorovu větu a dostáváme:

$$|MT|^2 = |MS|^2 - r^2$$

Což je přímo vztah z definice (1). Takže pro body vnější oblasti kružnice platí:

$$m_k^M = |MT|^2$$

Hodnota m_k^M: Na vztah v definici (1) se dá nahlížet jako na graf kvadratické funkce, kde na osu x vynášíme vzdálenost bodu M od středu kružnice a na osu y vynášíme mocnost bodu M ke kružnici k. Tato funkce je posunuta v záporném směru osy y o hodnotu r^2. Zároveň budeme uvažovat pouze půlku paraboly, jelikož nemůžeme mít zápornou vzdálenost dvou bodů. Graf tedy vypadá následovně:



Obrázek 1.5: Graf.

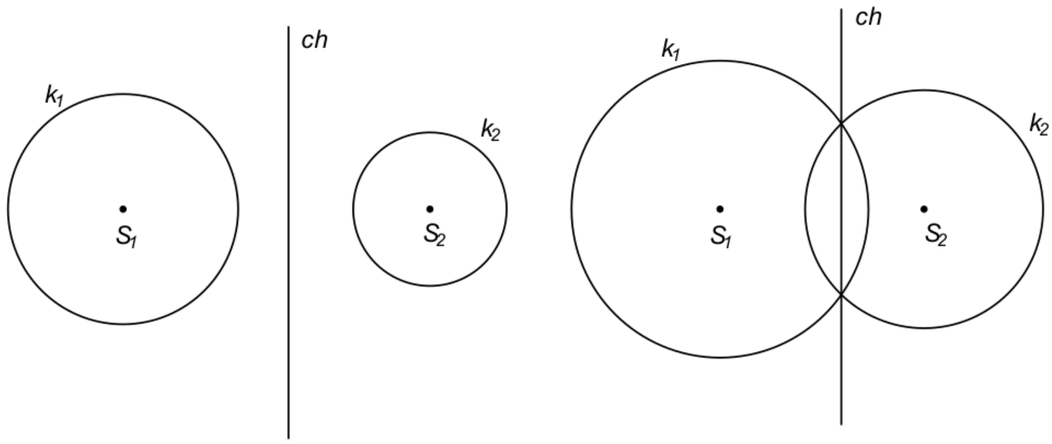
Z toho vidíme, že m_k^M nabývá minima právě tehdy, když bod M splývá se středem kružnice, hodnota mocnosti je pak rovna $-r^2$. Dále vidíme, že mocnost je rovna 0 v bodě r, což je případ, kdy bod M leží na kružnici. Dále také, že mocnost je záporná pro vnitřní body kružnice a kladná pro vnější body kružnice, přičemž maximální hodnota mocnosti není omezená.

Doposud jsme uvažovali o jedné kružnici a jednom bodu. Pojďme se nyní podívat na situace s více kružnicemi, respektive více body.

Věta 2. *Množinou všech bodů v rovině M, které mají stejnou mocnost k dané kružnici $k(S,r)$ je kružnice soustředná s danou kružnicí k s poloměrem $|SM|$.*

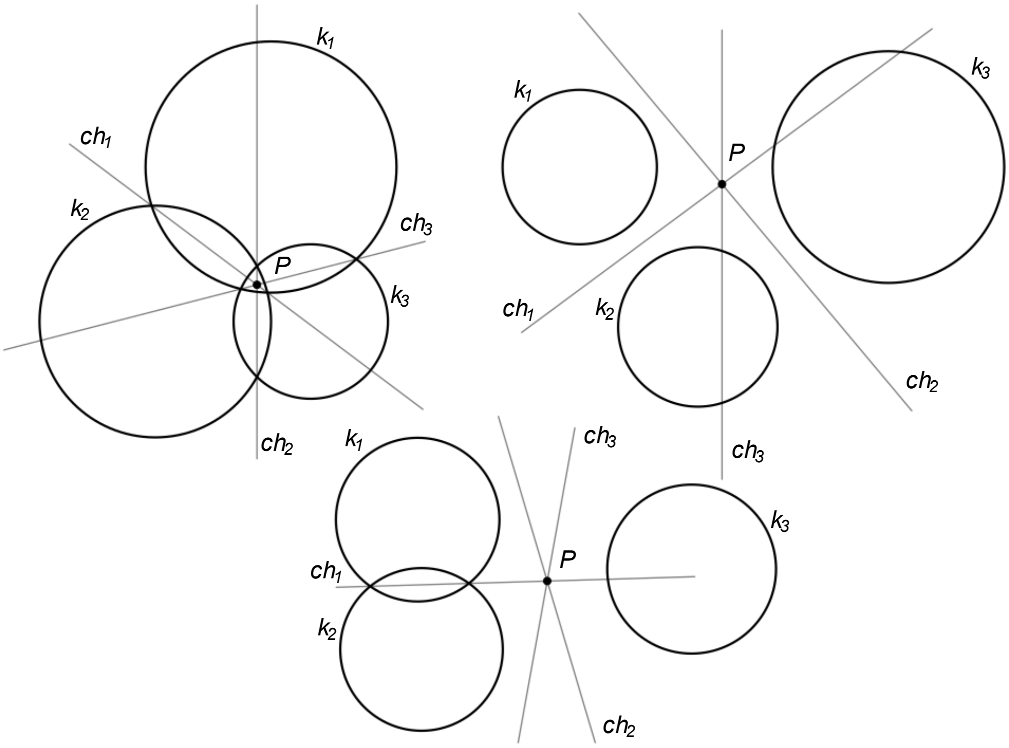
Věta 3. *„Množinou všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost ke dvěma nesoustředným kružnicím $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2)$, je přímka."[2] Tato přímka je kolmá na spojnici středů a nazýváme jí chordálou dvou kružnic.*

Konstrukce chordály je zřejmá pro kružnice, které mají alespoň jeden společný bod, neboť tento společný bod má nulovou mocnost k oběma kružnicím. Tímto bodem tedy stačí vést kolmici na střednou. Příklad konstrukce chordály dvou kružnic, které nemají žádný společný bod si ukážeme ve třetí kapitole.



Obrázek 1.6: Chordála.

Věta 4. *„Mějme tři kružnice $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2), k_3(S_3, r_3)$ ležící v téže rovině, jejichž středy S_1, S_2, S_3 nejsou kolineární. Potom existuje právě jeden bod, který má stejnou mocnost ke kružnicím k_1, k_2, k_3."[2] Tento bod se nazývá potenčním středem tří kružnic.*



Obrázek 1.7: Potenční střed.

2. Důkazy vybraných vět

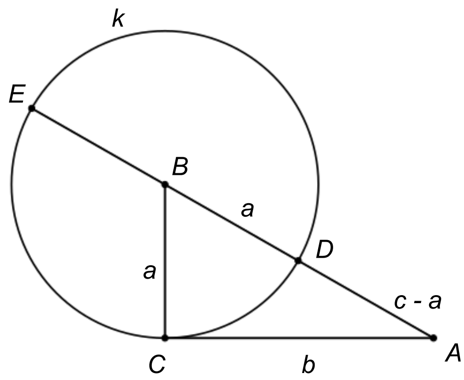
V této kapitole si ukážeme, jak se dá mocnost bodu ke kružnici využít v důkazech známých i méně známých planimetrických vět.

Věta 5. *Pýthagorova. „V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami.“[2]*

Důkaz. Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C. Chceme dokázat, že pro délky jeho odvěsen a a b a délku přepony c platí vztah:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Nejprve sestrojíme kružnici $k(B, a)$, tato kružnice protne přeponu c v bodě D (viz obrázek 2.1). Druhý průsečík přímky AB s kružnicí k označme E.



Obrázek 2.1: Pýthagorova věta.

Z mocnosti bodu A ke kružnici k plyne:

$$m_k^A = |AE| \cdot |AD| \tag{2.1}$$
$$m_k^A = |AC|^2 \tag{2.2}$$

Do (2.1) a (2.2) dosadíme délky stran a získáme rovnice:

$$m_k^A = (c - a)(c + a) \tag{2.3}$$
$$m_k^A = b^2 \tag{2.4}$$

Porovnáním (2.3) a (2.4) dostáváme rovnost:

$$a^2 = c^2 - b^2$$

A tedy:

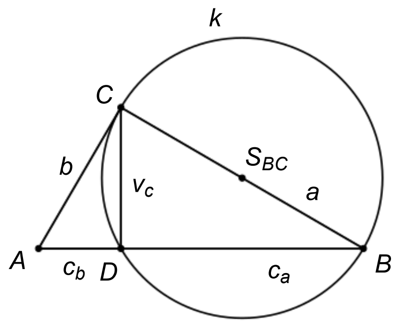
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Čímž je věta dokázaná.

□

Věta 6. *Eukleidova věta o odvěsně. „V pravoúhlém trojúhelníku rozdělíme přeponu patou výšky na přeponu na dva úseky. Obsah čtverce nad libovolnou z odvěsen je roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s přeponou a úsekem přepony přilehlým k příslušné odvěsně.“[2]*

Důkaz. Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C (viz obrázek 2.2). Označme D patu výšky na přeponu trojúhelníku, c_b úsečku AD a c_a úsečku DB. Chceme dokázat platnost vzorce: $b^2 = c \cdot c_b$. Sestrojíme Thalétovu kružnici nad průměrem CB: $k(S_{BC}, \frac{a}{2})$. Je zřejmé, že bod D náleží kružnici k a že bod A náleží tečně v bodě C kružnice k.



Obrázek 2.2: Eukleidova věta o odvěsně.

Nyní stačí spočítat mocnost bodu A ke kružnici k a výsledky porovnat. Tedy:

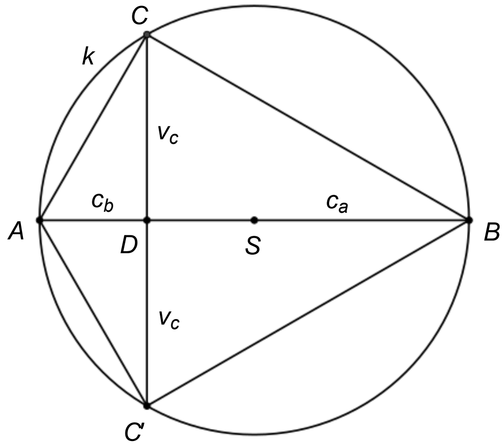
$$\begin{aligned} m_k^A &= b^2 \\ m_k^A &= c \cdot c_b \\ b^2 &= c \cdot c_b \end{aligned}$$

Čímž je věta dokázána.

□

Věta 7. *„Eukleidova věta o výšce. V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad výškou na přeponu roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s úseky přepony, na něž je přepona rozdělena patou výšky.“[2]*

Důkaz. Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C (viz obrázek 2.3). Označme D patu v_c, c_a úsečku DB a c_b úsečku AD. Chceme dokázat platnost vzorce: $v_c^2 = c_a \cdot c_b$. Sestrojíme kružnici opsanou trojúhelníku ABC, $k(S, |SA|)$. Bodem C vedeme kolmici na stranu AB, její druhý průsečík s kružnicí k označme C'.



