MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Sarah Bőhm

Lebesgueův integrál

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.
Studijní program: Chemie se zaměřením na vzdělávání
Studijní obor: Chemie se zaměřením na vzdělávání – Matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Ráda bych poděkovala vedoucímu práce dr. Jakubu Staňkovi za jeho čas, nevyčerpatelnou trpělivost, cenné rady a za to, že mi byl skvělým průvodcem v psaní této práce. Rovněž velké poděkování patří doc. Antonínu Slavíkovi jak za poskytnutou literaturu, tak za jeho pohotovou pomoc, které se mi od něj vždy dostalo. Také bych chtěla poděkovat Bc. Marii Vestenické, že mi byla a stále je obrovskou oporou po celou dobu mého studia.

Název práce: Lebesgueův integrál

Autor: Sarah Bőhm

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: V práci se zabýváme různými, avšak ekvivalentními, způsoby zavedení Lebesgueova integrálu v $\mathbb{R}$. První kapitola je věnována historickému vývoji infinitezimálního počtu až po vznik Lebesgueova integrálu. Ve druhé kapitole je představen Lebesgueův původní přístup k integraci a tři různé způsoby zavedení tohoto integrálu. Poslední kapitola se zaměřuje na konkrétní příklady, na kterých jsou všechny uvedené definice ilustrovány a porovnávány s Riemannovým a Kurzweilovým integrálem. Práce poskytuje srovnání těchto přístupů zavedení Lebesgueova integrálu a zdůrazňuje jejich vzájemnou ekvivalenci a praktické aplikace.

Klíčová slova: Lebesgueův integrál, Lebesgueova míra, schodovitá funkce, absolutně spojitá funkce, Riemannův integrál, Kurzweilův integrál

Title: The Lebesgue Integral

Author: Sarah Bőhm

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This thesis explores various, yet equivalent, approaches to introducing the Lebesgue integral in $\mathbb{R}$. The first chapter delves into the historical development from infinitesimal calculus to the emergence of the Lebesgue integral. The second chapter introduces Lebesgue's original approach to integration and three different methods for defining this integral. The final chapter focuses on specific examples where all introduced definitions are illustrated and compared with the Riemann and Kurzweil integrals. The thesis provides a comparison of these approaches to introducing the Lebesgue integral, emphasizing their mutual equivalence and practical applications.

Keywords: Lebesgue integral, Lebesgue measure, step function, absolutely continuous function, Riemann integral, Kurzweil integral

Obsah

Úvod

Lebesgueův integrál představuje jeden z klíčových pojmů moderní analýzy a teorie míry. Na rozdíl od tradičního Riemannova integrálu, který je omezen na jednodušší třídy funkcí, umožňuje Lebesgueův integrál integraci širší třídy funkcí, včetně těch, které mohou mít složitější chování. Tento přístup rozšiřuje možnosti matematické analýzy a aplikace v různých oblastech, jako jsou pravděpodobnost, funkcionální analýza aj.

Cílem práce je představit různé ekvivalentní způsoby zavedení Lebesgueova integrálu v $\mathbb{R}$ a porovnat je s dalšími integrálními přístupy, jako jsou Riemannův a Kurzweilův integrál.

Práce je určena pro všechny, kteří si chtějí rozšířit obzory v teorii Lebesgueova integrálu, zejména pak pro studenty vysokoškolského studia, ať už bakalářského či magisterského stupně, kteří absolvovali základní kurz matematické analýzy a chtějí si prohloubit znalosti ohledně dalších možných způsobů zavedení tohoto integrálu.

První kapitola poskytuje historický kontext, sleduje vývoj infinitezimálního počtu a významné milníky vedoucí k zavedení Lebesgueova integrálu.

Druhá kapitola čtenáře seznamuje s Lebesgueovým původním přístupem k integraci a třemi různými způsoby zavedení tohoto integrálu, konkrétně pomocí jednoduchých funkcí a Lebesgueovy míry, řady schodovitých funkcí a absolutně spojitých funkcí. Stěžejní část této kapitoly se zabývá důkazem Věty 2.25, která poukazuje na ekvivalenci definice pomocí absolutně spojité funkce a definice, která využívá Lebesgueovy míry.

Třetí kapitola se pak zaměřuje na praktické příklady, které nejenže ilustrují všechny definice Lebesgueova integrálu, ale také je porovnávají s Riemannovým a Kurzweilovým integrálem, čímž demonstrují jejich aplikovatelnost a rozdíly v různých kontextech.

Práce je vysázená pomocí systému LaTeXa obrázky jsou (pokud není uvedeno jinak) vytvořeny v prostředí Wolfram Mathematica či ručně kreslené.

1. Historie

Koncem 17. století došlo k propojení metod derivování a integrování a tím i k vytvoření nově ucelené teorie diferenciálního a integrálního počtu Isaacem Newtonem (1643 – 1727) a Gottfriedem Leibnizem (1646 – 1716). Ta obsahovala všechny roztříštěné objevy svých předchůdců, byla vytvořená promyšlená symbolika a bohatý algoritmický aparát. Nově již byly známy názvy jako diferenciální a integrální počet. První z nich zavedl Leibniz již v roce 1684 místo dříve používaného názvu přímá metoda tečen. Druhý z termínů byl zaveden roku 1698 po dohodě s Johannem Bernoullim místo dřívější inverzní metody tečen.

V 18. století vznikla matematická analýza jako samostatná vědní disciplína. Vytvářené matematické metody byly přímo svázány s potřebami fyziky, mimo to ale našla matematická analýza využití i v astronomii a dalších vědních disciplínách. Koncem 18. století bylo nashromážděno mnoho poznatků, které však neměly fixní základ a stále zde přebýval problém neuspokojivého chápání nekonečna. A to především v případě nekonečně malých veličin, limit, konvergencí řad, ale i derivací a integrálů. Toto období bývá historiky nazýváno 2. krizí matematiky.

K překonání krize došlo v 19. století po zahájení období zpřesňování matematické analýzy B. Bolzanem, A. L. Cauchym, N. H. Abelem, P. G. L. Dirichletem a dalšími. Došlo k vysvětlení a odstranění paradoxních výsledků např. přerovnáváním konvergentních řad, limitními přechody v konvergentních posloupnostech funkcí apod. Pro ty bylo nutné rozlišovat jisté pojmy jako např. konvergence a absolutní konvergence řad, konvergence a stejnoměrná konvergence posloupností funkcí, spojitost aj. Tyto pojmy začaly být rozlišovány a objasňovány až zavedením tzv. $\varepsilon - \delta$ jazyka. Nelze opomenout, že v osmnáctém století bylo integrování jednoduše považováno za inverzní operaci k derivování a funkce byly integrovány dle Newtonova fundamentálního vztahu:

Nechť funkce F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu $[a,b]$. Číslo $F(b) - F(a)$ se nazývá Newtonův integrál funkce f na intervalu $[a,b]$ a značí se

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx, \tag{1.1}$$

kde a je dolní mez a b je horní mez integrálu.[1]

Ve velmi ojedinělých případech, kdy k dané funkci nebylo možné určit funkci primitivní, byla použita Eudoxova exhaustivní (vyčerpávající) metoda, na kterou se jakoby zapomnělo. Ta je považována za geniální předchůdkyni infinitezimálních úvah a již v době antiky umožňovala poměrně přesné výpočty obsahů a objemů.

Eudoxova exhaustivní metoda je založena na nekonečném dělení veličiny a jejím základem je následující tvrzení:

[1] Výše uvedený vztah představuje tzv. Newtonův–Leibnizův vzorec.

(♒) *Jestliže od dané veličiny odečteme její část větší než její polovina a od zbytku opět jeho část větší než jeho polovina a budeme tak činit stále, zbude nějaká veličina, jež bude menší než libovolná kladná veličina.*

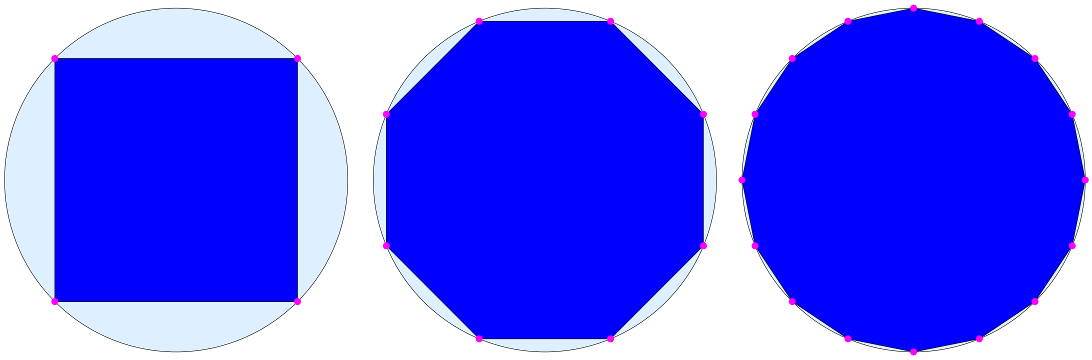
Důkaz tvrzení lze dohledat v [7]. Ilustrujme nyní jednoduchý příklad toho, jakým způsobem Eudoxos z Knidu (asi 408 – 355 př. n. l.) dokazuje, že obsah kruhu $s(K)$ lze s libovolnou přesností aproximovat obsahem pravidelného mnohoúhelníku $s(P)$ vepsaného do kruhu K, tj. je–li dán kruh K a číslo $\varepsilon > 0$, pak existuje pravidelný mnohoúhelník P vepsaný do K tak, že $s(K) - s(P) < \varepsilon$.

Zde Eudoxos využívá důkazu sporem. Máme–li najít obsah kruhu $s(K)$, budeme do něj vepisovat mnohoúhelníky $P_1, P_2, \dots, P_n$, jejichž obsahy známe a tvoří monotonní posloupnost $s(P_1) < s(P_2) < \cdots < s(P_n)$ a pro něž platí

$$s(K) - s(P_1) < \frac{s(K)}{2}, s(K) - s(P_2) < \frac{(s(K) - s(P_1))}{2} < \frac{s(K)}{4}, \cdots$$

$$\cdots, s(K) - s(P_n) < \frac{s(K)}{2^n}. \tag{1.2}$$

Při dostatečně velkém n je podle (♒) rozdíl $s(K) - s(P_n)$ menší než libovolná kladná veličina. Eudoxos hledal tudíž takové B, aby rozdíl $B - s(P_n)$ byl menší než libovolná kladná veličina. K nalezení obsahu $s(K)$ zbývá dokázat, že $s(K) = B$. Nechť $s(K) \neq B$, tj. $s(K) < B$ nebo $s(K) > B$, v obou případech dojdeme ke sporu. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $s(K) < B$.
Položme $B - s(K) = \varepsilon$. Víme však, že k ε lze najít takové n, že platí $B - s(P_n) < \varepsilon$. Odtud plyne $B - s(P_n) < B - s(K)$, tedy $s(P_n) > s(K)$, což je spor. Obdobně lze postupovat i v případě, že $s(K) > B$.



Obrázek 1.1: Aplikace Eudoxovy exhaustivní metody pro výpočet obsahu kruhu

Všimněme si, že dnes bychom použili pojem limity. Pro Eudoxa byl však tento pojem neznámý. Starořecká matematika byla i přesto velmi vyspělá, nashromáždila velké množství poznatků a rozvinula mnoho výpočetních technik, které se postupně staly základem pro vznik integrálu. Vrátíme-li se ještě na malou chvíli k předešlému příkladu, upozorněme na fakt, že se zde vyskytuje problém v ověření nerovnosti (1.2), jelikož předem neznáme přesnou hodnotu $s(K)$.

Eudoxovu exhaustivní metodu později rozvinul a zobecnil Archimédés ze Syrákús (asi 287 – 212 př. n. l.), který už se s tímto problémem vypořádal. Na rozdíl od Eudoxa začal mnohoúhelníky i opisovat, s tím přišla idea horních a dolních integrálních součtů, které danou veličinu omezovaly. Jejich rozdíl se pak mohl stanovit libovolně malý, ne však nekonečně malý. Pro antickou matematiku totiž bylo typické popírání nekonečně malých veličin.

V 19. století zavedl Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) novou konstruktivní součtovou definici integrálu, která je velmi blízká Eudoxově exhaustivní metodě. Dnes je nám však asi známější ekvivalentní definice Riemannova integrálu, kterou v roce 1875 podal Jean Gaston Darboux (1842 – 1917). Darbouxova definice integrálu je založena na dolních a horních Riemannových součtech a na dolním a horním Riemannově integrálu.

Vraťme se ale zpět k Bernhardu Riemannovi a jeho klíčovému poznatku, ke kterému postupně přichází. Riemann zobecnil způsob, jakým integrál chápal Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857). Ten ve svém výkladu definice pracoval se spojitou funkcí, kdežto Riemann tento předpoklad opustil a nikterak ho nespecifikoval. S tím však přicházela celá řada otázek, jakou třídu funkcí je vhodné a účelné zkoumat? Spojitá a omezená funkce má Riemannův integrál vždy, po mnoha úvahách ale Riemann dospěl k závěru, že lze integrovat i některé poměrně divoce nespojité funkce, a to přes každý omezený interval $[a,b]$, pokud počet bodů nespojitosti v $[a,b]$ je konečný a v každém z těchto bodů nespojitosti existují konečné limity zprava i zleva (tj. funkce je po částech spojitá). Začínaly se zkoumat integrovatelné funkce, matematici přicházeli s novými různě „exotickými" funkcemi, pro které by Riemannův či Newtonův integrál nemusel existovat.

