



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Zdeněk Procházka

### **Využití umělé inteligence ve výuce matematiky na střední škole**

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Studijní program: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání se sdruženým  
studiem Informatika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne.....

podpis

Rád bych poděkoval vedoucí práce doc. RNDr. Jarmile Robové, CSc. za odborné vedení, cenné rady, věcné připomínky a také trpělivost. Rovněž velice děkuji za veškeré vypůjčené materiály a pomoc při vybírání literatury a zdrojů.

Velké poděkování patří také mému otci za veškerou podporu v průběhu celého mého studia.

Název práce: Využití umělé inteligence ve výuce matematiky na střední škole

Autor: Zdeněk Procházka

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Cílem této bakalářské práce je vysvětlit, co je umělá inteligence, jaké technologie jí využívají a jak ji lze využít ve výuce matematiky na střední škole. První kapitola vysvětluje pojem umělá inteligence, její typické vlastnosti, a kde se v dnešní době používá v reálném světě a ve společenských a přírodních vědách. Od druhé kapitoly se již práce zaměřuje na využití umělé inteligence ve středoškolské matematice. Přímou ve druhé kapitole se v práci zkoumá, zda umělá inteligence zvládá očekávané výstupy žáka a učivo dle Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia, aby mohla být použita jako pomůcka ve výuce středoškolské matematiky. V závěrečné třetí kapitole se srovnávají dva chatboti z hlediska řešení konkrétních úloh, aby se ukázalo, v čem se mohou lišit a který může mít lepší využití pro určitý typ úloh. Závěrečná kapitola taktéž ukazuje, jak chatboti dokáží generovat dotazy pro další aplikace; konkrétně v této práci je to *Wolfram Alpha*.

Klíčová slova: Umělá inteligence, výuka středoškolské matematiky, chatbot

Title: Using artificial intelligence in mathematics teaching in higher secondary schools

Author: Zdeněk Procházka

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Department of Mathematics Education

Abstract: The aim of this bachelor's thesis is to explain what artificial intelligence is, what technologies use it and how it can be used in high school mathematics teaching. The first chapter explains the concept of artificial intelligence, its typical characteristics, and where it is currently used in the real world and in the social and natural sciences. From the second chapter, the thesis focuses on the use of artificial intelligence in high school mathematics. Directly in the second chapter, the thesis examines whether artificial intelligence manages the expected student outputs and the curriculum according to the Framework education programme for grammar schools so that it can be used as an aid in teaching high school mathematics. The final chapter compares the two chatbots to show how they can differ, and which can be better used for a certain type of task. The final chapter also shows how chatbots can generate queries for other applications; specifically, in this work, it is *Wolfram Alpha*.

Keywords: Artificial intelligence, teaching high school mathematics, chatbot

## Obsah

Úvod.....	3
1 Co je to umělá inteligence.....	4
1.1 Jaké konkrétní vlastnosti lze považovat za projevy umělé inteligence.....	6
1.1.1 Modelování prostorových útvarů.....	6
1.1.2 Rozpoznávání obrazu a řeči.....	7
1.1.3 Adaptace prostředí potřebám jednotlivých žáků.....	8
1.2 Užití umělé inteligence v reálném světě.....	9
1.2.1 Autonomní vozidla.....	9
1.2.2 Chatboti.....	10
1.3 Využití umělé inteligence ve společenských a přírodních vědách.....	11
1.3.1 Společenské vědy.....	11
1.3.2 Přírodní vědy.....	12
2 Umělá inteligence ve výuce matematiky na střední škole.....	13
2.1 Argumentace a ověřování.....	13
2.1.1 Rozlišení definice a věty, předpokladu a závěru věty.....	14
2.1.2 Vytváření hypotéz a posuzování pravdivosti tvrzení.....	15
2.1.3 Zdůvodňování postupu a ověření správnosti řešení.....	16
2.2 Číslo a proměnná.....	17
2.2.1 Rozkládání mnohočlenů na součin.....	18
2.2.2 Řešení lineárních a kvadratických rovnic a nerovnic a diskuze počtu řešení.....	19
2.3 Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost.....	20
2.3.1 Reálné problémy s kombinatorickým podtextem.....	21
2.3.2 Výpočet pravděpodobnosti a úprava faktoriálů a kombinačních čísel.....	22
2.4 Závislosti a funkční vztahy.....	24
2.4.1 Zobrazení grafů požadovaných funkcí.....	25
2.4.2 Řešení aplikačních úloh pomocí posloupností a funkcí.....	26
2.5 Geometrie.....	27
2.5.1 Geometrické pojmy a třídění útvarů.....	28
2.5.2 Řešení planimetrických a stereometrických úloh z praxe.....	30
2.5.3 Určení analytického vyjádření kuželoseček a vyvození jejich vlastností.....	31
3 Srovnání chatbotů v řešení matematických problémů.....	33
3.1 Komplexní čísla.....	33
3.2 Goniometrické nerovnice.....	51
3.3 Generování dotazů pro Wolfram Alpha.....	59

Závěr .....	63
Seznam použité literatury a zdrojů.....	65
Seznam použitých zkratek .....	66

## Úvod

Tato práce se zabývá využitím umělé inteligence ve výuce matematiky a tím, a jak si v současnosti dokáže umělá inteligence poradit s řešením matematických příkladů na úrovni čtyřleté střední školy. Cílem této práce je představit učitelům středoškolské matematiky, jak umělá inteligence může pomoci také žákům a vyzkoušet různé aspekty umělé inteligence při řešení příkladů ze středoškolské matematiky. Zároveň může sloužit jako pomůcka pro žáky i učitele, aby věděli, jaké matematické úlohy dokáže současná umělá inteligence řešit a ve kterých se naopak dopouští chyb.

Bakalářská práce je rozdělena do tří hlavních kapitol, které se následně dělí do dalších podkapitol. Každá kapitola zkoumá jiné aspekty a dovednosti umělé inteligence.

První kapitola je zaměřena na seznámení se s umělou inteligencí. Co může být považováno za umělou inteligenci, čím se vyznačuje a které konkrétní softwary lze považovat za její využití. Taktéž je v této kapitole vysvětleno, proč nelze jednoznačně definovat, co je umělá inteligence. Kapitola je také věnována příkladům současného využití umělé inteligence v reálném světě a ve výuce mimo matematiku.

Druhá kapitola se již věnuje konkrétním ukázkám, jak si současná podoba umělé inteligence dokáže poradit s konkrétními příklady z témat vyučovaných na střední škole. Každá podkapitola je věnována jinému vzdělávacímu obsahu ze vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace z RVP G (Rámcový vzdělávací program pro gymnázia). V těchto podkapitolách je zkoumáno, zda umělá inteligence zvládne vybrané očekávané výstupy a jak může pomoci s učivem.

Poslední třetí kapitola se zabývá dovednostmi umělé inteligence, chatbota, řešit příklady z témat, která jsou nad rámec RVP G, avšak na některých středních školách se často vyučují. Jedná se o témata komplexní čísla a goniometrické nerovnice. Každému z těchto dvou témat je věnována jedna podkapitola. Současně se zde porovnávají řešení příkladů od dvou chatbotů *ChatGPT* a *Gemini*. Závěrečná část poslední kapitoly se zabývá zkoumáním dovednosti chatbota přeformulovat zadání příkladu jako dotaz pro *Wolfram Alpha*, který tento dotaz následně vyřeší. Zajímalo nás, zda je to vhodná alternativa pro případ, že by chatbot nedokázal sám úlohu správně vyřešit.

Ve druhé a třetí kapitole jsou výstupy chatbotů hodnoceny na základě zvolených kritérií. Tato kritéria jsou porozumění zadání, správnost a srozumitelnost postupu řešení, korektnost výpočtů, správné použití matematické symboliky a správné užití českého jazyka.

V této práci jsou doslovné citace uvedeny v uvozovkách a text v nich je napsán kurzívou. Jestliže je text v uvozovkách, ale není napsán kurzívou, tak se stále může jednat o citaci, ale na začátku citace byla změněna jazyková forma některých slov z důvodu lepší návaznosti na okolní text.

Je také důležité uvést, že matematické příklady uvedené v této práci zdaleka nepokrývají všechny dovednosti nebo nedostatky chatbotů.

## 1 Co je to umělá inteligence

Umělá inteligence začíná být čím dál tím častěji diskutovaným tématem. Nejen kvůli tomu, že již dnes dokáže zjednodušit běžný život, ale také když se dozvídáme, co by ještě do budoucna mohla zvládnout. AI (z angličtiny Artificial Intelligence, neboli umělá inteligence) se už dnes využívá ve školství, i když o tom kolikrát ani nemusíme vědět. Stále více se využívá ve spoustě výpočetních programů nebo specifickěji v programech simulujících prostorové objekty.

Její rychlý vývoj je kromě zlepšení technologií způsoben také vyšším nárůstem financí proudících do vývoje v této oblasti. Od roku 2013 do roku 2017 se zvýšilo financování společností, které vyvíjejí umělou inteligenci po celém světě téměř šestinásobně (Holmes & Bialik, 2019, s. 1). Vyvíjí se dokonce tak rychle, že podle IBM (Holmes & Bialik, 2019, s. 4) má AI v následujících letech velmi pokročit například v plynulých konverzacích při interakci s člověkem. Rychlý pokrok v tomto odvětví může současně psaný text udělat neaktuálním. V této práci se budeme tedy zabývat současným stavem umělé inteligence vzhledem k počátku roku 2024.

Je obtížné zformulovat přesnou definici umělé inteligence, protože v závislosti na odvětví, ve kterém se pohybujeme, si každý může pod pojmem umělé inteligence představit něco jiného. A tak dodnes ve společnosti a mezi odborníky stále nepanuje shoda na samotné definici umělé inteligence. Nabízí se tedy otázka: „Co je to ale vlastně umělá inteligence?“. Odpověď na tuto otázku není tak jednoduchá, jak by se mohlo zdát. K tomu musíme mít totiž ještě na paměti, že konkrétní technologie může „zahrnovat umělou inteligenci“, ale sama nemůže „být umělou inteligencí“ (Course.elementsofai.com, n.d.), protože některé dovednosti mohou být považovány za její projevy, ale jiné nikoliv.

Pojem umělá inteligence je velmi široký, dá se chápat různými způsoby a třídit podle různých kritérií, a to například dle její funkčnosti (slabá a silná<sup>1</sup>), aplikačních oblastí (robotika nebo analýza dat) nebo způsobu učení (strojové učení a evoluční algoritmy). Jak uvádí Russell & Norvig (2010), AI lze také rozdělit například podle přístupu k ní (např. přístup Alana Turinga z roku 1950, kde jde o napodobování lidského jednání) nebo dle zaměření (na myšlenkové procesy a uvažování nebo na chování). Ani tato rozdělení ale nemusí být jednoznačné, protože existuje mnoho systémů, které mohou spadat do více kategorií zároveň, a tedy se lze setkat s různými definicemi umělé inteligence.

Již zmíněné strojové učení hraje velkou roli v moderní podobě AI. Strojové učení se zaměřuje na to, aby se umělá inteligence mohla sama od sebe zlepšovat bez nutnosti většího zásahu z lidské strany. Toto učení často vyžaduje velké množství dat, která umělá inteligence analyzuje a následně se na nich trénuje. Trénování spočívá v rozhodování se podle podobných případů v datech, hledání pravidelností či vzorů a napodobování těchto trénovacích dat (Rosa, 2023).

Typ umělé inteligence určený pro práci s jazykem a k porozumění jazykovým strukturám, se nazývá jazykový model. I při velkém množství trénovacích dat pro strojové učení mají tyto jazykové modely omezení, kvůli kterým se ve svých odpovědích mohou

---

<sup>1</sup> Slabá umělá inteligence se převážně zaměřuje ve své činnosti na jeden specifický úkol, zatímco když hovoříme o silné umělé inteligenci, tak už předpokládáme velkou příbuznost lidskému myšlení. Strong AI (neboli silná umělá inteligence) je ale zatím pouze teoretický pojem.



dopouštět chyb (tyto chyby budou konkrétně ukázány v kapitolách 2 a 3). Může se jednat například o omezení technická, nebo že modely „nemají zkušenosti z reálného světa“, případně „neumí dobře odhadnout kvalitu vygenerovaného výstupu“ (Rosa, 2023).

Na základě prostudovaných zdrojů lze mezi možné definice umělé inteligence řadit:

**Definice 1.1.**<sup>2</sup> „Umělá inteligence je obor informatiky, který se zabývá vytvářením počítačových systémů, které se chovají jako lidé, tj. systémy, které mají schopnost učit se, rozhodovat, plánovat a rozpoznávat hlas a obraz.“ (OpenAI, 2023).

**Definice 1.2.**<sup>3</sup> „Umělá inteligence zahrnuje vytváření inteligentních strojů, které mohou provádět úkoly, které vyžadují lidskou inteligenci. Tyto úkoly zahrnují učení, rozhodování, plánování a rozpoznávání řeči a obrazu.“ (OpenAI, 2023).

**Definice 1.3.**<sup>4</sup> „Umělá inteligence je obor vědy a technologie, který se zabývá vytvářením počítačových systémů, které mohou provádět úkoly, které obvykle vyžadují lidskou inteligenci. Tyto systémy mohou zahrnovat učení, rozhodování, řešení problémů a adaptaci k novým podmínkám.“ (OpenAI, 2023).

**Definice 1.4.** „Schopnost strojů napodobovat lidské schopnosti, jako je uvažování, učení se, plánování nebo kreativita. Umělá inteligence umožňuje technickým systémům reagovat na vnějš<sup>5</sup> z jejich prostředí, řešit problémy a dosahovat určitých cílů. Zabudovaný počítač přijímá data - která byla již připravena, nebo jsou sbírána pomocí vlastních sensorů a kamer - ty následně vyhodnotí a reaguje na ně.

Systémy umělé inteligence jsou schopné pracovat samostatně a také měnit a přizpůsobovat své jednání na základě vyhodnocení efektů předchozích akcí.“ (Evropský parlament, 2023).

**Definice 1.5.** „Počítačový systém s umělou inteligencí vytváří předpovědi nebo provádí akce na základě vzorů ve stávajících datech a dokáže se učit z vlastních chyb a tím zvyšovat svou přesnost. Vyspělá AI zpracovává nové informace mimořádně rychle a přesně a díky tomu je užitečná pro komplexní scénáře, jako jsou autonomní vozidla, programy pro rozpoznávání obrazu nebo virtuální asistenti.“ (Microsoft Azure, n.d.)

Ačkoliv tyto definice mohou působit velmi podobně, tak v různých oblastech uplatníme některé vlastnosti v nich uvedené více než jiné. Budeme-li hovořit o umělé inteligenci, tak se budeme převážně zaměřovat na vlastnost programu řešit úlohy s využitím pokročilých algoritmů a napodobování lidské inteligence.

Pro účely této práce budeme využívat převážně definici 1.3, protože je nejbližší zaměření této práce, která se zabývá propojením AI a výuky matematiky na střední škole. Nejvíce v této práci půjde o vlastnosti AI v oblasti učení se, tj. o rozhodování, řešení problémů a adaptaci na nové podmínky. Jestliže ale budeme v některé z následujících kapitol mluvit

---

<sup>2</sup> Jedna z definic, kterou o sobě vymyslela sama umělá inteligence. Sestavila o sobě několik různých definic, z nichž každá vyjadřuje trochu jiný pohled na AI.

<sup>3</sup> Jedna z definic, kterou o sobě vymyslela sama umělá inteligence. Sestavila o sobě několik různých definic, z nichž každá vyjadřuje trochu jiný pohled na AI.

<sup>4</sup> Jedna z definic, kterou o sobě vymyslela sama umělá inteligence. Sestavila o sobě několik různých definic, z nichž každá vyjadřuje trochu jiný pohled na AI.

<sup>5</sup> Nejedná se o chybu. Takto je to uvedeno také v originále.

o využití a příkladech AI, tak se můžeme odkázat i na znění jiných definic zde uvedených, než je definice 1.3.

## 1.1 Jaké konkrétní vlastnosti lze považovat za projevy umělé inteligence

Z definic uvedených výše nyní můžeme odvodit několik charakteristických vlastností AI; pokud stroje nebo programy tyto vlastnosti mají, tak je můžeme považovat za jistou formu AI. Nejvíce se budeme odkazovat z uvedených definic na vlastnosti učení, rozpoznávání obrazu, rozhodování, plánování a adaptaci. Mezi konkrétní příklady využití umělé inteligence ve výuce, nyní tedy převážně výuce matematiky na střední škole, patří například modelování prostorových útvarů, rozpoznávání obrazu a řeči a adaptace potřebám jednotlivých žáků.

### 1.1.1 Modelování prostorových útvarů

Modelování prostorových (nebo také rovinných) útvarů pomocí počítačových programů v sobě mimo jiné může zahrnovat i detekci kolizí útvarů, pokud modelujeme složitější obrazce, a rozpoznávání objektů. V takovém případě se jedná o simulace využívající pokročilé algoritmy. Tyto algoritmy se mohou „učit“ (tj. identifikovat charakteristiky a vlastnosti objektů, se kterými pracují), rozpoznávat obraz (obrazce podle vizuálních vlastností), plánovat do budoucna (aby útvar odpovídal požadavkům) nebo adaptovat se (na změny v prostoru, ve kterém pracujeme, ale také měnit útvary dle požadovaných změn).

Modelování objektů pro výuku je pro učitele, kteří mají k dispozici 3D tiskárnu, jedna z možností přípravy výukových materiálů například ve stereometrii. Mezi programy, které modelují objekty a využívají do jisté míry AI, patří například:

- Blender: Jedná se open source software<sup>6</sup> firmy *Blender Foundation*, který se primárně používá k vytváření 3D modelů. Poskytuje ale také spoustu dalších možností, jako jsou animace nebo interaktivní aplikace.
- AutoCAD: Komerční software vyvinutý firmou *Autodesk*, sloužící k 2D a 3D projektování a konstruování. Tento profesionální software se používá převážně v architektuře a strojírenství.
- SolidWorks: Jde o komerční CAD<sup>7</sup> software od firmy *Dassault Systèmes* využívaný převážně ve strojírenství.
- Maya: Jako u ostatních *Autodesk* softwarů se jedná o komerční software pro tvorbu 3D grafiky. Kromě 3D modelů umožňuje také tvorbu 3D efektů nebo her.
- CATIA: Software vyvinutý firmou *Dassault Systèmes*, který se používá převážně v leteckém a automobilovém průmyslu.

Mezi další příklady modelování prostorových objektů patří programy *Ansys*, *ZBrush*, *3D Studio Max*, *Rhino*, *Houdini* nebo *Geomagic Design X*. Většina těchto softwarů se profesionálně využívá převážně ve strojírenství nebo architektuře, mohou být velmi náročné na ovládání a jsou placené. Pořád se ale jedná o modelování prostorových útvarů, které ve

---

<sup>6</sup> Software s volně dostupným zdrojovým kódem.

<sup>7</sup> CAD je zkratka pro „Computer aided design“ (tj. počítačem podporované projektování) nebo také „Computer aided drafting“ (počítačem podporované kreslení).

výsledku může být využito k výuce prostorové geometrie v matematice, a to převážně na průmyslových školách, jako jsou školy stavební nebo strojní, a to z důvodu cenové náročnosti.

Nesmíme ale ani opomenout programy, které nemají tak rozsáhlé možnosti při práci s prostorovými útvary jako již některé zmíněné profesionální programy, ale mohou sloužit při výuce stereometrie k vizualizacím těles a zkoumání jejich typických vlastností. Do této kategorie můžeme zařadit například velmi rozšířené technologie využívané ve výuce matematiky, jako je *GeoGebra* nebo *Wolfram Alpha*.

*GeoGebra* je mezi učiteli a studenty velmi populární software, protože má široké možnosti využití a lze si ho bezplatně stáhnout. Poskytuje interaktivní prostředí pro výuku matematiky, které má možnosti adaptace na základě interakce s uživateli. Ačkoliv software *GeoGebra* nebyl primárně vyvinut pro implementaci umělé inteligence, tak jeho některé vlastnosti lze považovat za prvky AI. Kupříkladu dynamické vazby mezi reprezentacemi matematických objektů umožňují, že změny v jedné části (v nákresně, nebo v algebraickém okně) se automaticky promítají do dalších částí, které s nimi souvisí. Více bude software *GeoGebra* popsán v kapitole 2.5.

*Wolfram Alpha* je považován za vyhledávací stroj, takže zvládne přímo odpovídat na dotazy svých uživatelů. Poskytuje matematické výpočty i vizualizace matematických objektů. Umělá inteligence se zde využívá ke komplexním matematickým výpočtům a analýzám<sup>8</sup>. *Wolfram Alpha* je prezentován jako „Compute expert-level answers using Wolfram’s breakthrough algorithms, knowledgebase and AI technology<sup>9</sup>“ (Wolfram Alpha, 2024).

### 1.1.2 Rozpoznávání obrazu a řeči

Rozpoznávání obrazu, řeči, hlasu a dalších vstupních prvků je přímo uvedeno v definicích 1.1., 1.2. a 1.5., tedy takové softwary můžeme jednoznačně označit za využití umělé inteligence. Rozpoznávání obrazu a řeči ve výuce je velmi důležité, pokud chceme ručně psaný text nebo mluvený projev převést do digitální formy a následně využít asistence od softwaru, což může rovněž být velmi užitečné pro některé žáky se speciálními vzdělávacími potřebami. Jako příklady softwarů s funkcí převádění ručně psaného textu nebo mluveného projevu do digitální formy, které lze využít ve výuce matematiky, můžeme uvést konkrétně:

- Photomath: Tato aplikace vyvíjená společností *Google* pro mobilní zařízení slouží převážně k algebraickým výpočtům. Dokáže velmi dobře rozpoznat matematický text po vyfocení chytrým telefonem, převést ho do digitální formy a následně nejen řešit daný matematický problém, ale také nabídnout detailní postup řešení. Aplikaci si lze bezplatně stáhnout pro zařízení s operačním systémem Android nebo iOS.
- Microsoft Math Solver: Jedná se o program vyvinutý společností *Microsoft* jako webová i mobilní aplikace. Podobně jako u *Photomath* lze zadat i naskenovat matematický problém a aplikace problém vyřeší a nabídne postup. *Microsoft Math*

---

<sup>8</sup> Výraz „matematická analýza“ v tomto případě chápeme jako analýzu komplexních matematických struktur. Ta se například využívá v teorii grafů (pro analýzu vlastností grafů) nebo v teorii množin (pro analýzu vztahů mezi množinami).

<sup>9</sup> Český překlad: Vypočítejte odpovědi na expertní úrovni pomocí přelomových algoritmů, znalostníchází a technologie umělé inteligence od Wolframu.

*Solver* je zdarma dostupný online na webu<sup>10</sup> nebo si ho lze bezplatně stáhnout do zařízení s operačními systémy Android a iOS. Ovšem webová verze postrádá funkce jako je *Sketch Calculator*<sup>11</sup>.

- Dragon NaturallySpeaking: Softwarový balíček vyvinutý společností *Dragon Systems* na rozpoznávání řeči, který může pomoci studentům i učitelům. V současnosti lze software *Dragon* vyzkoušet v různých formách včetně mobilní aplikace. Bohužel nejnovější verze s rozšířenými možnostmi není v současné době zdarma jako předchozí dvě aplikace a například do mobilu stažitelný *Dragon Anywhere* nemá nejlepší ohlasy od uživatelů.

Do budoucna má software pro převádění fotografií a řeči do počítačem upravitelného formátu velký potenciál využitelný nejen ve výuce. Tento software dokáže kupříkladu převést napsaný matematický text do nějaké aplikace a ta může pomoci s řešením problému a poskytnout použitý postup. Rozpoznávání se zároveň čím dál tím více zdokonaluje a dnes už příslušné aplikace dokáží rozpoznat široké spektrum rukopisů<sup>12</sup> nebo matematických symbolů. Rozpoznávání řeči může pomoci ve výuce také žákům se speciálními vzdělávacími potřebami.

### 1.1.3 Adaptace prostředí potřebám jednotlivých žáků

Jedna z charakteristik AI zahrnuje nejen již zmíněné rozpoznávání obrazu a řeči, ale i adaptaci potřebám žáků, kdy umělá inteligence zanalyzuje žákovu práci a danou analýzu následně předá učiteli. Většinou se jedná o využití v situacích, kdy žáci dostanou za úkol vyřešit nějakou sérii úloh, přičemž daná aplikace sbírá data o jejich výkonech, například jaký typ úloh žák zvládá lépe, které hůře, či kolik času na dané úloze strávil a jaké řešení zvolil. Tato data aplikace zpracuje a buď rovnou nabízí další úlohy tak, aby byly adekvátně náročné, nebo alespoň podá analýzu danému učiteli; ten poté bude moci zvolit optimální postup, například výběrem vhodných úloh v hodině. V tomto případě se nejvíce uplatňuje vlastnost AI adaptovat se, kterou explicitně obsahuje definice 1.3. Jako konkrétní příklady aplikací zaměřených na adaptaci potřebám žáků můžeme uvést následující webové portály:

- Code.org<sup>13</sup>: Tento webový portál, který obsahuje možnost přepnutí jazyka i do češtiny, umožňuje zábavnou formou pro žáky různých úrovní zlepšovat jejich vědomosti, převážně z oblasti informatiky, ale také logiky obecně, a to na základě jejich výkonů v různých typech úloh. Učitelé zároveň mohou vidět výsledky žáků a různé jejich statistiky, což pomáhá učitelům zjistit, jak jsou na tom se znalostmi jejich žáci a podle toho adaptovat výuku.
- Umimematiku.cz<sup>14</sup>: Český portál podobný zahraničnímu Code.org, který se ale tentokrát zaměřuje na výuku matematiky. Uživatel zde nalezne podobné možnosti a adaptace, jako tomu bylo u webového portálu *Code.org* (na další předměty se zaměřují jiné webové portály stejných autorů s názvy Umíme česky, Umíme informatiku atd.).