Obrázek 2.3: Eukleidova věta o výšce.

Nyní stačí dvěma způsoby spočítat mocnost bodu D ke kružnici k a ty následně porovnat:

$$m_k^D = -(c_a \cdot c_b)$$
$$m_k^D = -(v_c^2)$$
$$v_c^2 = c_a \cdot c_b$$

Čímž je věta dokázána.

□

Věta 8. *Thalétova. „V rovině je dána úsečka AB. Množinou vrcholů M všech pravých úhlů AMB dané roviny je kružnice s průměrem AB vyjma bodů A, B.“[2]*

Důkaz. Důkaz bude analytický. Nechť je dána úsečka AB body $A[-r, 0]$ a $B[r, 0]$. Dále kružnice $k(S, r)$, $S[0, 0]$ a bod $M[m_1, m_2]$. Chceme dokázat, že trojúhelník ABM je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu M pouze tehdy, když bod M leží na kružnici k. Nyní důkaz rozdělíme na tři případy, jelikož musíme dokázat nejen to že body, které leží na dané kružnici mají danou vlastnost (případ 1 s pravým úhlem při vrcholu M), ale také ukázat, že už žádný další bod tuto vlastnost nemá. Tedy vzít body které na kružnici neleží, tedy leží buď ve vnitřní oblasti kružnice (případ 2), nebo ve vnější oblasti kružnice (případ 3) a dokázat pro ně, že tu vlastnost nemají.
Případ 1:
Bod M leží na kružnici k. Jak už bylo zmíněno, chceme dokázat, že trojúhelník ABM je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu M. Jelikož trojúhelník je pravoúhlý právě tehdy, když délky jeho stran splňují Pýthagorovu větu, musíme dokázat platnost vztahu:

$$|AB|^2 = |AM|^2 + |BM|^2 \tag{2.5}$$

Dosadíme souřadnice do (2.5) a dostáváme:

$$(-r-r)^2 = (m_1+r)^2 + (m_2)^2 + (m_1-r)^2 + (m_2)^2$$

Z toho:

$$\begin{aligned} 4r^2 &= m_1^2 + 2m_1r + r^2 + m_2^2 + m_1^2 - 2m_1r + r^2 + m_2^2 \\ 2r^2 &= 2m_1^2 + 2m_2^2 \\ 0 &= m_1^2 + m_2^2 - r^2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Jelikož bod M leží na kružnici k, pak je hodnota jeho mocnosti k této kružnici rovna nule. Tedy:

$$m_k^M = 0$$

Mocnost bodu M ke kružnici k si vyjádříme z definice:

$$m_k^M = |MS|^2 - r^2$$

A tedy:

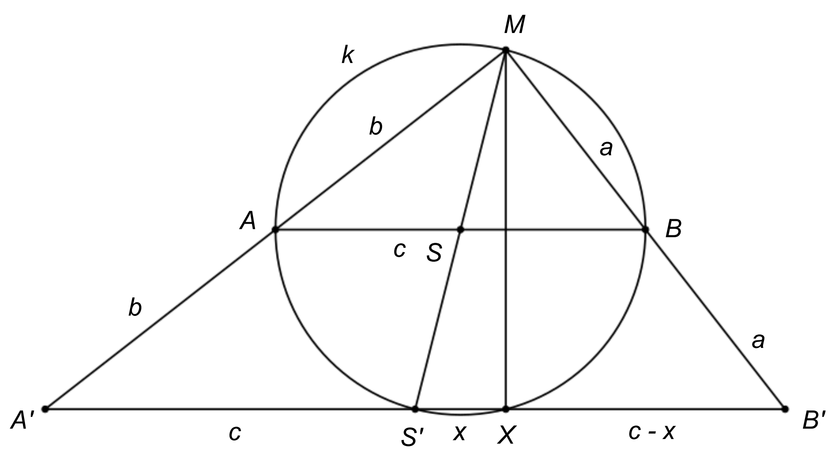
$$|MS|^2 - r^2 = 0$$

Dosadíme souřadnice a získáváme:

$$0 = m_1^2 + m_2^2 - r^2$$

Což je přímo vztah (2.6), jehož platnost jsme chtěli dokázat. Čtenáři necháme na rozmyšlenou, že platnost případu 2, popř. 3, kdy bod M je vnitřním, popř. vnějším bodem kružnice k přímo vyplývá z případu 1. Čímž je věta dokázána. My si zde nicméně ještě ukážeme pěkný syntetický důkaz případu 1, Inspirace převzata ze [4].

Nechť bod M leží na kružnici k. Chceme dokázat, že tento trojúhelník je pravoúhlý. Dokážeme, že pro délky jeho stran platí Pýthagorova věta, což je ekvivalentní s tím, že je pravoúhlý. Postupně zobrazíme body A, B a S ve stejnolehlosti se středem v bodě M a koeficientem 2. Tyto body se po řadě zobrazí na body A', B' a S'. Tím jsme dostali trojúhelník $A'B'M$, který je podobný trojújelníku ABM a má všechny strany dvakrát tak dlouhé. Dále si ještě uvědomíme, že bod S' je střed strany $A'B'$. A v neposlední řadě si ještě označíme X druhý průsečík strany $A'B'$ s kružnicí k.



Obrázek 2.4: Thalétova věta.

Začněme počítat mocnosti bodů A' a B'. Nejprve A':

$$m_k^{A'} = |A'A| \cdot |A'M| \tag{2.7}$$
$$m_k^{A'} = |A'X| \cdot |A'S'| \tag{2.8}$$

Dosadíme do (2.7), (2.8) vzdálenosti a dostáváme:

$$m_k^{A'} = 2b \cdot b \tag{2.9}$$
$$m_k^{A'} = (c + x) \cdot c \tag{2.10}$$

Rovnosti (2.9) a (2.10) porovnáme a vyjádříme x:

$$\begin{aligned} 2b \cdot b &= (c + x) \cdot c \\ 2b^2 &= c^2 + cx \\ x &= \frac{2b^2 - c^2}{c} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Nyní stejným způsobem pro bod B':

$$\begin{aligned} m_k^{B'} &= |B'B| \cdot |B'M| \\ m_k^{B'} &= |B'X| \cdot |B'S'| \end{aligned}$$

Tedy:

$$\begin{aligned} m_k^{B'} &= 2a \cdot a \\ m_k^{B'} &= (c - x + x) \cdot (c - x) \end{aligned}$$

Opět vyjádříme x:

$$\begin{aligned} 2a^2 &= c^2 - cx \\ x &= \frac{c^2 - 2a^2}{c} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Nyní porovnáme rovnosti (2.11) a (2.12):

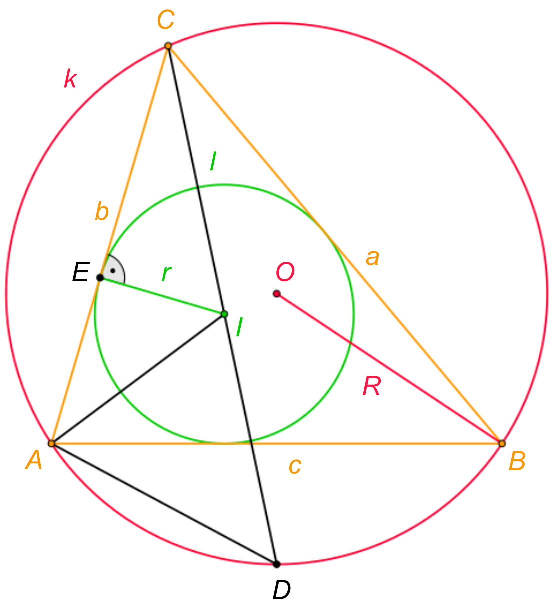
$$\begin{aligned} \frac{2b^2 - c^2}{c} &= \frac{c^2 - 2a^2}{c} \quad / \cdot c \\ 2b^2 - c^2 &= c^2 - 2a^2 \\ 2a^2 + 2b^2 &= 2c^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

Čímž je věta dokázana. Protože pokud v trojúhelníku platí Pýthagorova věta, jedná se trojúhelník pravoúhlý, což je přesně to, co jsme chtěli dokázat a je tedy splněna Thalétova věta. Čtenáři ještě ponecháme na rozmyšlení případ, kdy trojúhelník ABM bude rovnoramenný. Tedy bude existovat pouze jeden průsečík strany $A'B'$ s kružnicí k.

□

Věta 9. *Eulerova. „Mějme trojúhelník, ve kterém je O střed kružnice opsané, I střed kružnice vepsané, R poloměr kružnice opsané a r poloměr kružnice vepsané. Pak platí vztah:*

$$|OI|^2 = R^2 - 2Rr\text{“}[5]$$



Obrázek 2.5: Eulerova věta.

Důkaz. Pro upřesnění: V důkazu budeme používat rozšířený tvar sinové věty, který vypadá následovně:
Pro každý trojúhelník ABC se stranami a, b, c a vnitřními úhly α, β a γ platí:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Kde R je poloměr kružnice opsané.
Nyní už k samotnému důkazu. Nejprve sestrojíme trojúhelník ABC a jemu kružnici opsanou k a kružnici vepsanou l. Dále označme D druhý průsečík přímky CI s kružnicí k (první průsečík je samotný bod C). Nyní spočítáme mocnost bodu I ke kružnici k dvěma způsoby a ty porovnáme.

$$\begin{aligned} m_k^I &= |OI|^2 - R^2 \\ m_k^I &= -|CI| \cdot |ID| \\ |OI|^2 - R^2 &= -|CI| \cdot |ID| \end{aligned} \tag{2.13}$$

$|CI|$ si můžeme spočítat z pravoúhlého trojúhelníku EIC:

$$\begin{aligned} \sin|\sphericalangle ECI| &= \frac{r}{|CI|} \\ |CI| &= \frac{r}{\sin|\sphericalangle ECI|} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Nyní ukážeme, že úhel AID je stejný jako úhel IAD, tedy že trojúhelník AID je rovnoramenný. To dokážeme pomocí následujících rovností:

$$|\sphericalangle AID| = |\sphericalangle EAI| + |\sphericalangle ECI| \tag{2.15}$$
$$|\sphericalangle EAI| = |\sphericalangle IAB| \tag{2.16}$$
$$|\sphericalangle ECI| = |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle DAB| \tag{2.17}$$
$$|\sphericalangle IAB| + |\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle IAD| \tag{2.18}$$

Kde (2.15) platí, protože:

$$|\sphericalangle EAI| + |\sphericalangle ECI| = 180^\circ - |\sphericalangle AIC| = |\sphericalangle AID|$$

(2.16) platí, protože AI je osa úhlu EAB. První rovnost v (2.17) opět kvůli ose úhlu a druhá protože jde o obvodové úhly náležící stejnému oblouku kružnice. A (2.18) plyne triviálně z obrázku (2.5). Celkem tedy dostáváme:

$$|\sphericalangle AID| = |\sphericalangle EAI| + |\sphericalangle ECI| = |\sphericalangle IAB| + |\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle IAD|$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o rovnoramenný trojúhelník, tak $|AD| = |ID|$. Nyní si $|AD|$ vyjádříme pomocí sinové věty z trojúhelníku ADC a to následujícím způsobem:

$$\frac{|AD|}{\sin|\sphericalangle ECI|} = 2R$$
$$|AD| = 2R \cdot \sin|\sphericalangle ECI| = |ID| \tag{2.19}$$

Přičemž využíváme toho, že kružnice opsaná trojúhelníku ADC je kružnice k, která má poloměr R. Dosazením rovností (2.14) a (2.19) do vztahu (2.13) dostáváme:

$$|OI|^2 - R^2 = -\frac{r}{\sin|\sphericalangle ECI|} \cdot 2R \cdot \sin|\sphericalangle ECI| = -2Rr$$

Tedy:

$$|OI|^2 = R^2 - 2Rr$$

Čímž je věta dokázána. Důkaz vznikl rozpracováním a rozšířením důkazu ze zdroje [5].