Počátkem 20. století přišel s výrazným rozšířením Riemannova integrálu francouzský matematik Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941), viz Obrázek 2.19[2]. První zmínky o tom, že byl vytvořen nový integrál, který je silnější než integrál Riemannův, se objevily v roce 1901 v *Comptes Rendus* v práci s názvem *Sur une généralisation de l'intégrale définie*, podrobně pak v roce 1902 v Lebesgueově disertační práci. Zavedl nový typ součtového integrálu, který nesl jak jeho jméno, tak spoustu výhod. Lebesgueův integrál je obecnější než Riemannův integrál v tom smyslu, že každá funkce f, která má na intervalu $[a,b]$ Riemannův integrál, má rovněž Lebesgueův integrál a oba integrály nabývají stejné hodnoty. Naopak toto tvrzení neplatí. Obecnost, které bylo dosaženo zavedením takového integrálu, je podstatná v mnoha oblastech matematické analýzy jako je např. teorie distribucí, teorie pravděpodobnosti, definování zobecněných pojmů řešení diferenciálních rovnic apod.

I když se může zdát, že je tento integrál naprosto bezchybný, i on má své mezery. Ukázalo se, že pomocí něj nelze integrovat každou derivaci, ale pouze derivace absolutně spojitých funkcí, což znamená, že obecně neplatí Newton–Leibnizova formule 1.1. Pro zájemce o rozšíření poznatku dané problematiky doporučujeme nahlédnout do [[4], kap. 7].

V případě Riemannova integrálu se jednalo o aproximaci hodnoty integrálu jistými součty, jinak tomu není ani u Lebesguea, avšak tyto součty jsou trochu složitější povahy. Zásadní je, jak Lebesgue a Riemann přistupují k dělení intervalu. Riemannův přístup spočívá v dělení definičního oboru, kdežto Lebesgue naopak dělí obor hodnot. Při tomto způsobu dělení pak v definičním oboru funkce vznikají množiny, které nemusí být nutně intervaly.

[2] Obrázek byl přejat z webové stránky `https://cs.wikipedia.org/wiki/Henri_Lebesgue`

Obrázek 1.2: Henri Léon Lebesgue

Počátkem 20. století byla též vytvořena teorie míry, na které je tento integrál založen a která se zabývá problémem měření velikosti množin, které nám v definičním oboru mohou vzniknout.

Definice Lebesgueova integrálu není zcela elementární a celému zavedení bude věnována následující kapitola.

2. Lebesgueův integrál

2.1 Lebesgueův původní přístup k integraci

Jako první se tak podíváme na Lebesgueův původní přístup k integraci, ve kterém využívá horních a dolních integrálních součtů. Jedná se o konstruktivní definici. Tento způsob zavedení integrálu H. Lebesgue prezentuje ve své knize *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* z roku 1904. Vycházíme z publikace [1].

Na základě již známých metod pro integraci, jako je např. Riemannův integrál, Lebesgue dochází k následujícím myšlenkám, které postupně formuluje do axiomů, leč je tak přímo nenazval. Jeho úvaha je následující:

Cílem je, abychom uměli přiřadit každé omezené funkci $f(x)$ na konečném intervalu $[a,b]$ nějaké konečné číslo $\int_a^b f(x)dx$, které nazveme integrálem $f(x)$ na $[a,b]$. Ten by měl splňovat níže popsané axiomy. Tedy:

1. Pro libovolná a, b a h máme
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a-h}^{b-h} f(x+h)dx.$$
2. Pro libovolná a, b, c máme
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0.$$
3. $$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$
4. Když je $f(x) \geq 0$ a $b > a$, potom také
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$
5. $$\int_0^1 1dx = 1.$$
6. Když posloupnost $f_n(x)$ konverguje k $f(x)$, přičemž monotónně roste, potom posloupnost integrálů z $f_n(x)$ konverguje k integrálu z $f(x)$.

Za povšimnutí stojí, že z výše uvedeného lze dostat další pěkné vlastnosti, které by měl integrál přirozeně splňovat. Kupříkladu, dosadíme-li do 3. podmínky $f(x) = 0$ a $g(x) = 0$, dostáváme
$$\int_a^b 0 + 0dx = \int_a^b 0dx = \int_a^b 0dx + \int_a^b 0dx,$$
a proto $\int_a^b 0dx = 0$. Stejně tak jednoduše odvodíme, že
$$\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Je-li $f(x) \leq g(x)$ a $b > a$, ze 4. podmínky dostáváme, že

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{2.1}$$

Bez obtíží je možné odvodit, že pro reálné c je

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

a že platí

$$\int_a^b 1dx = b - a.$$

Nyní si ještě zadefinujme charakteristickou funkci množiny, kterou však Lebesgue ve své práci explicitně neuvedl.

Definice 2.1. *(Charakteristická funkce množiny)*
Nechť je dán interval $[a{,}b]$. Pro libovolnou množinu $A \subset [a{,}b]$ definujme její charakteristickou funkci $\chi_A(x)$ tak, že položíme

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \in [a{,}b] \setminus A. \end{cases}$$

Jak jsme již zmínili, původní Lebesgueův pohled byl zaměřen pouze na omezené funkce. Nechť je tedy funkce $f : [a{,}b] \to \mathbb{R}$ omezená, tj. platí

$$l < f(x) < L \quad \text{pro } x \in [a{,}b] \text{ a } l, L \in \mathbb{R}.$$

Předpokládejme, že je dán systém

$$l = l_0 < l_1 < \cdots < l_n = L, \qquad l_j, L \in \mathbb{R}$$

a definujme

$$A_j = \{x \in [a,b];\ l_{j-1} \leq f(x) < l_j\}.$$

A_j je tedy množina těch prvků $x \in [a,b]$, pro které je funkční hodnota funkce f v intervalu $[l_{j-1}, l_j)$. Z definice množiny A_j a definice charakteristické funkce χ_{A_j} dostáváme

$$l_{j-1}\chi_{A_j}(x) \leq f(x) < l_j\chi_{A_j}(x) \quad \text{pro všechna } x \in A_j.$$

Označme nyní funkce

$$\zeta(x) = \sum_{j=1}^{n} l_{j-1}\chi_{A_j}(x) \qquad \vartheta(x) = \sum_{j=1}^{n} l_j\chi_{A_j}(x),$$

pak je

$$\zeta(x) \leq f(x) < \vartheta(x) \quad \text{pro všechna } x \in [a,b].$$

Z uvedeného a z (2.1) dostáváme

$$\int_a^b \zeta(x)dx = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} l_{j-1}\chi_{A_j}(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx < \int_a^b \sum_{j=1}^{n} l_j\chi_{A_j}(x)dx = \int_a^b \vartheta(x)dx$$

anebo též

$$\sum_{j=1}^{n} l_{j-1} \int_a^b \chi_{A_j}(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx < \sum_{j=1}^{n} l_j \int_a^b \chi_{A_j}(x)dx.$$

Zkusme ještě využít 6. axiomu, který Lebesgue uvádí. Zamysleme se nad situací, kdy se v systému

$$l = l_0 < l_1 < \cdots < l_n = L$$

bude zmenšovat hodnota $\max(l_j - l_{j-1})$. Funkce ζ a ϑ budou konvergovat k funkci f a tato konvergence bude monotónní. Jinými slovy, budou-li dány dva systémy

$$l = l_0^1 < l_1^1 < \cdots < l_{n_1}^1 = L$$

a

$$l = l_0^2 < l_1^2 < \cdots < l_{n_2}^2 = L,$$

kde druhý systém bude zjemněním prvního, přičemž

$$\max(l_j^2 - l_{j-1}^2) < \max(l_j^1 - l_{j-1}^2),$$

potom platí

$$\zeta^1(x) \leq \zeta^2(x) \leq f(x) < \vartheta^2(x) \leq \vartheta^1(x),$$

pokud $\zeta^1(x), \vartheta^1(x)$ jsou funkce odpovídající prvnímu a $\zeta^2(x), \vartheta^2(x)$ druhému systému dle definice, kterou jsme uvedli výše. Užitím limity pak lze určit i hodnotu $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \zeta^n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \vartheta^n(x)dx.$$

Problém určení integrálu funkce tedy Lebesgue převedl na problém určení integrálu jednodušších charakteristických funkcí, které nabývají hodnot 0 a 1. V případě, kdy je A interval, je integrál charakteristické funkce χ_A délkou intervalu A. Z tohoto důvodu je přirozené považovat integrály charakteristických funkcí χ_A množin $A \subset [a,b]$ za míru množin A a problém určení integrálu redukovat na určování míry množin v intervalu $[a,b]$. Přesná definice Lebesgueovy míry bude zavedena v následující sekci.

Převedeme-li Lebesgueovu konstruktivní definici do geometrické řeči, dostáváme se k analytickému pojetí integrálu. Před Lebesguem tak stojí nový problém, a to problém míry množiny.

2.2 Lebesgueův integrál a Lebesgueova míra

2.2.1 Cesta k Lebesgueově míře

S otázkou, co se skrývá pod nám zatím neznámým pojmem míra, úzce souvisí pojmy jako je obsah rovinného obrazce či objem tělesa. Tyto koncepty známe již z dob povinné školní docházky, kdy jsme se učili, jak spočítat obsah kruhu nebo objem jehlanu. Avšak zodpovědět otázku, co je to míra, není úplně jednoduché.

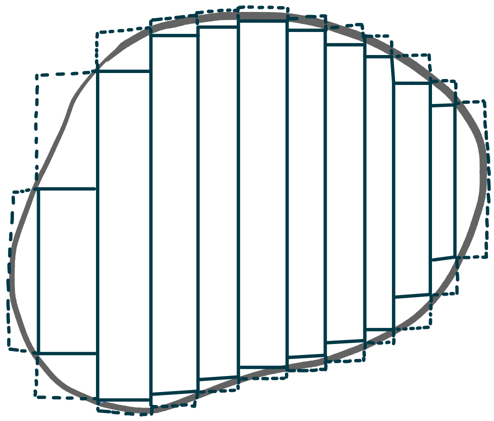
Můžeme říct, že obsah je nějaké zobrazení, které množinám v $\mathbb{R}^2$ přiřazuje nezáporná čísla. V ideálním světě bychom rádi našli vhodnou matematickou definici pro funkci, která by „vyvoleným" množinám přiřadila vhodnou číselnou velikost. Pod takovou číselnou velikostí si můžeme představit právě obsah rovinných obrazců či objem těles v trojrozměrném prostoru, ale též např. pravděpodobnost náhodných jevů. Prakticky cokoli, u čeho lze očekávat vlastnost aditivity, tj. aby velikost celku sestávajícího ze dvou či více disjunktních částí byla součtem velikostí všech částí.

Zamýšlíme-li se ale nad tím, co je to vlastně obsah kruhu, pouhá aditivita pro nás nebude dostačující. Museli bychom navíc použít vhodný limitní proces. Abychom se vyvarovali této nepříjemnosti, budeme pro vhodnou definici míry požadovat vlastnost σ[1]-aditivity. Množiny, kterým budeme umět číselnou velikost přiřadit, nazveme měřitelné (lebesgueovsky měřitelné).

Vraťme se však ještě na malou chvíli zpět do lavic základní školy a připomeňme si elementární přístup k zavedení míry rovinných obrazců aneb Jordan-Peanův (J.-P.) obsah. Nechť je dána omezená množina $M \subset \mathbb{R}^2$. Nyní se množinu M pokusíme aproximovat pomocí obdélníků. Obsahy obdélníků umíme počítat, tudíž je přirozené aproximovat obsah omezené množiny právě pomocí nich. V definici Jordan-Peanova obsahu figurují dva typy aproximací, a to vnitřní a vnější aproximace. Vnitřní aproximací máme na mysli konečnou množinu nepřekrývajících se obdélníků, které se nacházejí uvnitř množiny M. Zatímco vnější aproximace znamená, že množinu M pokrýváme konečným systémem nepřekrývajících se obdélníků. Nyní již víme, že vnitřní a vnější aproximace je nějaké konečné sjednocení obdélníků a jejich obsahy počítat umíme. Vezmeme-li supremum obsahů vnitřních aproximací, dostáváme číslo, kterému budeme říkat vnitřní obsah. Podobně pak vezmeme-li infimum obsahů vnějších aproximací, získáme vnější obsah. Pokud se oba obsahy rovnají, pak jejich společnou hodnotu nazýváme Jordan-Peanův obsah množiny M. Stejným způsobem bychom postupovali i v prostoru, případně ve vyšších dimenzích by se dala zavést Jordan-Peanova míra.

Pro elementární útvary, se kterými se setkáme již na střední či základní škole, se zdá, že vše funguje pěkně. Nicméně Jordan-Peanova míra trpí jistými nedostatky. Za prvé, je definovaná pouze pro omezené množiny. Existují množiny v rovině, které nejsou omezené, a přesto mají konečný obsah. Ten ale pomocí Jordan-Peanova obsahu (míry) spočítat nelze. Dalším problémem je fakt, že i když zůstaneme u omezených množin, taková třída, pro kterou by J.-P. míra byla definována, není zrovna široká. Další její nevýhodou je, že obecně není ani σ-aditivní.

[1] Prefix nebo index σ naznačuje vztah ke spočetným sjednocením a δ ke spočetným průnikům.