<sup>10</sup> Současná verze je dostupná na odkaze: <https://math.microsoft.com/en>.

<sup>11</sup> *Sketch Calculator* je funkce umožňující prstem nakreslit matematický výraz a ten se přeformátuje do formátu, který lze následně pomocí klávesnice upravit.

<sup>12</sup> Je tím myšleno rozpoznání i hůře čitelných rukopisů.

<sup>13</sup> Dostupné na odkaze: <https://code.org/>.

<sup>14</sup> Dostupné na odkaze: <https://www.umimematiku.cz/>.

- Khan Academy<sup>15</sup>: Webový portál, který poskytuje adaptivní lekce v různých oblastech, jako je například matematika, fyzika, biologie atd. Sleduje žákův postup a dle jeho schopností a potřeb se adaptuje. Pro učitele je zde možnost „založit si třídu“ a sledovat postup a výsledky svých žáků.
- IXL<sup>16</sup>: Tento zahraniční webový portál nabízí úlohy z různých školních předmětů, jako je matematika, angličtina, španělština a mnoho dalších, a to od předškolního vzdělání až po výuku na střední škole. Nabízí podrobnou zpětnou vazbu jak samotnému žákovi, tak učiteli. Bohužel v současné době není dostupný v českém jazyce.

Uvedené webové portály umožňují učitelům přizpůsobit výuku v různých předmětech podle zpětné vazby založené na výkonech jednotlivých žáků, která vychází z analýzy odpovědí uživatelů provedené algoritmy těchto webů.

## 1.2 Užití umělé inteligence v reálném světě

Umělá inteligence se samozřejmě neomezuje pouze na využití ve vzdělávání, ale také nachází uplatnění i v dalších odvětvích a oborech. Řada webů nebo některých elektronických zařízeních používá do jisté míry nástroje AI, aniž bychom si to uvědomovali, a jejich využití se stále rozšiřuje. Jde převážně o urychlení a usnadnění každodenních aktivit v reálném světě.

Jako jedno z odvětví, kde umělá inteligence pomáhá usnadnit práci, je strojírenský průmysl. Zde zavedená robotizace (tzn. integrace automatických robotů do výrobních procesů) monitoruje výrobní procesy a snaží se je co nejlépe optimalizovat tak, aby výroba byla co nejefektivnější a ekonomicky nejúspěšnější. Dalším odvětvím je bankovníctví, kde se využívá vlastnost umělé inteligence adaptovat se a předvídat budoucí vývoj finančních situací pro analýzu a predikci trhu. Zdravotnictví je též oblastí, kde se čím dál tím více využívá AI k diagnostice onemocnění na základě různých medicínských dat nebo k predikci ideálních personalizovaných léčeb jednotlivých pacientů. Mezi v současnosti nejvíce rozšířená a diskutovaná odvětví, kde se využívá umělá inteligence, patří vývoj chatbotů a autonomních vozidel.

### 1.2.1 Autonomní vozidla

V současné době do konceptu využití umělé inteligence v autonomních vozidlech<sup>17</sup> investuje firma Tesla. Ta dnes do svých vozů implementuje široké spektrum různých asistentů, kteří řidičům pomáhají s různými úkony od parkování po samotné řízení. Tito asistenti se neustále zdokonalují. Již dnes dokáží například kromě zajištění plynulé jízdy analyzovat různé překážky na cestě při řízení i parkování, a to i ve tmě a na větší vzdálenost, předpovědět jejich pohyb a zvolit nejlepší způsob, jak se jim vyhnout.

Tesla ale není jediná automobilová firma, která investuje do tohoto oboru. Virtuální asistenti v nějaké formě jsou tu s námi již dlouhou dobu, ale s nárůstem financí proudící do jejich vývoje, se v posledních letech hodně vyvíjejí. Do budoucna má dojít ke zlepšení podoby

<sup>15</sup> Dostupné na odkaze: <https://cs.khanacademy.org/>.

<sup>16</sup> Dostupné na odkaze: <https://www.ixl.com/>.

<sup>17</sup> Označuje takové vozidlo, které je schopno se samo pohybovat bez lidského zásahu.

virtuálních asistentů jako takových, aby mohli mít jedinečnou identitu dle svých řidičů a mohli plynule využívat ke komunikaci řeč a ve své virtuální podobě i výrazy obličeje a gesta.

### 1.2.2 Chatboti

Za samostatné odvětví digitálních asistentů můžeme považovat chatboty. Chatboti jsou v podstatě programy nebo softwarové aplikace, které komunikují s uživateli pomocí psaného textu či mluveného slova a mají za úkol simulovat konverzaci. Někdy jsou zaměňováni za digitální asistenty a asistentky, jako je například Alexa nebo Siri<sup>18</sup>, které do jisté míry rozumí lidské řeči nebo příkazům a dokáží například poskytovat informace o počasí, nastavovat upozornění a mnoho dalších způsobů asistence.

Dnes chatboti svedou řadu různých úkonů. Zvládají například psát a opravovat počítačový kód v různých programovacích jazycích. V několika různých jazycích dokáží odpovídat na dotazy, poskytovat informace a řešit problémy. Přes to všechno se ale stále žádnému z nich dosud nepodařilo projít Turingovým testem<sup>19</sup>, a tak nemohou být považováni za již zmíněnou silnou umělou inteligenci.

Rozvoj vlastností chatbotů nabízí i jejich větší uplatnění ve školství a výuce pro žáky i učitele, a to nejen v matematice. AI může například řešit i obtížnější matematické úlohy, ať už početní nebo geometrické, a je zároveň schopna odpovídat na dotazy a vysvětlovat pojmy, čímž může usnadnit studentům pochopení látky z různých předmětů.

Neustálé zdokonalování chatbotů sebou ale nese i problémy. Například může být obtížné poznat, zda domácí úkol, seminární práci nebo odpovědi v testu skutečně vypracoval žák nebo využil umělou inteligenci. Pomoci mohou některé současné nástroje, které se zaměřují na identifikaci typického chování AI a znaků v textu vygenerovaném umělou inteligencí. Na základě toho mohou tyto nástroje rozpoznat, zda se na vypracování úlohy nemohla podílet umělá inteligence.

Různé webové portály a firmy si vytvářejí své vlastní chatboty pro asistenci svým zákazníkům. Může se jednat o pomoc, aby zákazník našel přesně zboží, které hledá, nebo mohl již zakoupené zboží reklamovat, případně zprostředkovat odpovědi na různé druhy dotazů. Pokud chatbot nedokáže zákazníkovi pomoci, tak je obvykle zákazník přeměrován na skutečnou osobu z oddělení zákaznické podpory. Toto odvětví chatbotů ale není tak sofistikované, protože jejich možnosti jsou limitovány na pomoc se záležitostmi týkající se například konkrétního e-shopu a většinou se sami nevyvíjejí, ale vycházejí z pevně daných skriptů vytvořených jejich programátorem.

Nelze říci, který chatbot je nejlepší, neboť na různých platformách mají různá zaměření a mohou sloužit k různým účelům. V současné době nelze opomenout bezplatné chatboty, jako je například *ChatGPT*<sup>20</sup>, umělá inteligence vyvinutá firmou *OpenAI*, nebo *Gemini*, chatbot od

---

<sup>18</sup> Asistentku jménem Alexa využívá firma Amazon ve svých zařízeních, zatímco Siri ve svých zařízeních využívá firma Apple.

<sup>19</sup> "Turingův test je vlastně představován imitační hrou, kde ve dvou oddělených prostorách sedí lidský tazatel na jedné straně a lidský a umělý odpovídající na straně druhé. ... Prostory jsou odděleny. Tazatel pokládá otázky v přirozeném jazyce a zpoza plenty obdrží na svoji otázku opět v přirozeném jazyce odpověď. Pokud tazatel nedokáže rozlišit, zda odpověděl člověk, nebo stroj, splnil stroj Turingův test." (Šnábl, n.d.)

<sup>20</sup> Momentální nejvyšší bezplatná verze je 3.5 a je dostupná na odkaze: <https://chat.openai.com/>.

společnosti *Google*. Oba slouží pro poskytování informací a asistenci v mnoha oblastech lidské činnosti. Velmi podobný je tzv. *Grok*, který nabízí ještě širší možnosti než *ChatGPT* a *Gemini*, ale v současné době je bohužel dostupný v předběžném přístupu pouze pro ověřené uživatele na platformě X, protože je touto platformou také vyvíjen. Mezi další příklady chatbotů, které využívají umělou inteligenci pro generování odpovědí při konverzaci s uživatelem, patří například *Google Assistant* (Google) nebo *Cortana* (Windows), sloužící pro pomoc na platformách, pro které byly vyvinuty.

### 1.3 Využití umělé inteligence ve společenských a přírodních vědách

Ani u běžného života a matematiky využití umělé inteligence nekončí. Umělá inteligence nalézá široké využití takové v dalších vědních oborech. Jeden ze způsobů, jak vědy rozčlenit, je na společenské a přírodní vědy. Využití AI ve výuce matematiky bude věnována druhá a třetí kapitola.

#### 1.3.1 Společenské vědy

Ve společenských, nebo též sociálních, vědách je hlavním subjektem člověk a dění kolem něj. Předmětem studia je člověk ve společnosti, jeho chování a způsob přemýšlení v různých společenských skupinách a situacích. Společenské vědy zahrnují například politologii, ekonomii nebo psychologii. Je třeba podotknout, že využití AI ve společenských vědách je ještě mnohem širší než jen příklady, které si zde uvedeme.

V politologii může umělá inteligence sbírat různá politická data, jako jsou volební preference, názory veřejnosti na různá témata nebo trendy, a na základě toho například předpovídat, kolik by jaká strana mohla získat hlasů ve volbách. V ekonomii lze analyzovat stav ekonomiky v různých státech, ceny akcií nebo trendy na různých trzích a na základě toho předpovídat jejich další vývoj. Další analýzy může AI provádět napříč různými spektry, jako je chování člověka, a na základě toho udělat predikci jeho vývoje nebo také v případě konkrétní společnosti provést analýzu pravděpodobnosti zvýšení kriminální činnosti, či jak se bude vyvíjet v daném území nezaměstnanost, případně může sledovat další společenské aspekty.

Využití umělé inteligence v oblasti společenských věd vychází z analýzy dat, kterou provádí AI a na základě toho predikuje vývoj různých jevů ve společnosti. To ovšem neznamená, že nejsou využity i jiné aspekty nebo pokročilé algoritmy nezaměřující se čistě na analýzu dat.

Mezi konkrétní příklady firem, které využívají AI k analýze dat ve společnosti a k následné predikci budoucích jevů, je například firma *Geolitica* (dříve známá pod jménem *PredPol*), která se zabývá predikcí majetkové trestné činnosti.

Dále si lze uvést i konkrétní software, který analyzuje data o člověku. Například software *LIWC-22* dokáže analyzovat text a na základě toho vyvodit výsledek, jenž by měl vést k lepšímu “porozumění myšlenkám, pocitům, osobnosti a způsobu, jak se spojit ostatními a poskytnout pohled na lidi a svět kolem nás, který jsme nikdy předtím neměli” (LIWC, n.d.).

### 1.3.2 Přírodní vědy

Stručně lze říci, že přírodní vědy zkoumají zákony, kterými se řídí svět kolem nás. Můžeme sem zařadit vědní obory, jako je například biologie, fyzika nebo chemie. Opět si uvedeme pouze pár příkladů ze širokého spektra využití umělé inteligence v přírodních vědách.

Jak již bylo řečeno, tak například v biologii lze pomocí AI analyzovat genetické vzorce<sup>21</sup> a předpovídat některá dědičná onemocnění. V dalších přírodních vědách dokáže umělá inteligence kupříkladu analyzovat různé klimatické modely a různé typy dat z vesmíru. AI kromě vlastnosti analyzovat data využívá schopnost rozpoznávat objekty z fotografií a videí. Například do jisté míry dokáže identifikovat konkrétní druhy rostlin, ptáků, savců, ale i dalších organismů.

V chemii se pomocí umělé inteligence analyzují a vyvozují vlastnosti různých chemických sloučenin a v biochemii AI dokáže sledovat pohyby molekul a jejich vzájemné interakce, což je využitelné při vývoji nových léků.

Fyziku lze propojit s robotikou, kde AI hraje klíčovou roli. Samotná vlastnost robota vidět a rozpoznávat objekty a jejich charakteristiky vychází z vlastností umělé inteligence, jak již bylo uvedeno. AI rozpoznává také zvuk, aby mohla přijímat hlasové příkazy, nebo zajišťuje pohyb v závislosti na okolních objektech, které před tím analyzuje. Prakticky jakékoliv činnosti, které roboti vykonávají<sup>22</sup>, můžeme spojit do jisté míry s využitím umělé inteligence, protože tyto dva obory jsou silně provázány a stále se vyvíjí.

Jako konkrétní příklady softwarů, které v přírodních vědách využívají AI, můžeme uvést bezplatný software *Gromacs* (software s otevřeným zdrojovým kódem vyvinutý na univerzitě v Groningenu v Nizozemsku), který slouží k simulaci chování proteinů, lipidů a nukleových kyselin. Dále se ve fyzikálním výzkumu využívá software *Geant4* sloužící k simulování průchodu částic hmotou, který je jedním z řady nástrojů poskytnutých vědeckou sítí GEANT.

V oblasti biologie lze využívat bezplatný software s otevřeným kódem s názvem *CellProfiler*, designovaný pro biology neškolené v oblasti programování, aby byli schopni kvantitativně měřit fenotypy<sup>23</sup> z velkého množství pořízených snímků.

---

<sup>21</sup> Tento termín budeme chápat jako určité sekvence nebo vzory nukleotidů v molekulách DNA nebo RNA.

<sup>22</sup> Zde nemusíme hovořit jen o vyspělých robotech schopných pohybu a vykonávat složité úkony, ale dnes i někteří roboti v domácnosti využívají do jisté míry prvků umělé inteligence pro splnění úkolů, které jim byly zadány.

<sup>23</sup> "Fenotyp je soubor všech pozorovatelných vlastností a znaků živého organismu. Fenotyp představuje výsledek spolupůsobení genotypu, epigenetiky a prostředí, které určují, jak bude organismus v daném znaku nakonec vypadat." (Wikimedia Foundation, 2023a).



## 2 Umělá inteligence ve výuce matematiky na střední škole

V této kapitole se budeme zabývat využitím některých informačních technologií ve výuce matematiky. Tyto technologie, které již byly zmíněny v předchozí kapitole, budou zde rozebírány více do detailů, pokud mají funkce nebo možnosti, které výraznou měrou přispívají k výuce řešeného tématu. V rámci kapitoly budeme často využívat chatbota *ChatGPT* verze 3.5, který v současnosti patří mezi více vyvinuté chatboty a je zároveň bezplatný.

Tato práce je zaměřena na středoškolskou matematiku, proto její vzdělávací obsah rozdělíme do 5 okruhů dle současně platného RVP G (MŠMT, 2007). V RVP G se speciálním zaměřením (jako jsou kupříkladu gymnázia se sportovní přípravou nebo dvojjazyčná gymnázia) nebo v RVP pro střední odborné školy technického zaměření se často tyto vzdělávací obsahy příliš neliší. V RVP G pro vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je vzdělávací obsah rozdělen do 5 tematických celků:

- Argumentace a ověřování,
- Číslo a proměnná,
- Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost,
- Závislosti a funkční vztahy,
- Geometrie.

Dále je každý z těchto 5 tematických celků rozdělen na **učivo**, které je závazné, a **očekávané výstupy** (žáka).

Každá následující podkapitola bude zaměřena na jeden z pěti tematických celků v rámci vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace dle RVP G<sup>24</sup>. Ukážeme zde, jaký software nebo platformu s prvky AI lze v nich využít a zda umělá inteligence, konkrétně chatbot, dokáže sama realizovat očekávané žákovské výstupy uvedené v příslušném tematickém okruhu RVP G.

Z důvodu dodržení rozumného rozsahu práce budou vždy z očekávaných výstupů dle RVP G vybrány jen dva až tři, které jsou například zajímavé z hlediska využití AI, a některá učiva v tematických okruzích mohou být sloučena (např. výroky a množiny), pokud spolu souvisejí. Očekávané výstupy budou ilustrovány na několika příkladech, avšak tyto příklady nepokrývají všechny možnosti daných informačních technologií.

### 2.1 Argumentace a ověřování

Množiny (konkrétně inkluze, rovnost množin a operace s množinami) a základy matematické teorie (pojmenované v RVP G jako „základní poznatky z matematiky“, ke kterým se řadí, co je to výrok, definice, věta a důkaz) patří společně s výrokovou logikou do učiva prvního tematického okruhu vzdělávacího obsahu RVP G.

Ve výuce množin lze využívat grafické reprezentace vztahů mezi množinami (Vennovy diagramy), symbolické reprezentace (zápis množinových operací) či řešit slovní úlohy. Pro každou z výše uvedených reprezentací či pro řešení slovních úloh lze nalézt výukový software, který využívá prvky umělé inteligence.

---

<sup>24</sup> V následujících podkapitolách 2.1 až 2.5 jsou očekávané výstupy citovány přesně dle RVP G (MŠMT, 2007, s. 23-25).

Co se týče **učiva**, tak s vysvětlením matematických pojmů, jako je pojem definice či množina, mohou pomoci chatboti *ChatGPT* a *Gemini* (viz 1.2.2), kteří zvládají pojmy vysvětlovat na konkrétních příkladech. Jejich komunikační úroveň v českém jazyce jim umožňuje porozumět, jaký problém chce uživatel řešit.

Existuje také velké množství různých technologií s podporou umělé inteligence, které lze využít ve výuce množin, případně výrokové logiky; např. *GeoGebra*, *Wolfram Alpha* nebo *IXL* (kapitola 1.1.1). Nyní si uvedeme další příklady platforem s prvky umělé inteligence použitelných ve výuce množin a výrokové logiky.

*Brilliant*<sup>25</sup> je bezplatná (obsahuje ale také placenou verzi Premium, se kterou má uživatel více možností) vzdělávací online platforma dostupná i na mobilních zařízeních s operačními systémy Android a iOS. Platforma nabízí různé interaktivní lekce, cvičení a kurzy, které se dokáží dle dovednosti žáka adaptovat. Tato platforma má svou vlastní sekci věnovanou právě množinám a výrokové logice a k jejich výuce využívá již zmíněný adaptivní a interaktivní přístup. Platforma je také zajímavá tím, že nabízí komunikaci mezi žáky, aby mezi sebou mohli diskutovat o problémech a sdílet svá řešení.

Mezi další příklady softwarů a platforem s prvky AI, které se dají využít k výuce množin a výrokové logiky, patří systém *Algebrator*<sup>26</sup> nebo platforma *Smart Sparrow*<sup>27</sup>. Tyto systémy nemají přímo sekce věnované výuce množin, ale dokáží řešit různé úlohy zaměřené na množiny a obsahují také materiály, které mohou pomoci s vysvětlením tohoto tématu.

V **očekávaných výstupech** se zaměříme na to, zda umělá inteligence zvládá realizovat, resp. napodobovat očekávané výstupy žáka dle vzdělávacího obsahu v tématu Argumentace a ověřování. Pro ukázkou si zvolíme tyto tři konkrétní žákovské výstupy:

- rozliší definice a větu, rozliší předpoklad a závěr věty,
- vytváří hypotézy, zdůvodňuje jejich pravdivost a nepravdivost, vyvrací nesprávná tvrzení,
- zdůvodňuje svůj postup a ověřuje správnost řešení problému.

### 2.1.1 Rozlišení definice a věty, předpokladu a závěru věty

Umělá inteligence dokáže již v současnosti většinou rozlišit definici a větu a u vět ve tvaru implikace určí předpoklad a závěr. Avšak například v malém počtu příkladů může v komplexnějších matematických větách chybně vyvodit předpoklad nebo závěr. Dále zde uvedeme na ukázkou pouze jeden příklad věty a definice. Chatbot *ChatGPT* dostal následující dotazy na matematickou větu a definici:

**Příklad 2.1.** Mějme dáno: „Funkce na množině  $D \subset \mathbb{R}$  je předpis, který každému číslu z množiny  $D$  přiřazuje právě jedno reálné číslo.“. Jedná se o matematickou větu nebo definici?

U příkladu 2.1 chatbot uvedl, že se jedná o matematickou definici. Věděl také, že se jedná o definici funkce a sám definici „vlastními slovy“ přepsal jako: „*Funkce je matematický*

<sup>25</sup> Momentálně je platforma dostupná na odkaze: <https://brilliant.org/>.

<sup>26</sup> Online dostupný na odkaze: <https://softmath.com/>.

<sup>27</sup> Momentálně je platforma dostupná na odkaze: <https://www.smartsparrow.com/>.

*předpis, který každému prvku<sup>28</sup> z definiční množiny (v tomto případě množina  $D$ ) přiřazuje právě jedno prvek z oboru hodnot (v tomto případě množina reálných čísel)*“.

**Příklad 2.2.** Mějme dáno: „Jestliže obvodový úhel je sestrojen nad průměrem kružnice, pak je pravý.“. Jedná se o matematickou větu nebo definici?

V příkladu 2.2 na rozlišení věty a definice *ChatGPT* odpověděl, že „*Tato věta nebo pravidlo se obvykle označuje jako „Věta o obvodovém úhlu nad průměrem kruhu*“.“. Dále uvedl, že „*Většinou je to prezentováno jako samostatné tvrzení*“. Tedy v podstatě rozpoznal větu, avšak nedokázal identifikovat, že se jedná o jednu z možných formulací Thaletovy věty<sup>29</sup>. Nakonec byl dotázán, jaký je předpoklad a závěr této věty. Předpoklad věty určil takto: „*Je dán kruh a jeho průměr*.“ Závěr následně určil jako: „*Každý obvodový úhel sestrojený nad tímto průměrem je pravý (rovný 90 stupňů)*“. Předpoklad a závěr věty nejsou v tomto případě správně zformulovány.

Z těchto dvou příkladů vyplývá, že v daných situacích a jim podobných dokáže *ChatGPT* do jisté míry rozlišit mezi větou a definicí (v prvním případě poznal, že se jedná o definici, zatímco v druhém případě váhal „mezi větou a tvrzením“). Nelze to však tvrdit pro všechny možné situace. Na základě naší zkušenosti s chatbotem lze uvést, že u vět ve tvaru implikace je *ChatGPT* schopen identifikovat předpoklad a závěr s různou mírou úspěšnosti.

### 2.1.2 Vytváření hypotéz a posuzování pravdivosti tvrzení

Nyní na několika případech ukážeme, zda AI rozpozná hypotézu, vytvoří hypotézu a zdůvodní pravdivost či nepravdivost své vlastní hypotézy. Opět budou tyto vlastnosti zkoumány u chatbota *ChatGPT*.

Následující příklady budou většinou přesahovat rámec středoškolské matematiky, avšak tyto úlohy ukazují zajímavé dovednosti umělé inteligence.

**Příklad 2.3.** Je pravda, že každé sudé číslo větší než 2 lze vyjádřit jako součet dvou prvočísel?

U tohoto příkladu 2.3 *ChatGPT* správně poznal, že se jedná o Goldbachovu hypotézu, ke které zatím neexistuje obecný matematický důkaz. K tomu přidal jako dodatek pokus o důkaz matematika Haralda Helfgotta.

Ačkoliv *ChatGPT* dokáže rozeznat známé matematické hypotézy, včetně Problémů tisíciletí<sup>30</sup>, tak může z důvodu jazykových nepřesností dojít k nejasným odpovědím. Jedna z těchto nepřesných odpovědí se vyskytla, když chatbot dostal otázku z příkladu 2.4.

**Příklad 2.4.** Je pravda, že všechny netriviální nulové body Riemannovy funkce zeta mají reálnou část rovnu  $1/2$ ?

Na tuto otázku chatbot odpověděl: „*Ano, tvrzení, které jste uvedl, je známé jako Riemannova hypotéza (Riemann Hypothesis)*. ...“. Z této odpovědi by si mohl uživatel

<sup>28</sup> Zde se *ChatGPT* dopustil chyby v českém jazyce. Chyby se také dopustil ve slovním spojení „*právě jedno prvek*“.

<sup>29</sup> I přes méně obvyklou formulaci Thaletovy věty (oproti jedné z učebnic matematiky: „*Vrchol  $C$  trojúhelníku  $ABC$  leží na kružnici nad průměrem  $AB$  právě tehdy, když trojúhelník  $ABC$  je pravouhlý s pravým úhlem při vrcholu  $C$* .“ (Molnár, et al., 2000, s. 89)) chatbot tuto větu nedokázal konkrétně pojmenovat.

<sup>30</sup> Do problémů tisíciletí patří sedm matematických problémů, které vyhlásil Clayův institut jako nejdůležitější otevřené problémy současné matematiky (Wikimedia Foundation, 2023b).

nesprávně vyvodit, že původní tvrzení je pravdivé, přestože se dosud nepodařilo tuto hypotézu dokázat. Přesto na závěr *ChatGPT* uvedl, že „*I přes mnoholeté úsilí matematiků nebyla Riemannova hypotéza dokázána, ani vyvrácena.*“. Chatbot tedy dokázal posoudit pravdivost tohoto tvrzení.

Pro ověření výstupu zformulování vlastních hypotéz dostala umělá inteligence následující příklad.

**Příklad 2.5.** Vytvoř svou vlastní hypotézu, která dosud nebyla zformulována a není někomu přisuzována.

Chatbot přišel s předpokladem: „*Nechť  $P(n)$  označuje počet prvočísel menších nebo rovných  $n$ , a  $F(n)$  označuje Fibonacciho posloupnost do  $n$ -tého členu.*“ a následnou hypotézou: „*Existuje nekonečně mnoho přirozených čísel  $n$ , pro která platí, že  $P(n)$  a  $F(n)$  jsou obě prvočísla.*“. I přes průzkum na různých webových portálech a hledání tvrzení podobného znění se nepodařilo nalézt žádnou známou hypotézu s touto specifikací, proto lze říci, že je umělá inteligence schopna vytvářet vlastní matematické hypotézy.