□

Věta 10. *Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když pro jeho průsečík P úhlopříček platí:*

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$$

Důkaz. Implikace zleva doprava: Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ a kružnici k jemu opsanou. Mocnost průsečíku úhlopříček P ke kružnici k je rovna:

$$m_k^P = -|PA| \cdot |PC| \tag{2.20}$$

Nebo také:

$$m_k^P = -|PB| \cdot |PD| \tag{2.21}$$

Porovnáním (2.20) a (2.21) dostáváme:

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$$

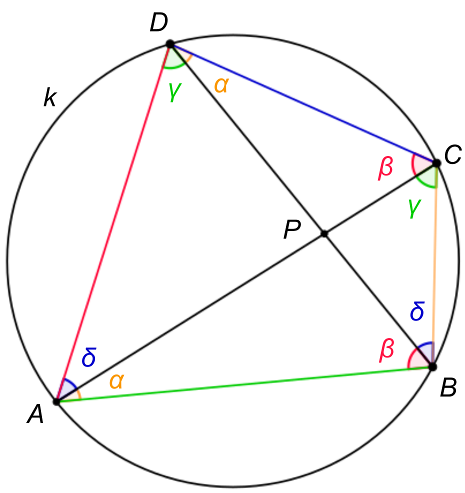
Implikace zleva doprava tedy platí, nyní se podíváme na implikaci druhou. Mějme tedy konvexní čtyřúhelník $ABCD$, ve kterém platí vztah:

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD| \tag{2.22}$$

Ukážeme, že trojúhelníky ABP a DCP jsou podobné dle věty sus. Úhly APB a DPC jsou vrcholové, mají tedy stejnou velikost. Dále budeme vycházet ze vztahu (2.22), který si můžeme přepsat následujícím způsobem:

$$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PB|}{|PC|}$$

Trojúhelníky ABP a DCP jsou tedy podobné. V těchto trojúhelnících je úhel α u vrcholu A shodný s úhlem u vrcholu D a úhel β u vrcholu B shodný s úhlem u vrcholu C. Stejným způsobem bychom došli k podobnosti trojúhelníků ADP a BCP, ve kterých označíme odpovídající si úhly γ a δ (viz obrázek 2.6).



Obrázek 2.6: Tětivový čtyřúhelník.

Součet vnitřních úhlů konvexního čtyřúhelníku je 360 stupňů, takže dostáváme:

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ \quad / : 2$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

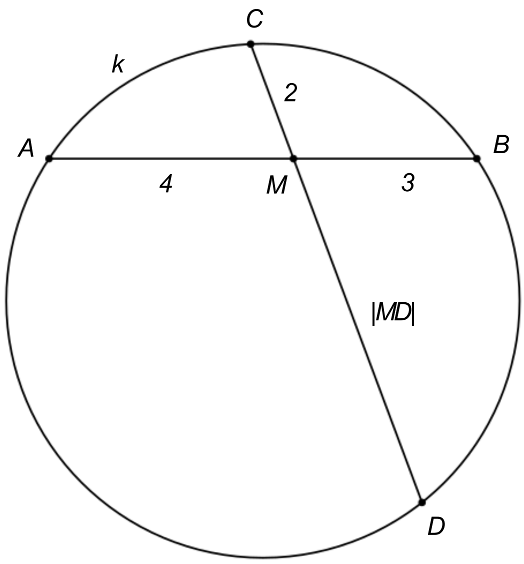
Součet protějších úhlů je tedy 180 stupňů, jedná se o čtyřúhelník tětivový.

□

3. Vybrané příklady

V této kapitole se podíváme na praktické využití mocnosti bodu ke kružnici v příkladech.

Příklad 1. *Nechť je dána úsečka* $|AB| = 7$ *a na ní bod* M*, pro který je* $|MA| = 4$*. Dále bod* C*, který neleží na úsečce* AB *a pro který je délka úsečky* $|CM| = 2$*, bod* C *tedy není přesně určen. Sestrojme kružnici* k *opsanou trojúhelníku* ABC *a označme* D *druhý průsečík přímky* MC *s kružnicí* k*. Určete velikost úsečky* MD*.*



Obrázek 3.1: Příklad 1.

Řešení:
AB a CD jsou dvě různé sečny kružnice k procházející bodem M, tedy dle věty o mocnosti bodu ke kružnici platí:

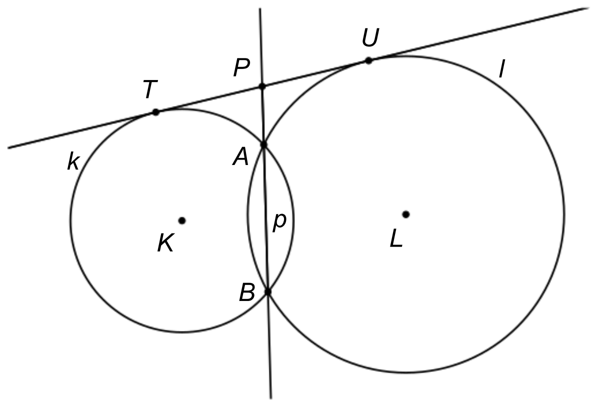
$$|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD| \tag{3.1}$$

Dosadíme do (3.1) a upravíme:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3 &= 2 \cdot |MD| \\ |MD| &= 6 \end{aligned}$$

Velikost úsečky MD je tedy 6.

Příklad 2. *„Kružnice* k*,* l *se středy* K*,* L *se protínají v bodech* A*,* B*. Přímka* AB *protne společnou tečnu kružnic* k*,* l*, která se jich dotýká v bodech* T*,* U*, v bodě* P*. Dokažte následující rovnost:* $|PT| = |PU|$*“[9]*



Obrázek 3.2: Příklad 2.

Řešení:
Uvědomíme si, že přímka AB je chordála kružnic k a l. Tedy všechny její body mají stejnou mocnost k oběma kružnicím. Protože bod P leží na tečně k oběma kružnicím, umíme jednoduše spočítat jeho mocnost k oběma kružnicím.

$$m_k^P = |PT|^2$$
$$m_l^P = |PU|^2$$

Jelikož $m_k^P = m_l^P$, tak platí:

$$|PU|^2 = |PT|^2$$
$$|PU| = |PT|$$

Příklad 3. *Nechť jsou dány kružnice $k_1(S_1, 3)$ a $k_2(S_2, 2)$ pro které je $|S_1S_2| = 9$. Sestrojte chordálu těchto dvou kružnic. [2]*

Řešení:
Už víme, že chordála je přímka kolmá na střednou (spojnici středů), k sestrojení chordály nám tím pádem stačí nalézt jeden bod chordály a tím vést kolmici na střednou. Ukážeme si tři způsoby, jak takový bod získat.
Metoda 1:
Sestrojíme bod A ležící na středné, který má stejnou mocnost o oběma kružnicím. Musí tedy platit:

$$m_{k_1}^A = m_{k_2}^A$$

Tedy:

$$|AS_1|^2 - 9 = |AS_2|^2 - 4 \tag{3.2}$$

Protože bod A leží na středné, tak musí platit i:

$$9 = |AS_1| + |AS_2|$$
$$|AS_2| = |AS_1| - 9 \tag{3.3}$$

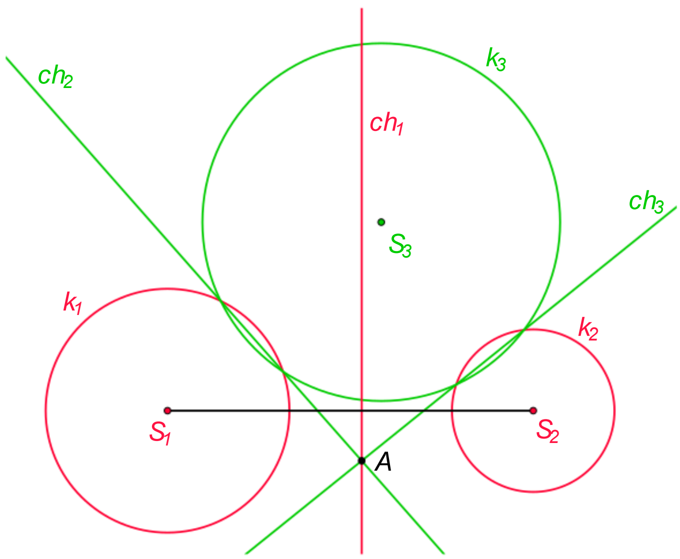
Do vztahu (3.2) dosadíme za $|AS_2|$ dle (3.3):

$$|AS_1|^2 - 9 = (|AS_1| - 9)^2 - 4$$
$$|AS_1|^2 - 9 = |AS_1|^2 - 18|AS_1| + 81 - 4$$

Po úpravách:

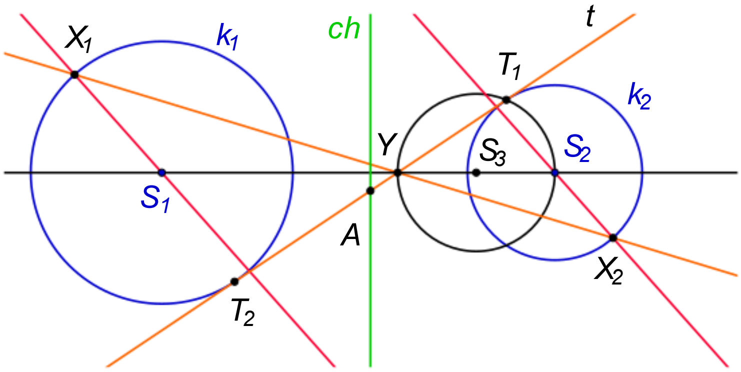
$$|AS_1| = \frac{43}{9}$$

Nyní už jen stačí tuto vzdálenost vynést od bodu S_1, tím získat bod A a následně sestrojit přímku procházející bodem A, která je na střednou kolmá.
Metoda 2:
Využijeme toho, že chordály tří kružnic se protínají v jednom bodě (potenční střed). Sestrojíme potenční střed P tří kružnic. Vhodně zvolíme kružnici k_3, tak aby protínala kružnice k_1 a k_2, neboť sestrojení společných chordál ch_2 a ch_3 s kružnicemi k_1 a k_2 je pak triviální. Průsečík těchto chordál je námi hledaný bod A. Tímto bodem už stačí vést kolmici na střednou, čímž sestrojíme chordálu ch_1 kružnic k_1 a k_2.