Obrázek 2.1: Ilustrace Jordan-Peanovy míry

Srovnáme-li definici Jordan-Peanovy míry s Riemannovým integrálem, můžeme si všimnout jistých podobností. Jejich souvislost je patrná z následujícího tvrzení: Nechť je dána nezáporná omezená funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Buď

$$J(f, [a, b]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

K tomu, aby funkce f byla integrovatelná v Riemannově smyslu na $[a, b]$, je nutnou a postačující podmínkou, aby byla množina $J(f, [a, b])$ měřitelná v Jordan-Peanově smyslu, tj. aby množina $J(f, [a, b])$ měla J.-P. míru. Přitom platí, že hodnota integrálu $\int_a^b f(x)dx$ je rovna Jordan-Peanově míře množiny $J(f, [a, b])$.

K vypořádání se výše zmíněných nedostatků se zaměříme na Lebesgueovu míru, která jimi již netrpí a též nám umožňuje lepší definici integrálu, než je Riemannův integrál.

2.2.2 Lebesgueova míra a vnější míra

Konstrukce Lebesgueovy míry bude vycházet z publikací [2], [3], [5]. Lebesgueovu míru λ_n zavedeme v $\mathbb{R}^n$ a její konstrukci provedeme ve dvou krocích.

Prvně zavedeme na celém $2^{\mathbb{R}^n}$ tzv. vnější Lebesgueovu míru odvozenou od naší běžné představy objemu, označme ji λ_n^*. Prozraďme však, že to, že se pokoušíme najít množinovou funkci λ_n^* definovanou na všech podmnožinách $\mathbb{R}^n$, nám přinese jisté komplikace, neboť λ_n^* nebude na takovémto definičním oboru splňovat vlastnost aditivity, která je pro nás žádoucí. Pokud se ale smíříme s tím, že nebudeme umět měřit některé množiny a definujeme λ_n^* jen na nějakém dostatečně bohatém systému podmnožin $\mathbb{R}^n$, nepřijdeme tím o moc, neboť v podstatě všechny množiny, které v praxi chceme umět měřit, budou zahrnuty. Množiny, které naopak nebudeme umět měřit, nazveme lebesgueovsky neměřitelné. Existence lebesgueovsky neměřitelné množiny je nekonstruktivní, užívá axiomu výběru. Důkaz v této práci provádět nebudeme, avšak čtenář jej snadno dohledá např. v [[5], str. 48] nebo v [[2], str. 3].

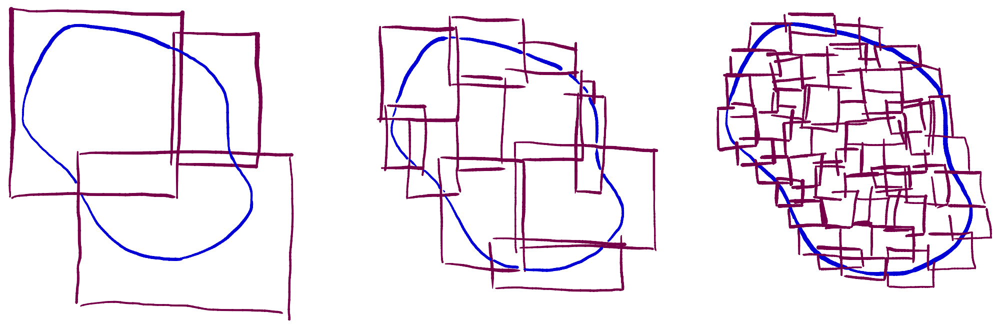
V druhém kroku se tedy zaměříme na vybudování systému podmnožin, na kterém již λ_n^* vlastnost aditivity splňuje, a to dokonce pro spočetná sjednocení po dvou disjunktních množin. Na takovémto systému se vnější Lebesgueova míra λ_n^* bude shodovat s námi hledanou Lebesgueovou mírou λ_n.

Mimo jiné připomeňme, že $n-$rozměrným uzavřeným intervalem (kvádrem) v $\mathbb{R}^n$ rozumíme libovolný kartézský součin n jednorozměrných uzavřených intervalů $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Objem kvádru následně definujme jako

$$\operatorname{vol}(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Definice 2.2. *(Lebesgueova vnější míra)*
Pro libovolnou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ definujme n-rozměrnou vnější Lebesgueovu míru

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_j) : \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset A, I_j \text{ jsou kvádry} \right\}.$$



Obrázek 2.2: Ilustrace vnější Lebesgueovy míry

Fakt, že uvažujeme spočetná a ne konečná pokrytí, je zásadní. Pokud bychom v definici $\lambda_n^*(A)$ uvažovali pouze konečná pokrytí, dostali bychom Jordan-Peanovu míru, která však v moderní analýze nemá zdaleka takový význam jako právě Lebesgueova míra. Za zmínku též stojí, že v Definici 2.2 není podstatné, zdali je I množinou všech uzavřených, nebo otevřených n-rozměrných intervalů. Jejich objem je totiž stejný, a tak zůstává stejná i výsledná vnější míra.

Poznámka 2.1. Platí $\lambda_n^*(A) \in [0, +\infty]$.

Definice 2.3. *$A \subset \mathbb{R}^n$ je nulová, pokud $\lambda_n^*(A) = 0$.*

Věta 2.1. *(Vlastnosti vnější Lebesgueovy míry, [[3], str. 113-115])*

- $A \subset B \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \lambda_n^*(A) \leq \lambda_n^*(B)$. *(Monotonie)*
- *Je–li $A \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$ a označíme-li*

  $$\alpha A = \{\alpha a : a \in A\},$$

  pak

  $$\lambda_n^*(\alpha A) = \alpha^n \lambda_n^*(A).$$

- *Je–li $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ a označíme-li* *(Invariance vůči posunutí)*

$$x + A = \{x + a : a \in A\},$$

pak

$$\lambda_n^*(x + A) = \lambda_n^*(A).$$

- *Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je kvádr, potom $\lambda_n^*(I) = \mathrm{vol}(I)$.*

- $A_1, A_2, \dots \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \lambda_n^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n^*(A_j)$. *($\sigma$-subaditivita)*

Jak jsme již zmínili v úvodu této sekce, je otázkou, zda je vnější Lebesgueova míra λ_n^* aditivní množinová funkce. Odpověď je však záporná. Lze nalézt dvě disjunktní množiny A, B, pro něž

$$\lambda_n^*(A \cup B) < \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B).\ [2]$$

Naším úkolem proto bude nalézt co nejširší systém množin, na němž by λ_n^* aditivní byla. Řešením tohoto problému bude omezení se na jistou třídu podmnožin $\mathbb{R}^n$, které se nazývají lebesgueovsky měřitelné.

Definice 2.4. *(Lebesgueovsky měřitelná množina a Lebesgueova míra)*
Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$, řekneme, že A je lebesgueovsky měřitelná, jestliže pro každou „testovací" množinu $T \subset \mathbb{R}^n$ platí

$$\lambda_n^*(T) = \lambda_n^*(T \cap A) + \lambda_n^*(T \setminus A). \tag{$\circledast$}$$

Systém všech lebesgueovsky měřitelných množin v $\mathbb{R}^n$ budeme značit $\mathcal{L}^n$ a zúžení Lebesgueovy vnější míry z $2^{\mathbb{R}^n}$ na $\mathcal{L}^n$ budeme nazývat Lebesgueovou mírou a značit ji λ_n.

Poznámka 2.2. Platí $\lambda_n(A) \in [0, +\infty]$.

Poznámka 2.3. (i) Podmínka z ($\circledast$) se nazývá *Carathéodoryho kritérium měřitelnosti.*
(ii) Díky σ–subaditivitě Lebesgueovy vnější míry vždy platí

$$\lambda_n^*(T) \leq \lambda_n^*(T \cap A) + \lambda_n^*(T \setminus A).$$

Ke konstrukci lebesgueovsky měřitelné množiny lze přistupovat i jiným způsobem, než jsme uvedli v Definici 2.4. Ten lze nalézt v [[5], str. 29] či v [[3], str. 15]. Obě definice jsou ekvivalentní.

Definice 2.5. *(Lebesgueovsky měřitelná množina a Lebesgueova míra)*
Říkáme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky měřitelná, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $A \subset G$ a

$$\lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon.$$

Je-li $A \in \mathcal{L}^n$, pak číslo $\lambda_n(A) = \lambda_n^*(A)$ se nazývá Lebesgueova míra množiny A.

Mějme na paměti, že Lebesgueova míra a Lebesgueova vnější míra se shodují na lebesgueovsky měřitelných množinách, avšak na lebesgueovsky neměřitelných množinách je definovaná pouze Lebesgueova vnější míra.

Věta 2.2. *(O Lebesgueově míře, [[3], str. 117-118])*
1. Systém $\mathcal{L}^n$ lebesgueovsky měřitelných množin má tyto vlastnosti:

- *Každá otevřená množina je lebesgueovsky měřitelná.*
- *Je–li $A \in \mathcal{L}^n$, potom $A^c \in \mathcal{L}^n$, kde A^c značí doplněk množiny A.*
- *Jsou-li $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L}^n$, potom je $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{L}^n$.*
- *Je-li $A \in \mathcal{L}^n, x \in \mathbb{R}^n$ a označíme-li*

$$x + A = \{x + a : a \in A\},$$

potom $x + A \in \mathcal{L}^n$.

2. Množinová funkce λ_n má tyto vlastnosti:

- *Pro každý kvádr $I \subset \mathbb{R}^n$ je $\lambda_n(I) = \mathrm{vol}(I)$.*
- *Jsou-li $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L}^n$ po dvou disjunktní množiny, platí*

$$\lambda_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(A_j). \qquad (\sigma\text{-}aditivita)$$

- *Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ nulová množina, potom $A \in \mathcal{L}^n$; speciálně: každá podmnožina nulové množiny je lebesgueovsky měřitelná.*
- *Je-li $A \in \mathcal{L}^n$ a $x \in \mathbb{R}^n$, potom*

$$\lambda_n(x + A) = \lambda_n(A).$$

Výše zmíněné a další pěkné vlastnosti lebesgueovsky měřitelných množin spolu s důkazy výše uvedených dohledá zvídavý čtenář např. v [3].

V mnoha případech je užitečné zkoumat podstatné rysy množinového systému $\mathcal{L}^n$ v abstraktním prostředí. My však setrváme v $\mathbb{R}^n$, ale abychom v následujícím mohli využívat pojmů, jako je měřitelný prostor nebo prostor s mírou, je na místě zadefinovat tzv. σ-algebru.

Po zbytek této práce budeme pro stručnost Lebesgueovu míru značit jen λ a systém všech lebesgueovsky měřitelných množin $\mathcal{L}$.

2.2.3 σ–algebra a míra

Definice 2.6. *(σ–algebra)*
Systém $\mathcal{A}$ podmnožin dané množiny X nazveme σ–algebrou, jestliže

- $X \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$,
- $A_j \in \mathcal{A}, j \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Dvojici $(X, \mathcal{A})$ budeme nazývat *měřitelný prostor.*

Poznámka 2.4. Každá σ–algebra je uzavřena i na spočetné průniky, rozdíly dvou množin a obsahuje prázdnou množinu.

Příklad 2.1. $\mathcal{L}$ je σ-algebra na $\mathbb{R}^n$.

Příklad 2.2. 2^X je σ-algebra na X.

Definice 2.7. *(Míra)*
Nechť je $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor. Pak nezápornou množinovou funkci $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ nazýváme mírou, jestliže

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- *Pro každou posloupnost $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}$ je*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j). \qquad (\sigma\text{-aditivita})$$

Trojice $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se pak nazývá prostor s mírou.

Příklad 2.3. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \lambda)$ je prostor s mírou.

Věta 2.3. *(Vlastnosti míry, [[2], str. 8])*
Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Potom míra μ má následující vlastnosti:

- $A_j \in \mathcal{A}, A_1 \subset A_2 \subset \dots \implies \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$,
- $A_j \in \mathcal{A}, A_1 \supset A_2 \supset \dots, \mu(A_1) < \infty \implies \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$,
- $A_j \in \mathcal{A} \implies \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

2.2.4 Lebesgueovsky měřitelné funkce

Abychom mohli vytvořit teorii integrálu, budeme potřebovat funkce, které bychom mohli integrovat. Jedním z cílů Lebesgueovy integrace je rozšířit pojem integrace na další funkce a přitom stále zahrnovat ty, které jsou riemannovsky integrovatelné, přirozeně by se tak hodnota Lebesgueova i Riemannova integrálu měla rovnat. V klasické teorii Riemannova integrálu v $\mathbb{R}$ je $\int_a^b f(x)dx$ limitou posloupnosti Riemannových součtů, což jsou vlastně integrály jednoduchých funkcí 2.9, které aproximují $f(x)$ na $[a,b]$. Podobně i v obecném prostoru, my se pro jednoduchost zaměříme jen na $\mathbb{R}$, budeme mít přirozeného kandidáta na integrál jednoduché funkce, viz Definice 2.10. Tento integrál poté rozšíříme na obecnější funkce.

Lebesgueův integrál tedy vybudujeme ve třech krocích. Nejprve pro nezáporné jednoduché funkce, potom náš postup rozšíříme na nezáporné měřitelné funkce pomocí aproximace zdola jednoduchými funkcemi a obecný případ dokončíme rozkladem funkce na kladnou a zápornou část.