**Příklad 2.6.** Zformuluj vlastní hypotézu a následně dokaž její správnost.

V příkladu 2.6, přišel chatbot s odpovědí: „*Součet prvních  $n$  lichých čísel v aritmetické posloupnosti s prvním členem  $a$  a diferencí  $d$  lze vyjádřit vzorcem  $\frac{n(2a+(n-1)d)}{2}$ .*“ Tuto „hypotézu“<sup>31</sup> následně *ChatGPT* dokázal přes vzorec pro součet prvních  $n$  členů aritmetické posloupnosti a ukázal platnost na konkrétním příkladu.

Dále zkusíme, zda AI dokáže vyvracet nepravdivá tvrzení. Pro ukázkou bylo zvoleno nepravdivé tvrzení v příkladu 2.7.

**Příklad 2.7.** Odmocnina ze dvou je racionální číslo. Je toto tvrzení pravdivé?

Chatbot správně odpověděl: „*Tvrzení, že odmocnina ze dvou je racionální číslo, je nepravdivé. Odmocnina ze dvou je iracionální číslo.*“. Podotkněme, že existuje velké množství tvrzení, a tak nelze vyloučit, že by v některém z nich nemohla umělá inteligence udělat chybu v posouzení pravdivosti. Na základě zkušeností můžeme říci, že ve většině případů, zvláště u těch jednoduchých, resp. obecně známých, AI příliš často nechybje.

Z výše uvedených příkladů lze vyvodit, že umělá inteligence do jisté míry dokáže sestavit dosud nezformulované hypotézy nebo identifikovat některé již zformulované. K tomu ještě zvládá posuzovat pravdivost daných matematických tvrzení. I přes správnost odpovědí v uvedených příkladech ale nelze hovořit o tom, že by *ChatGPT* byl v tomto výstupu bezchybný. Byla ukázána i nepřesnost, které se dopustil; více chyb by bylo možné odhalit s vyšším počtem testovacích dat.

### 2.1.3 Zdůvodňování postupu a ověření správnosti řešení

Dle typu řešeného matematického problému uplatňujeme různé postupy. Některé postupy mohou být algebraické s využitím algebraických operací a vzorců, včetně úpravy rovnic. V jiných případech lze zvolit například geometrický postup, který se zaměřuje na

---

<sup>31</sup> Nejedná se přímo o hypotézu, ale o aplikaci známého vztahu pro součet prvních  $n$  členů aritmetické posloupnosti.

geometrické vlastnosti a vztahy mezi danými objekty. V této kapitole ukážeme, jak chatbot řeší příklady algebraickým postupem.

**Příklad 2.8.** Vyřeš kvadratickou rovnici  $2x^2 + 4x - 16 = 0$ .

V prvním kroku řešení příkladu 2.8 chatbot správně rozlišil kvadratický, lineární a absolutní člen v dané rovnici a následně aplikoval formuli  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  na výpočet kořenů kvadratické rovnice. Po dosazení získal korektní výsledek 2 a  $-4$ . Je ale potřeba zmínit až zmatečné odpovědi ze strany *ChatGPT* v případě, kdy byl požádán o vysvětlení částí svého postupu. Na dotaz „Proč jsi použil kvadratickou formuli?“ se omluvil za zbytečné složitosti a kvadratickou rovnici vyřešil pomocí Viětových vzorců. U tohoto řešení byl dotázán, jak převedl výraz  $x^2 + 2x - 8$  na tvar  $(x + 4)(x - 2)$ . Opět se omluvil za „chybu ve svém předchozím vysvětlení“ a provedl rozklad na „součin pomocí binomických výrazů  $(x + m)(x + n)$ “.

V rámci uvedeného výstupu dle RVP G by měla být umělá inteligence ještě schopna ověřit správnost řešení problému. Pro ukázkou jsme zvolili příklad 2.9, ve kterém jsme během řešení problému chybně postupovali a došli jsme tak k neúplnému výsledku.

**Příklad 2.9.** Máme vypočítat  $x$  z nerovnice  $\frac{2x+5}{2-x} \geq 0$ . Vynásobil jsem obě strany nerovnice výrazem  $(2 - x)$ , nerovnici upravil a vyšlo mi, že  $x \geq -\frac{5}{2}$ . Je toto správný postup a výsledek?

*ChatGPT* sice na začátku své odpovědi upozornil na chybu ve výsledku, nakonec ale provedl stejný chybný postup, jako byl v zadání příkladu, a chybný výsledek potvrdil jako správný.

Dle příkladů 2.8 a 2.9 lze říci, že umělá inteligence při řešení některých matematických problémů dokáže dojít k výsledku a uvést různé způsoby řešení. Komplikace ale často přichází, když je AI konfrontována se svým řešením, resp. požádána o zdůvodnění postupu. Zdá se, že umělá inteligence automaticky předpokládá, že udělala chybu a snaží se to řešit uvedením jiného postupu.

To, jak umělá inteligence řeší matematické problémy a kde má nedostatky, bude uvedeno v kapitole 3.

## 2.2 Číslo a proměnná

Druhý tematický okruh vzdělávací obsahu dle RVP G je rozsáhlý a nese název Číslo a proměnná. Učivo tohoto okruhu zahrnuje číselné obory (přirozená, celá, racionální a reálná čísla), mocniny (mocniny s přirozeným, celým a racionálním exponentem, odmocniny), výrazy s proměnnými (mnohočleny, lomené výrazy, výrazy s mocninami a odmocninami) a rovnice a nerovnice (lineární rovnice, nerovnice a jejich soustavy, kvadratická rovnice).

Z hlediska **učiva** se zde zaměříme na rovnice a nerovnice. Práce s mocninami a číselnými obory v nich bude částečně zahrnuta tím, že zmíněné aplikace dokáží počítat i s mocninami; rovněž se lze u rovnic zaměřit také na rozdíly v počtu řešení v různých číselných oborech.

S výukou rovnic a nerovnic mohou pomoci aplikace s prvky umělé inteligence, např. *Cymath*<sup>32</sup> a *Symbolab*<sup>33</sup>. V obou těchto případech se jedná o online kalkulačky, které mají více možností ve formě mobilních aplikací (např. na základě fotografie zadání vyřeší daný příklad). V online prostředí mají obě tyto aplikace podobné možnosti. Po zadání výrazu se pokusí úlohu vyřešit, ukázat postup a případně zobrazit grafické řešení. Umělou inteligenci tyto aplikace používají převážně v mobilní aplikaci pro převedení fotografie se zadáním úlohy do digitální formy. Obě aplikace jsou bezplatné, ale zároveň mají pokročilejší nástroje, které jsou dostupné za poměrně nízkou částku<sup>34</sup>. Většina uživatelů si ale vystačí s bezplatnými verzemi, protože ty samy o sobě mají dostatečné funkce.

Přestože jsou si aplikace dosti podobné, tak se v některých vlastnostech liší. Rozhráním se *Cymath* primárně zaměřuje na co nejjednodušší použití a výsledky poskytuje ve formě konkrétních čísel, zatímco *Symbolab* má rozhraní pokročilejší a může poskytovat symbolická řešení<sup>35</sup>, což může být užitečné pro studenty, kteří potřebují podrobnější analýzu řešení problému. Dalo by se říci, že *Symbolab* má pokročilejší funkce než *Cymath*, ale záleží především na osobních preferencích uživatele.

Existuje více aplikací nebo platforem, které řeší rovnice nebo nerovnice a následně zdůvodní svůj postup a ukáží grafické řešení. Umělou inteligenci při řešení těchto matematických úloh využívají také již zmíněné *Wolfram Alpha* nebo *Photomath*. Těm se budeme věnovat v dalších kapitolách.

**Očekávané výstupy** (ze strany žáka) jsou opět velmi rozsáhlé (10 výstupů) a proto pro dodržení rozumného rozsahu práce zvolíme dva výstupy, na kterých budeme sledovat, zda je umělá inteligence dovede realizovat a tím pádem by mohla pomoci i při jejich výuce. Zvolené výstupy žáka budou:

- rozkládá mnohočleny na součin vytýkáním a užitím vzorců, aplikuje tuto dovednost při řešení rovnic a nerovnic,
- řeší lineární a kvadratické rovnice a nerovnice, řeší soustavy rovnic, v jednodušších případech diskutuje řešitelnost nebo počet řešení.

### 2.2.1 Rozkládání mnohočlenů na součin

Budeme testovat, zda umělá inteligence dokáže splnit očekávaný výstup „(žák) rozkládá mnohočleny na součin vytýkáním a užitím vzorců, aplikuje tuto dovednost při řešení rovnic a nerovnic“ (MŠMT, 2007, s. 23). I v tomto případě využijeme chatbota *ChatGPT* z důvodu, že zmíněné aplikace *Cymath* a *Symbolab* (i podobné aplikace, které jsme uváděli) často zvolí jiný postup řešení rovnice, než je rozklad na součin. Chatbotu můžeme zadat, aby rovnicí řešil rozkladem na součin a zkoumat jeho postup. Ukážeme, jak si umělá inteligence

<sup>32</sup> Online kalkulačka dostupná na odkaze: <https://www.cymath.com/>.

<sup>33</sup> Online kalkulačka dostupná na odkaze: <https://www.symbolab.com/>.

<sup>34</sup> U *Cymath* se jedná o 5 dolarů měsíčně (nabízí žádné reklamy, detailní krokování, vysvětlení kroků a dodatečné materiály) a u *Symbolab* se lze dostat na cenu 2,49 dolarů za měsíc při ročním plánu (nabízí podobné možnosti jako verze Premium u *Cymath*, ale ještě například s dodatečnou pomocí od AI).

<sup>35</sup> To znamená, že *Cymath* poskytuje výsledek vyjádřený číselnou hodnotou, zatímco *Symbolab* zahrnuje různé formy odpovědi ve formě matematických symbolů, proměnných nebo funkcí.

poradí s rozkladem mnohočlenu na součin a následným vyřešením kvadratické rovnice na třech příkladech. Na každém z těchto příkladů ukážeme, kde AI exceluje a kde naopak dělá chyby.

**Příklad 2.10.** Vyřeš rovnici rozkladem na součin:  $x^2 - 4x + 4 = 0$ .

V tomto příkladě 2.10 *ChatGPT* správně rozložil výraz na levé straně kvadratické rovnice na  $(x - 2)(x - 2)$ , neboli  $(x - 2)^2$ . Odtud vyvodil, že „*jediným řešením této rovnice je  $x = 2$  s násobností 2. Rovnice má dvojnásobný kořen  $x = 2$ .*“. Sám chatbot ve své odpovědi také uvedl, že lze výraz doplnit na čtverec.

**Příklad 2.11.** Vyřeš nerovnici rozkladem na součin:  $x^2 - 9x + 14 < 0$ .

V tomto příkladu 2.11 rozložil chatbot výraz na levé straně nerovnice na součin  $(x - p)(x - q)$ , kde  $p$  a  $q$  jsou kořeny odpovídající rovnice. Pomocí koeficientů kvadratického trojčlenu našel dvě čísla, jejichž součet je  $-9$  a součin  $14$ , což jsou čísla  $-2$  a  $-7$ . Na závěr určil znaménka dvojčlenů v jednotlivých intervalech (vymezených nulovými body  $2$  a  $7$ ) a přišel se správným výsledkem, že řešením této kvadratické nerovnice jsou čísla  $x$ , kde  $x \in (2, 7)$ .

**Příklad 2.12.** Vyřeš rovnici rozkladem na součin:  $2x^2 - 6x - 20 = 0$ .

Při řešení příkladu 2.12 lze na levé straně rovnice vytknout číslo  $2$  a následně využít Viètovy vzorce pro rozklad kvadratického trojčlenu na součin  $2(x - 5)(x + 2)$ , z čehož již vyplývají kořeny  $5$  a  $-2$ . *ChatGPT* však zde ke správnému řešení nedošel, a to ani po upozornění na jeho chybu. Kvadratický trojčlen se ihned opět pokusil upravit na tvar  $(x - p)(x - q)$ . Chybně si ale určil čísla  $p$  a  $q$ . Následně kvůli tomu upravil součin na levé straně rovnice na tvar  $2(x - 4)(x + 10)$  a získal tak nesprávné řešení. Jako kořeny kvadratické rovnice uvedl čísla  $4$  a  $-10$ . I když byl *ChatGPT* na chybu upozorněn, tak ji v následující odpovědi zopakoval.

Na těchto třech příkladech můžeme pozorovat, že upravit výrazy na součinnový tvar umělá inteligence zvládne v případě, kdy není třeba před úpravou na součinnový tvar vytknout, nebo provést jinou úpravu. V opačném případě je ale tento problém pro AI obtížnější a v řadě případů lze očekávat, že AI bude mít potíže s nalezením správného výsledku. Je-li však již kvadratický trojčlen správně rozložen na součin, tak následné vyvození řešení kvadratické rovnice či nerovnice, nečiní umělé inteligence problém a ve většině případů určí správný výsledek. Je však vždy potřeba výsledek zkontrolovat a brát umělou inteligenci jako pomocníka, nikoliv jako garanta správného výsledku.

## 2.2.2 Řešení lineárních a kvadratických rovnic a nerovnic a diskuze počtu řešení

Tato podkapitola se bude zabývat očekávaným výstupem „(žák) řeší lineární a kvadratické rovnice a nerovnice, řeší soustavy rovnic, v jednodušších případech diskutuje řešitelnost nebo počet řešení“ (MŠMT, 2007, s. 23) a jak ho zvládá umělá inteligence, aby byla případně schopna s tímto výstupem asistovat. Součástí předchozí podkapitoly bylo i řešení kvadratických rovnic a nerovnic, proto se nyní zaměříme převážně na lineární rovnice a diskusi počtu řešení. Pro ukázkou řešení lineárních rovnic zvolíme dvě rovnice, u kterých je hlavní rozdíl v počtu potřebných úprav k dosažení řešení. U těchto rovnic a nerovnic budeme kromě správnosti výsledku sledovat také postup použitý umělou inteligencí při jejich řešení. K ukázce uvažování AI nad počtem řešení využijeme příklady 2.15 a 2.16.

**Příklad 2.13.** Vypočítej tuto lineární rovnici:  $2x + 7 = 0$ .

U příkladu 2.13 *ChatGPT* v prvním kroku odečetl 7 od obou stran rovnice, z čehož dostal rovnici  $2x = -7$ . Ve druhém kroku vydělil obě strany této rovnice číslem 2 a dostal správný výsledek  $x = -\frac{7}{2}$ . Toto řešení chatbot ještě na závěr explicitně uvedl společně s původní lineární rovnicí.

**Příklad 2.14.** Vypočítej tuto lineární rovnici:  $\frac{2x-8}{2} + x - 6 = \frac{6x+4}{4} - 2$ .

V příkladu 2.14 chatbot postupoval krok za krokem a tyto kroky postupně popisoval. V prvním kroku upravil zlomky. Konkrétně první zlomek přepsal jako  $\frac{x-4}{1}$  a druhý jako  $\frac{3x+2}{2}$ . Následně napsal, že „*se zbavíme zlomků tak, že vynásobíme obě strany rovnice 2*“, z čehož získal rovnici  $2(x - 4) + 2x - 12 = 3x + 2 - 4$ . Následný krok roznásobení závorčky na levé straně rovnice a sečtení čísel 2 a  $-4$  na pravé straně rovnice popsal chatbot slovy „*Nyní distribuujeme*“, což není adekvátní popis provedené operace. Po několika dalších krocích, kde došlo ke sčítání „*podobných*“ členů a přičítání stejného čísla k oběma stranám rovnice, došel *ChatGPT* ke správnému výsledku  $x = 18$ .

**Příklad 2.15.** Vyřeš rovnici a uveď počet řešení:  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

Zadaná rovnice v příkladu 2.15 má dvě řešení, což *ChatGPT* zdůvodnil tím, že si vypočítal diskriminant, který vyšel roven 1. Chatbot správně uvedl: „*Pokud je diskriminant kladný ( $D > 0$ ), rovnice má dva reálné kořeny. Díky tomu můžeme říci, že kvadratická rovnice  $x^2 - 5x + 6 = 0$  má dvě řešení*“. Následně vyjádřil rovnici ve tvaru  $(x - 2)(x - 3) = 0$  a z tohoto tvaru vyvodil, že dvě řešení této rovnice jsou  $x = 2$  a  $x = 3$ .

**Příklad 2.16.** Vyřeš nerovnici a uveď počet řešení:  $x^2 - 4x + 4 > 0$ .

V příkladu 2.16 lze nerovnici upravit na tvar  $(x - 2)^2 > 0$ , řešením jsou  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . K tomuto výsledku ale chatbot nedošel. *ChatGPT* nejdříve upravil levou stranu nerovnice na tvar  $(x - 2)^2 > 0$ , následně odmocnil a přišel s výsledkem  $x < 2$ . V posledním odstavci nesprávně shrnul řešení jako „*Celkově řešení kvadratické nerovnice je  $x < 2$ . Takže nerovnice  $x^2 - 4x + 4 > 0$  má nekonečně mnoho řešení, která leží v otevřeném intervalu  $(-\infty, 2)$* “. Závěr, že nerovnost platí pouze pro  $x < 2$ , není správný.

Na základě uvedených příkladů můžeme konstatovat, že umělá inteligence dokáže z výsledného tvaru rovnice, resp. nerovnice, ke kterému dospěla po několika krocích, vyvodit počet řešení. Závěr ale nebude správný, pokud AI udělala v některém z kroků (nebo ve více krocích) chybu. Navíc někdy může použít při řešení formulace, které se obvykle nepoužívají, a pro některé žáky to může být matoucí. Ze zkušenosti s více příklady tohoto typu lze dodat, že chatbot více chybí, jestliže je ke správnému výsledku třeba udělat větší množství kroků.

### 2.3 Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Třetí tematický okruh se zaměřuje na kombinatoriku (elementární kombinatorické úlohy, variace, permutace a kombinace bez opakování, binomická věta, Pascalův trojúhelník), pravděpodobnost (náhodný jev a jeho pravděpodobnost, pravděpodobnost sjednocení a průniku jevů, nezávislost jevů) a na práci s daty (analýza a zpracování dat v různých reprezentacích, statistický soubor a jeho charakteristiky, jako jsou průměr, medián, percentil atd.).



V této podkapitole se zaměříme na učivo z oblasti kombinatoriky a pravděpodobnosti. Ačkoliv se nezaměříme na práci s daty, tak umělá inteligence dokáže z různých dat vyvozovat výsledky a určovat charakteristiky souboru dat, jako je aritmetický průměr, medián nebo percentil.

V současné době neexistuje žádný populární software, který by se zaměřoval pouze na kombinatoriku nebo pravděpodobnost a zároveň využíval prvky umělé inteligence. Je možné při výuce těchto podtémat využít některé již zmíněné softwary a platformy. Například *Brilliant.org* nabízí interaktivní kurzy také z kombinatoriky. Program *GeoGebra* může pomoci ve statistice, protože obsahuje modul pro statistické výpočty. Dále cvičení a výukové materiály z kombinatoriky a pravděpodobností nabízí platforma *Khan Academy*. Také *Wolfram Alpha* má široké uplatnění v kombinatorice. Mezi možnosti *Wolframu Alpha* patří mimo jiné kombinatorické funkce<sup>36</sup>, počítání kombinačních čísel nebo zjednodušování kombinatorických výrazů pomocí kombinatorických identit. Více se *Wolframu Alpha* budeme věnovat v následující kapitole (2.4.).

Některé **očekávané výstupy** v tomto tematickém okruhu zahrnují například čtení dat z grafů, tabulek a diagramů, což může být problematické pro AI, protože je těžké přenést tyto informace do digitální formy tak, aby byly pro umělou inteligenci dobře pochopitelné. V očekávaných výstupech budeme u umělé inteligence zkoumat tyto žákovské dovednosti:

- řeší reálné problémy s kombinatorickým podtextem (charakterizuje možné případy, vytváří model pomocí kombinatorických skupin a určuje jejich počet),
- využívá kombinatorické postupy při výpočtu pravděpodobnosti, upravuje výrazy s faktoriály a kombinačními čísly.

### 2.3.1 Reálné problémy s kombinatorickým podtextem

Podstatou této podkapitoly je nejen zjistit, jak dokáže umělá inteligence řešit úlohy z praxe s kombinatorickým podtextem, ale také jak rozumí zadání problému a zda ho zvládne převést do symbolického zápisu a vyřešit. Příklady budou čerpány z Portálu středoškolské matematiky MFF UK (Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy), konkrétně z webových stránek týkajících se kombinatoriky (Kombinatorika, n.d.). Pro ukázkou budeme testovat umělou inteligenci na příkladech<sup>37</sup> 1.2, 1.5 a 1.10. Platformy *Brilliant.org* a *Khan Academy* slouží převážně k pochopení a procvičení látky než k řešení konkrétních problémů z praxe. *Wolfram Alpha* by mohl pomoci s konkrétními kombinatorickými výpočty, ale na tom bychom nemohli zkoumat, jak AI rozumí zadanému problému. Proto opět využijeme chatbota.

**Příklad 2.17.** Urči počet způsobů, kterými lze na šachovnici  $8 \times 8$  vybrat dvě různobarevná pole tak, aby obě neležela ve stejné řadě a ani sloupci.

Umělá inteligence v prvním kroku řešení příkladu 2.17 uvažovala libovolné pole na šachovnici, které lze vybrat ze 64 možností. V druhém kroku vyřadila řádek a sloupec

---

<sup>36</sup> Termínem kombinatorické funkce jsou myšleny zabudované funkce *Wolfram Alpha*, které se používají ke kombinatorickým výpočtům. Například při zadání termínu „permutations of {a, b, c, d}“ dostaneme odpověď, že existuje 24 různých permutací a *Wolfram Alpha* je vypíše.

<sup>37</sup> Označení těchto příkladů vychází z číslování na zmíněných webových stránkách, nikoliv z číslování příkladů této práce.

obsahující první zvolené pole. Následující výpočet zdůvodnila AI tím, že „Zbyde nám  $(8 - 1)$  řádků a  $(8 - 1)$  sloupců, což je 7 možností pro druhé pole.“. Celkový počet možností tak vyšel umělé inteligenci na  $64 \cdot 7 = 448$ . Celý postup je chybný, protože umělá inteligence neuvažovala, že pole mají být různobarevná. Došlo tedy ze strany AI k nepochopení problému a v důsledku toho ke špatnému postupu.

**Příklad 2.18.** Uvažujme košík, ve kterém je 12 jablek a 10 hrušek. Petr si má z košíku vybrat jablko nebo hrušku tak, aby Věra měla co největší možnost výběru, až si bude vybírat po něm. Jaké ovoce si má Petr vybrat?

U příkladu 2.18 *ChatGPT* došel ke správnému výsledku, že Věra bude mít větší možnost výběru, jestliže si Petr vybere jablko. Tento výsledek AI podpořila pouze úvahou o zbývajícím počtu jablek a hrušek pro obě možnosti výběru („jednou zbyde 11 jablek a 10 hrušek, a podruhé zbyde 12 jablek a 9 hrušek“), kde chybí zdůvodnění tohoto tvrzení výpočtem, např.  $11 \cdot 10 = 110 > 12 \cdot 9 = 108$ . Výsledek je tedy správný, umělá inteligence pochopila problém, ale nedokázala ho dostatečně zdůvodnit<sup>38</sup>.

**Příklad 2.19.** Je zadán čtverec  $ABCD$  a na každé straně tohoto čtverce  $n$  vnitřních bodů. Urči počet trojúhelníků s vrcholy v takových bodech, jejichž žádná strana neleží ve straně čtverce  $ABCD$ .

V příkladu 2.19 umělá inteligence špatně pochopila zadání a počítala jinou úlohu. Chatbot pochopil zadání tak, že (dle uvedeného postupu) řešil „Počet trojúhelníků, jejichž vrcholy jsou vnitřními body čtverce  $ABCD$  a jejichž žádná strana neleží ve straně čtverce“. Ty chtěl určit tak, že „Každý ze čtyř vrcholů čtverce může být vrcholem trojúhelníku.“ a „Z každého z vnitřních bodů na straně čtverce můžeme spojit úsečky s vrcholy čtverce, což vytvoří trojúhelníky.“. Tento chybný a nesrozumitelný postup dovedl chatbota také ke chybnému výsledku  $4 + 4n$ .

Na těchto příkladech se ukázalo, že umělá inteligence dokáže řešit některé příklady z praxe, převést je na kombinatorické problémy a následně je řešit. Problém je, že ne vždy dokáže ze zadání správně vyvodit, co je cílem, a tak se postup i výsledek může týkat řešení jiné úlohy. Což může být způsobeno tím, že chatbot v dnešní době prozatím není schopen tak dobře porozumět běžnému jazyku. Tato zkoumání lze shrnout tak, že v současné době ještě AI není dostatečně spolehlivá, aby mohla správně porozumět zadání problému, a následně daný příklad vyřešila. Je ale potřeba říci, že méně náročné úlohy, jako je na zmíněné stránce Portálu středoškolské matematiky MFF UK úloha s číslem 1.1, dokáže umělá inteligence správně pochopit i vypočítat.

### 2.3.2 Výpočet pravděpodobnosti a úprava faktoriálů a kombinačních čísel

V této podkapitole budeme zkoumat, jak dokáže umělá inteligence řešit úlohy spojené s pravděpodobností. Dále budeme zjišťovat, zda zvládne AI řešit kombinatorické úlohy pomocí úprav faktoriálů a s využitím kombinačních čísel. I tentokrát budeme úlohy na pravděpodobnost zadávat *ChatGPT*, protože nám jde také o správné pochopení slovního zadání

---

<sup>38</sup> Když byla umělá inteligence dotázána, proč 11 jablek a 10 hrušek je více možností než 12 jablek a 9 hrušek, tak odpověděla, že udělala chybu a v obou případech se jedná o 21 kusů ovoce. Zde se opět vyskytuje podobný problém se zdůvodňováním postupu jako v kapitole 2.1.3.