Obrázek 3.3: Příklad 3/2.

Metoda 3:
Další možností, jak sestrojit bod A, který má stejnou mocnost k oběma kružnicím, je sestrojení společné tečny kružnic k_1 a k_2 s body dotyku T_1 a T_2 a následné nalezení středu úsečky T_1T_2. Konstrukce je následující: zvolíme libovolný bod X_1, ležící na kružnici k_1, který neleží na středné. Poté bodem S_2 vedeme rovnoběžku s přímkou S_1X_1. Označme X_2 jeden ze dvou průsečíků této rovnoběžky s kružnicí k_2 tak, aby X_2 ležel v polorovině opačné k polorovině $S_1S_2X_1$. Označme Y průsečík středné s přímkou X_1X_2. Tímto jsme sestrojili střed stejnolehlosti v níž si obě kružnice odpovídají. Nyní už jen stačí tímto bodem vést tečnu k oběma kružnicím, body dotyku označit T_1 a T_2 a nalézt střed A úsečky T_1T_2 a tím následně vést kolmici na střednou.



Obrázek 3.4: Příklad 3/3.

Příklad 4. *„Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník takový, že přímky AD a BC se protínají v bodě Q. Označme M průsečík přímky BD a přímky vedené bodem Q, která je rovnoběžná s přímkou AC. Bodem M veďme jednu z tečen ke kružnici opsané $ABCD$ a bod dotyku označme T. Dokažte, že $|MT| = |MQ|$" [6].*

Řešení:
Nejprve si vyjádříme mocnost bodu M ke kružnici k dvěma způsoby a ty porovnáme:

$$|MT|^2 = |MD| \cdot |MB| \tag{3.4}$$

Dále ukážeme, že trojúhelník DMQ je podobný trojúhelníku QMB. Skutečně, úhel CBD je stejný jako úhel CAD, jelikož se jedná o obvodové úhly náležící stejnému oblouku kružnice k. Dále, jelikož přímka AC je rovnoběžná s přímkou MQ a úhly MQD a CAD jsou střídavé, tudíž mají stejnou velikost. Tedy:

$$|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle QBM| = |\sphericalangle MQD|$$

Dále trojúhelníky DMQ a QMB sdílejí úhel u vrcholu M. Mají tedy všechny úhly stejně velké, jedná se tedy o trojúhelníky podobné, což znamená, že mají stejný poměr odpovídajících si délek stran:

$$\frac{|MQ|}{|MD|} = \frac{|MB|}{|MQ|} \qquad / \cdot |MD| \cdot |MQ|$$

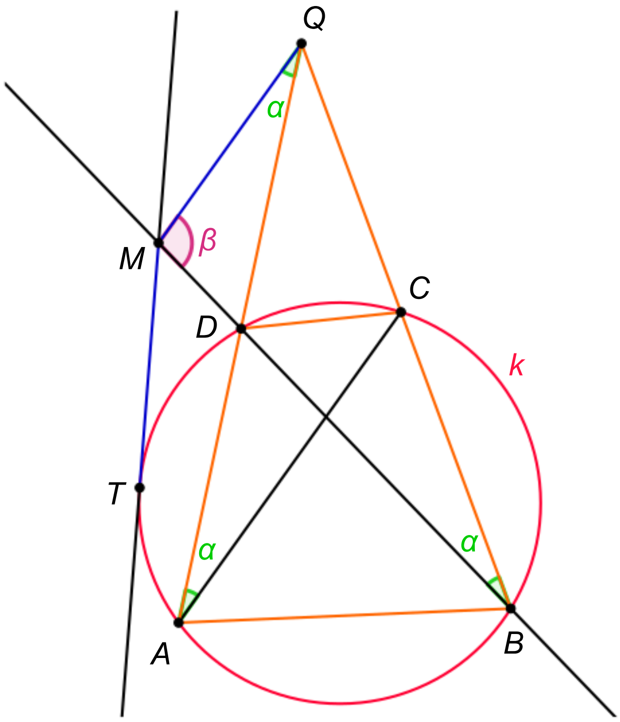
$$|MQ|^2 = |MB| \cdot |MD| \tag{3.5}$$

Porovnáním (3.5) s (3.4) dostáváme:

$$|MQ|^2 = |MT|^2$$

A tedy:

$$|MQ| = |MT|$$



Obrázek 3.5: Příklad 4.

Příklad 5. *Apolloniova úloha typu bod, bod a přímka: Sestrojte kružnici k, která prochází zadanými body A, B a dotýká se přímky p. Zadání volme tak, aby body A a B ležely v téže polorovině určené přímkou p, dále aby A, $B \notin p$ a $AB \nparallel p$.* [1]

Řešení:
Označme M průsečík přímek p a AB. Hledaný bod dotyku kružnice k s přímkou p označme T. Pak platí:

$$m_k^M = |MT|^2$$
$$m_k^M = |MA| \cdot |MB|$$

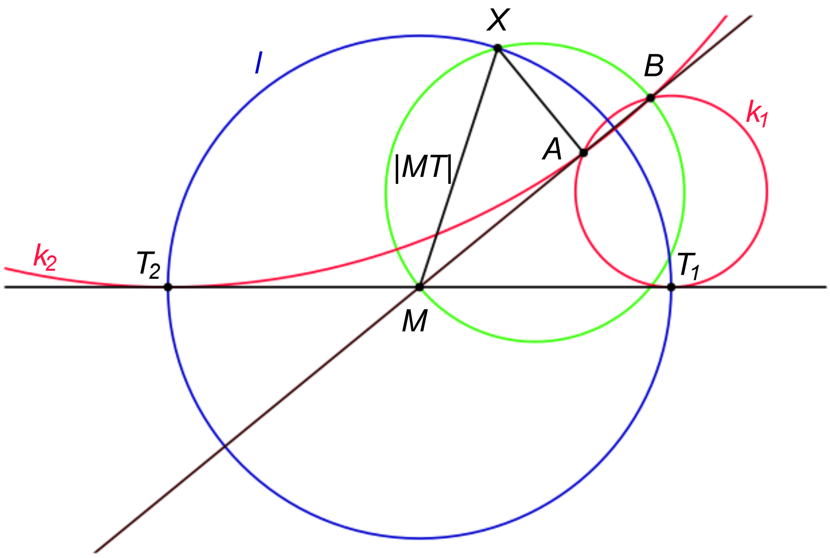
Tedy:

$$|MT|^2 = |MA| \cdot |MB|$$
$$|MT| = \sqrt{|MA| \cdot |MB|}$$

búno předpokládejme, že $|MA| < |MB|$ a sestrojme pravoúhlý trojúhelník MBX s pravým úhlem u vrcholu X, ve kterém je XA výška na stranu MB. V tomto trojúhelníku je délka odvěsny MX dle Eukl. věty o odvěsně rovna $|MX| = |MT|$. Sestrojíme kružnici $l(M, |MX|)$ a její průsečíky T_1 a T_2 s přímkou p. Tím jsme získali třetí bod hledané kružnice a řešíme Apolloniovu úlohu typu bod, bod a bod, která už je triviální.[2]

[1] Ostatní varianty této úlohy zde řešit nebudeme, jelikož pro jejich řešení se nevyužívá mocnost bodu ke kružnici.

[2] Tuto úlohu bychom mohli řešit i bez pomocí Eukl. věty. Stačí sestrojit libovolnou pomocnou kružnici m procházející body A a B. Hledaná vzdálenost MT je pak rovna vzdálenosti bodu M od bodu dotyku tečny vedené z bodu M ke kružnici m.

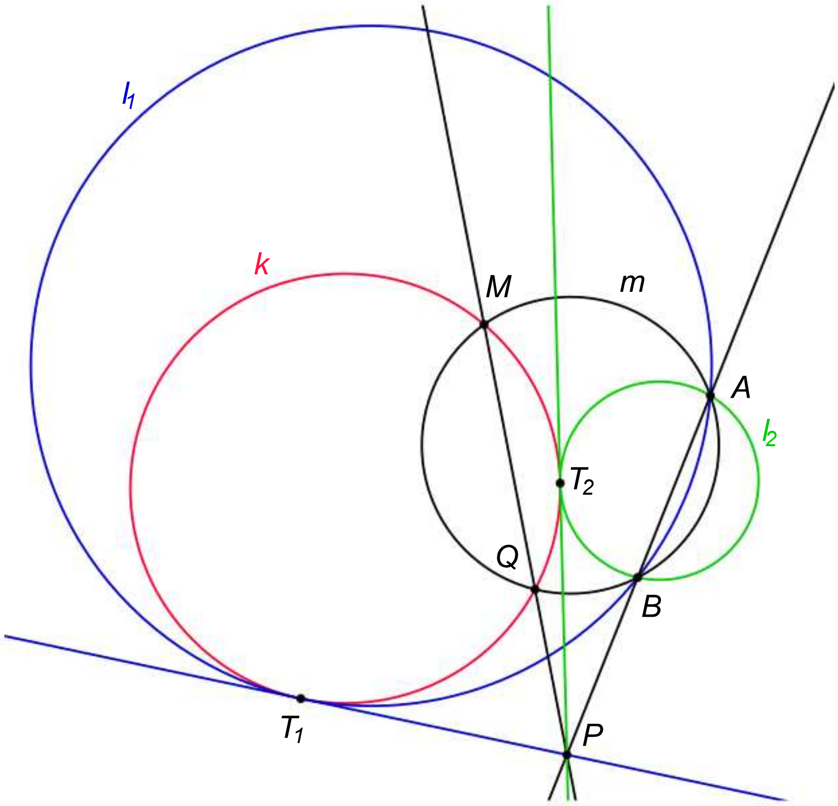


Obrázek 3.6: Příklad 5.