Připomeňme, že ne všechny množiny jsou lebesgueovsky měřitelné. Stejně tak nelze očekávat rozumnou teorii integrování na třídě všech funkcí. Budeme se muset omezit na jisté funkce, které budeme nazývat lebesgueovsky měřitelné. Občas krom reálných funkcí budeme pracovat i s funkcemi s hodnotami v $\mathbb{R}^* = [-\infty, \infty]$. Vycházíme z publikací [3], [2], [5].

Definice 2.8. *(Lebesgueovsky měřitelná funkce)*
Nechť $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ je měřitelný prostor. Funkce $f : A \to \mathbb{R}^*$, kde $A \in \mathcal{L}$, se nazývá lebesgueovsky měřitelná, pokud

$$f^{-1}((a, \infty]) = \{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{L}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Zdůrazněme, že v definici měřitelnosti funkce se Lebesgueova míra λ jako taková nevyskytuje. Měřitelnost je čistě vázána na σ-algebru $\mathcal{L}$, kterou je definován měřitelný prostor.

Věta 2.4. *([[5], str. 59])*
Nechť $A \in \mathcal{L}$ a $f : A \to \mathbb{R}^*$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- *Funkce f je lebesgueovsky měřitelná.*
- *Pro $\forall a \in \mathbb{R}$ je množina $\{x \in A : f(x) \geq a\} \in \mathcal{L}$.*
- *Pro $\forall a \in \mathbb{R}$ je množina $\{x \in A : f(x) < a\} \in \mathcal{L}$.*
- *Pro $\forall a \in \mathbb{R}$ je množina $\{x \in A : f(x) \leq a\} \in \mathcal{L}$.*

Lemma 2.5. *([[3], str. 23])*
Každá spojitá funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná.

Věta 2.6. *([[3], str. 23])*
Je-li $f : A \to \mathbb{R}$ lebesgueovsky měřitelná a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá, pak $g \circ f$ je lebesgueovsky měřitelná.

Věta 2.7. *(Vlastnosti lebesgueovsky měřitelných funkcí, [[2], str. 10])*
Buďte f, g, f_n lebesgueovsky měřitelné funkce na $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Potom jsou lebesgueovsky měřitelné i následující funkce:

- $c \cdot f$, $f + g$ *(pokud součet $f + g$ má všude smysl)*, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $|f|$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ *(pokud g nenabývá hodnoty 0)*,
- $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ *a také* $\lim f_n$ *(existuje-li).*

V dalším budeme měřitelnou množinou a měřitelnou funkcí mínit lebesgueovsky měřitelnou množinu a lebesgueovsky měřitelnou funkci.

2.2.5 Integrál jednoduché nezáporné funkce

Základním stavebním kamenem budované teorie integrálu jsou jednoduché funkce.

Definice 2.9. *(Jednoduchá funkce)*
Říkáme, že $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je jednoduchá funkce, jestliže obor hodnot* $s(\mathbb{R})$ *funkce* s *je konečná množina. Nechť* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *jsou všechny různé hodnoty funkce* s *a* $A_j = s^{-1}(\{\alpha_j\}), j \in \{1, \dots, n\}$. *Pak*

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} \tag{✿}$$

a

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A, \end{cases}$$

je charakteristická funkce množiny $A \subset \mathbb{R}$. *Funkce* χ_A *je zřejmě měřitelná, právě když množina* A *je měřitelná.*

Reprezentaci (✿) ve tvaru lineární kombinace charakteristických funkcí s reálnými koeficienty budeme nazývat *standardní reprezentace s.* Všimněme si, že jednoduchou funkci lze zapsat jako lineární kombinaci charakteristických funkcí vícero způsoby, neboť $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ pro disjunktní množiny A, B. Ovšem standardní reprezentace jednoduché funkce je určena jednoznačně.

Nyní si ukážeme velmi důležitou vlastnost, že každou měřitelnou funkci lze pěkně aproximovat jednoduchými funkcemi.

Věta 2.8. *([[3], str. 24-25])*
Nechť $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ *je měřitelná funkce. Potom existují měřitelné jednoduché funkce* $s_1(x), s_2(x), \dots$ *takové, že* $0 \le s_1(x) \le s_2(x) \le \dots$ *a*

$$\lim_{j\to\infty} s_j(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Pro $j \in \mathbb{N}$ definujme $A_j = \{x \in A : f(x) \ge j\}$ a pro $j \in \mathbb{N}$ a $k \in \{1, \dots, j2^j\}$ definujme

$$A_{j,k} = f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right)\right).$$

Potom jsou množiny $A_{j,k}$ měřitelné,

$$s_j(x) = \sum_{k=1}^{j2^j} \frac{k-1}{2^j} \chi_{A_{j,k}} + j\chi_{A_j}, \quad j \in \mathbb{N},$$

je nezáporná měřitelná jednoduchá funkce a $s_{j+1}(x) \ge s_j(x), j \in \mathbb{N}$.
Je–li $x \in \mathbb{R}$ a $f(x) = \infty$, pak $x \in A_j$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$, tedy $s_j(x) = j$.
Proto $\lim_{j\to\infty} s_j(x) = f(x)$. Nechť $x \in \mathbb{R}$ a $f(x) < \infty$. Zvolme $j \in \mathbb{N}$ takové, aby

$f(x) < j$. Potom $x \notin A_j$ a existuje právě jedno $k \in \{1, \dots, j2^j\}$, pro něž $x \in A_{j,k}$. Platí

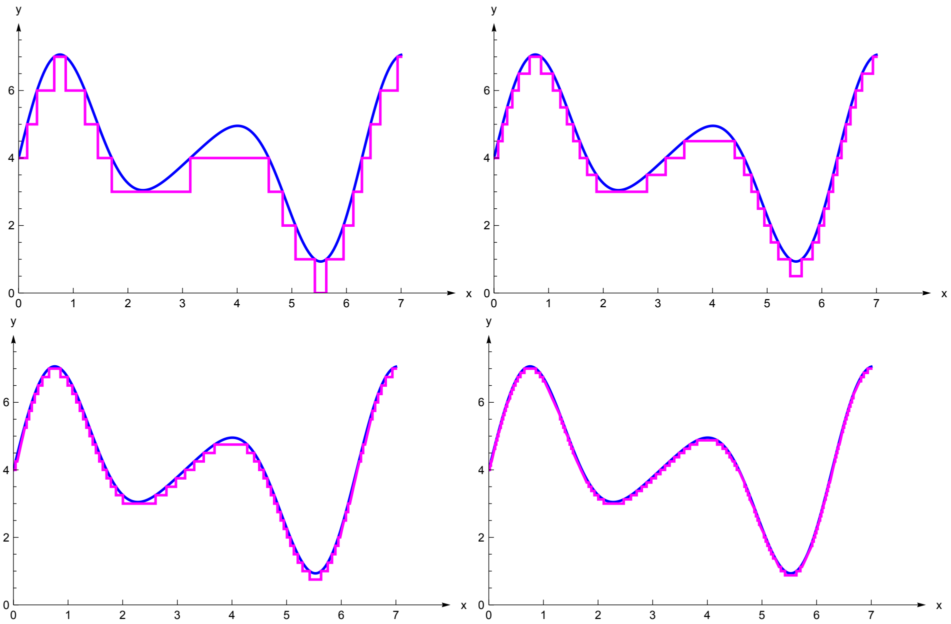
$$\frac{k-1}{2^j} \leq f(x) < \frac{k}{2^j}, \quad s_j(x) = \frac{k-1}{2^j},$$

tudíž

$$0 \leq f(x) - s_j(x) < \frac{1}{2^j}.$$

Vidíme, že $\lim_{j \to \infty} s_j(x) = f(x)$.

□



Obrázek 2.3: Jednoduché funkce $s_j(x)$ (růžově) z Věty 2.8 aproximující funkci $f(x)$ (modře)

Poznámka 2.5. Pokud je navíc funkce $f(x)$ omezená, konvergují funkce $s_j(x)$ k funkci $f(x)$ *stejnoměrně* na $\mathbb{R}$.

Definice 2.10. *Nechť $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou λ, $A \in \mathcal{L}$ a $s(x)$ je jednoduchá nezáporná měřitelná funkce $s(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$. Pak číslo*

$$\int_A s(x)\, d\lambda = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda\left(A \cap A_j\right) \in [0, \infty]$$

nazveme Lebesgueovým integrálem jednoduché funkce $s(x)$ na množině A.

Důvod, proč se v Definici 2.10 omezujeme právě na jednoduchou nezápornou měřitelnou funkci, je ten, že chceme předejít případům $\infty - \infty$.

Příklad 2.4. $f(x) = \left\{ \begin{array}{rl} 1 & \text{pro } x \geq 0 \\ -1 & \text{pro } x < 0 \end{array} \right\} = 1 \cdot \chi_{[0,\infty)} - 1 \cdot \chi_{(-\infty,0)}$

$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda = 1 \cdot \lambda([0,\infty)) - 1 \cdot \lambda((-\infty,0)) = \infty - \infty = ?$

V celé této kapitole zavedeme konvenci, že $0 \cdot \infty = 0$.

Poznámka 2.6. Je-li některé $\alpha_j = 0$, chceme, aby platilo $\int_A \alpha_j \chi_{A_j} d\lambda = 0$, i když $\lambda(A_j) = \infty$.

2.2.6 Integrál nezáporné měřitelné funkce

Nyní si rozšíříme definici integrálu na libovolnou nezápornou měřitelnou funkci.

Definice 2.11. *Uvažujme libovolnou nezápornou měřitelnou funkci $f(x)$. Nechť $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou λ, $A \in \mathcal{L}$ a $s(x)$ je jednoduchá nezáporná měřitelná funkce. Pak číslo*

$$\int_A f(x) d\lambda = \sup \left\{ \int_A s(x) d\lambda \right\} \in [0, \infty],$$

kde supremum se bere přes všechny měřitelné jednoduché funkce $s(x)$ splňující nerovnosti $0 \leq s(x) \leq f(x)$ na A, nazveme Lebesgueovým integrálem nezáporné funkce $f(x)$ na množině A.

Poznámka 2.7. Nyní máme dvě definice integrálu pro nezáporné jednoduché funkce, avšak nejsou v rozporu. Hodnota $\int f$ pro jednoduchou funkci s je stejná v Definici 2.11 jako v Definici 2.10, neboť $\int f$ odpovídá supremu z integrálu přes všechny uvažované jednoduché funkce s.

Věta 2.9. *([[3], str. 29-31])*
Nechť $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou λ, $A \in \mathcal{L}$ a $f(x), g(x)$ jsou nezáporné jednoduché měřitelné funkce. Potom platí

- $\int_A f(x) + g(x) d\lambda = \int_A f(x) d\lambda + \int_A g(x) d\lambda$.
- *Je-li $f(x) \leq g(x)$ pro $\forall x \in A$, pak $\int_A f(x) d\lambda \leq \int_A g(x) d\lambda$.*
- $\int_A f(x) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x) \chi_A d\lambda$.
- *Pro $c \geq 0$ platí $\int_A c f(x) d\lambda = c \int_A f(x) d\lambda$.*
- *Je-li $f(x) = 0$ pro $\forall x \in A$, potom $\int_A f(x) d\lambda = 0$.*
- *Je-li $\lambda(A) = 0$, potom $\int_A f(x) d\lambda = 0$.*
- *Je-li $B \subset A, B \in \mathcal{L}$, potom $\int_B f(x) d\lambda \leq \int_A f(x) d\lambda$.*
- *(Čebyševova nerovnost) Pro každé $a > 0$ je $\lambda(\{x \in A : f(x) \geq a\})$ $\leq \frac{1}{a} \int_A f(x) d\lambda$.*

2.2.7 Integrál obecné měřitelné funkce

K rozšíření integrálu z nezáporných funkcí na obecné využijeme rozkladu funkce f na kladnou a zápornou část

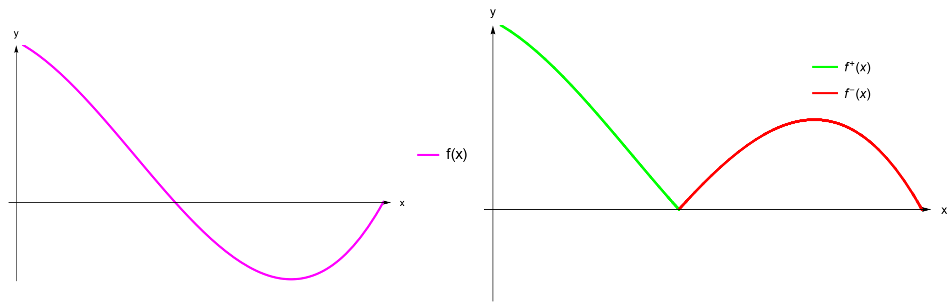
$$f(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

Definice 2.12. *(Kladná a záporná část funkce)*
Je–li dána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, pak definujme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\},$$

$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}.$$

Poznámka 2.8. Všimněme si, že
(i) $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.
(ii) $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.
(iii) $f(x)$ měřitelná $\Leftrightarrow$ $f^+(x)$,$f^-(x)$ měřitelné.



Obrázek 2.4: Myšlenka obecné měřitelné funkce

Nyní už je asi zřejmé, jakým způsobem rozšíříme definici integrálu na obecnou měřitelnou funkci f. Jediné, co bude opět třeba ošetřit, je, abychom v definici integrálu nedostali výraz $\infty - \infty$.