úlohy. Ukážeme, že úpravu faktoriálů a kombinačních čísel zvládá i *Wolfram Alpha*, ale že nakonec pro uvedení postupu bude vhodné opět zvolit chatbota. Uvedeme zde dva příklady z pravděpodobnosti, které se od sebe liší především počtem kroků potřebných k jejich vyřešení. Příklad 2.21 je inspirován úlohou z portálu *priklady.eu*<sup>39</sup> a příklad 2.22 je přímo ze stejného portálu, ale ze sekce „*Faktoriál a kombinační číslo*“.

**Příklad 2.20.** Vypočítej pravděpodobnost, že na kostce padne číslo dělitelné dvěma.

Příklad 2.20 *ChatGPT* pochopil a také správně vyřešil. Zjistil, že ve třech případech je číslo na kostce dělitelné třemi. Poté uvedl: „*Pravděpodobnost udává poměr počtu příznivých případů k celkovému počtu možných případů. Celkový počet možných výsledků je 6.*“ a z toho vypočítal výsledek, že pravděpodobnost je  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$ , což je 50 % .

**Příklad 2.21.** Máme dáno 16 míčeků, z toho 10 modrých a 6 zelených. Vypočítej pravděpodobnost, že mezi čtyřmi náhodně vybranými míčky budou 2 modré a 2 zelené.

Také s příkladem 2.21 si chatbot poradil. Využil kombinačních čísel  $C(n, k)$  pro vyjádření počtu možných kombinací. *ChatGPT* vyjádřil pravděpodobnost výběru 4 míčeků (dvou modrých a dvou zelených) vztahem  $P = \frac{C(10,2) \cdot C(6,2)}{C(16,4)}$ , kde za kombinační čísla dosadil konkrétní hodnoty, tj.  $P = \frac{\frac{10!}{2!8!} \cdot \frac{6!}{2!4!}}{\frac{16!}{4!12!}}$ , a po zjednodušení dostal výsledek  $P = \frac{675}{1820} = 0,3703$ . Což znamená, že pravděpodobnost vytáhnutí dvou modrých a dvou zelených míčeků, je přibližně 37% . Výsledek je správný.

**Příklad 2.22.** Uprav následující rovnici a vypočítej  $x$  :  $\frac{x!}{(x-2)!} + \frac{(x-1)!}{(x-3)!} = 8$  (Příklady.eu, n.d.).

Když využijeme pro řešení příkladu 2.22 *Wolfram Alpha*, tak dostaneme správný výsledek  $x = 3$  . Problémem však je, že bez placené „*Pro*“ verze, se většinou (až na pár ukázkových příkladů) dozvíme pouze správné řešení, nikoliv postup řešení. Pro řešení podobného problému s úpravou faktoriálů nebo kombinačních čísel nám může též pomoci dříve zmíněný *Symbolab*, u kterého se ale můžeme dozvědět o pouze pár kroků řešení navíc, než narazíme na stejný problém. Proto i v tomto případě, pokud chceme detailní postup a zdarma, je vhodnější zvolit například *ChatGPT*.

Chatbot nejprve upravil faktoriály do tvaru, aby se daly zkrátit (např.  $x!$  v čitateli prvního zlomku rozepsal jako  $x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)!$  a  $(x - 2)!$  následně zkrátit se stejným faktoriálem ve jmenovateli. Po dalších úpravách získal kvadratickou rovnici  $2x^2 - 4x - 6 = 0$ . Podobně jako v předchozích příkladech z této kvadratické rovnice určil kořeny, které v tomto případě uvedl jako  $x = 3$  a  $x = -1$ . Na závěr ale *ChatGPT* nevyřadil  $x = -1$ , neboť faktoriál je definován pouze pro nezáporná celá čísla.

Je potřeba zmínit, že umělá inteligence ve formě *ChatGPT* není vhodným nástrojem pro úpravu kombinatorických výrazů. Zvládne správně sečíst dvě kombinační čísla (např.  $C(20,6) + C(20,13)$  vyjádří správně jako  $C(21,14)$ ) a ukáže rovněž zvolený postup řešení. Avšak při úkolu určit součet více jak dvou kombinačních čísel se už dopouští chyb, i když jde

<sup>39</sup> Konkrétně se jedná o úlohu 9 na odkaze:

<https://www.priklady.eu/cs/matematika/pravdepodobnost-a-statistika/pravdepodobnost.alej>

stále o využití stejného vzorce pro kombinační číslo zapsané pomocí faktoriálů (např.  $C(4,4) + C(5,4) + C(6,4) + C(7,4) + C(8,4)$  už správně nesečte).

Je vidět, že chatbot zvládne řešit uvedené příklady zaměřené na výpočet pravděpodobnosti a nabídne také správný postup s vysvětlením. Přesto někdy dělá chyby, jestliže je zadání delší a řešení vyžaduje více kroků. Pokud chceme využít digitální nástroje s prvky umělé inteligence pro úpravu faktoriálů a kombinačních čísel, tak je obtížné získat v bezplatných verzích detailní postup. Online kalkulačky využívající AI většinou nenabízejí detailní postup řešení a chatboti mají zatím s náročnějšími úlohami tohoto typu problém (což je pochopitelné, neboť to není jejich hlavní zaměření).

## 2.4 Závislosti a funkční vztahy

Čtvrtý tematický okruh nese název Závislosti a funkční vztahy. Obsah tohoto okruhu se primárně zaměřuje na funkce (a jejich grafy) a posloupnosti. Konkrétně do učiva patří obecné poznatky o funkcích (pojem funkce, definiční obor a obor hodnot, graf funkce, vlastnosti funkcí), funkce (lineární funkce, kvadratická funkce, funkce absolutní hodnota, lineární lomená funkce, mocninné funkce, funkce druhá odmocnina, exponenciální, logaritmické a goniometrické funkce, vztahy mezi goniometrickými funkcemi) a posloupnost (určení a vlastnosti posloupností, aritmetická a geometrická posloupnost).

Z hlediska obsahu **učiva** si zde ukážeme možnosti umělé inteligence ve výuce posloupností, a zaměříme se na funkce a jejich grafy.

Existuje široké množství softwarů a platforem, které dokáží různým způsobem pracovat s funkcemi a jejich grafy. Jak již bylo řečeno, tak *Wolfram Alpha* je primárně vyhledávací stroj. To znamená, že umožňuje uživatelům zadat matematický výraz a jako odpověď poskytnout výsledek (v případě *Pro* verze také postup řešení) a dodatečné informace, jako je například jiný tvar výsledku nebo graf funkce. *Wolfram Alpha* má široké možnosti napříč celou školskou matematikou. Umělou inteligenci využívá k rozpoznávání vstupního textu, ve výpočtech a také při generování výsledků. Nevýhoda tohoto vyhledávacího stroje spočívá v omezeních pro uživatele, kteří nemají zakoupenou *Pro* verzi (např. uživatel nevidí u všech příkladů celý postup řešení, nebo není možné „nahrát vlastní data a snímky pro analýzu“<sup>40</sup>).

*Desmos* je webová aplikace, který je možno používat online nebo si ho stáhnout do mobilního zařízení s operačním systémem android nebo iOS. Mezi jeho vlastnosti patří vizualizace grafů matematických funkcí, práce s geometrickými konstrukcemi, matematické výpočty, a další matematické úkony. Ačkoliv využití umělé inteligence není hlavní vlastnost grafického kalkulátoru, tak využívá pokročilé algoritmy pro vykreslování grafů, sledování změn a také poskytování vizuálních zpětných vazeb.

V případě práce s funkcemi a jejich grafy nesmíme opominout ani již zmíněný populární software *GeoGebra*, kterému se budeme věnovat primárně v kapitole 2.5, nebo platformu *Smart Sparrow*, která může být využita pro vytváření interaktivních lekcí o funkcích a posloupnostech. K výuce funkcí a posloupností lze využít také již zmíněné nástroje *Symbolab* a *Brilliant.org*.

---

<sup>40</sup> Český překlad z webu *Wolfram Alpha* věnovaný *Pro* verzi: <https://www.wolframalpha.com/pro>.

Z tohoto okruhu vybereme dva očekávané výstupy, na kterých budeme zkoušet dovednosti umělé inteligence. Tyto žákovské výstupy budou:

- načrtne grafy požadovaných funkcí (zadaných jednoduchým funkčním předpisem) a určí jejich vlastnosti,
- řeší aplikační úlohy s využitím poznatků o funkcích a posloupnostech.

#### 2.4.1 Zobrazení grafů požadovaných funkcí

V očekávaných výstupech pro tento okruh se píše o „načrtnutí grafů požadovaných funkcí“. My budeme mluvit o zobrazování grafů, protože počítačové a mobilní softwary grafy nečrtají, ale zobrazují s velkou přesností. V této podkapitole popíšeme možnosti v práci s grafem. Budeme převážně srovnávat možnosti, které v současné době nabízí *Wolfram Alpha* a *Desmos*. Umělá inteligence ve formě chatbota (pokud není propojen s jiným prostředím, jako například verze *ChatGPT*, která je schopna využívat výpočty z *Wolfram Alpha*) nedokáže zobrazovat grafy při zadání předpisu funkce.

Některé vlastnosti aplikací *Wolfram Alpha* i *Desmos* jsou podobné. Například je možné v obou platformách zobrazovat grafy funkcí jedné či dvou proměnných. Dále obě tyto digitální technologie poskytují možnost manipulovat s grafy a jejich zobrazením (např. graf přiblížit, oddálit, posunout nebo změnit parametry v předpisech funkcí). Užitečná je také možnost ukázat grafy více funkcí v jednom okně, což lze využít pro porovnání a analýzu různých vlastností funkcí (např. nulové body, inflexní body, extrémy atd.).

*Wolfram Alpha* a *Desmos* ale mají zároveň několik rozdílů ve svých nástrojích. Ačkoliv tyto rozdíly jsou především ve výpočetních možnostech (*Wolfram Alpha* je primárně zaměřen na matematické výpočty, zatímco *Desmos* na práci s grafy), lze nalézt také rozdíly v uživatelském rozhraní. Například nástroje a prostředí, které poskytuje *Desmos*, mohou být pro žáky lehčí na pochopení a ovládání než nástroje pro grafy od *Wolfram Alpha*.

Součástí první očekávaného výstupu tematického okruhu Závislosti a funkční vztahy je také určení vlastností funkcí z jejich grafů. Vzhledem k tomu, že se *Wolfram Alpha* a *Desmos* primárně nezaměřují na popis vlastností funkcí z jejich předpisů, tak k tomuto účelu využijeme opět umělou inteligenci ve formě chatbota *ChatGPT*.

**Příklad 2.23.** Urči vlastnosti funkce dané předpisem  $f(x) = \sin x$ .

V příkladu 2.23 *ChatGPT* u funkce  $f$  uvedl její definiční obor („Funkce  $\sin x$  je definována pro všechna reálná čísla“) a obor hodnot („Obor hodnot funkce  $\sin x$  je  $-1 \leq f(x) \leq 1 \dots$ “), periodicitu („Funkce je periodická s periodou  $2\pi \dots$ “), nulové body („Nulové body  $\sin x$  jsou hodnoty  $x$ , pro které platí  $\sin x = 0$ . Tyto body nastávají, když  $x$  je násobkem  $\pi$ , tj.  $x = n\pi$ , kde  $n$  je celé číslo.“), extrémy („Maximální hodnoty funkce jsou  $f(x) = 1$  pro  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  (kde  $k$  je celé číslo), a minimální hodnoty jsou  $f(x) = -1$  pro  $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ .“), symetrii („Má symetrii vzhledem k počátku.“) a monotónnost („Funkce  $\sin(x)$  je omezená a neklesající na intervalu  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  a na intervalu  $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ .“).

Uvedené vlastnosti funkce chatbotem jsou správně až na periodicitu funkce, neboť chatbot uvedl monotónnost pouze na dvou intervalech. Ačkoliv vlastností této funkce by se dalo uvést více, tak tyto patří mezi ty relevantní vzhledem ke středoškolské matematice. Dalšími nedostatky jsou uvedení „symetrie vzhledem k počátku“ jako vlastnosti funkce,

přestože je to vlastnost grafu, a uvedení, že funkce je na intervalu neklesající, ale ve skutečnosti je rostoucí (rostoucí funkce je také příkladem neklesající funkce, ale jedná se o nepřesnost).

**Příklad 2.24.** Urči vlastnosti funkce dané předpisem  $f(x) = x^3$ .

O grafu kubické funkce v příkladu 2.24 vyjmenoval většinou podobné vlastnosti, jako u příkladu 2.23. Jednalo se o definiční obor („Funkce  $x^3$  je definována pro všechna reálná čísla“) a obor hodnot („Obor hodnot funkce  $x^3$  je opět celé reálné číslo  $\mathbb{R}$ “), nulové body („Nulový bod je  $x = 0$ , kde  $f(x) = 0$ .“), extrémů („Funkce  $x^3$  nemá žádné lokální ani globální extrémů, protože roste nebo klesá do nekonečna bez omezení“), „symetrii“ („Funkce  $x^3$  je lichá funkce“) a monotónnost („Funkce  $x^3$  je rostoucí na celém svém definičním oboru.“). K tomu navíc ještě zmínil kritické body<sup>41</sup> („Funkce má jediný kritický bod, kterým je  $x = 0$ . V tomto bodě mění směr růstu.“).

U tohoto příkladu jsou uvedené vlastnosti téměř totožné s předchozím příkladem. Jediným rozdílem je uvedení kritického, resp. stacionárního, bodu. Podobně jako u příkladu 2.23 tak můžeme říci, že uvedené vlastnosti zadané funkce jsou správné a až na pojem kritický bod, který se používá v anglicky mluvících zemích, také relevantní pro středoškolskou matematiku.

Na příkladech 2.23 a 2.24 je patrné, že chatbot dokáže vyjmenovat základní vlastnosti funkce zadané předpisem. Je však třeba si dát pozor na správné zadání a některé termíny, které může chatbot uvádět. Ze zkušenosti s různými způsoby zadání (když například místo „Urči vlastnosti funkce dané předpisem.“ by žák zadal „Urči vlastnosti grafu daného předpisem.“) *ChatGPT* generuje různé odpovědi, které se liší správností, a také použité termíny mohou být pro žáka matoucí (například lichou funkcí označil jako „nepárnou“ a křivost křivky jako „krutost“). V některých případech i při správném zadání může chatbot vygenerovat vlastnosti funkce, které nespádají do středoškolského učiva.

#### 2.4.2 Řešení aplikačních úloh pomocí posloupností a funkcí

Další očekávaný výstup je formulován z hlediska žáka takto: „řeší aplikační úlohy s využitím poznatků o funkcích a posloupnostech“. V rámci této podkapitoly se zaměříme na to, jak dokáže umělá inteligence pochopit zadání aplikační úlohy zaměřené na posloupnosti a následně tuto úlohu řešit. Ačkoliv uvedený očekávaný výstup taktéž zahrnuje využití funkcí, tak se v této podkapitole zaměříme převážně na posloupnosti. Vzhledem k tomu, že nám jde o zkoumání vlastnosti AI nejen úlohy řešit, ale také pochopit jejich zadání, tak opět využijeme chatbota *ChatGPT*. Příklady 2.25 a 2.26 jsou inspirovány úlohami z portálu *priklady.eu*<sup>42</sup>, ale došlo k menším úpravám v zadání.

**Příklad 2.25.** Železné trubky jsou srovnané do osmi řad tak, že vrchní řada má 13 trubek a každá další řada má o trubku více. Kolik je všech trubek?

Příklad 2.25 chatbot řešil využitím aritmetické posloupnosti, určil první prvek  $a_1 = 13$ , diferenci  $d = 1$  a počet členů posloupnosti  $n = 8$ . Následně využil vzorec na součet prvních

<sup>41</sup> Kritický bod označuje bod, kde derivace neexistuje, nebo je rovna nule. Jedná se tedy o stacionární bod.

<sup>42</sup> Následující úlohy jsou konkrétně dostupné na odkazech:

<https://www.priklady.eu/cs/matematika/posloupnost/aritmeticka-posloupnost.alej>

<https://www.priklady.eu/cs/matematika/posloupnost/geometricka-posloupnost.alej>

$n$  členů aritmetické posloupnosti  $s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$  a do tohoto vzorce dosadil. *ChatGPT* tímto postupem došel ke správnému výsledku 132 trubek. Chatbot porozuměl zadání, zvolil korektní postup a na základě toho dospěl i ke správnému řešení této úlohy.

**Příklad 2.26.** Brigádník souhlasil, že bude pracovat, pokud jeho mzda bude za první den 1 Kč, za druhý den 2 Kč, za třetí den 4 Kč atd. Kolik dní takto pracoval, pokud vydělal 4 095 Kč?

V příkladu 2.26 chatbot adekvátně použil k řešení geometrickou posloupnost s prvním členem  $a_1 = 1$  a kvocientem  $q = 2$ . Poté se ale dopustil chyby, když nesprávně dosadil číslo 4 095 ze zadání do  $a_n$  místo do  $s_n$ . To vedlo k chybnému výsledku<sup>43</sup>  $n = 13$ . Uvažoval tedy úlohu, že si brigádník poslední den vydělal 4 095 Kč místo toho, že se jednalo o součet mezd za všechny dny brigády. Po upozornění na tuto chybu se ale chatbot opravil a tentokrát uvedl správný postup s korektním výsledkem  $n = 12$ .

Na těchto příkladech je zřejmé, že umělá inteligence zvládne v některých úlohách porozumět zadání a nalézt řešení aplikační úlohy zaměřené na využití znalostí posloupností. Podobně jako u příkladů v některých z předchozích podkapitol může ale dojít ke špatnému porozumění úlohy chatbotem, a to poté může vést ke špatnému řešení příkladu. V těchto příkladech se však dokázal chatbot opravit, když byl na chybu upozorněn. Je ale opět třeba chatbota brát především jako možnou kontrolu nebo prostředek pro procvičení, nikoliv jako záruku správného výsledku.

## 2.5 Geometrie

Poslední tematický okruh RVP G je věnován geometrii, konkrétně učivo toho okruhu se týká geometrie v rovině (rovinné útvary, obvody a obsahy, shodnost a podobnost trojúhelníků atd.), geometrie v prostoru (polohové a metrické vlastnosti, základní tělesa, povrchy a objemy a volné rovnoběžné promítání), trigonometrie (sinová a kosinová věta, trigonometrie pravoúhlého a obecného trojúhelníku) a analytické geometrie v rovině (vektory a operace s nimi, analytická vyjádření přímky v rovině a kuželosečky).

Z hlediska **učiva** se zde primárně zaměříme na to, jaké digitální technologie s prvky umělé inteligence dokáží vytvářet různé geometrické konstrukce a jaké obsahují nástroje pro práci s nimi.

Existuje opět široké množství softwarů a platforem využitelných ve výuce geometrie, které mají prvky umělé inteligence. *GeoGebra* je interaktivní software, který byl krátce zmíněn v kapitole 1.1.1. Jak již bylo řečeno, program *GeoGebra* nevyužívá primárně umělou inteligenci, má ale některé vlastnosti, které za prvky AI považovat lze. Mezi tyto vlastnosti patří adaptace ve smyslu dynamické interaktivity<sup>44</sup>, nebo využívání komplexních algoritmů pro provádění složitých výpočtů či při práci s grafy. Tento software nabízí nástroje a příkazy pro práci s geometrickými i algebraickými objekty či pro využití diferenciálního a integrálního počtu. Dokáže mimo jiné vytvářet interaktivní geometrické konstrukce, grafy funkcí nebo též animace. *GeoGebra* je široce využíváný software díky své jednoduchosti ovládání

---

<sup>43</sup> Navíc v jednom kroku řešení zapsal číslo 4 095 jako  $2^{12}$ , jinak by výsledkem ani nemohlo být přirozené číslo.

<sup>44</sup> Tím je myšlena dovednost vytvářet dynamické vizualizace matematických konceptů, se kterými lze manipulovat (grafy, útvary atd.).

a interaktivitě. Tento program je možné si stáhnout také do mobilních zařízení s operačními systémy Android a iOS.

Při výuce geometrie lze také využít *Wolfram Alpha*, *Cymath* a *Desmos*. Tyto digitální technologie mají některé podobné vlastnosti jako *GeoGebra*. V Česku patří *GeoGebra* mezi nejvíce využívaný program ve výuce středoškolské matematiky, a to zejména díky rozhraní v českém jazyce, jednoduchosti ovládání a finanční dostupnosti (pro nekomerční užití je zcela zdarma).

Užitečným nástrojem při výuce geometrie mohou být také chatboti. Geometrie zahrnuje široké množství pojmů a matematických symbolů, které mohou chatboti pomoci vysvětlit nebo uvést na konkrétních příkladech. Mohou také pomoci s řešením a generováním příkladů z různých oblastí, např. z analytické geometrie. Je třeba si dávat pozor na chyby, které v současné době umělá inteligence dělá během řešení matematických úloh, a proto je dobré si výsledek vždy zkontrolovat pomocí dalších nástrojů (jako je například zmíněný *Wolfram Alpha*).

**Očekávané výstupy** tohoto okruhu jsou nejvíce rozsáhlé ze všech tematických okruhů v RVP G. Pokusíme se zde pokrýt co nejvíce látky ve čtyřech očekávaných výstupech. Tyto vybrané očekávané výstupy jsou:

- používá geometrické pojmy, zdůvodňuje a využívá vlastnosti geometrických útvarů v rovině a v prostoru, na základě vlastností třídí útvary,
- řeší planimetrické a stereometrické problémy motivované praxí,
- využívá charakteristické vlastnosti kuželoseček k určení analytického vyjádření,
- z analytického vyjádření (z osových nebo vrcholových rovnic) určí základní údaje o kuželosečce.

### 2.5.1 Geometrické pojmy a třídění útvarů

V této podkapitole budeme zkoumat, zda umělá inteligence dokáže vysvětlit geometrické pojmy. *Wolfram Alpha* obsahuje různé vysvětlivky některých matematických pojmů<sup>45</sup>. Vysvětlení ale mohou být pro žáky náročná na pochopení, protože jsou dosti odborná. Z tohoto důvodu mohou žáci preferovat chatbota, který může být navíc dotázán na dodatečné informace. Pro zkoumání dovedností umělé inteligence z hlediska geometrických pojmů tedy opět využijeme v současnosti nejvíce rozšířeného chatbota *ChatGPT*. Umělá inteligence bude dotázána na několik různých geometrických termínů a na závěr bude mít za úkol roztřídit některé geometrické útvary na základě jejich vlastností.

Mezi vybrané pojmy patří výška trojúhelníku a jeho ortocentrum. Tyto pojmy byly vybrány, protože někteří žáci si mohou plést výšku s těžnicí. Zároveň může pro některé být neznámý pojem ortocentrum, který s výškami souvisí.

**Příklad 2.27.** Co je to výška trojúhelníku a ortocentrum trojúhelníku?

---

<sup>45</sup> Například při zadání pojmu „Circle“ vypíše různé způsoby, jak lze chápat kruh, resp. kružnici.



V odpovědi na příklad 2.27 byla výška trojúhelníku vysvětlena jako „úsečka, která je od jednoho vrcholu trojúhelníka kolmá na protější stranu“ a ortocentrum trojúhelníku jako „průsečík všech tří výšek trojúhelníka“.

Definice výšky v jedné z učebnic geometrie je uvedena takto: „Výškou trojúhelníku rozumíme úsečku (či délku této úsečky), která spojuje vrchol trojúhelníku s patou kolmice vedené z tohoto vrcholu k přímkce, na které leží protější strana.“ (Herman a kol., 1995, s. 50). Z tohoto porovnání je patrné, že definice poskytnutá chatbotem je nejen stručnější, ale také méně exaktní. Chatbot navíc definoval výšky jako úsečky, avšak ty se v případě tupoúhlého trojúhelníku neprotnou. V učebnicové definici je ortocentrum definováno jako průsečík kolmic.

### **Příklad 2.28.** Co je to středový a obvodový úhel?

Pojmy z příkladu 2.28 byly vysvětleny jako „Středový úhel je úhel, jehož vrchol se nachází ve středu kruhu nebo kruhového oblouku“ a „Obvodový úhel je úhel, jehož vrchol leží na kružnici nebo kruhovém oblouku“. K tomu ještě ChatGPT uvedl jejich vlastnosti. Při dotázání na dodatečné informace, jako například „Co je to kruhový oblouk?“ dokáže umělá inteligence taktéž odpovědět. V případě dotazu na kruhový oblouk jsme obdrželi odpověď: „Kruhový oblouk je část kruhu, která je omezena dvěma body na jeho obvodu. Tyto dva body jsou koncové body oblouku.“.

Středový úhel je v učebnici matematiky pro gymnázia v planimetrii definován takto: „Úhel, jehož vrcholem je střed  $S$  kružnice  $k$  a ramena procházejí krajními body oblouku  $AB$  kružnice  $k$ , se nazývá středový úhel příslušný k tomu oblouku  $AB$ , který v tomto úhlu leží.“ (Pomykalová, 2013, s. 58).

V téže učebnici je obvodový úhel definován takto: „Každý úhel  $AVB$ , jehož vrchol  $V$  je bodem kružnice  $k$  a ramena procházejí krajními body oblouku  $AB$  kružnice  $k$  ( $V$  různé od  $A$ ,  $V$  různé od  $B$ ), se nazývá obvodový úhel příslušný k tomu oblouku  $AB$ , který v tomto úhlu leží.“ (Pomykalová, 2013, s. 58).

Podobně jako u příkladu 2.27 jsou definice z učebnic oproti definici od chatbota přesnější a matematicky korektní. U chatbota ale mají žáci výhodu možnosti se dále dotazovat při nepochopení některého z pojmů.

V RVP G je v rámci tohoto očekávaného výstupu také kromě používání geometrických pojmů uvedeno, že „(žák) na základě vlastností třídí útvary“ (MŠMT, 2007, s. 25). Široké spektrum geometrických útvarů se dá roztrždit dle různých kritérií, proto byl umělé inteligenci položen dotaz na jedno z takových možných třídění.