Příklad 6. *Apolloniova úloha typu bod, bod a kružnice: Sestrojte kružnici l, která prochází zadanými body A, B a dotýká se kružnice k. Zadání volme tak, aby body A a B ležely ve vnější oblasti kružnice k.*[3]

Řešení:
K řešení využijeme toho, že chordály tří kružnic se protínají v jednom bodě. Sestrojme proto pomocnou kružnici m tak, aby kružnice m procházela body A, B a kružnici k protínala v libovolných bodech M a Q. Přímka AB je tedy chordála kružnice m a hledané kružnice l a přímka MQ je chordála kružnic k a m. Průsečík P chordál AB a MQ je proto potenční střed kružnic k, l a m. Bodem P bude tedy procházet i chordála kružnic k a l. Protože kružnice k a l mají právě jeden společný bod, jejich chordála bude tečna vedená z bodu P ke ke kružnic k. Tečny sestrojíme, body dotyku označíme T_1, T_2. Tím jsme získali třetí bod hledané kružnice a řešíme Apolloniovu úlohu typu bod, bod a bod, přičemž střed příslušné kružnice leží na spojnici středu kružnice k s příslušným bodem dotyku.

[3]Ostatní varianty této úlohy zde nebudeme uvádět. Kdyby oba body A a B ležely ve vnitřní oblasti kružnice, úloha by se řešila stejným způsobem a kdyby jeden bod ležel ve vnitřní oblasti kružnice a druhý ve vnější, tak by úloha neměla žádné řešení.



Obrázek 3.7: Příklad 6.

Příklad 7. *Jsou dány úsečky délek a, b a c. Sestrojte úsečku délky* $x = \sqrt{a^2 - bc}$ *pomocí mocnosti bodu ke kružnici.[7]*

Řešení:
Uvažujme kružnici $k(S, r)$, bod M ležící ve vnější oblasti kružnice k a bod T, což je bod dotyku tečny vedené z bodu M ke kružnici k. Z věty o mocnosti bodu ke kružnici plyne:

$$|MT|^2 = |MS|^2 - r^2$$
$$|MT| = \sqrt{|MS|^2 - r^2} \tag{3.6}$$

Sestrojme tedy kružnici $k(S, \sqrt{bc})$[4] a bod M, jehož vzdálenost od středu S je a. Z bodu M veďme tečnu ke kružnici k, bod dotyku označme T. Dosazením do (3.6) dostáváme:

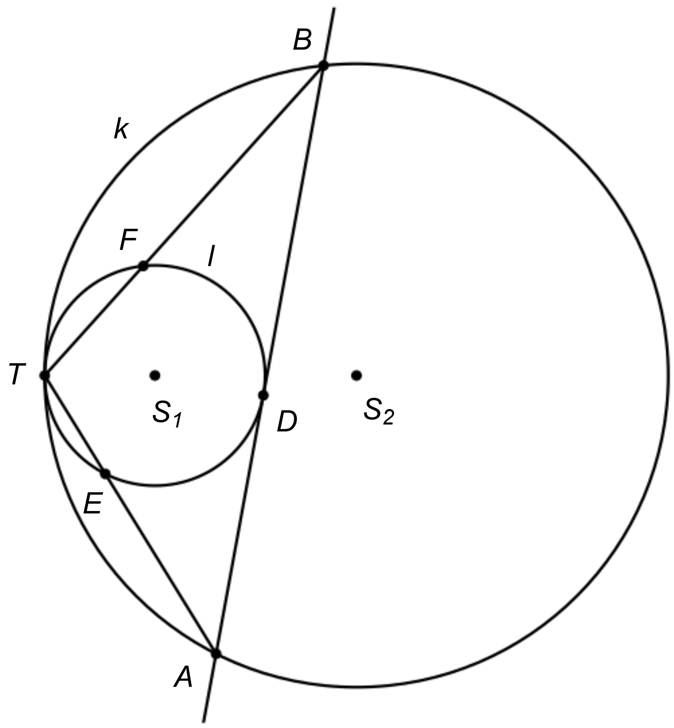
$$|MT| = \sqrt{a^2 - bc}$$

Úsečka MT má tedy námi hledanou délku.

Příklad 8. *Kružnice k a l mají dotyk v bodě T, přičemž kružnice l leží ve vnitřní oblasti kružnice k. Tětiva AB kružnice k je tečnou kružnice l s bodem dotyku D. Dokažte, že TD je osa úhlu ATB.[8]*

[4] Konstrukci úsečky takovéto délky jsme již předvedli v příkladu (5).

Řešení:
Označme E druhý průsečík AT s kružnicí l a F druhý průsečík BT s kružnicí l.



Obrázek 3.8: Příklad 8.

Pro řešení úlohy budeme potřebovat následující větu:
Osa vnitřního úhlu trojúhelníku dělí protější stranu v poměru délek přilehlých stran.
Tudíž pokud chceme dokázat, že TD je osa úhlu ATB, stačí nám dokázat platnost následující rovnosti:

$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BT|}{|AT|} \tag{3.7}$$

Nejprve si spočítáme mocnost bodu A ke kružnici l dvěma způsoby a ty porovnáme:

$$\begin{aligned} m_l^A &= |AD|^2 \\ m_l^A &= |AE| \cdot |AT| \\ |AD|^2 &= |AE| \cdot |AT| \end{aligned} \tag{3.8}$$

A nyní to samé pro bod B:

$$\begin{aligned} m_l^B &= |BD|^2 \\ m_l^B &= |BF| \cdot |BT| \\ |BD|^2 &= |BF| \cdot |BT| \end{aligned} \tag{3.9}$$

Zde si uvědomíme, že kružnice k je obrazem kružnice l ve stejnolehlosti $H(T, q)$. Tedy body A a B jsou obrazy bodů E a F ve této stejnolehlosti. Tím pádem platí následující rovnosti:

$$|AT| = q \cdot |ET| = q \cdot (|AT| - |AE|)$$

Z toho si vyjádříme $|AE|$:

$$|AE| = \frac{|AT| \cdot (q-1)}{q} \tag{3.10}$$

Stejným způsobem pro $|BF|$ dostáváme:

$$|BF| = \frac{|BT| \cdot (q-1)}{q} \tag{3.11}$$

Nyní už stačí vzít podíl rovností (3.9) a (3.8):

$$\frac{|BD|^2}{|AD|^2} = \frac{|BF| \cdot |BT|}{|AE| \cdot |AT|} \tag{3.12}$$

A do něj (3.12) dosadit za $|AE|$ a $|BF|$ dle (3.10) a (3.11):

$$\frac{|BD|^2}{|AD|^2} = \frac{\frac{|BT|\cdot(q-1)}{q} \cdot |BT|}{\frac{|AT|\cdot(q-1)}{q} \cdot |AT|}$$

Z čehož po úpravách dostáváme:

$$\frac{|BD|^2}{|AD|^2} = \frac{|BT|^2}{|AT|^2}$$

Délky úseček jsou nezáporné, můžeme tedy psát:

$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BT|}{|AT|}$$

Což je přímo vztah (3.7), který jsme chtěli dokázat. TD je tedy osa úhlu ATB.

Příklad 9. *Nechť A, B, C a D jsou různé body ležící na jedné přímce v tomto pořadí. Průsečíky kružnic k_1, respektive k_2 určených průměry AC, respektive BD označme X a Y. Na úsečce XY zvolme libovolný bod P (kromě průsečíku XY se zadanou přímkou). Označme M druhý průsečík přímky CP s kružnicí k_1. Dále označmne N druhý průsečík přímky BP s kružnicí k_2. Dokažte, že přímky AM, XY a DN se sbíhají v jednom bodě.[5]*

Řešení:
Nejprve si dokážeme, že čtyřúhelník $BCNM$ je tětivový (lze mu opsat kružnici). To uděláme tak, že si spočítáme mocnost bodu P ke kružnici k_1 dvěma způsoby, které porovnáme, dostáváme tedy:

$$|PM| \cdot |PC| = |PX| \cdot |PY| \tag{3.13}$$

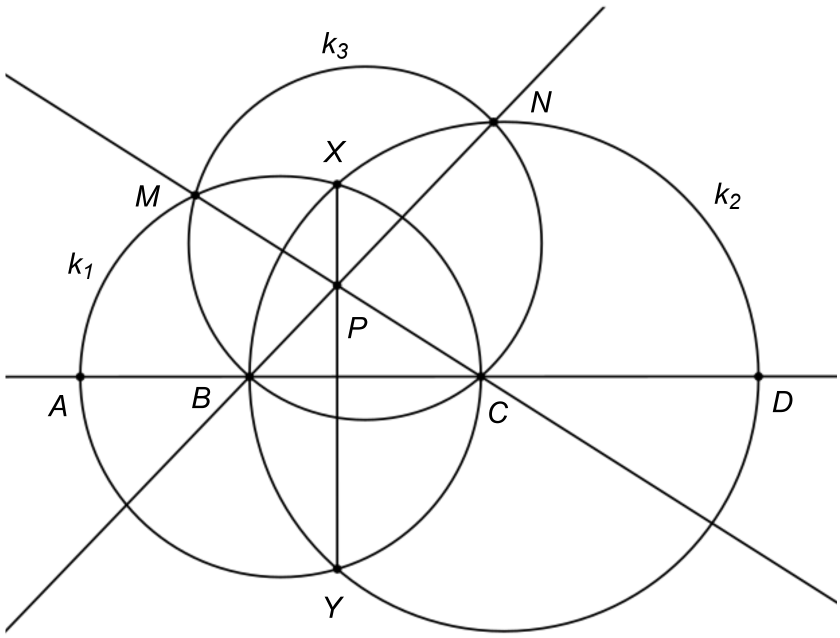
To samé pro bod P a kružnici k_2:

$$|PB| \cdot |PN| = |PX| \cdot |PY| \tag{3.14}$$

Porovnáním vztahů (3.13) a (3.14) dostáváme:

$$|PB| \cdot |PN| = |PM| \cdot |PC|$$

Čtyřúhelník $BCNM$ je tedy dle věty (10) tětivový, sestrojme kružnici jemu opsanou a označme ji k_3.



Obrázek 3.9: Příklad 9/1.