Definice 2.13. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ je měřitelná. Definujme*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f^+(x)d\lambda - \int_{\mathbb{R}} f^-(x)d\lambda,$$

pokud má rozdíl smysl. Tj. aspoň jeden z integrálů $\int_{\mathbb{R}} f^+(x)d\lambda$, $\int_{\mathbb{R}} f^-(x)d\lambda$ je konečný. Pak říkáme, že $\int_{\mathbb{R}} f(x)d\lambda$ existuje.

Má-li konečnou hodnotu, tj. oba integrály $\int_{\mathbb{R}} f^+(x)d\lambda$, $\int_{\mathbb{R}} f^-(x)d\lambda$ jsou konečné, pak říkáme, že $\int_{\mathbb{R}} f(x)d\lambda$ konverguje.

Pro $A \in \mathcal{L}$ definujme $\int_A f(x)d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_A d\lambda$, pokud integrál vpravo existuje.

Věta 2.10. *([2], str. 26])*
$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\lambda$ konverguje právě tehdy, když $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|d\lambda < \infty$.

2.2.8 Skoro všude

V Lebesgueově teorii často není podstatné, co se děje na množinách nulové míry.

Nechť $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ je prostor s mírou, $A \in \mathcal{L}$. Řekneme, že výrok V platí skoro všude (s.v) na A, pokud existuje množina $N \in \mathcal{L}$ splňující $\lambda(N) = 0$ taková, že V platí ve všech bodech množiny $A \setminus N$.

2.3 Lebesgueův integrál a schodovité funkce

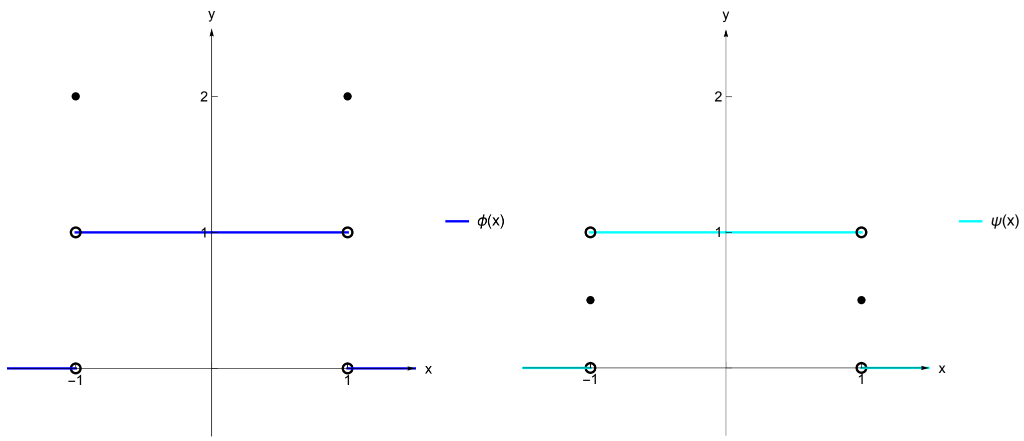
Nyní se zaměříme na definici Lebesgueova integrálu pomocí tzv. schodovitých funkcí. Vycházet budeme z [8].

Schodovité funkce jsou typické především pro Riemannův integrál, v Lebesgueově integraci jsou jejich analogií jednoduché funkce, které jsme si představili v předešlé sekci, viz 2.2.5. Rozdíl spočívá v tom, že měřitelnými množinami jsou zde intervaly. Jinými slovy, schodovité funkce jsou speciálním případem jednoduchých funkcí, což znamená, že každá schodovitá funkce je jednoduchá funkce, ale opačné tvrzení neplatí, více viz [8] (str. 118, Tvrzení 3.2.7.).

Definice 2.14. *(Schodovitá funkce, její reprezentace a délka)*
Reálná funkce ϕ se nazývá schodovitá, pokud splňuje následující vlastnosti: Existuje konečný počet bodů $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ a reálná čísla $c_1, \dots, c_n$ taková, že

- $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n$,
- $\phi(x) = c_k$ pro $a_{k-1} < x < a_k, \quad k = 1, \dots, n$,
- $\phi(x) = 0$ pro $x < a_0$ a $x > a_n$.

Posloupnost čísel $(a_0, \dots, a_n; c_1, \dots, c_n)$ nazveme reprezentací schodovité funkce ϕ a n délkou této reprezentace.



Obrázek 2.5: Dvě různé schodovité funkce $\phi(x)$ a $\psi(x)$ se stejnou reprezentací $(-1{,}1; 1)$

Všimněme si, že způsob, jakým jsme definovali reprezentaci schodovité funkce ϕ, v sobě ukrývá dva seznamy. První seznam obsahuje dělicí body a druhý funkční hodnoty schodovité funkce. V případě, že a_{k-1} a a_k splývají pro nějaké k, c_k v druhé vlastnosti Definice 2.14 nebude hrát žádnou roli, neboť $\{x : a_{k-1} < x < a_k\} = \emptyset$.

Též stojí za povšimnutí, že v Definici 2.14 nenajdeme žádný požadavek týkající se hodnot $\phi(a_k)$ funkce ϕ v koncových bodech intervalu. Řeč je zde pouze o funkci ϕ, která je konstantní na otevřených intervalech (a_{k-1}, a_k). To má za následek, že mohou nastat případy, kdy dvě různé schodovité funkce budou mít jednu a tu samou reprezentaci, viz Obrázek 2.5.

Stejně tak můžeme pro jednu libovolnou schodovitou funkci ψ najít více než jednu její reprezentaci. Uvažujme funkci ψ z Obrázku 2.5. Pro tuto schodovitou funkci zvolme reprezentaci $(-1{,}0{,}1; 1{,}1)$. Též by jí odpovídala stejně jako reprezentace $(-1{,}1; 1)$. Rozdíl je v tom, že reprezentace $(-1{,}1; 1)$ uvádí pouze body nespojitosti ψ, kdežto reprezentace $(-1{,}0{,}1; 1{,}1)$ uvádí i další body. Reprezentaci schodovité funkce $(a_0, \dots, a_n; c_1, \dots, c_n)$, která obsahuje pouze body nespojitosti $a_0 < \dots < a_n$, nazveme reprezentací nejkratší délky.

Definice 2.15. *Označme $\mathcal{S}$ množinu všech reálných schodovitých funkcí.*

Věta 2.11. *([[8], str. 13])*
Množina $\mathcal{S}$ má následující vlastnosti:
Pokud $a, b \in \mathbb{R}$ a $\phi(x), \psi(x) \in \mathcal{S}$, pak

- $a\phi(x) + b\psi(x) \in \mathcal{S}$,
- $\min(\phi(x), \psi(x))$ *a* $\max(\phi(x), \psi(x)) \in \mathcal{S}$.

Přejděme nyní k samotné definici integrálu schodovité funkce:

Definice 2.16. *(Integrál schodovité funkce)*
Nechť ϕ je schodovitá funkce a $(a_0, \dots, a_n; c_1, \dots, c_n)$ její reprezentace nejkratší délky. Definujme nyní

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k(a_k - a_{k-1}),$$

toto číslo nazveme integrálem schodovité funkce ϕ.

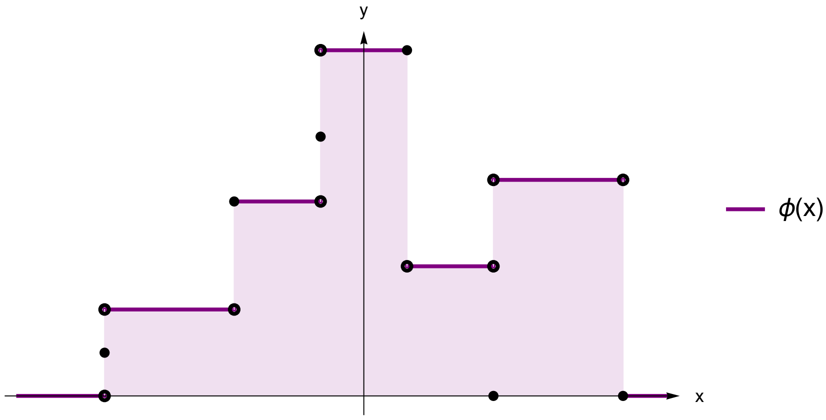
Integrál $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx$ má následující vlastnosti:

Věta 2.12. *([[8], str. 16])*
Pokud $\phi(x), \psi(x) \in \mathcal{S}$, pak pro libovolná $a{,}b \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_{\mathbb{R}} a\phi(x) + b\psi(x)dx = a\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx + b\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx.$$

Věta 2.13. *([[8], str. 17])*
Pokud $\phi(x) \in \mathcal{S}$ a $\phi(x) \geq 0$, pak $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx \geq 0$.

Pro nezápornou schodovitou funkci ϕ získáme přesně plochu pod grafem, viz Obrázek 2.6.



Obrázek 2.6: Plocha pod grafem nezáporné schodovité funkce $\phi(x)$

Důsledek 2.14. *([[8], str. 18])*
Pokud $\phi(x), \psi(x) \in \mathcal{S}$ a $\phi(x) \geq \psi(x)$, pak

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx \geq \int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx.$$

Pro libovolné $\phi(x) \in \mathcal{S}$ platí

$$|\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx| \leq \int_{\mathbb{R}} |\phi(x)|dx.$$

$$\int_{\mathbb{R}} \phi^{+}(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} |\phi(x)|dx, \qquad \int_{\mathbb{R}} \phi^{-}(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} |\phi(x)|dx,$$

kde $\phi^{+}(x)$ značí kladnou část schodovité funkce $\phi(x)$ a $\phi^{-}(x)$ zápornou část schodovité funkce $\phi(x)$. Zřejmě pak $\phi(x) = \phi^{+}(x) - \phi^{-}(x)$ a $|\phi(x)| = \phi^{+}(x) + \phi^{-}(x)$.

Věta 2.15. *([[8], str. 36])*
Předpokládejme, že $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající posloupnost nezáporných schodovitých funkcí $\phi_n(x) \geq \phi_{n+1}(x) \geq 0$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = 0$$

pro skoro všechna x. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)dx = 0.$$

Důsledek 2.16. *([[8], str. 37])*
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$ je řada schodovitých funkcí taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) = 0$ skoro všude. Dále předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\phi_n(x)|dx$ konverguje, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)dx = 0.$$

Uvažujme nyní libovolnou funkci f, pro kterou

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$$

pro skoro všechna x. Pak bychom rádi definovali Lebesgueův integrál funkce f rovností

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)dx.$$

To nám přinese jisté komplikace, neboť může existovat jiná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$ schodovitých funkcí konvergující k funkci f skoro všude a splňovat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\psi_n(x)|dx < \infty.$$

Ukážeme tedy, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)dx. \tag{2.2}$$

Zde nám bude nápomocný Důsledek 2.16. Aplikujeme ho na řadu schodovitých funkcí $\sum_{n=1}^{\infty}(\phi_n(x) - \psi_n(x))$, která konverguje k nule skoro všude a splňuje

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\phi_n(x) - \psi_n(x)|dx &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} |\phi_n(x)|dx + \int_{\mathbb{R}} |\psi_n(x)|dx\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\phi_n(x)|dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\psi_n(x)|dx < \infty.\end{aligned}$$

Docházíme k závěru, že

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} (\phi_n(x) - \psi_n(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)dx,$$

z čehož okamžitě plyne rovnost (2.2). Následující definice je proto korektní.

Definice 2.17. *(Lebesgueův integrál)*
Řekneme, že reálná funkce f je lebesgueovsky integrovatelná, pokud existuje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$ schodovitých funkcí taková, že

- $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) = f(x)$ *pro skoro všechna* x,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\phi_n(x)|dx < \infty$.

Potom Lebesgueův integrál funkce f definujeme jako

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)dx.$$

Každá schodovitá funkce $\phi(x)$ je integrovatelná, neboť je skoro všude rovna řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$, kde

$$\phi_1(x) = \phi(x), \qquad \phi_n(x) = 0 \qquad \text{pro } n \geq 2.$$

Máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx,$$

tudíž Definice 2.17 se shoduje s dřívější definicí integrálu pro schodovitou funkci. Ekvivalentní podmínku integrovatelnosti nám dává následující lemma:

Lemma 2.17. *(Mikusińskiho, [[8], str. 61])*
Reálná funkce f je lebesgueovsky integrovatelná právě tehdy, když existuje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$ schodovitých funkcí splňující $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\phi_n(x)| dx < \infty$ a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$$

pro všechna x, pro která $\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n(x)| < \infty$.

Lebesgueovsky integrovatelná funkce se též vyznačuje tím, že existuje posloupnost $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ schodovitých funkcí s vlastnostmi, které udává následující věta:

Věta 2.18. *([[8], str. 59])*
Reálná funkce f je lebesgueovsky integrovatelná právě tehdy, když existuje posloupnost $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ schodovitých funkcí taková, že

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x), \quad \text{s.v.},$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |\phi_n(x) - \phi_m(x)| dx = 0,$$

a pak

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x) dx.$$

2.4 Lebesgueův integrál a absolutně spojité funkce

Nyní podáme alternativní deskriptivní definici Lebesgueova integrálu, která využívá absolutně spojitých funkcí. Podkapitola je zpracována na základě zdrojů [6] a [4].

Abychom však definici porozuměli, podíváme se tak nejdříve na definici absolutně spojité funkce. Absolutní spojitost byla poprvé pozorována A. Harnackem v roce 1884. Název však pochází od G. Vitaliho z roku 1905.