### **Příklad 2.29.** Jak lze roztrždit čtyřúhelníky na základě jejich vlastností?

Chatbot čtyřúhelníky roztrždil do čtyř kategorií podle délek stran, velikosti úhlů, symetrie a „dalších vlastností“. V kategorii rozdělení podle délek strany byly chatbotem uvedeny rovnoramenný čtyřúhelník<sup>46</sup> („Má protější strany stejně dlouhé.“), rovnoběžník („Proti sobě ležící strany jsou stejně dlouhé.“), obdélník („Všechny úhly jsou pravé úhly.“) a kosočtverec („Všechny strany jsou stejně dlouhé a úhly nejsou pravé.“). V kategorii podle velikosti úhlů byly uvedeny ostroúhlé, pravoúhlé a tupoúhlé čtyřúhelníky. Kategorie podle

<sup>46</sup> Tento pojem se používá pouze u rovnoramenného lichoběžníku.

symetrie byla rozdělena na obecný a pravidelný čtyřúhelník. Poslední kategorie „Podle dalších vlastností“ byla rozdělena na konvexní a nekonvexní (konkávni) čtyřúhelník. U všech uvedených útvarů byly uvedeny jejich vlastnosti.

Kategorizace chatbotem není vhodná a často také chybná. Útvary uvedené jako příklady mohou spadat do více zmíněných kategorií zároveň. Z uvedených příkladů v jednotlivých kategoriích nemusí být vždy pro žáka jasné, jak uvedené útvary odráží danou vlastnost, jak dané útvary vypadají, a jaké další útvary mohou být příkladem dané vlastnosti. Tyto příklady navíc obsahují také termíny, které se v české středoškolské matematice nepoužívají, jako například rovnoramenný čtyřúhelník a ostroúhlý čtyřúhelník. I přes možnost dalšího doptávání se chatbota na doplňující otázky je v této látce důležitá vizuální reprezentace jednotlivých útvarů.

Z příkladů v této podkapitole je patrné, že umělá inteligence ve formě chatbota dokázala pojmy vysvětlit a uvést některé jejich vlastnosti. Chatbot již tak dobře nedokázal kategorizovat útvary dle relevantních kritérií. Zároveň vysvětlování pojmů a rozdělení útvarů s konkrétními příklady je velmi stručné a někdy nemusí být žákovi jasné, proto pravděpodobně využije možnosti se chatbota doptávat na doplňující otázky ve snaze porozumět dané látce.

### 2.5.2 Řešení planimetrických a stereometrických úloh z praxe

V této podkapitole se budeme zabývat očekávaným výstupem „řeší planimetrické a stereometrické problémy motivované praxí“. Zvolíme jednu úlohu z planimetrie a jednu ze stereometrie pro zjištění, zda umělá inteligence zvládá různé kroky v průběhu řešení těchto úloh.

**Příklad 2.30.** Ve větru se zlomil 36 m vysoký strom. Vrchol zlomeného stromu se dotýká země, a to ve vzdálenosti 12 m od paty kmene stromu (tloušťku kmene zanedbáváme). V jaké výšce nad zemí ( $h$ ) se strom zlomil? (Nový Amos, 2018).

Příklad 2.30. z planimetrie pochází z maturitní zkoušky z matematiky na jaře 2017. Úlohu lze řešit například takto: V pravouhlém trojúhelníku, který vznikl zlomením stromu, si označíme  $h$  jako výšku od paty stromu k bodu, kde došlo ke zlomu stromu, délku přepony (jedná se o část stromu, která se zlomila a spadla na zem) si označíme  $36 - h$  a následně pomocí Pythagorovy věty dopočítáme neznámou  $h$ , kde  $h = 16$  m.

S tímto příkladem si ale *ChatGPT* nedokázal poradit. Úlohu řešil přes podobnost trojúhelníků, protože „horní a dolní část stromu jsou obě přímky“. Označil délku dolní části stromu jako  $x$  metrů a počítal neznámou  $x$  z rovnice  $\frac{x}{36-x} = \frac{12}{36}$ . Zde došlo nejen k nepochopení zadání, ale zároveň také k nesprávnému postupu řešení (současně nebyl dodržen požadavek ze zadání, aby byla výška nad zemí označena jako  $h$ ). Proto také nahlásila umělá inteligence nesprávný výsledek  $x = 9$ .

**Příklad 2.31.** V bazénu tvaru kvádru je 299 m<sup>3</sup> vody. Určete rozměry dna, je-li hloubka vody 282 cm a jeden rozměr je o 4,7 cm větší než druhý. (HackMath, n.d.)

V příkladu 2.31 se jedná o stereometrickou úlohu. Po označení jednoho rozměru dna jako  $a$  se lze ke správnému výsledku dostat sestavením rovnice  $a^2 + 4,7a - 106,028 = 0$  a následným vypočítáním neznámé  $a$  z kvadratické rovnice a přičtením 4,7 cm, což nám dá

druhý rozměr  $b$ . Stejným způsobem v tomto případě postupoval i *ChatGPT*. Došel ke správnému výsledku, jestliže ignorujeme zaokrouhlovací chybu v řádu několika desetin metru.

Úspěšnost umělé inteligence v řešení zde uvedené planimetrické a stereometrické úlohy se liší v závislosti na různých faktorech. Zatímco u příkladu 2.30 chatbot nedokázal ze zadání správně vyvodit informace o tom, co je cílem úlohy a ani jak se má označit neznámá, tak v příkladě 2.31 tyto informace vyvodil správně i s typickým označením rozměrů kvádrů. Podobně jako v předchozích podkapitolách může být faktorem délka zadání, protože chatbot prozatím není schopen tak dobře jazyk interpretovat a vyvodit si správně informace.

### 2.5.3 Určení analytického vyjádření kuželoseček a vyvození jejich vlastností

V této podkapitole se budeme zabývat nejen očekávaným výstupem „využívá charakteristické vlastnosti kuželoseček k určení analytického vyjádření“, ale také částečně výstupem „z analytického vyjádření (z osové nebo vrcholové rovnice) určí základní údaje o kuželosečce“. Budeme umělé inteligenci zadávat kuželosečky s určitými vlastnostmi a zkoumat, zda správně vyvodí jejich analytické vyjádření. Poté zadáme naopak analytické vyjádření a budeme zjišťovat, zda AI ve formě chatbota uvede základní údaje o dané kuželosečce.

**Příklad 2.32.** Napiš rovnici paraboly, která má vrchol v bodě  $V = [1,1]$ .

V příkladě 2.32 chatbot napsal obecnou vrcholovou rovnici paraboly, jejíž osa byla rovnoběžná s osou  $y$ , a poté do ní dosadil příslušné údaje ze zadání. Po tomto dosazení uvedl, že rovnice paraboly s těmito parametry je  $y = a(x - 1)^2 + 1$ , kde  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Skutečně paraboly zadané touto rovnicí odpovídají požadavku ze zadání. Ovšem již neuvedl, že řešení existuje více. Například chatbot neuvedl rovnici parabol s osou rovnoběžnou s osou  $x$ .

**Příklad 2.33.** Napiš rovnici elipsy, která má střed v bodě  $S = [-1,0]$  a zároveň má poloosy dlouhé 2 a 3.

V příkladě 2.33 zvolil *ChatGPT* stejný postup jako u příkladu 2.32. Po dosazení požadovaných parametrů ze zadání do obecného tvaru středové rovnice elipsy dospěl k rovnici  $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Jedná se o korektní rovnici k požadované kuželosečce. Opět ale bylo uvedeno pouze jedno z možných řešení; navíc chatbot automaticky předpokládá řešení, kdy osy kuželosečky jsou rovnoběžné s osami souřadnicové soustavy. Také není zmíněna rovnice, kde  $a = 3$  a  $b = 2$  (neboli rovnice, kde jsou prohozené délky poloos oproti uvedené rovnici).

Pro příklad „opačného“ zadání byly zvoleny rovnice hyperboly a kružnice v příkladech 2.34 a 2.35.

**Příklad 2.34.** Uveď vlastnosti kuželosečky, která je dána rovnicí  $\frac{(x+5)^2}{25} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ .

Rovnici v příkladě 2.34 chatbot správně rozpoznal jako rovnici hyperboly a uvedl, že má střed v bodě  $[-5,2]$  a je „otevřená do stran“. Dále z rovnice vyvodil délku hlavní poloosy  $a = 5$  a vedlejší poloosy  $b = 3$ . *ChatGPT* správně z rovnice určil, o jakou kuželosečku se jedná, a následně správně vypočítal délky hlavní a vedlejší poloosy. Souřadnice ohnisek a excentricitu chatbot neuvedl.

**Příklad 2.35.** Uveď vlastnosti kuželosečky, která je dána rovnicí  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$ .

V příkladě 2.35 chatbot rozpoznal, že se jedná o rovnici kružnice. Dále napsal informaci o jejím středu v bodě  $[2, -1]$  a poloměru  $r = 4$ . Tedy i v tomto případě chatbot správně z rovnice dokázal interpretovat, o jakou kuželosečku se jedná a určil pro středoškolskou matematiku všechny podstatné informace.

Z příkladů v této podkapitole je vidět, že umělá inteligence ve formě chatbota dokáže napsat rovnice kuželoseček s požadovanými vlastnostmi a také naopak z rovnic vyvodit, o jakou kuželosečku se jedná. Avšak v některých případech neuvede všechna řešení (viz příklady 2.32 a 2.33). Následně je také schopna vypsát všechny vlastnosti podstatné pro středoškolskou matematiku.

### 3 Srovnání chatbotů v řešení matematických problémů

Hlavní zaměření této kapitoly bude spočívat v porovnání dvou chatbotů, kteří v současnosti patří mezi nejvíce rozšířené, v řešení středoškolských úloh. Prvním chatbotem je již dříve v této práci využívaný *ChatGPT* ve verzi 3.5 a druhým chatbotem bude *Gemini*<sup>47</sup>. Oba tyto chatboti jsou bezplatní a zároveň s nimi lze komunikovat v českém jazyce.

*Gemini*<sup>48</sup> (dříve *Bard*) je chatbot vyvinutý společností Google. Jedná se o poměrně nového chatbota, protože byl představen teprve v roce 2023. V současné době je dostupný ve většině států světa a podporuje všechny jazyky, které jsou podporovány Google překladačem. Chatbot *Gemini* od společnosti Google funguje na podobném principu<sup>49</sup> jako chatbot *ChatGPT* od firmy *OpenAI*, avšak odpovědi těchto dvou chatbotů se mohou výrazně lišit.

Na těchto chatbotech budeme testovat příklady z učiva, které v této práci nebylo v předchozích kapitolách probráno buď vůbec, nebo o něm jen padla zmínka. Zároveň půjde o učivo, které je nad rámec platného RVP G. Bude se jednat o příklady na komplexní čísla a goniometrické nerovnice<sup>50</sup>. Zadání příkladů bude vždy pro oba chatboty stejné a bude vycházet ze středoškolských učebnic matematiky. Podobně jako v předchozí kapitole budeme u chatbotů kromě korektnosti výsledku a terminologie sledovat taktéž postup a dovednost reagovat na doplňující dotazy.

V předchozích podkapitolách jsme k řešení některých úloh využili také *Wolfram Alpha*. Ačkoliv jsme preferovali chatbota kvůli jeho lepší interpretaci přirozeného jazyka, tak *Wolfram Alpha* taktéž dokáže svým způsobem zpracovat některé vstupy v přirozeném jazyce. Navíc *Wolfram Alpha* v současné době zvládá matematické výpočty lépe než kterýkoliv rozšířený chatbot. Chatboti by ale měli být schopni zformulovat dotaz uživatele tak, aby ho správně interpretoval a následně vypočítal *Wolfram Alpha*. Jak úspěšní jsou v této dovednosti chatboti budeme testovat v podkapitole 3.3.

Na závěr této kapitoly budou shrnuty výsledky porovnání obou zmíněných chatbotů v závislosti na tom, jak si poradí se zadanými příklady. V podkapitolách 3.1 a 3.2 budou hodnoceny jejich silné a slabé stránky v generování výsledků, užití adekvátní terminologie a zvoleném postupu při řešení úloh. Následně v podkapitole 3.3 budeme zkoumat úspěšnost generování dotazů pro *Wolfram Alpha*. Je důležité podotknout, že několik zadaných úloh v následujících podkapitolách zdaleka nepokrývá všechny slabé i silné stránky obou chatbotů. Zároveň jsou oba chatboti ve vývoji, a tak se případné zmíněné chyby mohou v průběhu jejich vývoje opravit.

#### 3.1 Komplexní čísla

Příklady 3.1 až 3.4 jsou zde zpracovány formou, ve které je ukázána přesná odpověď chatbota pomocí snímku obrazovky a dále je popsáno, jaké operace chatbot provedl a zda je

---

<sup>47</sup> Ke srovnání byl původně plánován chatbot *Grok*. Ten ale v době psaní této práce není dostupný pro Českou republiku.

<sup>48</sup> Dostupný na odkaze: <https://gemini.google.com/>.

<sup>49</sup> Tímto principem je myšleno, že uživatel do určeného okna zadá svůj dotaz, ten se přidá do konverzace s chatbotem, a následně pod tento dotaz chatbot vygeneruje svou odpověď.

<sup>50</sup> Ačkoliv goniometrické nerovnice nejsou uvedeny v RVP G, tak příklady, které budeme zadávat chatbotům, se budou řešit na základě úvah o funkčních hodnotách daných funkcí.

tato odpověď vhodná pro žáka, který se snaží porozumět tématu. Další příklady budou mít formu jako v kapitole 2, protože jejich řešení vyžaduje více kroků a odpověď chatbota by byla příliš dlouhá na vložení odpovědi ve formě snímku obrazovky. Přesto v některých příkladech budou doplněny alespoň zkrácené odpovědi chatbota formou screenshotu pro lepší porozumění toho, jak chatbot odpověděl. Následuje shrnutí odpovědi jednoho a druhého chatbotu a poté jejich porovnání. Ve všech příkladech bude vždy nejprve dotázán chatbot *ChatGPT* a následně *Gemini*.


Pro tuto kapitolu byly zvažovány tři učebnice matematiky pro gymnázia, které se zabývají komplexními čísly. Tyto učebnice byly *Matematika pro gymnázia: Komplexní čísla* (Calda, 2008), *Matematika pro střední školy 10. díl: Komplexní čísla, polynomy, matice, základy diferenciálního a integrálního počtu* (Zemek, 2019), a *Matematika pro SŠ: Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika* (Robová, Hála & Calda, 2013).

Učebnice *Matematika pro gymnázia* vyšla již před více jak 15 lety a v dnešní době je učiteli často považována za náročnou, neboť obsahuje více teorie a méně příkladů. Navíc se učebnice *Matematika pro gymnázia* obsahově téměř shoduje s učebnicí *Matematika pro SŠ*. Učebnice *Matematika pro SŠ* navíc obsahově více pokrývá učivo komplexních čísel než učebnice *Matematika pro střední školy*. K účelům této práce tedy nejlépe poslouží učebnice *Matematika pro SŠ*, ze které budeme čerpat příklady.

Příklady budou zadány přesně tak, jak jsou uvedeny ve zvolené učebnici. Chatboti tak budou mít „stejné podmínky“, jako by měl žák, který by dané příklady samostatně řešil. Příklady byly vybrány tak, aby pokryly postupně učivo všech kapitol v tématu komplexní čísla ve zmíněné učebnici.

**Příklad 3.1.** Napište tři různá komplexní čísla, jejichž obrazy v Gaussově rovině mají od počátku soustavy souřadnic vzdálenost 2. (Robová, Hála & Calda, 2013, s. 16, cv. 8)

Odpověď ChatGPT (obr. 3.1):

 **ChatGPT**

Komplexní čísla můžeme zapsat ve tvaru  $z = a + bi$ , kde  $a$  a  $b$  jsou reálná čísla, a  $i$  je imaginární jednotka ( $i^2 = -1$ ). Pokud chceme, aby obrazy těchto čísel v Gaussově rovině měly od počátku soustavy souřadnic vzdálenost 2, můžeme zvolit tři různé hodnoty  $a$  a  $b$  s touto vlastností.

Příklady takových čísel jsou:

1.  $z_1 = 2 + i$ 
  - Obraz v Gaussově rovině má od počátku soustavy souřadnic vzdálenost  $\sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5} \approx 2.236$ .
2.  $z_2 = -1 - i$ 
  - Obraz v Gaussově rovině má od počátku soustavy souřadnic vzdálenost  $\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \approx 1.414$ .
3.  $z_3 = 1 - 2i$ 
  - Obraz v Gaussově rovině má od počátku soustavy souřadnic vzdálenost  $\sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \approx 2.236$ .

Tato čísla splňují podmínku vzdálenosti 2 od počátku soustavy souřadnic v Gaussově rovině.

Obr. 3.1

### Vyhodnocení odpovědi:

*ChatGPT* začal algebraickým tvarem komplexních čísel. Informace uvedené v první větě jsou správné. Ve druhé větě nejsou přímo nepravdivé informace, ale žákovi příliš nepomohou, protože chatbot pouze konstatuje fakt, že zvolí hodnoty  $a$  a  $b$  tak, aby vzdálenost od počátku soustavy souřadnic byla 2, ale už nevysvětlil, jak tyto hodnoty získat. Navíc ani jedno z uvedených komplexních čísel nemá vzdálenost 2. Výsledek je tedy chybný i přesto, že chatbot v poslední větě uvádí, že „čísla splňují podmínku vzdálenosti 2“. Je taktéž vidět symbolický nedostatek, kdy chatbot používá k zápisu desetinného čísla desetinnou tečku, nikoliv čárku, což je zápis z anglické symboliky.

### Doplňující dotazy a reakce chatbota:

Po vygenerování odpovědi chatbotem mu bylo oznámeno, že ani jedno z uvedených čísel nemá vzdálenost 2. V reakci na to se chatbot omluvil za chybu a tentokrát se pokusil vygenerovat komplexní čísla, která mají „vzdálenost přesně 2“. Tato vygenerovaná komplexní čísla byla  $z_1 = 2 + 0i$ ,  $z_2 = -1 + i$  a  $z_3 = -1 - i$ . U komplexních čísel  $z_2$  a  $z_3$  si chatbot upravil výsledek tak, aby vzdálenost vycházela rovna 2, např.  $\sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} = 2$ . Na což dostal chatbot další odpověď, že  $\sqrt{2} \neq 2$ . V reakci na to chatbot odpověděl, že opravdu „ $\sqrt{2}$  není přesně rovno 2“, a tentokrát vypsals jiná komplexní čísla (s výjimkou čísla  $z_1$ ), a to  $z_1 = 2 + 0i$ ,  $z_2 = -2 + 0i$  a  $z_3 = 0 + 2i$ , která všechna splňují požadavek z příkladu 3.1.

Odpověď Gemini (obr. 3.2):

◆ 1.  $2 + 0i$ : Toto číslo je reálné číslo a jeho obraz v Gaussově rovině leží na reálné ose ve vzdálenosti 2 od počátku.

2.  $0 + 2i$ : Toto číslo je imaginární číslo a jeho obraz v Gaussově rovině leží na imaginární ose ve vzdálenosti 2 od počátku.

3.  $1 + i$ : Toto číslo je komplexní číslo s reálnou i imaginární složkou rovnou 1. Jeho obraz v Gaussově rovině leží v prvním kvadrantu a má od počátku soustavy souřadnic vzdálenost 2.

Můžeme také vyjádřit komplexní čísla v goniometrickém tvaru:

- $2 + 0i = 2(\cos(0^\circ) + i\sin(0^\circ))^*$
- $0 + 2i = 2(\cos(90^\circ) + i\sin(90^\circ))^*$
- $1 + i = \sqrt{2}(\cos(45^\circ) + i\sin(45^\circ))^*$

Všechna tato čísla splňují zadanou podmínku, že jejich obrazy v Gaussově rovině leží ve vzdálenosti 2 od počátku soustavy souřadnic.

Další komplexní čísla splňující zadanou podmínku můžeme získat vynásobením výše uvedených čísel komplexním číslem s absolutní hodnotou 1. Například:

- $4 + 0i = 2(2(\cos(0^\circ) + i\sin(0^\circ)))^{**}$
- $0 + 4i = 2(2(\cos(90^\circ) + i\sin(90^\circ)))^{**}$
- $2 + 2i = \sqrt{2}(2(\cos(45^\circ) + i\sin(45^\circ)))^{**}$

Všechna tato čísla leží na kružnici s poloměrem 2 a středem v počátku soustavy souřadnic v Gaussově rovině.

Obr. 3.2

Vyhodnocení odpovědi:

*Gemini* rovnou uvedl tři čísla, která podle něj mají vzdálenost 2 od počátku soustavy souřadnic. To platí pouze pro první dvě vypsána čísla. Takže tvrzení, že „Všechna tato čísla splňují zadanou podmínku, že jejich obrazy v Gaussově rovině leží ve vzdálenosti 2 od počátku soustavy souřadnic“, není pravdivé. K tomu chatbot přidal další tři komplexní čísla a jejich vyjádření v goniometrickém tvaru. Tato čísla mají mít zadanou vzdálenost. Násobení komplexním číslem o velikosti 1 je správná úvaha, ale tato uvedená čísla násobí 2, tedy ne komplexní jednotkou. Navíc tyto nadbytečné informace mohou žáka mást, protože v hodině matematiky ještě nemuseli brát komplexní čísla v goniometrickém tvaru.

Doplňující dotazy a reakce chatbota:

Chatbot byl upozorněn, že komplexní číslo  $1 + i$  má vzdálenost menší než 2, nikoliv 2. *Gemini* se omluvil za svou chybu a jako třetí komplexní číslo tentokrát uvedl  $-1 + i$ , které ovšem taktéž nemá vzdálenost 2. Byl opět upozorněn, že toto číslo také nemá vzdálenost 2 od počátku. V reakci na tuto odpověď se *Gemini* opět omluvil za svou chybu a uvedl jako třetí komplexní číslo  $1 + \sqrt{3}i$ . Tento výsledek je již správný.

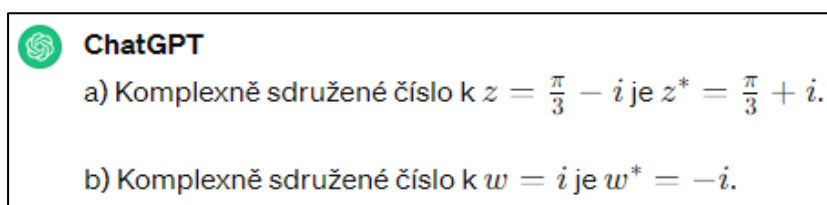


### Shrnutí:

Oba chatboti zprvu uváděli komplexní čísla, která mají reálnou a imaginární část celé číslo mezi  $-2$  a  $2$  včetně. Obrazy těchto čísel ale neměly vzdálenost od počátku rovnu  $2$ . Chatbot *Gemini* byl od první odpovědi úspěšnější než *ChatGPT*, protože dokázal uvést alespoň dvě správná komplexní čísla, zatímco všechna tři komplexní čísla uvedená chatbotem *ChatGPT* neodpovídala požadavku ze zadání. Na první opravu reagovali oba chatboti velmi podobně tak, že opravili chybná komplexní čísla, nahradili je jinými, a označili to za správný výsledek. Po dvou opravách dokázali oba chatboti správně vypsát tři čísla s požadovanou vzdáleností od počátku soustavy souřadnic.

**Příklad 3.2.** Napište komplexně sdružené číslo k číslu: a)  $\frac{\pi}{3} - i$ , b)  $i$ . (Robová, Hála & Calda, 2013, s. 18, cv. 7c a 7f)

Odpověď ChatGPT (obr. 3.3):



Obr. 3.3

### Vyhodnocení odpovědi:

Uvedená komplexní čísla jsou opravdu čísla komplexně sdruženými k číslům v zadáních a) i b). Některým žákům ale nemusí být vždy jasné, jak chatbot k těmto číslům dospěl, protože uvedl pouze výsledky. Navíc *ChatGPT* použil pro komplexně sdružené číslo symbol hvězdičky u písmena  $z$  i  $w$ , zatímco v české školské matematice se používá symbol  $\bar{z}$ ,  $\bar{w}$ . To by mohlo žáka plést.

### Doplňující dotazy a reakce chatbota:

Nebylo třeba chatbota opravovat. Avšak v případě, že žák zadá nejdříve chatbotovi pouze úlohu a), nebo pouze úlohu b), tak mu navíc chatbot napíše, co je to komplexně sdružené číslo a jak se vypočítá. Tedy se odpověď liší vzhledem k zadání úkolu.

Odpověď Gemini (obr. 3.4):

◆ a) Komplexně sdružené číslo k číslu  $\pi/3 - i$  je  $\pi/3 + i$ .

b) Komplexně sdružené číslo k číslu  $i$  je  $-i$ .

**Vysvětlení:**

Komplexně sdružené číslo k číslu  $z$  získáme tak, že změnímme znaménko imaginární složky.

V tomto případě:

a) Zadané číslo  $z = \pi/3 - i$ . Imaginární složka čísla  $z$  je  $-i$ . Změnou znaménka imaginární složky získáme  $i$ . Komplexně sdružené číslo k číslu  $z$  je tedy  $\pi/3 + i$ .

b) Zadané číslo  $z = i$ . Imaginární složka čísla  $z$  je  $i$ . Změnou znaménka imaginární složky získáme  $-i$ . Komplexně sdružené číslo k číslu  $z$  je tedy  $-i$ .

Obr. 3.4

Vyhodnocení odpovědi:

*Gemini* stejně jako *ChatGPT* uvedl příslušné zadání a k tomu rovnou také výsledek. Rozdíl byl ale v tom, že *Gemini* přidal také detailní vysvětlení, jak získat komplexně sdružené číslo, což může některým žákům pomoci. *Gemini* se ale dopustil chyby, protože imaginární část je reálné číslo, zatímco  $i$  je imaginární jednotka. Takže imaginární část v zadání a) má být  $-1$  a u zadání b) má být  $1$ . Zároveň chatbot píše o imaginární složce, přestože správně se jedná o imaginární část.