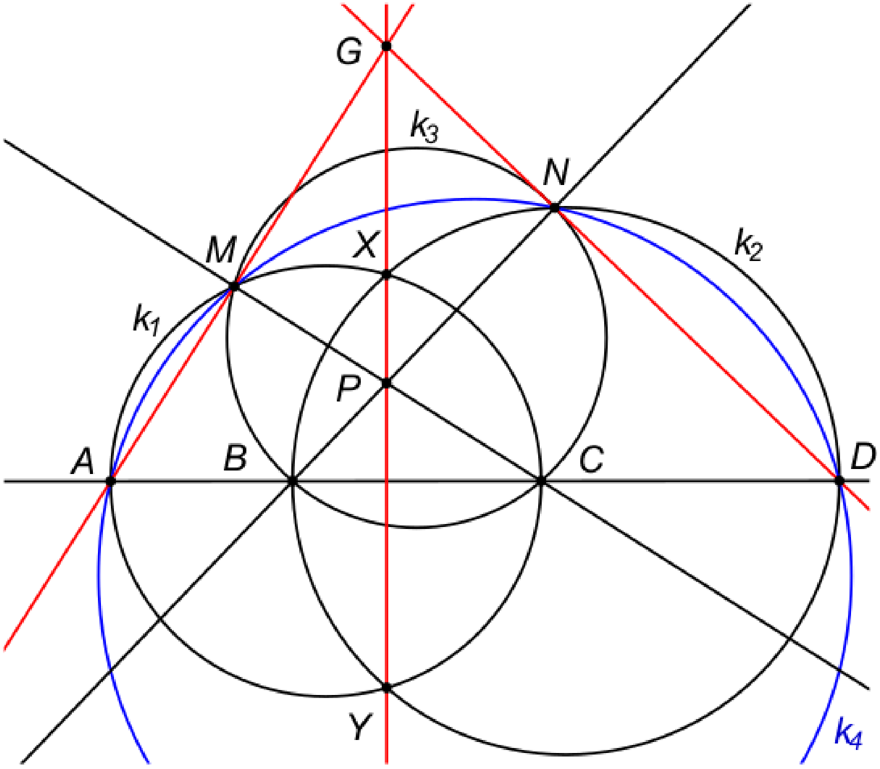
Nyní si ukážeme, že i čtyřúhelník $ADNM$ je tětivový. Využijeme kritéria, které říka, že čtyřúhelník je tětivový právě tehdy, když je součet velikostí protějších úhlů roven 180°. Víme, že $|\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle BND| = 90°$, jelikož body M a N leží na thaletových kružnicích nad příslušnými průměry. Dále budeme používat následující rovnosti:

$$|\sphericalangle MND| = 90° + |\sphericalangle MNB| \tag{3.15}$$
$$|\sphericalangle MNB| = |\sphericalangle MCB| = |\sphericalangle MCA| \tag{3.16}$$
$$|\sphericalangle MCA| = 90° - |\sphericalangle MAC| \tag{3.17}$$

Kde (3.15) platí triviálně, (3.16) platí, protože MNB a MCB jsou obvodové úhly náležící stejnému oblouku kružnice k_3, což víme díky tomu, že čtyřúhelník $MBCN$ je tětivový. A platnost rovnosti (3.17) je opět triviální. Složením rovností (3.15), (3.16) a (3.17) dostáváme:

$$|\sphericalangle MND| = 90° + |\sphericalangle MNB| = 90° + |\sphericalangle MCA| = 180° - |\sphericalangle MAC|$$

Stejným způsobem by se postupovalo u úhlů AMN a NDA. Součet velikostí protějších úhlů je roven 180°, jedná se proto o čtyřúhelník tětivový. Sestrojme tedy kružnici k_4 opsanou čtyřúhelníku $ADNM$. Přímka AM je chordála kružnic k_1 a k_4. Přímka XY je chordála kružnic k_1 a k_2. A nakonec přímka DN je chordála kružnic k_2 a k_4. Z předchozí kapitoly už víme, že chordály tří kružnic se protnou v potenčním středu kružnic. Přímky XY, AM a DN se tedy protnou v jednom bodě.



Obrázek 3.10: Příklad 9/2.

Příklad 10. *„Mějme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Na jeho odvěsně AC zvolme libovolně bod D. Dále sestrojme kružnici k_1, která se dotýká přepony AB v bodě A a prochází bodem D. Potom kružnici k_2, která se dotýká přepony AB v bodě B a též prochází bodem D. Označme E druhý průsečík kružnic k_1 a k_2. Dokažte, že úhly BAC a DEC jsou shodné.“[9]*

Řešení:
Nejprve si uvědomíme, že přímka ED je chordála kružnic k_1 a k_2. Všechny body této chordály mají stejnou mocnost k oběma kružnicím. Speciálně nás bude ale zajímat průsečík této chordály s přeponou AB, označme ho P. Je zřejmé, že $|PB| = |PA|$, bod P je tedy střed přepony AB. Nyní dokážeme, že čtyřúhelník $CEAP$ je tětivový. Zde čtenáři ponecháme na rozmyšlenou, že toto tvrzení je ekvivalentní s tvrzením v zadání (nápověda: obvodové úhly jsou shodné). Tedy chceme dle věty (10) dokázat platnost vztahu:

$$|DC| \cdot |DA| = |DP| \cdot |DE| \tag{3.18}$$

Nejprve si vyjádříme mocnost bodu P ke kružnici k_1 dvěma způsoby, které následně porovnáme:

$$m_{k_l}^P = |PA|^2$$
$$m_{k_l}^P = |PE| \cdot |DP|$$
$$|PA|^2 = |PE| \cdot |DP| \tag{3.19}$$

Nyní sestrojíme kružnici $k_3(P,|PA|)$ a spočítáme mocnost bodu D k této kružnici a opět porovnáme:

$$m_{k_3}^D = -|DC| \cdot |DA|$$
$$m_{k_3}^D = |DP|^2 - |PA|^2$$
$$|DC| \cdot |DA| = |PA|^2 - |DP|^2 \tag{3.20}$$

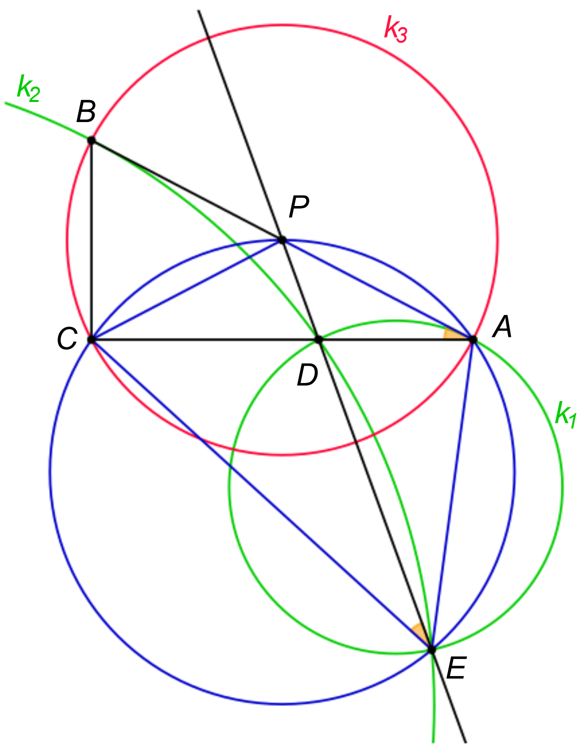
Nyní do (3.20) dosadíme za $|PA|^2$ dle (3.19) a upravujeme:

$$|DC| \cdot |DA| = |PE| \cdot |DP| - |DP|^2$$
$$|DC| \cdot |DA| = |DP| \cdot (|PE| - |DP|)$$

Ovšem $|PE| - |DP| = |DE|$, takže:

$$|DC| \cdot |DA| = |DP| \cdot |DE|$$

Což je přímo vztah (3.18), který jsme chtěli dokázat.



Obrázek 3.11: Příklad 10.

4. Rozšíření do prostoru a zobecnění

V této poslední kapitole se nejprve podíváme na rozšíření mocnosti bodu ke kružnici do prostoru a poté prozkoumáme zobecnění v rovině. Budeme tedy uvažovat bod M a sféru κ a pokusíme se popsat vztah mezi nimi stejným způsobem, jako jsme to udělali u bodu a kružnice.

4.1 Mocnost bodu ke sféře

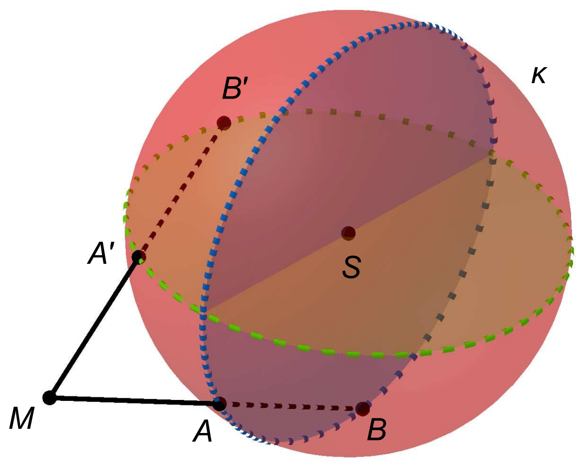
Věta 11. *Mějme sféru $\kappa(S, r)$ a bod M, který neleží na sféře κ. Tímto bodem veďme dvě přímky tak, aby sféru κ protly v bodech A, B respektive A', B'. Pak platí: $|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'|$.*

Důkaz. Spočítáme hodnotu $|MA| \cdot |MB|$. Sestrojíme řez sféry κ rovinou určenou body A, B a S. Řezem bude kružnice k se středem v bodě S a poloměrem r (viz obrázek 4.1). Jelikož tato kružnice leží ve stejné rovině jako bod M, tak výraz $|MA| \cdot |MB|$ reprezentuje mocnost bodu M ke kružnici k. Tu si vyjádříme i dle definice, tedy:

$$m_k^M = |MS|^2 - r^2$$

Takže dostáváme:

$$|MA| \cdot |MB| = |MS|^2 - r^2 \tag{4.1}$$



Obrázek 4.1: Kružnicové řezy sféry.

Nyní bychom úplně stejným způsobem sestrojili řez sféry κ rovinou určenou body S, A' a B'. Z čehož bychom dospěli k následujícímu vztahu:

$$|MA'| \cdot |MB'| = |MS|^2 - r^2 \tag{4.2}$$

Složením (4.1) a (4.2) dostáváme:

$$|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'|$$

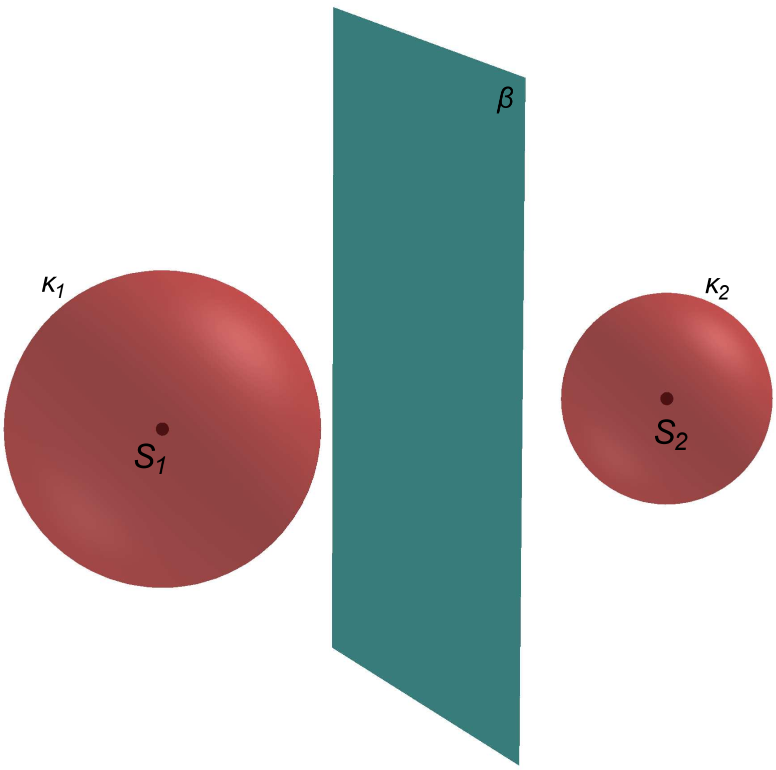
Čímž je věta dokázána.