Definice 2.18. *(Absolutně spojitá funkce)*
Reálná funkce $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ se nazývá absolutně spojitá, pokud platí následující podmínka: Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý soubor $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ disjunktních intervalů v $[a, b]$ splňujících

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$$

platí

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon.$$

Věta 2.19. *([[4], str. 229])*
Funkce F je absolutně spojitá na intervalu $[a,b]$ právě tehdy, když je rovna rozdílu dvou absolutně spojitých funkcí, monotónně rostoucích.

Definice 2.19. *(Lebesgueův integrál)*
Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má v intervalu $[a, b]$ Lebesgueův integrál, když existuje absolutně spojitá funkce F tak, že platí $F'(x) = f(x)$ pro skoro všechna $x \in [a, b]$. Lebesgueův integrál definujeme rovností

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Poznámka 2.9. Definice 2.19 je korektní, neboť nezávisí na volbě F, protože každé dvě vhodné funkce se liší o konstantu.

Dokažme nyní, že definice Lebesgueova integrálu pomocí absolutně spojitých funkcí je ekvivalentní s moderním pojetím, které využívá Lebesgueovy míry. Ještě před samotným důkazem si zadefinujeme funkce konečné variace a uvedeme si pár vět, které nám budou nápomocné v důkazu Věty 2.25.

Definice 2.20. *(Funkce konečné variace)*
Nechť je dána funkce f na intervalu $[a,b]$ a dělení $D = (a = x_0 < x_1 < \dots$ $\dots < x_n = b)$. $\mathcal{D}(a,b)$ budeme značit množinu všech dělení intervalu $[a,b]$. Variaci funkce f vzhledem k dělení D definujeme vztahem

$$V(D, f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

Totální variací funkce f přes interval $[a,b]$ je supremum variací přes všechna dělení

$$V_a^b(f) = \sup_{D \in \mathcal{D}(a,b)} V(D,f).$$

Řekneme, že funkce f má konečnou variaci na tomto intervalu, pokud je totální variace konečná.

Věta 2.20. *([[4], str. 218])*
Má-li funkce f konečnou variaci na intervalu $[a,b]$, pak je diferencovatelná skoro všude na intervalu $[a,b]$.

Věta 2.21. *([[4], str. 227])*
Je-li F absolutně spojitá funkce na intervalu $[a,b]$, pak má konečnou variaci na intervalu $[a,b]$.

Lemma 2.22. *(Fatouovo, [[4], str. 187])*
Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných integrovatelných funkcí, potom

$$\int_A \liminf_{n\to\infty} f_n(x)d\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\lambda.$$

Pokud f_n konverguje k f skoro všude na A a pokud $\int_A f_n(x)\lambda$ je omezený konstantou nezávisle na n, pak f je integrovatelná a

$$\int_A f(x)d\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\lambda.$$

Lemma 2.23. *([[4], str. 234])*
Pokud F je absolutně spojitá a monotónně rostoucí funkce a pokud $F'(x) = 0$ skoro všude na intervalu $[a,b]$, pak F je konstantní.

Věta 2.24. *([[4], str. 232])*
Je-li f je integrovatelná na $[a,b]$, pak

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

je diferencovatelná skoro všude a $F'(x) = f(x)$ skoro všude.

Věta 2.25. *(Základní věta kalkulu, [[4], str. 236])*
Nechť je F absolutně spojitá funkce na intervalu $[a,b]$, pak je diferencovatelná skoro všude, F' je integrovatelná na intervalu $[a,b]$ a

$$\int_a^b F'(t) = F(b) - F(a). \tag{2.3}$$

Důkaz. Věta 2.21 nám říká, že funkce F má konečnou variaci na intervalu $[a,b]$, tudíž je dle Věty 2.20 diferencovatelná skoro všude. Nyní potřebujeme ukázat, že F' je integrovatelná a dokázat tak rovnost (2.3).

Dle Věty 2.19, je-li F absolutně spojitá, pak je rozdílem dvou absolutně spojitých funkcí, monotónně rostoucích. Tedy důkaz pro nás bude dostačující, zaměříme-li se na funkci F, která je navíc monotónně rostoucí.

Abychom nyní dokázali, že F' je integrovatelná, definujeme posloupnost funkcí F_n následovně:

$$F_n(x) = \frac{F\left(x+\frac{1}{n}\right) - F(x)}{\frac{1}{n}} = n\left(F\left(x+\frac{1}{n}\right) - F(x)\right),$$

kde funkci F rozšíříme na interval $x \in [b,b+1)$ tak, že položíme $F(x) = F(b)$. Každá F_n je nezáporná funkce a posloupnost $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k F' skoro všude.

Dle Fatouova lemmatu 2.22, je-li integrál z F_n přes interval $[a,b]$ omezený konstantou, která nezávisí na n, pak je F' integrovatelná. Omezenost integrálu vychází z monotonie F :

$$\begin{aligned}\int_a^b F_n(x)dx &= n\int_a^b F\left(x+\frac{1}{n}\right)dx - n\int_a^b F(x)dx \\ &= n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} F(x)dx - n\int_a^b F(x)dx \\ &= n\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(x)dx - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)dx \\ &\leq n\cdot\frac{1}{n}\cdot F\left(b+\frac{1}{n}\right) - n\cdot\frac{1}{n}\cdot F(a) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Nic nám nebrání v tom, abychom dolní mez a nahradili libovolným $x \in [a,b]$ a horní mez b libovolným $y \in [a,b]$. Pro $a \leq x \leq y \leq b$ dostáváme

$$\int_x^y F'(t)dt \leq F(y) - F(x). \tag{2.4}$$

Nyní definujme funkci G vztahem

$$G(x) = F(x) - \int_a^x F'(t)dt.$$

Rádi bychom na ni aplikovali Lemma 2.23. Z jeho znění dostáváme $G(a) = F(a) - 0 = F(a)$. Ukážeme-li, že funkce G je konstantní na intervalu $[a,b]$, pak je onou konstantou $F(a)$ a rovnost (2.3) je dokázána. Je tedy třeba ukázat, že funkce G je absolutně spojitá a monotónně rostoucí a že její derivace je rovna 0 skoro všude.

Jelikož je funkce G rozdílem dvou absolutně spojitých funkcí, je absolutně spojitá. Z nerovnosti (2.4), kde $x < y$, plyne, že

$$G(y) - G(x) = F(y) - F(x) - \int_x^y F'(t) \geq 0,$$

tudíž je G monotónně rostoucí. Z Věty 2.24

$$\frac{d}{dx}\int_a^x F'(t)dt = F'(x), \quad \text{skoro všude},$$

a proto $G' = 0$ skoro všude. Užitím Lemmatu 2.23 dostáváme, že G je konstantní funkce rovna $F(a)$. Pro všechna $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned}G(x) = F(x) - \int_a^x F'(t)dt &= F(a) \\ = \int_a^x F'(t)dt &= F(x) - F(a).\end{aligned}$$

$\square$

3. Riemann, Lebesgue, Kurzweil

V této kapitole stručně srovnáme Lebesgueův integrál s integrálem Riemannovým a následně i s integrálem Kurzweilovým. Na příkladech ilustrujeme, že množina funkcí integrovatelných v Lebesgueově smyslu je nadmnožinou riemannovsky integrovatelných funkcí a naopak podmnožinou funkcí integrovatelných v Kurzweilově smyslu.

Předpokládáme, že čtenář absolvoval základní kurz matematické analýzy, tudíž nám jistě promine, když zde opomeneme definici Riemannova integrálu.
V příkladech budeme konkrétně využívat Darbouxovy definice pomocí horních a dolních integrálních součtů, tu lze v případě zájmu nalézt např. v [[9], str. 453-454]. Abychom však čtenáře neochudili úplně, zadefinujeme Kurzweilův integrál.

3.1 Kurzweilův integrál

Kurzweilův integrál, dnes též známý jako Henstockův-Kurzweilův, pochází z česko-britského prostředí. Jeho autory jsou český matematik Jaroslav Kurzweil (1926 – 2022) a britský matematik Ralph Henstock (1923 – 2007), kteří jej vyvinuli nezávisle na sobě. Jaroslav Kurzweil poprvé v roce 1957 ve své práci *Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter,* Ralph Henstock v roce 1960 v práci s názvem *A New Descriptive Definition of the Ward Integral.*

Kurzweilův integrál je konstruován podobným způsobem jako klasický Riemannův integrál pomocí integrálních součtů. Myšlenka autorů při zavedení tohoto integrálu spočívala právě v propojení geometrické názornosti Riemannova integrálu a platnosti Newton–Leibnizovy formule (1.1).

V případě integrování přes jednorozměrné intervaly má Kurzweilův integrál všechny výhody Lebesgueova integrálu, obecně však dokáže integrovat mnohem širší třídu funkcí. Jedná se o neabsolutně konvergentní integrál, který lze taktéž zavést vícero ekvivalentními způsoby. My v textu využijeme Kurzweilovy definice, vycházíme z [6]. Náčrt ekvivalentní definice lze nalézt např. v [[2], str. 82].

Definice 3.1. *(Kalibr a dělení)*
Buď $a,b \in \mathbb{R}, a < b$. Nechť je na uzavřeném intervalu $[a,b]$ dána kladná funkce $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$. Tuto funkci nazveme kalibrem. Dále označme symbolem D konečnou posloupnost čísel $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \tau_n, \alpha_n\}$ takových, že platí

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = b \tag{3.1}$$

a

$$\alpha_{i-1} \le \tau_i \le \alpha_i, \;\; i = 1, \dots, n. \tag{3.2}$$

Dělení

$$D = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \tau_n, \alpha_n\},$$

které splňuje podmínky (3.1), (3.2) a

$$[\alpha_{i-1}, \alpha_i] \subset (\tau_i - \delta(\tau_i), \tau_i + \delta(\tau_i)), \;\; i = 1, 2, \dots, n \tag{3.3}$$

nazveme δ-jemným dělením intervalu $[a,b]$.

Poznámka 3.1. Body τ_i, kde $i = 1,2,\ldots,n$, nazveme význačnými body dělení D.

Lemma 3.1. *(Cousinovo lemma, [[6], str. 55])*
Pro libovolný kalibr $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ je množina všech δ-jemných dělení intervalu $[a,b]$ vždy neprázdná.

Jak jsme již zmínili, Kurzweilův integrál se tvoří velmi podobně jako Riemannův integrál. Proto pro dělení D intervalu $[a,b]$ vytvoříme klasický integrální součet

$$\sigma(f,D) = \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(\alpha_i - \alpha_{i-1}).$$

Pro prázdné intervaly budeme za jejich dělení považovat prázdnou množinu a příslušný integrální součet bude nulový.

Definice 3.2. *(Kurzweilův integrál)*
Buď $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Číslo $I \in \mathbb{R}$ nazveme Kurzweilovým integrálem funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ od a do b, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ tak, že pro každé δ-jemné dělení D platí nerovnost

$$|\sigma(f,D) - I| < \varepsilon.$$

Lemma 3.2. *([[6], str. 61])*
Pokud Kurzweilův integrál existuje, je určen jednoznačně.

Poznámka 3.2. Cousinovo lemma hraje v definici Kurzweilova integrálu klíčovou roli, neboť dle něj vždy existuje dělení D intervalu $[a,b]$, které je $\delta-$jemné, a proto má smysl mluvit o integrálních součtech $\sigma(f,D)$.

Poznámka 3.3. Srovnáme-li definici Kurzweilova a Riemannova integrálu, všimneme si, že u Riemannova integrálu si vystačíme s δ jako konstantami, kdežto v Kurzweilově definici hledané δ k zadanému ε nemusí být nutně konstanta, ale připustíme, že δ může být funkce.

3.2 Příklady

Uvažujme nyní dvě následující funkce. Podíváme se tak na to, zdali jsou obě integrovatelné v Riemannově, Lebesgueově a Kurzweilově smyslu dle definic, které jsme v práci uvedli (s výjimkou definice Riemannova integrálu). Abychom od sebe integrály odlišili, naší přirozenou volbou bude značení $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)dx$, $(\mathscr{L})\int_a^b f(x)dx$, $(\mathscr{K})\int_a^b f(x)dx$.

Příklad 3.1. Uvažujme na intervalu $(0,1)$ lineární funkci

$$f(x) = x.$$

$(\mathscr{R})$Riemannův integrál

Buď D dělení intervalu $(0,1)$ takové, že interval $(0,1)$ rozdělíme na n stejných podintervalů s délkou $\frac{1}{n}$. Body dělení x_i jsou $x_i = \frac{i}{n}$ pro $i = 0,1,\ldots,n$. Zřejmě $\inf\{f(x); x \in \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)\} = \frac{i-1}{n}$ a $\sup\{f(x); x \in \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)\} = \frac{i}{n}$ pro každé $i = 1,2,\ldots,n$.