Doplňující dotazy a reakce chatbota:

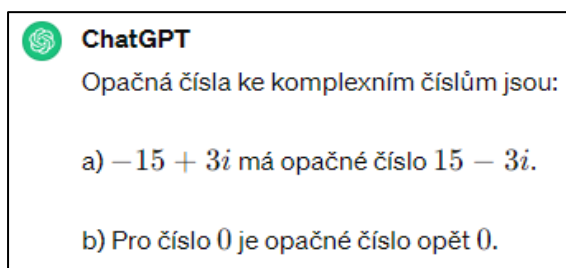
*Gemini* dostal otázku, zda „*Je správná terminologie imaginární složka nebo imaginární část*“. Na to chatbot odpověděl, že jsou „*obě terminologie v podstatě synonyma*“. Dále také odpověděl, že imaginární část se používá „*V neformálních textech a běžné mluvě*“.

Shrnutí:

Chatboti uvedli správný výsledek a k tomu dokázaly přidat i to, jak k danému výsledku došly. Avšak i přes správný výpočet *Gemini* opakovaně používal chybnou terminologii. Dalším rozdílem je, že *ChatGPT* při zadání dvou komplexních čísel zároveň neposkytl vysvětlení, jak k výsledku dospěl. Pouze při zadání nejprve prvního a následně druhého komplexního čísla z příkladu vysvětlil pojem komplexně sdružené číslo. *Gemini* i v případě zadání obou komplexních čísel nabídne vysvětlení a následně použitou metodu ukáže na zadaných příkladech.

**Příklad 3.3.** Napište opačné číslo ke komplexnímu číslu: a)  $-15 + 3i$ , b)  $0$ . (Robová, Hála & Calda, 2013, s. 19, cv. 13b a 13e)

Odpověď ChatGPT (obr. 3.5):



Obr. 3.5

Vyhodnocení odpovědi:

Formát odpovědi od *ChatGPT* byl stejný, jako v příkladu 3.2. Pouze napsal komplexní číslo ze zadání a k tomu přidal požadovaný výsledek. Oba výsledky jsou správné. Ovšem opět může některým žákům chybět zdůvodnění, jak chatbot k opačným číslům došel.

Doplňující dotazy a reakce chatbota:

Na dotaz „Co je to opačné číslo v komplexních číslech?“ reagoval chatbot vysvětlením, že „V komplexních číslech je opačné číslo dané čísla  $a + bi$  číslo  $-a - bi$ .“. Vysvětlení je správné a obsahuje také správnou terminologii; avšak věta není česky zcela správně.

*ChatGPT* dostal ještě doplňující dotaz: „Napiš imaginární část z čísla  $-15 + 3i$ .“. Na to chatbot odpověděl, že „Imaginární část čísla  $-15 + 3i$  je  $3i$ .“. To je chyba, protože imaginární část je v tomto případě pouze číslo 3.

Odpověď Gemini (obr. 3.6):

✦ a) Opačné číslo ke komplexnímu číslu  $-15 + 3i$  je  $15 - 3i$ .

b) Opačné číslo ke komplexnímu číslu  $0$  je  $0$ .

**Vysvětlení:**

Opačné číslo k číslu  $z$  získáme tak, že změnímme znaménko reálné i imaginární složky.

V tomto případě:

a) Zadané číslo  $z = -15 + 3i$ .

- Reálná složka čísla  $z$  je  $-15$ .
- Imaginární složka čísla  $z$  je  $3i$ .

Změnou znaménka reálné i imaginární složky získáme  $15 - 3i$ .

Opačné číslo ke komplexnímu číslu  $-15 + 3i$  je tedy  $15 - 3i$ .

b) Zadané číslo  $z = 0$ .

- Reálná složka čísla  $z$  je  $0$ .
- Imaginární složka čísla  $z$  je  $0$ .

Změnou znaménka reálné i imaginární složky získáme  $0 + 0i$ , které se rovná  $0$ .

Opačné číslo ke komplexnímu číslu  $0$  je tedy  $0$ .

Obr. 3.6

Vyhodnocení odpovědi:

Formát odpovědi je stejný jako v příkladu 3.2. Nejdříve  *Gemini* přímo odpověděl na dotaz ze zadání a následně uvedl vysvětlení, jak k výsledku došel. Zároveň je toto vysvětlení opět velmi detailní, což může některým žákům pomoci s pochopením.  *Gemini* ale opět použil nesprávný termín „imaginární složka“. Zároveň v odpovědi k a) opět do imaginární části zahrnul  $i$ .

Doplňující dotazy a reakce chatbota:

Chatbot vysvětlil, jak vypočítat opačné číslo, a zároveň to ukázal také na konkrétním příkladu ze zadání. Ovšem přímo nevysvětlil, co to opačné číslo je. Na otázku „Co je to opačné číslo?“ reagoval vysvětlením, že „Opačné číslo k danému číslu  $x$  je číslo, které po přičtení k  $x$  dává jako výsledek  $0$ “. Odpověď je správná.


Shrnutí:

Oba chatboti u obou variant zadání uvedli správný výsledek. Avšak odpověď od  *Gemini* byla rozsáhlejší, protože obsahovala také vysvětlení, jak se opačné číslo určí a opět to chatbot také ukázal na zadaném příkladě v obou variantách. Proto může být pro žáka lepší odpověď od

*Gemini*, pokud chce kromě výsledku také rovnou vysvětlení. *Gemini* se ale zároveň dopustil terminologické chyby, když imaginární část chybně označuje jako „imaginární složka“. Zároveň v čísle  $a + bi$  uvažuje jako imaginární část  $bi$ , nikoliv pouze  $b$ . Těto chyby se ale dopouští také *ChatGPT*.

**Příklad 3.4.** Vyjádřete v algebraickém tvaru:  $i^{18} - (2 - i) - i^{19}$ . (Robová, Hála & Calda, 2013, s. 24, cv. 3d)

Odpověď ChatGPT (obr. 3.7):

 **ChatGPT**

Nejprve vyjádříme jednotlivé členy:

1.  $i^{18}$ :

$$i^{18} = (i^2)^9 = (-1)^9 = -1$$

1.  $(2 - i)$ :

Odečteme reálnou a imaginární část:

$$(2 - i) = 2 - i$$

1.  $i^{19}$ :

$$i^{19} = i \cdot i^{18} = i \cdot (-1) = -i$$

Teď můžeme sčítat:

$$i^{18} - (2 - i) - i^{19} = (-1) - (2 - i) - (-i)$$

Odečteme závorky a sečteme:

$$= -1 - 2 + i + i$$

Složky imaginární části se vyruší:

$$= -3 + 2i$$

Takže výsledek je  $-3 + 2i$ .

Obr. 3.7

Vyhodnocení odpovědi:

*ChatGPT* si rozložil zadaný výraz na jednotlivé sčítance, upravil je, sečetl a na závěr uvedl výsledek. Uvedený výsledek je správný, avšak v postupu se vyskytují nepřesnosti. Například žáka může zmást slovní vyjádření „Odečteme závorky a sečteme“, případně, že všechny kroky postupu mají označení „1.“. Pro některé žáky může být těžké se v řešení orientovat. Vyjádření, že „Složky imaginární části se vyruší“ je nejen přímo chybné, ale také terminologicky nevhodné, protože komplexní číslo má reálnou a imaginární část, nikoliv složky.

### Doplňující dotazy a reakce chatbota:

Chatbot dostal doplňující dotaz „*Jak se vyruší imaginární části?*“. Na to *ChatGPT* odpověděl, že se „*výrazy  $i$  a  $-i$  vyruší, protože jejich součet je nula.*“ a „*Imaginární části se zrušily, protože součet  $i + i$  je  $2i$* “. Vypadá to, že se chatbot snaží nepravdivě upravovat tvrzení tak, aby platilo jeho původní nepravdivé tvrzení.

### Odpověď Gemini (obr. 3.8):

◆ **Řešení:**

Vyjádření  $i^{18} - (2 - i) - i^{19}$  v algebraickém tvaru:

**1. Úprava mocnin:**

Začneme s úpravou mocnin imaginární jednotky  $i$ :

- $i^{18} = (i^2)^9 = (-1)^9 = -1$
- $i^{19} = i \cdot i^{18} = i \cdot (-1) = -i$

**2. Dosazení do zadaného výrazu:**

Dosadíme upravené mocniny do zadaného výrazu:

$$-1 - (2 - i) - (-i) = -1 - 2 + i + i$$

**3. Sčítání:**

Sečteme reálné a imaginární složky:

- Reálná složka:  $-1 - 2 = -3$
- Imaginární složka:  $1 + 1 = 2i$

**4. Zápis v algebraickém tvaru:**

Spojíme reálnou a imaginární složku a zapíšeme výsledek v algebraickém tvaru:

$$-3 + 2i$$

**Výsledek:**

Algebraický tvar výrazu  $i^{18} - (2 - i) - i^{19}$  je  $-3 + 2i$ .

Obr. 3.8

### Vyhodnocení odpovědi:

*Gemini* si rozdělil postup do čtyř kroků. Uvedený výsledek je správný. Jedna z věcí, se kterou by mohl mít žák problém, je ve třetím kroku zápis  $1 + 1 = 2i$ . Chatbot v tomto případě správně sečetl příslušné imaginární části, které jsou rovny 1, ale k tomu doplnil imaginární jednotku (výsledek má být 2, nikoliv  $2i$ ). Dále slovní výraz „spojit složky“ není z hlediska terminologie správný. Jednak není jasné, co se má tzv. „spojit“, a navíc se v matematice

nepoužívá „složka“, ale část, přičemž tento výraz používá chatbot opakovaně. Také se zde ukazuje, že *Gemini* zapisuje mocniny pomocí symbolu ^, jako například  $i^{18}$ , místo zápisu  $i^{18}$ . Pro žáka to může být špatně čitelné, zvláště u příkladů obsahujících delší výrazy.

#### Doplňující dotazy a reakce chatbota:

Chatbot byl upozorněn, že slovní spojení „*Spojíme reálnou a imaginární část*“ není správné a byl dotázán, jak by ho přepsal, aby bylo terminologicky správně. Na to *Gemini* reagoval tak, že se omluvil za svou chybu a nabídl čtyři možnosti, jak slovní spojení přepracovat. Ovšem na prvním místě opět uvedl „*Spojíme reálnou a imaginární část*“ a k tomu doplnil „*Toto je nejpřesnější a nejformálnější terminologie*“. Výraz „*Spojíme*“ uvedl také na třetím místě. Na druhém a čtvrtém místě napsal, že jsou vhodné také výrazy „*Sečteme reálnou a imaginární část*“ a „*Sjednotíme reálnou a imaginární složku*“.

#### Shrnutí:

Chatboti se dostali ke správnému výsledku. Jejich postup však zahrnoval terminologické chyby a nepřesnosti. Uvedené postupy byly velmi podobné a lišily se pouze ve formátu odpovědi uživateli. Rozdělení do jednotlivých kroků během řešení, které využil *Gemini*, může být pro žáky lépe čitelné a srozumitelné. Zvláště když se *ChatGPT* dopustil v popisech některých kroků nepřesností a chyb, které mohou některé žáky při učení nové látky mást.

**Příklad 3.5.** Určete komplexní číslo  $z$ , pro které platí:  $\frac{-1+i}{1-3i} = 2z$ . (Robová, Hála & Calda, 2013, s. 29, cv. 21b)

#### Odpověď ChatGPT:

*ChatGPT* na začátku výpočtu uvedl, že si „*Nejprve vypočítáme pravou stranu rovnice*  $2z : 2z = 2 \cdot z$ “<sup>51</sup>. Následně začal počítat s výrazem na levé straně rovnice. Vynásobil čitatele a jmenovatele zlomku komplexně sdruženým číslem k jmenovateli, čímž získal výraz  $\frac{(-1+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$ . Výrazy v čitateli a jmenovateli roznásobil, za hodnotu  $i^2$  dosadil  $-1$  a dostal zlomek  $\frac{-4+2i}{10}$ . Dále ze získané rovnice vyjádřil  $z$  jako  $z = \frac{-2+i}{10}$ .

#### Vyhodnocení odpovědi:

Uvedený výsledek není správný. Správně měl chatbot v čitateli dostat výraz  $-2 - i$ . Takže chatbot v průběhu výpočtu udělal chybu ve znaménku. Navíc je v postupu chatbota několik věcí, které by mohly být některým žákům nejasné. Například zbytečné vyjádření chatbota, že  $2z = 2 \cdot z$ . Jinak použitý postup je obdobný tomu, jak se postupuje ve výuce na střední škole.

#### Doplňující dotazy a reakce chatbota:

*ChatGPT* byl upozorněn, že „*Čítatel má být roven  $-2 - i$ , nikoliv  $-2 + i$* “. Chatbot se omluvil za chybu a napsal „*Opravenou verzi*“. Tato „*Opravená verze*“ byla totožná s předchozí verzí. Obsahovala také stejný původní výsledek. Na poslední řádce odpovědi ale chatbot svůj výsledek změnil, aby v čitateli zlomku bylo  $-2 - i$ .

---

<sup>51</sup> Dvojtečka za  $2z$  nemá význam dělení.

Odpověď Gemini (obr. 3.9):

*Gemini* řešil tuto úlohu zcela jiným způsobem. Postup si rozdělil do pěti kroků. V prvním vynásobil obě strany rovnice výrazem  $(1 - 3i)$ . Následně chatbot pokračoval:

**2. Roznásobíme pravou stranu:**

$$(-1+i) = 2z - 6iz$$

**3. Srovnáme reálné a imaginární části na obou stranách:**

- Reálná část:  $-1 = 2z$
- Imaginární část:  $1 = -6iz$

**4. Řešení rovnic:**

- Z rovnice  $-1 = 2z$  vypočítáme  $z$ :

$$z = (-1) / 2 = -1/2$$

- Z rovnice  $1 = -6iz$  vypočítáme  $i$ :

$$i = 1 / (-6z) = -1 / (6 * (-1/2)) = 1/3$$

Obr. 3.9

V závěru v posledním kroku *Gemini* uvedl výsledek  $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$ .

Vyhodnocení odpovědi:

Zvolený postup od *Gemini* vedl ke špatnému výsledku. Tento postup není vhodný a je také chybný, neboť komplexní číslo  $z$  obsahuje reálnou i imaginární část. Je třeba si číslo  $z$  vyjádřit ve tvaru  $a + bi$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$ , a až v kroku 3 porovnávat reálné a imaginární části komplexních čísel získaných na levé a pravé straně rovnice. To vede na soustavu dvou lineárních rovnic o neznámých  $a$  a  $b$ . Chatbot si ale vyjádřil  $z$  výrazu číslo  $2z$  jako reálnou část, a  $-6iz$  jako imaginární část, přičemž opět vyjádřil imaginární část včetně imaginární jednotky. Navíc byl využitý postup velmi nepřehledný a většině žáků nepomůže s řešením typově podobných úloh.

Doplňující dotazy a reakce chatbota:

*Gemini* byl upozorněn, že výsledek je chybný. Na to chatbot reagoval stejným postupem, ovšem se změněným pořadím jednotlivých kroků. Zároveň v některých krocích dostal jiné výsledky. Tentokrát dostal výsledek  $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$ , který zapsal ve formě „ $z = - 1/2 - 1/3 * i$ “.

Ještě jednou byl *Gemini* opraven, tentokrát ale s poznámkou, že by se mohl pokusit tuto úlohu řešit vynásobením čitatele a jmenovatele zlomku na levé straně rovnice komplexně sdruženým číslem ke jmenovateli. To ale chatbotovi ke správnému výsledku nepomohlo. Vynásobil totiž obě strany rovnice komplexně sdruženým číslem ke jmenovateli. Následně postupoval (obr. 3.10):



Po roznásobení obou stran dostaneme:

$$(-1+i+3i-3) / (1^2 - (3i)^2) = 2z * (1+3i)$$

$$(-4+4i) / 10 = 2z * (1+3i)$$

Zjednodušíme:

$$-2/5 + 2/5 * i = 2z * (1+3i)$$

Rozdělíme obě strany 2:

$$-1/5 + 1/5 * i = z * (1+3i)$$

Srovnáme reálné a imaginární části na obou stranách:

- Reálná část:  $-1/5 = z$
- Imaginární část:  $1/5 = z * 3$

Z rovnice  $-1/5 = z$  vypočítáme  $z$ :

$$z = -1/5$$

Z rovnice  $1/5 = z * 3$  můžeme zkontrolovat, že  $z = -1/5$  je skutečně řešením:

$$1/5 = (-1/5) * 3 = -3/5$$

Obr. 3.10

Nejen, že je výsledek znovu chybný, ale navíc je zvolený postup opět nesprávný, ze stejných důvodů jako v předchozím případě, a pro žáky může být velmi nepřehledný. To samé může platit o způsobu, jak *Gemini* zapisuje mocniny.

Stojí také za zmínku, že ve druhém pokusu *Gemini* uvedl výsledek  $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$  a ve třetím  $z = -\frac{1}{5}$ , přesto u obou těchto chybných výsledků uvedl, že po dosazení do zadané rovnice, rovnice „skutečně platí“.

#### Shrnutí:

Ani jeden z chatbotů nedokázal přijít se správným výsledkem. Avšak *ChatGPT* alespoň zvolil správný postup. Chatboti nedokázali dojít ke správnému výsledku ani s upozorněním na chyby. Navíc se zdá, že s každým dalším pokusem *Gemini* čím dál tím více chyboval.

**Příklad 3.6.** Vyjádřete v goniometrickém tvaru komplexní číslo:  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ . (Robová, Hála & Calda, 2013, s. 37, cv. 2e)

Odpověď ChatGPT:

V tomto příkladě *ChatGPT* začal tím, že jako první se pokusil najít „velikost a argument“ daného komplexního čísla. Vypočítal velikost  $r$  ze vzorce<sup>52</sup>  $r = \sqrt{Re^2 + Im^2}$  a získal  $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Následně vypočítal argument  $\theta$  a uvedl  $\theta = \arctan(-\sqrt{2})$ ; poté dosadil  $r$  a  $\theta$  do vzorce pro goniometrický tvar  $z = r(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$ . Po dosazení chatbot zobrazil výsledek  $z = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos(\arctan(\sqrt{2})) + i \cdot \sin(\arctan(-\sqrt{2})))$ . Na závěr ale uvedl následující informaci (obr. 3.11):

Tuto hodnotu můžeme nechat tak, nebo dále zjednodušit, ale přesný zápis je často vhodnější:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$$

Obr. 3.11

Vyhodnocení odpovědi:

Chatbot *ChatGPT* postupoval obdobně, jako bylo vidět u některých příkladů v kapitole 2. Ze vzorce pro goniometrický tvar komplexního čísla odvodil, co je potřeba dopočítat za proměnné, a ty následně dosadil do daného vzorce (v tomto příkladě  $r$  a  $\theta$ ). Postup i výsledek je správný (jestliže pomineme snahu o zjednodušení na konci postupu, protože se o skutečné zjednodušení nejedná, a navíc to může žáka zmást), avšak pro žáka nevypovídající. Jednak proto, že funkce arkus tangens se na střední škole neprobírá, a jednak výsledný argument není vyjádřen v radiánech či ve stupních.

Odpověď Gemini:

*Gemini* začal vysvětlením, že „Komplexní číslo můžeme vyjádřit v goniometrickém tvaru pomocí absolutní hodnoty a argumentu.“. Následně takto vypočítal absolutní hodnotu a argument (obr. 3.12):

---

<sup>52</sup> Obvykle se reálná část čísla  $z$  zapisuje jako  $Re(z)$  a imaginární část jako  $Im(z)$ . Ovšem chatbot to zapsal takto bez  $(z)$ .

**Absolutní hodnota:**

Absolutní hodnota komplexního čísla  $z = a + bi$  se vypočítá jako:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

V tomto případě:

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{4}} = 1$$

**Argument:**

Argument komplexního čísla  $z = a + bi$  se vypočítá jako:

$$\arg(z) = \arctan(b/a)$$

V tomto případě:

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}/2}{1/2}\right) = -\pi/4$$

Obr. 3.12

Po těchto krocích dosadil do vzorce pro goniometrický tvar komplexního čísla a uvedl závěr: „*Goniometrický tvar komplexního čísla  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$  je:  $1 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = -\frac{i}{\sqrt{2}}$ “.*

Vyhodnocení odpovědi:

Ačkoliv *Gemini* zvolil korektní postup při výpočtu  $r$ , argumentu  $\theta$  a následném dosazení do rovnice goniometrického tvaru komplexního čísla, tak přesto výsledek nebyl správný. Výsledek absolutní hodnoty čísla  $z$  měl být  $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , ale *Gemini* vypočítal  $r = 1$ . Chyba při výpočtu  $r$  nastala, když chatbot napsal  $\sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4}\right)} = 1$  a také když špatně určil hodnotu arkus tangens. Tyto chyby ovlivnily výsledný goniometrický tvar čísla  $z$ . *Gemini* nakonec neadekvátně převedl goniometrický tvar na algebraický.

Shrnutí:

S tímto příkladem si lépe poradil *ChatGPT*. Zatímco *ChatGPT* si správně zvolil vzorec pro goniometrický tvar a vypočítal potřebné hodnoty  $r$  a  $\theta$ , tak *Gemini* již nedokázal  $r$  a ani  $\theta$  pro goniometrický tvar správně vypočítat. Zároveň si *ChatGPT* byl vědom správného zápisu goniometrického tvaru komplexního čísla. *Gemini* nakonec uvedl (nesprávný) výsledek ve tvaru algebraickém. Oba chatboti se ale ve svých výsledcích dopustili nedostatků, resp. chyb. *ChatGPT* zapsal výsledek pomocí funkce, která je pro žáky na střední škole neznámá, a výsledek od *Gemini* byl chybný.

**Příklad 3.7.** Určete algebraický tvar komplexního čísla:  $\cos\left(\frac{26\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{26\pi}{4}\right)$ . (Robová, Hála & Calda, 2013, s. 38, cv. 7b)

### Odpověď ChatGPT:

V tomto příkladě *ChatGPT* začal konstatováním faktu, že  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  a  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ . „Tudíž  $\cos\left(\frac{26\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{26\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{13\pi}{2}\right)$ “. Následně vzhledem k periodicitě kosinu a sinu přepsal  $\frac{13\pi}{2}$  jako  $\frac{\pi}{2}$ . Nakonec využil faktu, který konstatoval na začátku, a ohlásil výsledek  $0 + i \cdot 1 = i$ .

### Vyhodnocení odpovědi:

Jednotlivé kroky výpočtu byly správné a vedly ke správnému výsledku. Ovšem některé popisy kroků řešení přesné nebyly a mohly by žáka zmást nebo by vyžadovaly dodatečné dotazy. Kupříkladu *ChatGPT* nejdříve uvedl hodnoty kosinu a sinu pro argument  $\frac{\pi}{2}$  a následně napsal „Tudíž“. To by mohlo v žákovi vyvolat pocit, že v následujícím výpočtu se této vlastnosti využije, ale pouze se zkrátil zlomek a uvedené vlastnosti goniometrických funkcí bylo využito až na úplném konci výpočtu.

### Odpověď Gemini:

Naopak *Gemini* se pokusil dané číslo „převést do algebraického tvaru pomocí Eulerova vzorce  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$ “. Následný postup vypadal takto (obr. 3.13):

**1. Použití Eulerova vzorce:**

V našem případě máme:

$$\cos(26\pi/4) + i \cdot \sin(26\pi/4) = e^{i \cdot 26\pi/4}$$

**2. Zjednodušení:**

Víme, že  $e^{i\pi} = -1$ . Proto můžeme upravit exponent:

$$e^{i \cdot 26\pi/4} = e^{i \cdot (6\pi + 2\pi/4)} = e^{(6\pi i)} \cdot e^{(i\pi/4)} = (-1) \cdot (e^{(i\pi/4)})$$

**3. Výpočet  $e^{(i\pi/4)}$ :**

Z Eulerova vzorce víme, že:

$$e^{(i\pi/4)} = \cos(\pi/4) + i \cdot \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2i$$

**4. Dosazení do upraveného výrazu:**

$$(-1) \cdot (e^{(i\pi/4)}) = (-1) \cdot (\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2i) = -\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2i$$

Obr. 3.13

### Vyhodnocení odpovědi:

Nejen, že výsledek je chybný, ale také postup je pro středoškolskou matematiku nevyhovující, neboť Eulerův vzorec a ani hodnota  $e^{i\pi}$  se obvykle na střední škole neučí. Během výpočtu došlo k několika numerickým chybám, jako zapsání  $e^{(6\pi i)} = -1$ , kdy výraz na levé straně má být roven 1, nikoliv  $-1$ , nebo „ztracení“ čísla 2 v čitateli, kdy chatbot počítá

s exponentem  $\frac{2\pi}{4}$  a v následujícím kroku s exponentem  $\frac{\pi}{4}$ . Ani připomínky, že výsledek je chybný, nepomohly chatbotovi příklad vyřešit, protože se snažil použít stále stejný postup, ve kterém opět chyboval. Postup je taktéž nepřehledný.

Shrnutí:

*ChatGPT* nejen zvolil správný postup, ale také došel ke správnému výsledku. Postup je navíc pro žáky poměrně přehledný, ale některé popisy postupu mohou některé žáky zmást. *Gemini* zvolil nejen nevhodný postup, který následně vedl k chybnému výsledku, ale navíc použil poznatek, který se žáci na střední škole ani běžně neučí, například vzorec  $e^{i\pi} = -1$ .

**Příklad 3.8.** Vypočítejte v goniometrickém tvaru:  $\left(\frac{5}{2i}\right)^{-4}$ . (Robová, Hála & Calda, 2013, s. 48, cv. 7d)

Odpověď ChatGPT:

U tohoto příkladu *ChatGPT* postupoval tak, že si nejdříve přepsal zadaný výraz jako  $\left(\frac{2i}{5}\right)^4$ . Celý výraz následně umocnil, využil poznatku, že  $i^4 = 1$ , a napsal výsledek  $\frac{16}{625}$ . Nakonec poznamenal, že toto je „Celý výraz v goniometrickém tvaru“.