$\square$

Definice 2. *Je dán bod M a sféra $\kappa(S, r)$. Číslo $k_\kappa^M = |MS|^2 - r^2$ nazýváme mocností bodu M ke sféře κ.*

Věta 12. *Množinou všech bodů v prostoru M, které mají stejnou mocnost k dané sféře $\kappa(S,r)$, je sféra soustředná s danou sférou κ s poloměrem $|SM|$.*

Věta 13. *Množinou všech bodů v prostoru, které mají stejnou mocnost ke dvěma nesoustředným sférám $\kappa_1(S_1, r_1), \kappa_2(S_2, r_2)$, je rovina kolmá na spojnici středů. Této rovině budeme říkat chordálová rovina.*

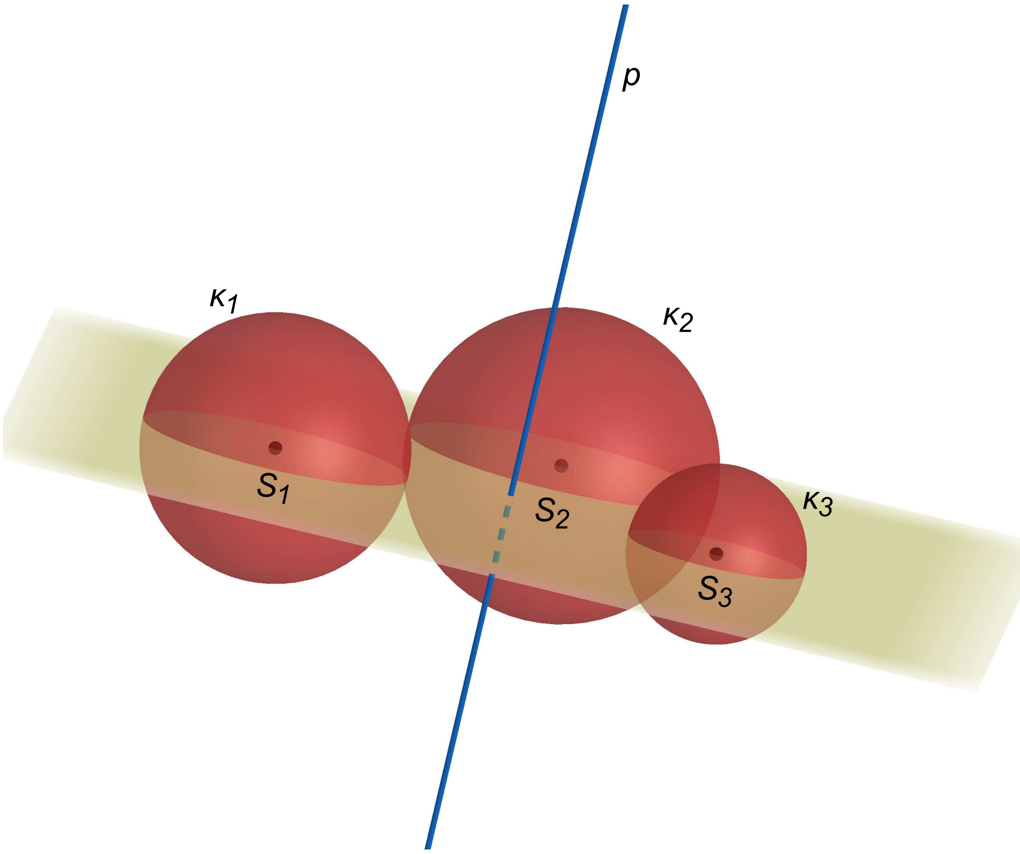


Obrázek 4.2: Chordálová rovina.

Důkaz. Víme, že množina všech bodů, které mají stejnou mocnost ke dvěma nesoustředným kružnicím, je přímka (chordála). Uvažujme všechny řezy obou sfér rovinou, určenou středy S_1 a S_2 a libovolným dalším bodem. Řezem budou vždy dvě kružnice, jejichž chordálu dokážeme sestrojit. Tato chordála bude vždy kolmá na spojnici středů a prochází týmž bodem na spojnici středů, neboť kružnicové řezy budou mít na obou sférách vždy stejný poloměr. Sjednocením všech takto sestrojených chordál dostáváme rovinu, která je kolmá na spojnici středů a kde všechny její body mají stejnou mocnost k oběma sférám.

□

Věta 14. *Množinou všech bodů v prostoru, které mají stejnou mocnost ke třem nesoustředným sférám $\kappa_1(S_1, r_1), \kappa_2(S_2, r_2)$ a $\kappa_3(S_3, r_3)$, jejichž středy jsou nekolineární, je přímka kolmá na rovinu $S_1S_2S_3$. Této přímce budeme říkat potenční přímka.*



Obrázek 4.3: Potenční přímka p.

Důkaz. Označme α chordálovou rovinu sfér κ_1, κ_2 a β chordálovou rovinu sfér κ_2, κ_3. Rovina α je dle předchozí věty kolmá na úsečku S_1S_2 a β kolmá na úsečku S_2S_3. Z čehož spolu s předpokládanou nekolinearitou bodů S_1, S_2 a S_3 vyplývá různoběžnost rovin α a β. Průsečnicí těchto rovin je přímka kolmá na úsečky S_1S_2 a S_2S_3 a tedy i na rovinu $S_1S_2S_3$, přičemž body ležící na této přímce mají stejnou mocnost ke všem třem sférám.

□

Věta 15. *Množinou všech bodů v prostoru, které mají stejnou mocnost ke čtyřem nesoustředným sférám $\kappa_1(S_1, r_1), \kappa_2(S_2, r_2)$, $\kappa_3(S_3, r_3)$ a $\kappa_4(S_4, r_4)$, jejichž středy jsou nekolineární, je bod.*

Důkaz. Sestrojíme potenční přímky p_1 a p_2 pro trojice sfér $\kappa_1\kappa_2\kappa_3$, a $\kappa_1\kappa_2\kappa_4$. Obě tyto přímky leží v chordálové rovině sfér $\kappa_1\kappa_2$, nejsou tedy mimoběžné. A díky nekolinearitě středů nejsou ani rovnoběžné, jsou proto různoběžné a protnou se v bodě P, který má podle vlastnosti přímky p_1 stejnou mocnost ke sférám κ_1, κ_2 a κ_2 a dle vlastnosti přímky p_2 i stejnou mocnost ke sféře κ_4. A protože dvě různoběžné přímky mají společný pouze jeden bod, žádný další takový bod už neexistuje.

□

I mocnost bodu ke sféře má využití v příkladech, zde si jeden takový ukážeme.

Příklad 11. *„Nechť je dána rovina α a uvnitř jednoho z poloprostorů s hraniční rovinou α jsou dány body A, B různě vzdálené od roviny α. Určete množinu všech středů sfér, které se dotýkají roviny α a procházejí body A a B.“[10]*

Řešení:
Nejprve se podíváme na množinu všech bodů dotyku T hledané sféry s rovinou α. Označme P průsečík přímky AB s rovinou α a dále búno předpokládejme, že $|PA| < |PB|$. Z mocnosti bodu P ke sféře plyne:

$$|PT|^2 = |PA| \cdot |PB|$$
$$|PT| = \sqrt{|PA| \cdot |PB|}$$

Tím je délka úsečky $|PT|$ přesně určena. Body dotyku T tedy budou ležet na kružnici $k(P, |PT|)$, která leží v rovině α. Nyní se už podíváme na samotnou množinu středů S hledaných kulových ploch. Víme, že budou ležet v rovině β, což je rovina souměrnosti úsečky AB, jejíž body X splňují vztah $|XA| = |XB|$. Také musí ležet na rotační válcové ploše V určené řídicí kružnicí k, jelikož tečná rovina α je kolmá na přímku určenou středem a bodem dotyku. Výslednou množinou všech středů je tedy průnik této válcové plochy V s rovinou β, což je elipsa. Zde ještě dokážeme, že všechny body této elipsy leží v poloprostoru αA a nestane se, že by rovina α tuto elipsu protínala. Víme, že platí:

$$|PT| = \sqrt{|PA| \cdot |PB|} \tag{4.3}$$

Dále označme O střed úsečky AB, pak pro vzdálenost $|PO|$ platí:

$$|PO| = \frac{|PA| + |PB|}{2} \tag{4.4}$$

Zde si uvědomíme, že vztahy (4.3), respektive (4.4) jsou geometrickým, respektive aritmetickým průměrem délek $|PA|$ a $|PB|$. Z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem spolu s růzností délek $|PA|$ a $|PB|$ plyne:

$$\sqrt{|PA| \cdot |PB|} < \frac{|PA| + |PB|}{2}$$

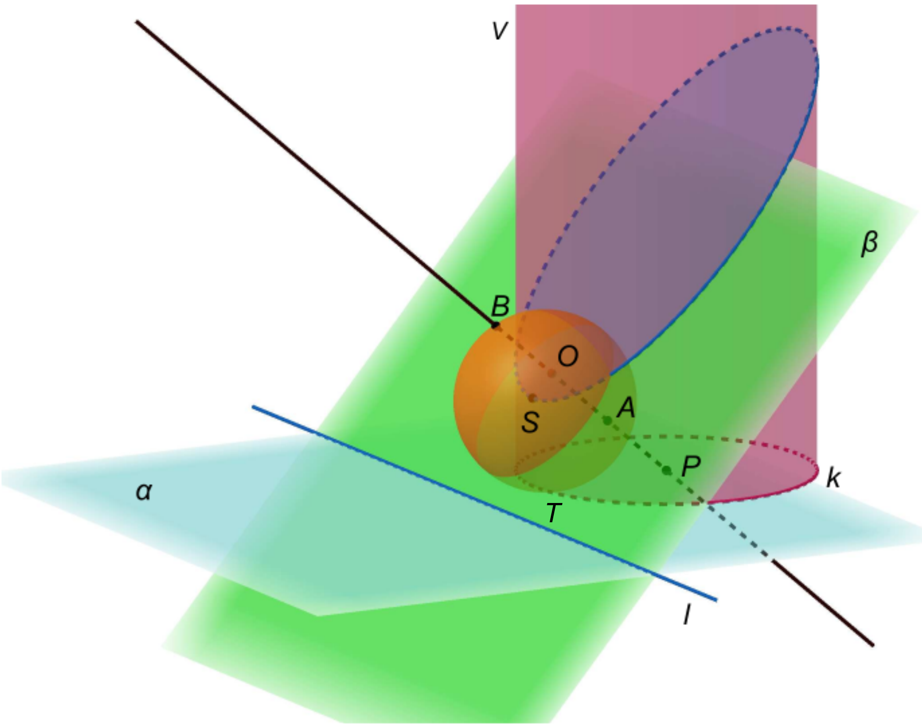
Tedy:

$$|PT| = \sqrt{|PA| \cdot |PB|} < \frac{|PA| + |PB|}{2} = |PO|$$

Z toho:

$$|PO| > |PT|$$

Vzhledem k tomu, že rovina β je kolmá na úsečku AB a prochází bodem O, platí, že vzdálenost d mezi bodem P a průsečnicí l roviny β s rovinou α je tím spíše větší než délka úsečky PT. Tedy průsečnice l leží ve vnější oblasti kružnice k, z čehož plyne, že všechny body elipsy leží v poloprostoru αA. Jelikož se jedná o úlohu hledající množinu všech bodů, mělo by zde následovat ještě obrácený postup. Tedy důkaz, že všechny body ležící na dané elipse jsou opravdu středy hledaných sfér. Nicméně zde to vynecháme a čtenáře, kterého to zajímá odkážeme na zdroj [10].