Pro dolní součet s dostáváme

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1).$$

Využijeme-li vzorce pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti, dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{n \cdot (n-1)}{2}, \tag{3.4}$$

a tedy

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n}.$$

Pro horní součet S máme

$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i.$$

Opětovným užitím vzorce pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti obdržíme

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \tag{3.5}$$

tedy

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Abychom získali skutečný Riemannův integrál, musíme spočíst limitu těchto součtů pro $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} s(f,D) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} S(f,D) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Vidíme, že hodnota horního Riemannova integrálu $(\mathscr{R})\, \overline{\int_0^1} x dx = \frac{1}{2}$ a dolního Riemannova integrálu $(\mathscr{R})\, \underline{\int_0^1} x dx = \frac{1}{2}$ se rovná. Z toho plyne, že Riemannův integrál existuje a je roven $(\mathscr{R})\, \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

$(\mathscr{L})$ Lebesgueův integrál

- (Jednoduché funkce a Lebesgueova míra)
  Uvažujme libovolnou jednoduchou funkci $s(x)$ splňující

  $$s(x) \leq f(x) \quad \text{na intervalu } (0,1),$$

  pak

  $$s(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

  kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ a A_i jsou disjunktní měřitelné množiny takové, že $\bigcup_i (A_i) = (0,1)$.

Jelikož
$$s(x) \leq f(x) = x \quad \text{pro} \quad \forall x \in (0{,}1),$$
pak jistě platí
$$\alpha_i \leq \inf(A_i).$$
Chceme ukázat, že
$$\int_0^1 s(x) d\lambda \leq \frac{1}{2}.$$
Rozdělme tedy definiční obor na n podintervalů $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, $i = 1{,}2, \ldots, n$, stejné délky $\frac{1}{n}$ a definujme nyní posloupnost jednoduchých funkcí
$$k_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \chi_{\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]}(x).$$

Dokážeme, že pro výše definovanou posloupnost jednoduchých funkcí $k_n(x)$ platí
$$k_n(x) \geq s(x) \quad \text{pro} \ \forall x \in (0{,}1)$$
a
$$\int_0^1 k_n(x) d\lambda \geq \int_0^1 s(x) d\lambda \ \ \text{pro} \ \forall x \in (0{,}1)$$
a že její integrál konverguje k $\frac{1}{2}$.
Uvedená nerovnost jistě platí, neboť
$$k_n(x) \geq f(x) \geq s(x),$$
tedy i
$$\int_0^1 k_n(x) d\lambda \geq \int_0^1 f(x) d\lambda \geq \int_0^1 s(x) d\lambda, \ \ \text{viz Věta 2.9.}$$
Chceme-li spočíst integrál posloupnosti $k_n(x)$, dostáváme
$$\begin{aligned}
\int_0^1 k_n(x) d\lambda &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \lambda\left(\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} \\
&\overset{1}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.
\end{aligned}$$

Užitím limity pro $n \to \infty$ potom
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 k_n(x) d\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

[1] V rovnosti jsme využili vztahu (3.5).

Docházíme tedy k následujícímu

$$\frac{1}{2} \geq \int_0^1 s(x)d\lambda.$$

Zvolme nyní posloupnost jednoduchých funkcí

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \chi_{((\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}])}(x)$$

a ukažme, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 s_n(x)d\lambda = \frac{1}{2}.$$

Podobnými úpravami jako v předchozím případě dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^1 s_n(x)d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \lambda\left(\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} \\
&\overset{2}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Supremum přes všechny námi uvažované jednoduché funkce $s(x)$

$$\text{z } \int_0^1 s(x)d\lambda \text{ je tedy } \frac{1}{2}.$$

Lebesgueův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu (0,1) je roven

$$(\mathscr{L}) \int_0^1 x d\lambda = \sup\left\{\int_0^1 s(x)d\lambda\right\} = \frac{1}{2}.$$

- (Schodovité funkce)
  Podívejme se nyní na definici Lebesgueova integrálu, která využívá řady schodovitých funkcí.

  Uvažujme schodovitou funkci $\phi_n(x)$, pro kterou rozdělíme interval (0,1) na 2^n podintervalů stejné délky $\frac{1}{2^n}$, kde $a_k = \frac{k}{2^n}$ pro $k = 0, \ldots, 2^n$, budou dělicí body.

[2] V rovnosti jsme využili vztahu (3.4).

Pro názornost si rozepišme reprezentace prvních 3 schodovitých funkcí. Zřejmě

$$\phi_1(x) = \left(0, \frac{1}{2}, 1; 0, \frac{1}{2}\right),$$

$$\phi_2(x) = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1; 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\right),$$

$$\phi_3(x) = \left(0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1; 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8}\right),$$

$$\vdots$$

$$\phi_n(x) = \left(0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^n}, 1; 0, \frac{1}{2^n}, 0, \frac{1}{2^n}, \ldots, 0, \frac{1}{2^n}\right).$$

Jejich integrály budou dle Definice 2.16 rovny

$$\int_0^1 \phi_1(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \phi_2(x)dx = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8},$$

$$\int_0^1 \phi_3(x)dx = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{8}\right) + \frac{1}{8} \cdot \left(1 - \frac{7}{8}\right) = \frac{1}{16},$$

pro obecné n zřejmě

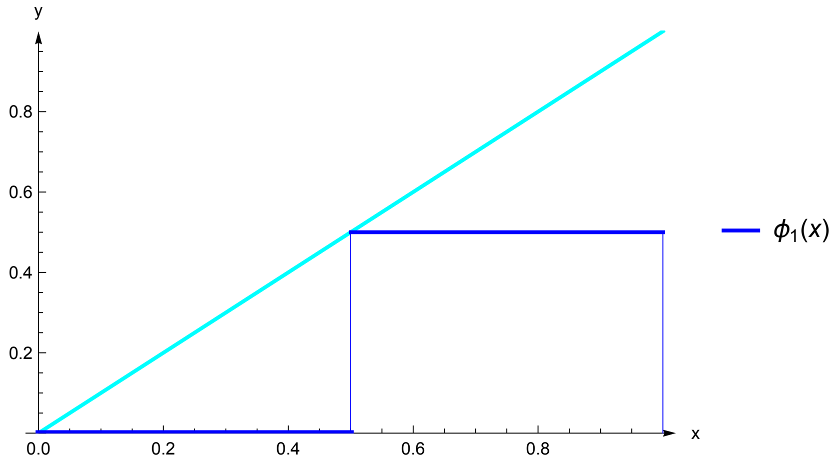
$$\int_0^1 \phi_n(x)dx = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Máme tedy řadu schodovitých funkcí $\phi_n(x)$, pro kterou platí

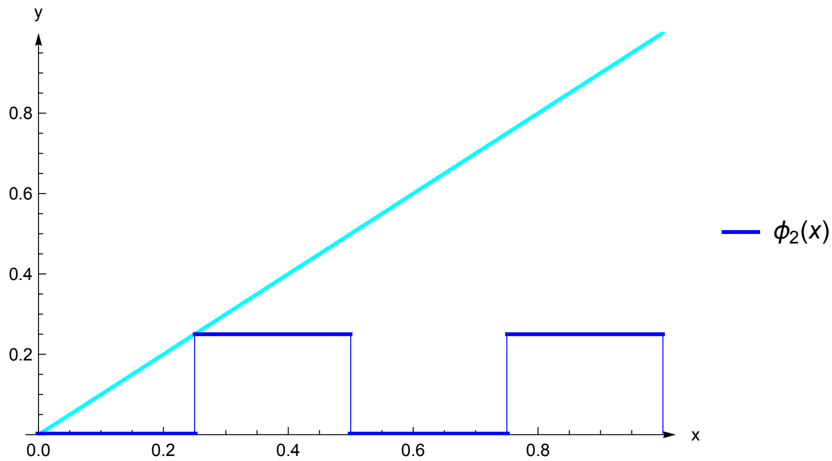
$$\sum_{n=1}^{m} \phi_n(x) = \frac{k}{2^m}$$

pro všechna $x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$, kde $k = 0, \ldots, 2^n - 1$ a pro všechna m.

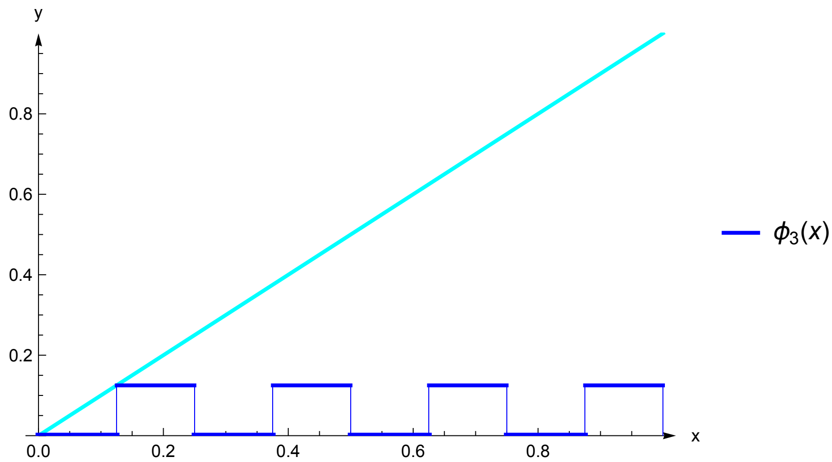
Na Obrázku 3.4 můžeme vidět součet řady schodovitých funkcí $\sum_{n=1}^{3} \phi_n(x)$. Je zřejmé, že postupným zjemňováním, tj. nahradíme-li naši prozatímní konečnou řadu nekonečnou, dokonvergujeme k funkci $f(x) = x$.



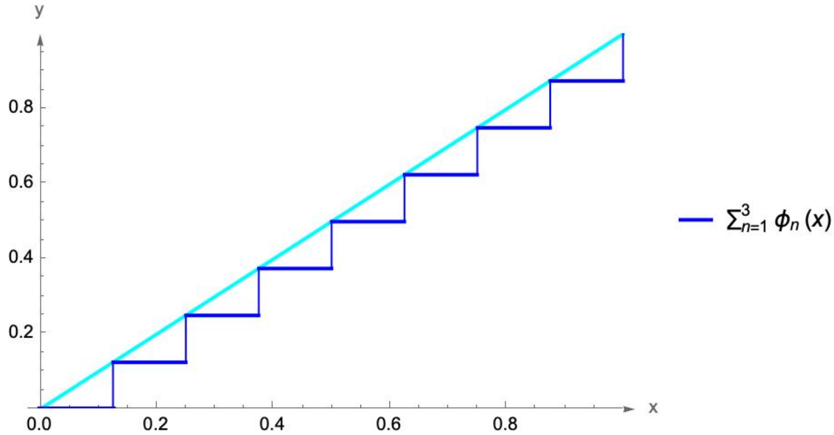
Obrázek 3.1: Schodovitá funkce $\phi_1(x)$



Obrázek 3.2: Schodovitá funkce $\phi_2(x)$



Obrázek 3.3: Schodovitá funkce $\phi_3(x)$



Obrázek 3.4: Součet $\sum_{n=1}^{3} \phi_n(x)$

Jelikož součet geometrické řady

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m},$$

potom pro všechna $x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ platí

$$\frac{k}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) < \frac{k+1}{2^n},$$

neboť pro $x = \frac{k}{2^n}$ dostaneme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{m} \phi_n(x) = \frac{k}{2^m}$$

a

$$\sum_{n=1}^{m} \phi_n(x) = \frac{k}{2^m} \quad \text{pro všechna } x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right).$$

Podívejme se nyní, proč platí rovnost

$$\int_0^1 \phi_n(x)dx = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Všimněme si, že pro každé n bude mít funkce $\phi_n(x)$ 2^{n-1} podintervalů, kde je funkční hodnota $\frac{1}{2^n}$ a stejný počet podintervalů, kde je funkční hodnota 0. Pro výpočet integrálu přes interval (0,1) budeme integrovat pouze přes ty intervaly, kde je funkční hodnota nenulová, tedy

$$\int_0^1 \phi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n}\right).$$

Počet těchto intervalů je 2^{n-1}, tedy máme

$$\int_0^1 \phi_n(x)dx = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Podíváme-li se nyní na nekonečnou řadu z integrálů $\int_0^1 \phi_n(x)dx$, máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \phi_n(x)dx.$$

Z předchozího víme, že

$$\int_0^1 \phi_n(x)dx = \frac{1}{2^{n+1}},$$

tedy nekonečnou řadu můžeme zapsat jako

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Jedná se o nekonečnou geometrickou řadu, jejíž první člen je $a_1 = \frac{1}{4}$ a kvocient $q = \frac{1}{2}$. Pro posloupnost částečných součtů s_n dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Lebesgueův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $(0,1)$ je tedy roven

$$(\mathscr{L}) \int_0^1 x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \phi_n(x)dx = \frac{1}{2}.$$

- (Absolutně spojitá funkce)
  Využijeme-li nyní definice integrálu pomocí absolutně spojité funkce, primitivní funkcí k funkci $f(x) = x$ je

  $$F(x) = \frac{x^2}{2}, \qquad x \in (0,1).$$

  Ověřme, že je funkce $F(x)$ na intervalu $(0,1)$ absolutně spojitá.
  Z Definice 2.18 dostáváme

  $$\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta \implies \sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| =$$

  $$= \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{b_k^2}{2} - \frac{a_k^2}{2} \right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{|b_k^2 - a_k^2|}{2}.$$

  Protože $|b_k^2 - a_k^2| = |b_k - a_k| \cdot |b_k + a_k|$, máme

  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{|b_k^2 - a_k^2|}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|b_k - a_k| \cdot |b_k + a_k|}{2}.$$

  Na intervalu $(0,1)$ je $|b_k + a_k| \leq 2$, tudíž

  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{|b_k - a_k| \cdot |b_k + a_k|}{2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2 \cdot |b_k - a_k|}{2} = \sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k|.$$

Pokud

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta,$$

pak

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta.$$

Položíme-li $\delta = \varepsilon$, dostáváme $\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$.
Dokázali jsme, že funkce $F(x)$ je absolutně spojitá na intervalu (0,1). Jelikož $F(x) = \frac{x^2}{2}$ a $F'(x) = x$ pro všechna $x \in (0,1)$, derivace $F(x)$ existuje a je rovna $f(x) = x$ v každém bodě (0,1), tedy můžeme říct, že platí
$f(x) = F'(x)$ skoro všude.