Vyhodnocení odpovědi:

Ačkoliv  $\frac{16}{625}$  je správný výsledek výpočtu, tak se nejedná o zápis komplexního čísla v goniometrickém tvaru. Správný výsledek  $\frac{16}{625}(\cos(2\pi) + i \cdot \sin(2\pi))$ . *ChatGPT* byl upozorněn, že výsledek není v goniometrickém tvaru. Po upozornění se pokusil řešit příklad podobně jako příklad 3.6, ale dospěl k jinému výsledku, který ani nezahrnoval původní výpočet a číslo  $\frac{16}{625}$ .

Odpověď Gemini:

Taktéž *Gemini* řešil tento příklad stejným způsobem, jako příklad 3.6. Rozdělil řešení na 5 kroků. Začal výpočtem absolutní hodnoty čísla  $\frac{5}{2i}$ . Ve druhém kroku obdobně jako v příkladu 3.6 vypočítal argument komplexního čísla  $\frac{5}{2i}$ . Následující dva kroky vypadaly takto (obr. 3.14):

**3. Umocnění:**

Při umocňování komplexního čísla v goniometrickém tvaru umocníme absolutní hodnotu a argument vynásobíme mocninou:

$$(5/2i)^{-4} = |5/2i|^{-4} * (\cos(-4 * \arctan(5/2)) + i * \sin(-4 * \arctan(5/2)))$$

**4. Výpočet:**

$$|5/2i|^{-4} = (\sqrt{29})^{-4} = 1/29^2$$

$$\cos(-4 * \arctan(5/2)) = \cos(4 * \arctan(2/5))$$

$$\sin(-4 * \arctan(5/2)) = -\sin(4 * \arctan(2/5))$$

Obr. 3.14

V závěrečném pátém kroku výpočtu chatbot uvedl výsledek  $\frac{1}{29^2} \cdot \left( \cos \left( 4 \cdot \arctan \left( \frac{2}{5} \right) \right) - i \cdot \sin \left( 4 \cdot \arctan \left( \frac{2}{5} \right) \right) \right)$ .

Vyhodnocení odpovědi:

Postup řešení byl velice podobný jako v příkladu 3.6 a také nevedl ke správnému výsledku. Hlavní chyba uvedeného postupu spočívá v nepochopení chatbota, že  $\frac{5}{2i}$  je ryze imaginární číslo (tj. reálná část  $a = 0$ ) a zřejmě tento zlomek interpretoval jako komplexní číslo, jehož imaginární část je 5 a reálná část je 2 (jak vyplývá z výpočtu argumentu). Opět nepomohlo ani upozornění na chybu a uvedení správného výsledku. Ačkoliv *Gemini* připustil, že správným výsledkem je  $\frac{16}{625} (\cos(2\pi) + i \cdot \sin(2\pi))$  a sám svůj výsledek označil za chybný, tak svůj předchozí výsledek uvedl znovu a v závěru ho přepsal na správný výsledek.

Shrnutí:

*ChatGPT* byl v tomto příkladě blíže správnému výsledku. Správně vypočítal  $\frac{16}{625}$ , ale již tento výsledek nepřevodil do goniometrického tvaru. Když byl opraven, tak zvolil jiný postup výpočtu místo uvedení požadovaného tvaru. *Gemini* rovnou zvolil „naučený“ postup, kde dopočítával a následně doplňoval neznámé do goniometrického tvaru komplexního čísla. Doplnující dotazy nevedly k napravení chybného výsledku.

**Příklad 3.9.** Řešte rovnici s neznámou  $x \in \mathbb{C}$  :  $\frac{x-2}{x} + \frac{x}{x-2} = \frac{1}{2x-x^2}$ . (Robová, Hála & Calda, 2013, s. 62, cv. 16b)

Odpověď ChatGPT:

Tento příklad se pokusil *ChatGPT* řešit tak, že vynásobil obě strany rovnice výrazem  $x(x-2)(2x-x^2)$ , aby se zbavil zlomků. Po tomto vynásobení obou stran rovnice dostal rovnici ve tvaru  $(x-2)(2x-x^2) + x^2 = x(x-2)$ . Následně na obou stranách roznásobil závorky a sčítal mezi sebou členy rovnice, než dostal rovnici  $x^3 = 0$ . Odtud tedy dostal jediné řešení rovnice, a to  $x = 0$ .

Vyhodnocení odpovědi:

Uvedený výsledek je chybný už jen proto, že číslo 0 je třeba vyloučit z možných výsledků, aby se předešlo dělení nulou. Chyba nastala už v prvním kroku výpočtu, protože *ChatGPT* si špatně vynásobil výrazy na levé straně rovnice. Když byl chatbot na tuto chybu upozorněn, tak se pokusil chybu opravit, avšak dospěl ke stejnému výsledku.

Odpověď Gemini:

Chatbot *Gemini* si rozdělil postup do čtyř kroků. V prvním kroku vynásobil obě strany rovnice výrazem  $(2x-x^2)$ , aby dostal rovnici v jednodušším tvaru. Po tomto roznásobení dostal rovnici  $(x-2)^2 + x^2 = 1$ . Ve druhém kroku upravil rovnici do tvaru  $x^2 - 4x + 3 = 0$ . Poté vypočítal kladný diskriminant a kořeny rovnice  $x_1 = 3$  a  $x_2 = 1$ . *Gemini* na závěr udělal kontrolu, ve které dosadil kořeny 3 a 1 do původní rovnice. Tento výsledek potvrdil jako správný.

### Vyhodnocení odpovědi:

Nastala zde podobná chyba, jako když úlohu řešil *ChatGPT*. Chatbot *Gemini* se chtěl nejprve zbavit zlomků vynásobením obou stran rovnice vhodným výrazem, avšak toto vynásobení udělal chybně, neboť získal po úpravě rovnici  $(x - 2)^2 + x^2 = 1$ . Po tomto kroku se akumulovaly další chyby, což vedlo ke kvadratické rovnici, která měla reálné kořeny 3 a 1, přestože rovnice v příkladu 3.9 má komplexní kořeny. *Gemini* dokonce na závěr udělal kontrolu, ve které dosadil kořeny 3 a 1 do původní rovnice, a svůj výsledek potvrdil jako správný. Problém byl, že po dosazení  $x = 3$  do obou stran rovnice chatbotovi vyšlo  $\frac{1}{3} + \frac{3}{1} = \frac{1}{3}$  a pro  $x = 1$  získal vztah  $-1 + 1 = \frac{1}{1}$ , což neplatí. I v tomto případě upozornění na chybu nevedlo ke správnému výsledku. Chatbot tentokrát obdobným postupem obdržel jeden dvojnásobný kořen, a to  $x_1 = x_2 = 2$ . Poté ale prohlásil, že zadaná „rovnice nemá v množině komplexních čísel řešení“.

### Shrnutí:

Ani jeden z chatbotů nebyl schopen se dostat ke správnému výsledku. Oba se snažily postupně upravovat rovnici, ale v průběhu úprav udělaly jednu nebo více početních chyb, což vedlo k rovnici, která měla řešení v oboru reálných čísel. *ChatGPT* navíc neurčil podmínky, což bylo vidět i v kapitole 2 (příklad 2.22). *Gemini* si zase upravil výsledky tak, aby mu vyšla zkouška pro  $x$ , která neřeší danou rovnici.

### Shrnutí všech příkladů z podkapitoly 3.1:

Z příkladů 3.1 až 3.9 můžeme vyzorovat, že oba chatboti *ChatGPT* a *Gemini* často chybují při řešení úloh s komplexními čísly. Dokáží řešit snazší úlohy, kde jde o nalezení opačného čísla, komplexně sdruženého čísla nebo určit imaginární a reálnou část komplexního čísla. Avšak ukázalo se, že mají problém s příklady 3.5 až 3.9. Je těžké určit, který chatbot chybuje méně. *ChatGPT* ale zvládne mimo dosazování do vzorců také použít postup, který dokáže příklad podstatným způsobem zjednodušit (viz příklad 3.7). Oproti *Gemini*, který se často snaží vyřešit úlohy pouze užitím určitého vzorce (příklady 3.6 a 3.7). Zároveň pro žáky může být lépe čitelný matematický text vygenerovaný chatbotem *ChatGPT*, neboť ten z pohledu školské matematiky vhodněji zapisuje mocniny a zlomky, například  $x^2 \left( \frac{x-2}{x} + \frac{x}{x-2} \right)$ , zatímco *Gemini* stejný výraz vygeneruje jako  $x^2 * ((x-2)/x + x/(x-2))$ .

## 3.2 Goniometrické nerovnice

Příklady v rámci této podkapitoly budou zpracovány prakticky stejně jako v předchozí podkapitole 3.1. V příkladech 3.10 a 3.11 budou postupy chatbotů ukázány ve formě screenshotů, ale další příklady v této podkapitole budou mít jen v některých případech přidány screenshoty, které budou ukazovat části postupu. Jinak budou postupy popsány slovně.

V této podkapitole budeme chatbotům zadávat příklady ze stejné sady učebnic, jako tomu bylo v případě komplexních čísel. Tentokrát se ale bude jednat o učebnici zabývající se funkcemi, konkrétně *Matematika pro SŠ: Funkce* (Odvárko, 2023). Některé důvody zvolení této učebnice jsou totožné s výběrem učebnice na příklady týkající se komplexních čísel. Tentokrát ale není výběr učebnic, které by obsahovaly goniometrické nerovnice pro střední

školy, tak široký, jako tomu bylo u komplexních čísel. Navíc pro lepší konzistenci se budeme držet jedné zvolené sady učebnic.

**Příklad 3.10.** Řešte rovnici a nerovnici s neznámou  $v \in \mathbb{R}$ :  $\cos v = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\cos v \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . (Odvárko, 2023, s. 120, cv. 3b)

Odpověď ChatGPT (obr. 3.15):



**ChatGPT**

Pro řešení rovnice  $\cos(v) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  můžeme použít znalost trigonometrických funkcí na unitárním kruhu. Vzhledem k tomu, že  $\cos(v)$  je rovno  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  v kvadrantech II a III, můžeme říci, že odpovídající úhly jsou  $\frac{5\pi}{6}$  a  $\frac{7\pi}{6}$ .

Tedy řešení rovnice je  $v = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$  a  $v = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ , kde  $k$  je libovolné celé číslo.

Pro řešení nerovnice  $\cos(v) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$  můžeme si všimnout, že  $\cos(v)$  je menší nebo rovno  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  v kvadrantech II a III, tedy úhly  $v$  odpovídající této podmínce jsou v intervalu  $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$  a  $[\pi, \frac{4\pi}{3}]$ . To znamená, že  $v$  leží v intervalech  $[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$  a  $[\pi + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi]$ , kde  $k$  je libovolné celé číslo.

Obr. 3.15

Vyhodnocení odpovědi:

Správné řešení této úlohy mělo být v případě rovnice  $\cup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right\}$  a v případě nerovnice  $\cup_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right)$ . *ChatGPT* správně určil, v jakých kvadrantech je  $\cos(v) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  a také správně určil velikost odpovídajících úhlů v radiánech včetně zápisu všech řešení s využitím periody funkce kosinus. Goniometrickou rovnici tedy chatbot dokázal vyřešit. Nerovnici ale už chatbot vyřešit nedokázal, neboť špatně určil intervaly, které jsou řešením dané nerovnice. Zároveň se *ChatGPT* v popisu postupu dopustil terminologické a symbolické chyby užitím pojmu „unitární kruh“, který se u nás nepoužívá. Symbolické chyby se dopustil při zápisu uzavřených intervalů pomocí hranatých závorek.



Odpověď Gemini (obr. 3.16):

◆ **Řešení rovnice  $\cos(v) = -\sqrt{3}/2$**

**Rovnice:**  
 $\cos(v) = -\sqrt{3}/2$

**Řešení:**  
Kosinus nabývá hodnoty  $-\sqrt{3}/2$  v úhlech:

- $\pi/6 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
- $5\pi/6 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Kde  $k$  je libovolné celé číslo.

**Množina řešení:**  
 $\{\pi/6 + 2\pi k, 5\pi/6 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

**Řešení nerovnice  $\cos(v) \leq -\sqrt{3}/2$**

**Nerovnice:**  
 $\cos(v) \leq -\sqrt{3}/2$

**Řešení:**  
Kosinus nabývá hodnoty menší nebo rovno  $-\sqrt{3}/2$  v intervalech:

- $[-\pi/3, \pi/3] + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
- $[2\pi/3, 4\pi/3] + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Kde  $k$  je libovolné celé číslo.

**Množina řešení:**  
 $([-\pi/3, \pi/3] \cup [2\pi/3, 4\pi/3]) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$

**Grafické znázornění**  
Graf  $\cos(v)$ : [neplatná adresa URL byla odstraněna]

Na grafu funkce  $\cos(v)$  jsou znázorněny body, kde  $\cos(v) = -\sqrt{3}/2$  (červené body) a intervaly, kde  $\cos(v) \leq -\sqrt{3}/2$  (modré oblasti).

**Závěr**  
Rovnice  $\cos(v) = -\sqrt{3}/2$  má nekonečně mnoho řešení, která tvoří množinu  $\{\pi/6 + 2\pi k, 5\pi/6 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

Nerovnice  $\cos(v) \leq -\sqrt{3}/2$  má také nekonečně mnoho řešení, která tvoří množinu  $([-\pi/3, \pi/3] \cup [2\pi/3, 4\pi/3]) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$ .

Obr. 3.16

Vyhodnocení odpovědi:


*Gemini* dokázal u rovnice určit správně jen část řešení (tj.  $\{\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ), ale namísto dalších řešení  $\frac{7}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  nesprávně uvedl  $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . V případě nerovnice určil meze intervalů chybně. Kromě výsledků, které nejsou doprovázeny postupem, obsahuje odpověď chatbota také další chyby a nedostatky. Symbolickou chybou je zapsání uzavřených intervalů pomocí hranatých závorek. Další chybou vůči české školské symbolice je také zápis periodicity řešení v případě intervalů, kde je uveden interval, resp. jejich sjednocení, a za tím následuje  $+2k\pi$  (tj. zápis součtu intervalu a čísla). K nedostatkům například patří opakované konstatování, že „*k je libovolné celé číslo*“, přestože to chatbot již napsal ve formě  $k \in \mathbb{Z}$ . Dále „*Grafické znázornění*“ je nepoužitelné z důvodu chyby URL. V odpovědi se také vyskytl překlep, viz text „*Závěr*“.

Shrnutí:

*ChatGPT* si dokázal poradit alespoň s goniometrickou rovnicí, zatímco *Gemini* nikoliv. Navíc je odpověď od *ChatGPT* pro uživatele mnohem přehlednější. Ani jeden z chatbotů nedošel ke správnému řešení goniometrické nerovnice. Oba chatboti se také v průběhu postupu dopouštěli chyb v symbolickém zápisu, nebo také terminologických chyb.

**Příklad 3.11.** Řešte soustavu nerovnic s neznámou  $z \in \mathbb{R}$ :  $\sin z > 0,5$ ,  $\cos z \geq 0,5$ . (Odvárko, 2023, s. 120, cv. 4a)

Odpověď ChatGPT (obr. 3.17):

 **ChatGPT**

Pro  $\sin(z) > 0.5$  jsme omezeni na první a druhý kvadrant, kde  $z$  je mezi  $\frac{\pi}{6}$  a  $\frac{5\pi}{6}$ , a mezi  $\frac{7\pi}{6}$  a  $\frac{11\pi}{6}$ . Tedy intervaly jsou  $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$  a  $(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$ .

Pro  $\cos(z) \geq 0.5$  jsme omezeni na první a čtvrtý kvadrant, kde  $z$  je mezi  $0$  a  $\frac{\pi}{3}$ , a mezi  $\frac{2\pi}{3}$  a  $2\pi$ . Tedy intervaly jsou  $[0, \frac{\pi}{3}]$  a  $[\frac{2\pi}{3}, 2\pi]$ .

Průnikem těchto intervalů je  $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$  a  $(\frac{7\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ , kde obě nerovnice platí současně.

Obr. 3.17

Vyhodnocení odpovědi:

Správné řešení tohoto příkladu je  $\cup_{k \in \mathbb{Z}} (\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi)$ . *ChatGPT* se pokusil nejprve určit intervaly, pro které je  $\sin z > 0,5$ , a poté intervaly, kde je  $\cos z \geq 0,5$ . Řešení určil jako průnik těchto intervalů. Tento postup chatbota je správný, přesto je ale výsledek chybný. To je způsobeno tím, že chatbot neurčil pro neznámou  $z$  správně dílčí intervaly včetně jejich průniku. Například pro  $z \in (\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$  jsou funkční hodnoty funkce sinus menší než  $-0,5$ , nikoliv větší než  $0,5$ . Obdobně u nerovnice  $\cos z \geq 0,5$  správně určil pouze první interval, druhý je chybný. Navíc chatbot neurčil všechna řešení v množině  $\mathbb{R}$ , neboť řešení uvedl bez zahrnutí periodicity funkcí sinus a kosinus. Toto řešení by tedy žákovi nejspíše vůbec nepomohlo. Uzavřené intervaly jsou opět zapisovány pomocí hranatých závorek.

Odpověď Gemini (obr. 3.18):

◆ **Řešení soustavy nerovnic  $\sin(z) > 0,5$  a  $\cos(z) \geq 0,5$**

**1. Řešení nerovnice  $\sin(z) > 0,5$ :**

Sinus nabývá hodnoty větší než 0,5 v intervalech:

- $[\pi/6 + 2\pi k, 5\pi/6 + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$

Kde  $k$  je libovolné celé číslo.

**Množina řešení:**

$$\{\pi/6 + 2\pi k, 5\pi/6 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

**2. Řešení nerovnice  $\cos(z) \geq 0,5$ :**

Kosinus nabývá hodnoty větší nebo rovno 0,5 v intervalech:

- $[-\pi/3, \pi/3] + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Kde  $k$  je libovolné celé číslo.

**Množina řešení:**

$$\{[-\pi/3, \pi/3] + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

**3. Řešení soustavy nerovnic:**

Soustava nerovnic  $\sin(z) > 0,5$  a  $\cos(z) \geq 0,5$  je splněna v průniku množin řešení obou nerovnic.

**Průnik množin:**

$$\{[-\pi/3, \pi/3]\} \cap \{\pi/6 + 2\pi k, 5\pi/6 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\pi/6, 5\pi/6\}$$

**Množina řešení soustavy:**

$$\{\pi/6, 5\pi/6\}$$

**Grafické znázornění**

Graf  $\sin(z)$  a  $\cos(z)$ : [neplatná adresa URL byla odstraněna]

Na grafu funkcí  $\sin(z)$  a  $\cos(z)$  jsou znázorněny oblasti, kde  $\sin(z) > 0,5$  (modrá oblast) a  $\cos(z) \geq 0,5$  (zelená oblast). Průnikem těchto oblastí jsou body  $\pi/6$  a  $5\pi/6$ .

**Závěr**

Soustava nerovnic  $\sin(z) > 0,5$  a  $\cos(z) \geq 0,5$  má pouze **dvě řešení**:  $\pi/6$  a  $5\pi/6$ .

Obr. 3.18

Vyhodnocení odpovědi:

Stejně jako *ChatGPT* řešil *Gemini* tuto úlohu přes průnik intervalů, na kterých funkce sinus a kosinus nabývají požadovaných hodnot. *Gemini* správně našel intervaly, na kterých funkce sinus nabývá hodnot větších než 0,5 (až na zahrnutí krajních hodnot) a kosinus větších

nebo rovných 0,5. Chatbot ale na závěr udělal chybu při průniku intervalů. První krajní bod  $\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$  určil chatbot správně, avšak druhý nikoliv. Dále se chatbot dopustil některých stejných nedostatků a chyb jako v příkladu 3.11. Jedna ze zásadních chyb je, že množinu řešení pro nerovnici se sinem zapsal nikoliv jako interval, ale jako dvě hodnoty s periodou  $2\pi$ . Tedy řešení soustavy není průnik intervalů, ale průnik intervalu s čísly. Opět dvakrát píše o proměnné  $k$ , grafické znázornění opět není funkční, a výsledné řešení nezahrnuje periodicitu daných funkcí.

### Shrnutí:

Druhý příklad 3.11 na soustavu goniometrických nerovnic nedokázal vyřešit *ChatGPT* a ani *Gemini*. *Gemini* selhal, když zapsal řešení pro sinus namísto sjednocení intervalů jako množinu „jednotlivých“ čísel. *ChatGPT* chyboval především při určení intervalů řešení pro každou z nerovnic včetně opomenutí periody. Opět se zde opakovaly některé chyby jako v předchozích příkladech v této podkapitole, například opakování zápisu  $k \in \mathbb{Z}$ , nebo nefungující odkazy. Oba chatboti také opakovaně dělají symbolické chyby, například při zápisu uzavřeného intervalu pomocí hranatých závorek.

**Příklad 3.12.** Řešte nerovnici s neznámou  $x \in \mathbb{R}$  :  $|\cos x| > \frac{1}{2}$ . (Odvárko, 2023, s. 131, cv. 9a)

### Odpověď ChatGPT:

Řešení tohoto příkladu je  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{2}{3}\pi + k\pi, \frac{4}{3}\pi + k\pi\right)$ . Na začátku *ChatGPT* uvedl, že pro nalezení řešení této nerovnice „musíme najít takové hodnoty  $x$ , pro které je absolutní hodnota kosinu  $x$  větší než  $\frac{1}{2}$ “. Poté uvedl následující odstavec:

Absolutní hodnota kosinu se může pohybovat mezi 0 a 1. Pokud je absolutní hodnota větší než  $\frac{1}{2}$ , znamená to, že je v rozmezí  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  nebo  $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ . To se stane, když  $x$  leží ve 4. a 1. kvadrantu (pro první rozmezí) nebo v 2. a 3. kvadrantu (pro druhé rozmezí).

Následně chatbot rozdělil řešení přes jednotlivé kvadranty a uvedl, že funkce kosinus je kladná „v 1. a ve 4. kvadrantu“, a že „ $\cos(x) > \frac{1}{2}$  pro  $x$  mezi  $\frac{\pi}{3}$  a  $\frac{5\pi}{3}$ “. Naopak „V 2. a 3. kvadrantu je kosinus záporný, takže  $-\cos(x) > \frac{1}{2}$  pro  $x$  mezi  $\frac{2\pi}{3}$  a  $\frac{4\pi}{3}$ “. Na závěr výpočtu uvedl, že „Spojíme tyto dvě intervaly a máme výsledek:  $x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ “.

### Vyhodnocení odpovědi:

*ChatGPT* se dopustil v postupu několika početních a také terminologických chyb. Myšlenka postupu najít jednotlivé intervaly (v tomto příkladu stačí najít jeden takový interval), které splňují podmínku, a následně tyto intervaly sjednotit je správná. Výsledek je ale chybný, protože chatbot například uvedl, že  $\cos(x) > \frac{1}{2}$  pro  $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ , což je chyba, protože na celém tomto intervalu není  $\cos(x) > \frac{1}{2}$ . Druhý interval ale chatbot určil správně, protože platí, že  $|\cos(x)| > \frac{1}{2}$  pro  $x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ . Některé části odpovědi mohou být také samy o sobě nesrozumitelné, například věta „Pokud je absolutní hodnota větší než  $\frac{1}{2}$ , znamená to, že je v rozmezí  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  nebo  $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ “. Další chyby zahrnují neuvedení periodicity řešení,

terminologicky nepřesné vyjádření „spojení intervalů“, a nesprávně česky napsaná část věty „*tyto dvě intervaly*“.

Odpověď Gemini:

*Gemini* taktéž postupoval přes sjednocení jednotlivých intervalů, pro které platí podmínky ze zadání. Nejprve určil interval hodnot, pro které je  $\cos(x) > \frac{1}{2}$ , výsledek zapsal jako  $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Poté to samé vypočítal pro  $\cos(x) < -\frac{1}{2}$ , a dospěl k řešení, že  $x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  a  $x \in \left(-\frac{5\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Na závěr určil množinu řešení zadané nerovnice jako  $\left(\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}\right)\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Vyhodnocení odpovědi:

Chatbotovi se povedlo správně určit několik intervalů, ve kterých je  $|\cos(x)| > \frac{1}{2}$ . Ačkoliv si byl *Gemini* vědom toho, že řešení této nerovnice lze zapsat s využitím periody, tak v uvedeném výsledku zahrnul i interval  $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ , na kterých funkce  $y = |\cos(x)|$  nabývá stejných hodnot jako na intervalu  $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ . Chybně také zahrnul interval  $\left(-\frac{5\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}\right)$ . Při řešení se vyskytly stejné nedostatky jako v předchozích příkladech 3.10 a 3.11, například nefunkční grafické znázornění a opakovaný zápis  $k \in \mathbb{Z}$ .

Shrnutí:

Ačkoliv oba chatboti dokázali určit interval či intervaly, kde je splněna podmínka ze zadání, tak vždy doplnili další interval, který nebyl řešením dané nerovnice nebo „odpovídal stejným funkčním hodnotám“. Postup tedy nebyl sám o sobě chybný, ale chatboti se v jeho průběhu dopouštěly chyb, což způsobilo chybné výsledky. Zároveň se v odpovědích chatbotů opakují některé nedostatky a chyby z předešlých příkladů (symbolické zápisy, nezahrnutí periodicity daných funkcí).

**Příklad 3.13.** Řešte nerovnici s neznámou  $x \in \mathbb{R} : |\sin x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ . (Odvárko, 2023, s. 131, cv. 9b)

Odpověď ChatGPT:

Řešením příkladu jsou intervaly  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi \right\rangle \cup \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{2}{3}\pi + k\pi, \pi + k\pi \right\rangle$ . *ChatGPT* konstatoval, že „*Hodnoty sinusové funkce se pohybují mezi -1 a 1*“, takže pokud má být absolutní hodnota této funkce menší nebo rovna  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , musí být hodnoty funkce sinus z intervalu  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ . To je „*ekvivalentní s intervalech  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$  a  $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$* “. Jako řešení tohoto příkladu nakonec uvedl sjednocení těchto intervalů bez zahrnutí periody funkce sinus.