Obrázek 4.4: Příklad 11.

4.2 Darbouxův součin

V této poslední podkapitole se podíváme na možnost zobecnění mocnosti bodu ke kružnici, se kterou v roce 1866[11] přišel francouzský matematik Darboux. Definice byly převzaty z [11], důkazy jsou vlastní. Darboux zavedl součin, který po něm byl následně pojmenován, ve tvaru:

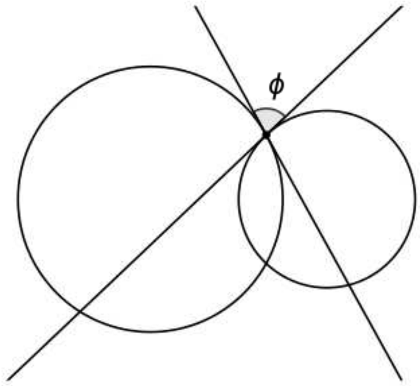
Definice 3. *Nechť jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$. Darbouxovým součinem těchto dvou kružnic, značíme $k_1 * k_2$, budeme rozumět hodnotu výrazu: $k_1 * k_2 = d^2 - r_1^2 - r_2^2$, kde d je délka úsečky S_1S_2.*

O zobecnění se jedná, jelikož bod lze chápat jako speciální případ kružnice, která má nulový poloměr. V takovémto případě by jeden z poloměrů z předchozí rovnosti vypadl a dostali bychom nám už známý vztah.

Věta 16. *Pro dvě nesoustředné kružnice k_1 a k_2, které se protínají ve dvou bodech, je hodnota Darbouxova součinu rovna*

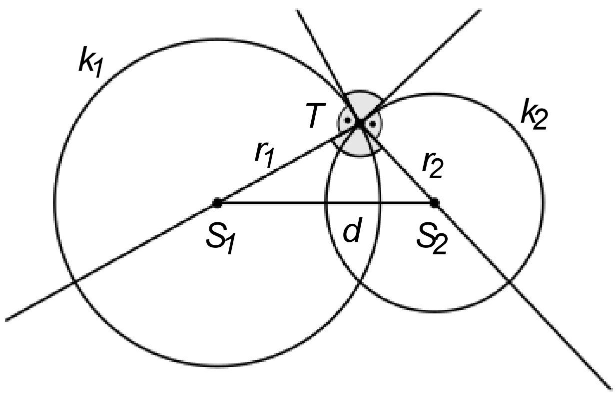
$$k_1 * k_2 = 2r_1r_2 \cos\phi$$

Kde velikost úhlu ϕ je rovna odchylce tečen v bodě dotyku (viz obrázek 4.5)



Obrázek 4.5: Odchylka tečen.

Důkaz. Mějme kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ vyhovující zadání. Označme T jeden z jejich průsečíků, sestrojme tečny kružnic v tomto bodě a jejich odchylku označme ϕ. Nejprve si s pomocí obrázku (4.6) uvědomíme, že součet velikostí úhlů ϕ a $\sphericalangle S_1TS_2$ je 180°.



Obrázek 4.6: Velikost součtu úhlů.

Opravdu, zbylé dva úhly u vrcholu T jsou pravé, tudíž na součet velikostí úhlů ϕ a $\sphericalangle S_1TS_2$ musí zbývat 180°. Tedy $|\sphericalangle S_1TS_1| = 180° - \phi$. Nyní si pomocí kosinovy věty v trojúhelníku S_1S_2T vyjádříme stranu S_1S_2 (víme, že má délku d). Vyjádříme a upravujeme:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(180° - \phi)$$
$$d^2 - r_1^2 - r_2^2 = -2r_1r_2\cos(180° - \phi)$$

Za výraz na levé straně dosadíme $k_1 * k_2$ a pro pravou stranu použijeme rovnost $\cos(\phi) = -\cos(180° - \phi)$ Po dosazení dostáváme:

$$k_1 * k_2 = 2r_1r_2\cos\phi$$

Čímž je důkaz dokončen.

□

Věta 17. *Pro dvě nesoustředné kružnice, které nemají žádný společný bod, je druhá odmocnina hodnoty Darbouxova součinu rovna délce úsečky vytvořené následujícím způsobem: Vedeme tečny z jednoho středu kružnice ke kružnici druhé a označíme libovolný bod dotyku T_1. Z bodu T_1 opět vedeme tečny ke druhé kružnici. Vybereme bod dotyku T_2 tak, aby ležel v polorovině $S_1S_2T_1$. Pak platí*

$$k_1 * k_2 = |T_1T_2|^2$$

Důkaz. Mějme kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ vyhovující zadání. Bodem S_2 veďme jednu tečnu ke kružnici k_1, bod dotyku označme T_1. Bodem T_1 veďme tečnu ke kružnici k_2 tak, aby bod dotyku T_2 s kružnicí k_2 ležel v polorovině $S_1S_2T_1$. Nyní spočítáme délku úsečky T_1T_2. Nejprve ale délka úsečky S_2T_1. Trojúhelník $S_1S_2T_1$ je pravoúhlý, tedy:

$$|T_1S_2|^2 = |S_1S_2|^2 - |S_1T_1|^2$$
$$|T_1S_2| = \sqrt{|S_1S_2|^2 - |S_1T_1|^2}$$

Po dosazení:

$$|T_1S_2| = \sqrt{d^2 - r_1^2}$$

I trojúhelník $S_2T_1T_2$ je pravoúhlý, tedy:

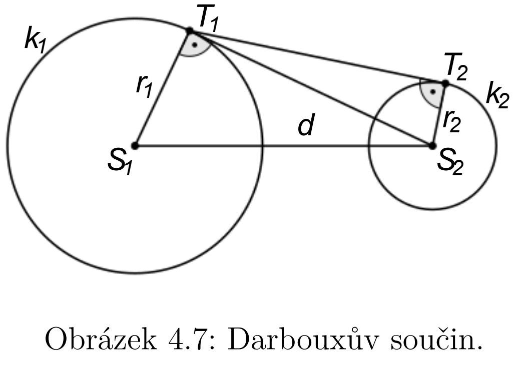
$$|T_1T_2|^2 = |T_1S_2|^2 - |S_2T_2|^2$$
$$|T_1T_2| = \sqrt{|T_1S_2|^2 - |S_2T_2|^2}$$

Opět dosadíme (i z předchozího výrazu):

$$|T_1T_2| = \sqrt{d^2 - r_1^2 - r_2^2}$$

Čímž je důkaz zakončen.

□



Obrázek 4.7: Darbouxův součin.

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo čtenáře seznámit s problematikou mocnosti bodu ke kružnici a ukázat jeho praktické využití. V první kapitole jsme zkoumali motivaci zavedení tohoto pojmu a uvedli základní vlastnosti, z nichž jsme si některé i dokázali. V druhé kapitole jsme následně předvedli, jak pomocí vlastností uvedných v první kapitole můžeme dokázat některé věty. V třetí kapitole jsme mocnost bodu ke kružnici použili k řešení příkladů. V poslední kapitole jsme nastínili rozšíření do prostoru, opět uvedli a dokázali základní vlastnosti a nakonec zmínili zobecnění mocnosti bodu ke kružnici. Téma mocnosti bodu tímto zdaleka není vyčerpáno, zejména co se týče zobecnění. Francouzský matematik Laguerre Edmond představil v roce 1905 mocnost bodu ke křivce[12].

Literatura

[1] Halas Zdeněk, *Kuželosečky*, Univerzita Karlova (2024). Dostupné online: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Geometrie/kuzelosecky.pdf

[2] Moravcová Vlasta, Hromadová Jana, *Základy planimetrie pro učitelské studium*, Matfyzpress, Praha (2021), str. 60–64, 100–104, 108–109. Dostupné online: https://karlin.mff.cuni.cz/~morava/Zaklady_planimetrie.pdf

[3] Jacob Steiner, *Einige geometrische Betrachtungen* (1826), str. 161–184.

[4] *Pythagoras, from the Power of a Point - Again*, Dostupné online: https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Bui105.shtml

[5] Yufei Zhao, *Power of a Point*, Trinity College, Cambridge (2011). Dostupné online: https://yufeizhao.com/olympiad/power_of_a_point_sol.pdf

[6] *PraSe* (2005). Dostupné online: https://prase.cz/archive/25/3.pdf

[7] Boček Leoš, Zhouf Jaroslav, *PRAXE UČITELE MATEMATIKY - FYZIKY - INFORMATIKY*, PROMETHEUS, s. r. o., Praha (1995), (1. vydání), str. 20–21.

[8] Houserová Tereza, *Metody řešení matematických úloh*, Cvičení. Praha: Univerzita Karlova (2023).

[9] Tkadlec Josef, *Syntetická geometrie*, Univerzita Karlova, Praha. Dostupné online: https://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/prednasky/tkadlec.pdf

[10] Holubář Josef, *Množiny bodů v prostoru*, MLADÁ FRONTA, Praha (1983), (1. vydání), str. 30–33. Dostupné online: http://home.zcu.cz/~rvyrut/MaT/Skola_Mladych_matematiku_54__Mnoziny_bodu_v_prostoru.pdf

[11] Jerzy Kocik, *A theorem on circle configurations*, Mathematics Department, SIU-C, Carbondale, IL, str. 2–3. Dostupné online: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0706/0706.0372.pdf

[12] Laguerre Edmond, *Oeuvres de Laguerre: Géométrie*, Gauthier-Villars et fils (1905). Dostupné online: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0706/0706.0372.pdf
.

Seznam obrázků