Vyhodnocení odpovědi:

Chatbot v tomto příkladu správně uvedl, že  $|\sin(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  na intervalech  $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$  a  $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ . Nejedná se ale o všechny intervaly, které jsou řešením, protože těch je nekonečně mnoho. *ChatGPT* tedy opět zapomněl na periodicitu funkce sinus. Žákům může také chybět

v popisu řešení postup, jak chatbot přišel na tyto konkrétní hodnoty  $x$ . Chatbot i v tomto příkladu 3.13 používá nesprávný symbolický zápis pro uzavřený interval.

Odpověď Gemini:

Stejně jako v příkladu 3.12 si *Gemini* rozdělil příklad na dva případy: a)  $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ , b)  $\sin(x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Řešením byly v případě a) intervaly  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ; v případě b) intervaly  $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ,  $\left[-\frac{5\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}\right] + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Výsledné řešení následně *Gemini* uvedl jako sjednocení těchto intervalů. Na závěr úlohy chatbot zapsal následující poznámku (obr. 3.19):

**Poznámka:**

Množinu řešení můžeme také zapsat kompaktněji jako:

$$x \in \mathbb{R} \mid x \equiv k\pi/3 \pmod{\pi} \vee x \equiv 2k\pi/3 \pmod{\pi} \vee x \equiv -4k\pi/3 \pmod{\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

Toto vyjádření říká, že řešení nerovnice tvoří všechny úhly, které se liší od násobků  $\pi/3, 2\pi/3$  a  $-4\pi/3$  o libovolný počet celých násobků  $\pi$ .

Obr. 3.19

Vyhodnocení odpovědi:

První dva intervaly, které uvedl *Gemini*, jsou totožné s uvedenými intervaly v odpovědi od *ChatGPT*. Jediný interval, který uvedl navíc, byl  $\left(-\frac{5\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}\right)$ . Toto je zároveň jediný z uvedených intervalů, pro který neplatí podmínka ze zadání, neboť na tomto intervalu je  $|\sin(x)| > \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Mimo problémů opakujících se z minulých příkladů je dodatečná poznámka o zápisu řešení pomocí „modulo“ nepříliš užitečná. Poznámka je nepřehledná a žákovi nejspíše příliš nepomůže.

Shrnutí:

V tomto příkladu 3.13 dokázali chatboti přijít s intervaly, které splňují podmínku ze zadání, avšak buď jimi nepokryli všechna řešení vzhledem k periodičnosti funkce sinus (*ChatGPT*), nebo přidali k řešení intervaly, které zadanou podmínku nesplňují (*Gemini*).

Shrnutí všech příkladů z podkapitoly 3.2:

Ani jeden z chatbotů nedokázal zcela správně vyřešit ani jeden ze zadaných příkladů. Chatboti volí správný postup, ale po stránce početní si oba chatboti doplňují do řešení příkladu intervaly, které nesplňují podmínku ze zadání, což se stalo ve všech případech kromě řešení od *ChatGPT* v příkladu 3.13. Také se často dopouštějí terminologických a symbolických chyb. Tyto terminologické chyby dělá častěji *ChatGPT*, zatímco odpovědi od *Gemini* jsou zase dlouhé, špatně přehledné, a obsahují části, které nejsou funkční. *ChatGPT* navíc uvádí pouze jeden z nekonečně mnoha intervalů, které jsou řešením příkladu. *Gemini* naopak zmíní vlastnost, že  $k \in \mathbb{Z}$ , dvakrát pro stejný interval.

### 3.3 Generování dotazů pro Wolfram Alpha

V této práci nám jde o získání řešení bez placené aplikace, proto budeme v příkladech v této podkapitole pracovat s bezplatnou verzí *Wolfram Alpha*. Jak již bylo řečeno v kapitole 2, tak lze propojit *ChatGPT* s *Wolfram Alpha* tak, že *ChatGPT* obdrží od uživatele dotaz, chatbot toto zadání následně automaticky přeformuluje pro *Wolfram Alpha*, který provede výpočet a vrátí výsledek chatbotovi, a *ChatGPT* na závěr sestaví odpověď pro uživatele a zakomponuje do ní výsledek. Avšak toto propojení, které se nazývá *Wolfram GPT*, vyžaduje *ChatGPT Plus*. V současnosti cena *ChatGPT Plus* činí 20 dolarů (přibližně 469 Kč) na měsíc.

Oba chatboti *ChatGPT* a *Gemini* dokáží převést dotaz uživatele do formy srozumitelné pro *Wolfram Alpha*, který poté řeší danou úlohu. Toto předání řešení problému *Wolfram Alpha* může být užitečné v případě, kdy si chatboti nedokáží opakovaně s daným problémem poradit, ale *Wolfram Alpha* by mohl. Kupříkladu bychom chtěli zobrazit graf funkce zadané implicitně rovnicí  $x^2 + y^2 = 1$ . Chatboti v bezplatné verzi nedokáží vygenerovat grafy přímo, ale mohou vygenerovat dotaz „*Graph of  $x^2 + y^2 = 1$* “, který když zadáme *Wolfram Alpha*, tak nám vygeneruje požadovaný graf.

Vyzkoušíme tuto dovednost chatbotů na třech příkladech 3.14 až 3.16. Všechny příklady budou odvozeny od těch, které jsme již chatbotům v této práci zadávali. Začneme jedním z příkladů, který *ChatGPT* dokázal sám správně vyřešit. Poté přejdeme k příkladu, který *ChatGPT* vyřešil pouze z části. Následně zvolíme příklad, se kterým si *ChatGPT* ani *Gemini* nedokázali poradit a mohlo by tak být užitečné vygenerovat dotaz pro *Wolfram Alpha*, který by daný příklad mohl zvládnout vyřešit. Příklady budou mít stejný formát jako v podkapitolách 3.1 a 3.2.

**Příklad 3.14.** Mějme úlohu „Železné trubky jsou srovnané do osmi řad tak, že vrchní řada má 13 trubek a každá další řada má o trubku více. Kolik je všech trubek?“. Vygeneruj tuto úlohu jako dotaz pro *Wolfram Alpha*.<sup>53</sup>

Odpověď ChatGPT:

*ChatGPT* zde odpověděl pouze: „13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20“. Nic dalšího odpověď neobsahovala.

Vyhodnocení odpovědi:

Při zadání tohoto výrazu do *Wolfram Alpha* (včetně uvozovek i bez nich) dostaneme správný výsledek na řešenou úlohu, tedy 132.

Odpověď Gemini:

*Gemini* odpověděl, že „Pro *Wolfram Alpha* můžeme zadat dotaz: součet aritmetické posloupnosti 13, 14, ..., 20 s 8 členy“ nebo „ $sum(13 + (k - 1), k = 1, 8)$ “. Následně ještě přidal, že „13 je první člen posloupnosti“, „20 je posledním členem posloupnosti“, „8 je počet členů posloupnosti“ a „ $k$  je proměnná pro iteraci přes jednotlivé členy“. Na závěr chatbot přidal poznámku, že „*WolframAlpha* nám pak vrátí výsledek 132, což je počet všech trubek.“. Nic víc chatbot ve své odpovědi nenapsal.

---

<sup>53</sup> Jedná se v této práci o příklad 2.25.

### Vyhodnocení odpovědi:

První dotaz, který nám chatbot nabídl, nedokáže Wolfram Alpha interpretovat. Při zadání tohoto dotazu dostaneme odpověď „*Interpreting as: 20 s 8*“, což *Wolfram Alpha* pochopí jako dotaz „*20 seconds × 8*“ a dostaneme od něj výsledek „*160 seconds*“. Tento dotaz je tedy chybný a nedostaneme správný výsledek příkladu.

Druhý dotaz *Wolfram Alpha* interpretuje jako  $\sum_{k=1}^8((k-1)+13)$ . Tato suma už vrátí korektní výsledek 132, tedy počet trubek, jak chatbot na závěr své odpovědi napsal.

### Shrnutí:

*ChatGPT* odpověděl pouze součtem několika čísel, což si žák může spočítat sám bez potřeby zadávat tento součet *Wolfram Alpha*. *Gemini* napsal dva různé dotazy, přičemž pouze jeden z nich *Wolfram Alpha* správně interpretoval. Žák z druhého vygenerovaného dotazu dostane správný výsledek řešeného příkladu, ovšem význam sumy pro něj může být těžko pochopitelný, ale pochopení může ulehčit vysvětlení významu jednotlivých čísel chatbotem. Oba chatboti ale dokázali vygenerovat dotazy pro *Wolfram Alpha*, který vrátí správný výsledek dané úlohy.

**Příklad 3.15.** Mějme úlohu „Napiš rovnici elipsy, která má střed v bodě  $S = [-1,0]$  a zároveň má poloosy dlouhé 2 a 3.“. Vygeneruj tuto úlohu jako dotaz pro *Wolfram Alpha*.<sup>54</sup>

### Odpověď ChatGPT:

*ChatGPT* nejdříve odpověděl, že pro vyřešení této úlohy můžeme použít dotaz „*Rovnice elipsy se středem v bodě (-1, 0) a poloosami dlouhými 2 a 3*“, přičemž neuvedl žádné další poznámky. Po upozornění, že se nejedná o formát dotazu pro *Wolfram Alpha*, se chatbot omluvil a odpověděl, že lze pro *Wolfram Alpha* použít dotaz „*Graph the ellipse with center (-1, 0) and semi-axes lengths 2 and 3*“.

### Vyhodnocení odpovědi:

Při zadání tohoto dotazu *Wolfram Alpha* vygeneroval obrázek elipsy se středem v bodě  $S = [-1,0]$  a s poloosami  $a = 2$  a  $b = 3$ . K tomu vypsal několik dodatečných informací o této elipse, jako hlavní a vedlejší vrcholy elipsy, ohniska, excentricitu a další. Žák ale nezíská rovnici elipsy, jak požaduje zadání, protože vygenerovaný dotaz se zaměřoval na graf. Navíc zde *ChatGPT* také používal neadekvátní symboliku při zápisu souřadnic bodů do kulatých závorek.

### Odpověď Gemini:

*Gemini* odpověděl, že „*Pro WolframAlpha můžeme zadat dotaz: rovnice elipsy se středem v [-1, 0] a poloosami 2 a 3*“. Podle *Gemini* můžeme také použít dotaz „*equation of ellipse with center at [-1, 0] and semi-axes 2 and 3*“ a měli bychom obdržet stejný výsledek. V obou případech by podle *Gemini* měl *Wolfram Alpha* vrátit rovnici elipsy  $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Poté ještě *Gemini* přidal poznámku: „*WolframAlpha umí generovat rovnice elipsy i pro jiné parametry, jako je excentricita nebo úhel natočení*“, a že také můžeme „*zadat parametry elipsy v grafické podobě: plot ((x + 1)^2/4 + y^2/9 = 1)*“.

---

<sup>54</sup> Jedná se v této práci o příklad 2.33.



### Vyhodnocení odpovědi:

První dotaz v českém jazyce opět *Wolfram Alpha* nedokázal interpretovat. Při zadání druhého dotazu jsme dostali od *Wolfram Alpha* totožnou odpověď jako při zadání dotazu od *ChatGPT*, ale s tím rozdílem, že v tomto případě navíc *Wolfram Alpha* napíše jako výsledek rovnici  $\frac{1}{4}(x+1)^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ . Tato rovnice je jedním z mnoha řešení příkladu 3.15. Pokud zadáme *Wolfram Alpha* dotaz „plot  $((x+1)^2/4 + y^2/9 = 1)$ “, jak navrhoval *Gemini* jako jednu z možností, tak dostaneme požadovanou rovnici společně s grafem, ovšem bez dodatečných informací, jako je excentricita nebo vrcholy a ohniska elipsy.

### Shrnutí:

*ChatGPT* odpověděl dotazem pro *Wolfram Alpha*, který se zaměřuje na graf elipsy s danými vlastnostmi ze zadání. Tento dotaz však nezobrazí žákovi také rovnici, která byla v zadání požadovaná. Navíc i tento dotaz vygeneroval až na druhý pokus. Naopak *Gemini* napoprvé vygeneroval dotaz, pomocí kterého žák dostane požadovanou rovnici.

**Příklad 3.16.** Mějme úlohu „Řešte rovnici s neznámou  $x \in \mathbb{C} : \frac{x-2}{x} + \frac{x}{x-2} = \frac{1}{2x-x^2}$ “. Vygeneruj tuto úlohu jako dotaz pro *Wolfram Alpha*.<sup>55</sup>

### Odpověď ChatGPT:

Na zadání příkladu 3.16 chatbot *ChatGPT* odpověděl pouze krátce takto: „Rovnice: *“solve (x-2)/x + x/(x-2) = 1/(2x-x^2) for x in C”*“. Nic dalšího chatbot nevedl.

### Vyhodnocení odpovědi:

Dotaz „solve  $(x-2)/x + x/(x-2) = 1/(2x-x^2)$  for x in C“ interpretuje *Wolfram Alpha* jako rovnici  $\frac{x-2}{x} + \frac{x}{x-2} = \frac{1}{2x-x^2}$ , kterou vyřeší a vypíše také výsledek  $x = 1 - i\sqrt{\frac{3}{2}}$  a  $x = 1 + i\sqrt{\frac{3}{2}}$ . Tento výsledek je správný. Pokud by žák v dotazu vynechal „for x in C“, tak stále dostane všechny pro něj relevantní informace.

### Odpověď Gemini:

Struktura odpovědi *Gemini* byla do jisté míry totožná s předchozími příklady z podkapitoly 3.3. Chatbot jako první uvedl dotaz „rovnice  $(x-2)/x + x/(x-2) = 1/(2x-x^2)$ “ a jako druhý dotaz „solve  $(x-2)/x + x/(x-2) = 1/(2x-x^2)$  for x“. Stejně jako v předchozích příkladech v této podkapitole doplnil chatbot také očekávaný výsledek od *Wolfram Alpha*, a to  $x = 1$  a  $x = 2$ .

### Vyhodnocení odpovědi:

Oproti příkladům 3.14 a 3.15 *Wolfram Alpha* zvládl správně interpretovat oba dotazy, které *Gemini* uvedl. Chatbot očekával jiný výsledek, který byl chybný, ale *Wolfram Alpha* vypočítal úlohu správně. V případě prvního dotazu uvedl *Wolfram Alpha* navíc několik informací, jako „Alternate forms“ a „Plot“. Při zadání obou dotazů dostane žák správný výsledek od *Wolfram Alpha*.

---

<sup>55</sup> Jedná se v této práci o příklad 3.9.

### Shrnutí:

V tomto příkladu oba chatboti dokázali zformulovat dotazy pro *Wolfram Alpha*, ze kterých žák dostane správné řešení rovnice. Dotazy jsou taktéž přímočaré, takže někteří žáci by mohli vědět pro příště, jakým způsobem vytvářet dotazy pro *Wolfram Alpha* pro podobný typ úloh.

### Shrnutí všech příkladů z podkapitoly 3.3:

*ChatGPT* i *Gemini* většinou dokázali vygenerovat dotazy, které když žák zadá do *Wolfram Alpha*, tak získá výsledek dané úlohy. V příkladu 3.15 *ChatGPT* vygeneroval dotaz, který zobrazil graf místo požadované rovnice elipsy.

Oba chatboti se drží určitého formátu odpovědi. Zatímco *ChatGPT* odpovídal vždy stručně jedním dotazem, tak *Gemini* vygeneroval vždy dvě možnosti, přičemž první z nabízených dotazů v příkladech 3.14 a 3.15 nedokázal *Wolfram Alpha* správně interpretovat. *Gemini* také ke své odpovědi přidával očekávaný výstup, který nebyl vždy správný.

Některé dotazy mají takový formát, že žák může vyzorovat, jak pokládat dotazy pro podobné další úlohy bez potřeby vygenerovat si dotaz od jednoho z chatbotů. Například ale dotaz od *ChatGPT* v příkladu 3.14 vrátí správný výsledek, ale při větším počtu sčítanců nemusí být dotaz praktický. Žák navíc pro sečtení daných čísel nejspíše využije jinou aplikaci, než je *Wolfram Alpha*.

Pokud žák zjistí, že chatbot nevyřešil danou úlohu správně, může požádat chatboty o vygenerování dotazů pro *Wolfram Alpha*. Jestliže ale žák nemá placenou *Pro* verzi, tak nezíská postup řešení, což pro něj může být důležité, když se chce naučit podobné úlohy řešit.

## Závěr

Je těžké přesně definovat umělou inteligenci, neboť neexistuje definice, na které by panovala shoda. Přesto jsme si ukázali několik konkrétních příkladů technologií, které splňují některé charakteristické vlastnosti umělé inteligence. Viděli jsme, že umělá inteligence má využití nejen v matematice, ale také v reálném světě, dokonce i tam, kde si to možná neuvědomujeme.

Druhá kapitola ukázala, že umělá inteligence ve formě chatbota (konkrétně *ChatGPT*) zvládne většinu vybraných výstupů dle RVP G. Odhalila také některé jeho nedostatky z pohledu výuky matematiky, které v současné době má tato forma umělé inteligence. Z příkladů, představených v rámci této kapitoly, vyplývá, že v některých příkladech, zvláště z kombinatoriky, chatbot nesprávně interpretuje zadání, takže následkem toho řeší jinou úlohu, než byla v zadání. Jestliže zadání interpretuje správně, tak následně někdy zvolí chybný postup, nebo se ve správném postupu dopustí chyby. Pokud úloha vyžaduje k řešení větší počet kroků, tak je větší pravděpodobnost, že se v průběhu výpočtu chatbot dopustí početní chyby. Dalším nedostatkem je používání neadekvátní terminologie. Důvod toho může být překlad pojmu z angličtiny, nebo převzaté symbolické zápisy ze zahraničních materiálů. To je vidět například ve způsobu, jak chatbot zapisuje souřadnice bodů a uzavřené intervaly (v české školské symbolice zapisujeme souřadnice bodu v hranatých závorkách, zatímco v anglické literatuře se často používá zápis pomocí kulatých závorek). *ChatGPT* také často adekvátně nereagoval na připomínky uživatele, kdy se často omluvil za chybu a zvolil zcela jiný postup řešení úlohy, ačkoliv stačilo opravit jeden řádek výpočtu.

Ve třetí kapitole byli srovnáváni chatboti *ChatGPT* a *Gemini*. I zde se *ChatGPT* dopouštěl podobných chyb jako v předchozí kapitole. Chyb se ale dopouštěl také často *Gemini*. Přes časté chyby v řešení úloh byl však úspěšnější *ChatGPT*, který častěji volil řešení typické pro středoškolskou matematiku. V některých případech *Gemini* volil řešení, které vyžadovalo více kroků, a následkem toho se v jeho řešení akumulovaly chyby. *Gemini* používal detailnější a strukturovanější odpovědi, které mohou žákovi pomoci s porozuměním postupu řešení úlohy; *ChatGPT* odpovídal často stručně. Upozornění na chybu v řešení většinou nevedlo ani u jednoho chatbota ke správnému výsledku. Oba chatboti se často dopouštěli terminologických i symbolických chyb, které mohou žáky mást. Chatboti nedokázali vyřešit ani jeden z příkladů na goniometrické nerovnice zcela správně. V případě generování dotazů pro *Wolfram Alpha* většinou chatboti vygenerovali dotaz, který po zadání do *Wolfram Alpha* vedl ke správnému výsledku daného příkladu. Při řešení rovnic v oboru  $\mathbb{C}$ , tak může být užitečnější si nechat vygenerovat dotaz pro *Wolfram Alpha*. Avšak v takovém případě uživatel může ztratit informaci o postupu, pokud nemá zaplacenou *Pro* verzi vyhledávacího stroje *Wolfram Alpha*.

Přes uvedené chyby mohou být chatboti užitečnou pomůckou pro žáky ve výuce středoškolské matematiky, jestliže žák pozná, kdy a kde se chatbot dopustil chyby. Při probírání nové látky doprovázené řešením příkladů, které lze vyřešit v několika málo krocích, chatbot příliš nechybuje a žák tak může ocenit postup s vysvětlením jednotlivých kroků, protože některé jiné nástroje mohou být na rozdíl od chatbota placené. Taktéž může chatbot pomoci žákům s vysvětlením některých pojmů, protože je často schopen je vysvětlit různými způsoby, případně je ukázat na konkrétním příkladu. Učitelům naopak mohou chatboti pomáhat například s přípravou na výuku, protože dokáží učitelům poradit, kde získat určité materiály do výuky, přijít s kreativními nápady, jak udělat výuku zajímavější, nebo pomoci

s jinými věcmi, které by učitelé mohli potřebovat vygenerovat od umělé inteligence. Chatboti tedy dělají často chyby, ale při „kritickém zacházení“ mohou být velmi užiteční.

Obecně je umělá inteligence užitečná a vzhledem k jejímu rapidnímu vývoji a využití bude brzy využívána prakticky v každém odvětví. Jen za dobu psaní této práce se umělá inteligence velmi posunula. Nyní už dovede generovat videa z obrázků, generovat složité obrazce na základě jednoduchého popisu, vytvářet videa na základě popisu, a spoustu dalšího. Je těžké odhadovat, jak daleko může umělá inteligence dojít, protože čím dál tím častěji nalézá uplatnění tam, kde by to předtím málokdo čekal. Přestože pomoc s výukou matematiky na střední škole není momentálně hlavní cíl ve vývoji umělé inteligence, tak i zde dochází postupně ke zlepšení. Ačkoliv se bude umělá inteligence zdokonalovat, tak některé věci uvedené v této práci mohou být ještě dlouho relevantní, a to vzhledem k pomalejšímu vývoji umělé inteligence v této oblasti. Může být také zajímavé s odstupem zjistit, jakou cestu umělá inteligence urazila od napsání této práce.

## Seznam použité literatury a zdrojů

### Literatura

- Calda, E. (2008). *Matematika pro gymnázia: Komplexní čísla*. Praha: Prometheus.
- Herman, J. a kol. (1995). *Matematika: Trojúhelníky a čtyřúhelníky*. Sekunda. Praha: Prometheus.
- Holmes, W., Bialik, M., & Fadel, Ch. (2019). *Artificial Intelligence in Education: Promise and Implications for Teaching*. Center for Curriculum Redesign and Learning, USA.
- Molnár, J. a kol. (2000). *Matematika 8*. Prodos, Olomouc.
- Russell, S. J., & Norvig, P. (Eds.). (2010). *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Third Edition. Prentice Hall.
- Odvárko, O. (2023). *Funkce: matematika pro střední školy*. Praha: Prometheus.
- Pomykalová, E. (2013). *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*. Praha: Prometheus.
- Robová, J., Hála, M., Calda, E. (2013). *Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika: matematika pro střední školy*. Praha: Prometheus.
- Zemek, V. (2019). *Matematika pro střední školy: Komplexní čísla, polynomy, matice, základy diferenciálního a integrálního počtu*. Praha: Didaktis.

### Webové zdroje

- Course.elementsofai.com. (n.d.). *Jak definovat umělou inteligenci?*.  
<https://course.elementsofai.com/cs/1/1>
- Evropský parlament. (2023). *Co je to umělá inteligence a jak ji využíváme?*.  
<https://www.europarl.europa.eu/news/cs/headlines/society/20200827STO85804/umela-intelligence-definice-a-vyuziti>
- HackMath.net. (n.d.). <https://www.hackmath.net/cz/priklad-uloha/1016>
- ChatGPT. OpenAI. (2023). <https://openai.com/chatgpt>
- Kombinatorika. (n.d.). <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/kombinatorika/?page=01ulohy>
- LIWC. (n.d.). <https://www.liwc.app/>
- Microsoft Azure. (n.d.). *Co je umělá inteligence?*. <https://azure.microsoft.com/cs-cz/resources/cloud-computing-dictionary/what-is-artificial-intelligence#autonomn%C3%AD-vozidla>
- MŠMT. (2022). RVP G\* - Rámcové vzdělávací programy pro gymnázia.  
<https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy-pro-gymnazia-rvp-g/>

NovyAmos.cz. (2018). *Výsledky a řešení jarního matematického testu 2017*.  
<https://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/maturita-matematika-jaro-2017-test-novy-amos.pdf>

Příklady.eu. (n.d.). <https://www.priklady.eu/cs/matematika/kombinatorika/faktorial-a-kombinacni-cislo.alej>

Rosa, R. (2023). *Aignos: Více než jen ChatGPT* (České Budějovice). Google Slides.  
[https://docs.google.com/presentation/d/1uGUL4Rktp4FU-V1nk\\_NGERw7uhuvQ-1I14qoDbFNAg/edit#slide=id.p](https://docs.google.com/presentation/d/1uGUL4Rktp4FU-V1nk_NGERw7uhuvQ-1I14qoDbFNAg/edit#slide=id.p)

Šnábl, I. (n.d.). *Turingův Test*. <https://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=analiza-a-hodnoceni-biologickych-dat--umela-inteligence--uvod--posouzeni-inteligence-strojoveho-algoritmu--turinguv-test>

Wikimedia Foundation. (2023a). *Fenotyp*. <https://cs.wikipedia.org/wiki/Fenotyp>

Wikimedia Foundation. (2023b). *Problémy tisíciletí*.  
[https://cs.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A9my\\_tis%C3%ADcilet%C3%AD](https://cs.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A9my_tis%C3%ADcilet%C3%AD)

WolframAlpha computational knowledge AI. (2024). *Wolfram Alpha: Making the world's knowledge computable*. <https://www.wolframalpha.com/>

## Seznam použitých zkratk

AI – Artificial intelligence (Překlad: Umělá inteligence)

MFF UK – Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

RVP – Rámcový vzdělávací program

RVP G – Rámcový vzdělávací program pro gymnázia