Lebesgueův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu (0,1) je dle Definice 2.19 roven

$$(\mathscr{L}) \int_0^1 x dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

$(\mathscr{K})$ Kurzweilův integrál

Ukážeme, že funkce $f(x) = x$ je na intervalu (0,1) integrovatelná v Kurzweilově smyslu a její integrál $(\mathscr{K}) \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme $\delta(x) = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{n}}$ za náš kalibr, kde n je počet význačných bodů, a tedy počet podintervalů v našem dělení D. Takto definovaná funkce je jistě kalibr, neboť pro $x \in (0,1)$ nabývá pouze kladných hodnot. Předpokládejme, že D je dělením intervalu (0,1), které je $\delta-$jemné. Tudíž $\alpha_i - \alpha_{i-1} \leq \delta(\tau_i) = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{n}}$ pro všechna $1 \leq i \leq n$. Abychom ukázali, že

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(\alpha_i - \alpha_{i-1}) - \frac{1}{2} \right| = |\sigma(f,D) - \frac{1}{2}| < \varepsilon,$$

podívejme se společně na pár užitečných nástrojů.

Podíváme-li se na vzdálenost od význačného bodu τ_i po střed intervalu (α_{i-1}, α_i), víme, že tato vzdálenost bude vždy menší nebo rovna polovině délky intervalu. Tedy

$$\left| \tau_i - \frac{\alpha_i + \alpha_{i-1}}{2} \right| \leq \frac{1}{2} |\alpha_i - \alpha_{i-1}|.$$

Další užitečností nám pak bude fakt, že $\frac{1}{2}$ můžeme zapsat jako součet teleskopické řady

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^2 - \alpha_{i-1}^2).$$

Nyní můžeme odhadovat

$$\begin{aligned}
\left|\sigma(f,D) - \frac{1}{2}\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}(\tau_i(\alpha_i - \alpha_{i-1})) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^2 - \alpha_{i-1}^2)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n}(\tau_i(\alpha_i - \alpha_{i-1}) - \frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i + \alpha_{i-1}))\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \alpha_{i-1}) \cdot \left(\tau_i - \frac{\alpha_i + \alpha_{i-1}}{2}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - \alpha_{i-1}| \cdot \left|\tau_i - \frac{\alpha_i + \alpha_{i-1}}{2}\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}|\alpha_i - \alpha_{i-1}|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{n}}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Jelikož naše ε bylo libovolné, víme, že toto platí pro každé $\varepsilon > 0$, a tudíž $f(x) = x$ je kurzweilovsky integrovatelná na intervalu (0,1) a $(\mathscr{K})\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$. Důkaz byl převzat z [[10], str. 16].

Příklad 3.2. Uvažujme na intervalu (0,1) obrácenou Dirichletovu funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$(\mathscr{R})$ Riemannův integrál

Buď $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ libovolné dělení intervalu (0,1). Zřejmě $\inf\{f(x); x \in (x_{i-1}, x_i)\} = 0$ a $\sup\{f(x); x \in (x_{i-1}, x_i)\} = 1$ pro každé $i = 1,2,\ldots,n$. Pro dolní součet s dostáváme

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$$

a pro horní součet S

$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1$$

pro libovolné dělení D intervalu (0,1). Hodnota dolního Riemannova integrálu $(\mathscr{R})\int_{\underline{0}}^{1} f(x) = 0$ a horního Riemannova integrálu $(\mathscr{R})\int_0^{\overline{1}} f(x) = 1$ se liší, tudíž Riemannův integrál $(\mathscr{R})\int_0^1 f(x)dx$ neexistuje.

($\mathscr{L}$) Lebesgueův integrál

- (Jednoduché funkce a Lebesgueova míra)
  Využijme faktu, že naše obrácená Dirichletova funkce je jednoduchá funkce, tedy

  $$s(x) = \alpha_1 \chi_{(0,1)\setminus\mathbb{Q}}(x) + \alpha_2 \chi_{(0,1)\cap\mathbb{Q}}(x),$$

  kde $\alpha_1 = 1$ a $\alpha_2 = 0$. Chceme-li určit její integrál, máme

  $$\int_0^1 s(x) d\lambda = 1 \cdot \lambda\left((0,1) \setminus \mathbb{Q}\right) + 0 \cdot \lambda\left((0,1) \cap \mathbb{Q}\right). \tag{3.6}$$

  Racionální čísla tvoří spočetnou množinu, tudíž je její Lebesgueova míra $\lambda((0,1) \cap \mathbb{Q})$ nulová. Toto tvrzení si dokažme:

  Množina racionálních čísel $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ je spočetná, tedy můžeme její prvky uspořádat do posloupnosti a očíslovat $\{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$. Nyní chceme ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ můžeme $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ pokrýt posloupností otevřených intervalů tak, aby součet délek těchto intervalů byl menší než ε.

  Nechť $\varepsilon > 0$.

  Pro každé $q_i \in (0,1) \cap \mathbb{Q}, i \in \mathbb{N}$, zvolíme otevřený interval

  $$\left(q_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, q_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right).$$

  Pak máme

  $$(0,1) \cap \mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(q_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, q_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right).$$

  Součet délek těchto intervalů je

  $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

  Geometrická řada

  $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

  konverguje a její součet je

  $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1,$$

  tedy dostáváme, že

  $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon.$$

Lebesgueovu míru sjednocení našich intervalů můžeme shora odhadnout součtem měr těchto intervalů, tedy dle Věty 2.3 platí

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(q_i-\frac{\varepsilon}{2^{i+1}},q_i+\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right)\right)\leq\varepsilon.$$

Ukázali jsme, že pro každé $\varepsilon>0$ existuje pokrytí množiny $(0,1)\cap\mathbb{Q}$ otevřenými intervaly, jejichž celková délka je menší než ε. Množina racionálních čísel $(0,1)\cap\mathbb{Q}$ má tedy Lebesgueovu míru $\lambda((0,1)\cap\mathbb{Q})=0$.

Ze σ-aditivity Lebesgueovy míry víme, že Lebesgueova míra množiny iracionálních čísel $\lambda\left((0,1)\setminus\mathbb{Q}\right)$ musí být tím pádem rovna jedné. Tedy

$$\lambda\left((0,1)\setminus\mathbb{Q}\right)=1$$

a

$$\lambda\left((0,1)\cap\mathbb{Q}\right)=0.$$

Dosazením do (3.6) získáme

$$\int_0^1 s(x)d\lambda=1\cdot 1+0\cdot 0=1.$$

Lebesgueův integrál funkce $f(x)$ na intervalu $(0,1)$ je

$$(\mathscr{L})\int_0^1 f(x)d\lambda=\int_0^1 s(x)d\lambda=1.$$

- (Schodovité funkce)
  Chceme-li spočítat Lebesgueův integrál pomocí schodovitých funkcí, v tomto případě si vystačíme pouze s jednou, která bude na intervalu $(0,1)$ rovna $\phi_1(x)=1$. Její reprezentace je zřejmě $\phi_1(x)=(0,1;1)$.

  To pro nás bude dostačující, poněvadž $\phi_1(x)$ je skoro všude rovna řadě $\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)$, kde

  $$\phi_n(x)=0\quad\text{pro}\ \ n\geq 2.$$

  A jelikož $\phi_1(x)=1$ na $(0,1)$ a $f(x)=1$ v $(0,1)\setminus\mathbb{Q}$, což je skoro všude na $(0,1)$, pak i $\phi_1(x)=f(x)$ skoro všude.

  Máme

  $$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\phi_n(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\phi_1(x)dx,$$

  a tedy

  $$(\mathscr{L})\int_0^1\phi_1(x)dx=1\cdot(1-0)=1.$$

- (Absolutně spojitá funkce)
  Využijeme-li nyní definice integrálu pomocí absolutně spojité funkce, primitivní funkcí k funkci $f(x)$ je

$$F(x) = x, \qquad x \in (0,1).$$

Ověřme, že je funkce $F(x)$ na intervalu $(0,1)$ absolutně spojitá.
Z Definice 2.18 dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta \implies \sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k|.$$

Pokud

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta,$$

pak

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta.$$

Položíme-li $\delta = \varepsilon$, dostáváme $\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$.
Funkce $F(x)$ je absolutně spojitá na intervalu $(0,1)$. Jelikož $F(x) = x$ a $F'(x) = 1$ pro všechna $x \in (0,1)$, derivace $F(x)$ existuje a $F'(x) = 1$ všude na $(0,1)$. Funkce $f(x) = 1$ pro $(0,1) \setminus \mathbb{Q}$, což je skoro všude na intervalu $(0,1)$. Tedy můžeme říct, že $f(x) = F'(x)$ skoro všude.

Lebesgueův integrál funkce $f(x)$ na intervalu $(0,1)$ je dle Definice 2.19 roven

$$(\mathscr{L}) \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = 1 - 0 = 1.$$

$(\mathscr{K})$ Kurzweilův integrál

Ukážeme, že funkce $f(x)$ je integrovatelná v Kurzweilově smyslu a její integrál $(\mathscr{K}) \int_0^1 f(x)dx = 1$.

K pevně zvolenému $\varepsilon > 0$ musíme najít takový kalibr $\delta(x) : (0,1) \to (0,\infty)$, aby pro všechna $\delta-$jemná dělení D intervalu $(0,1)$ s význačnými body τ_i platilo

$$|\sigma(f,D) - 1| < \varepsilon.$$

Jelikož je množina racionálních čísel $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ spočetná, můžeme její prvky uspořádat do posloupnosti a očíslovat $\{q_1,q_2,q_3...\}$. K pevně zvolenému $\varepsilon > 0$ definujme kalibr

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} & x = q_i \in (0,1) \cap \mathbb{Q}, \\ 1 & x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Takto definovaná funkce je jistě kalibr, neboť pro $x \in (0,1)$ nabývá pouze kladných hodnot. Uvažujme nyní libovolné $\delta-$jemné dělení $D = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \tau_n, \alpha_n\}$ intervalu $(0,1)$ a označme I podmnožinu $\{1, \dots, n\}$ takovou, že

$$\left.\begin{aligned} \tau_i \in (0,1) \cap \mathbb{Q} \text{ pro } i \in I \\ \tau_i \in (0,1) \setminus \mathbb{Q} \text{ pro } i \in \{1, \dots, n\} \setminus I \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} f(\tau_i) = 0 \text{ pro } i \in I, \\ f(\tau_i) = 1 \text{ pro } i \in \{1, \dots, n\} \setminus I. \end{aligned}$$

Máme-li součet

$$\sigma(f,D) = \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(\alpha_i - \alpha_{i-1}),$$

lze ho zapsat následujícím způsobem

$$\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(\alpha_i - \alpha_{i-1}) = \sum_{i \in I} f(\tau_i)(\alpha_i - \alpha_{i-1}) + \sum_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus I} f(\tau_i)(\alpha_i - \alpha_{i-1}).$$

Dále pro $i \in I$ označme k_i pořadí i-tého racionálního význačného bodu τ_i v posloupnosti $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots\}$, která vznikla seřazením prvků množiny racionálních čísel $(0,1) \cap \mathbb{Q}$.
Nyní můžeme odhadovat

$$\begin{aligned} |\sigma(f,D) - 1| &= \left| \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(\alpha_i - \alpha_{i-1}) - 1 \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(\alpha_i - \alpha_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |(f(\tau_i) - 1) \cdot (\alpha_i - \alpha_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n} (1 - f(\tau_i)) \cdot (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \\ &= \sum_{i \in I} (1 - f(\tau_i)) \cdot (\alpha_i - \alpha_{i-1}) + \sum_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus I} (1 - f(\tau_i)) \cdot (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \\ &= \sum_{i \in I} 1 \cdot (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \\ &\overset{3}{\leq} \sum_{i \in I} 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2^{k_i+1}} \\ &= \sum_{i \in I} \frac{\varepsilon}{2^{k_i}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jelikož naše ε bylo libovolné, víme, že toto platí pro každé $\varepsilon > 0$, a tudíž je $f(x)$ kurzweilovsky integrovatelná na intervalu $(0,1)$ a $(\mathscr{K}) \int_0^1 f(x) dx = 1.$
Důkaz byl částečně převzat z [10], str. 18-19]

[3] Jelikož význačné body τ_i mohly být i krajní body intervalu (α_{i-1}, α_i), každý bod se v této posloupnosti může opakovat nanejvýš dvakrát.

Jak jsme nastínili v úvodu této kapitoly, Kurzweilův integrál dokáže integrovat mnohem širší třídu funkcí než Lebesgueův integrál.

To nyní ilustrujeme na následujícím příkladu. Pro zjednodušení budeme pracovat s definicí Lebesgueova integrálu pomocí absolutně spojité funkce a abychom ukázali, že funkce f má Kurzweilův integrál, vyslovíme následující větu, která poukazuje na vztah Newtonova a Kurzweilova integrálu. Uvidíme tak, že v příkladu pro nás bude dostačující, bude-li existovat Newtonův integrál, který pohodlně spočítáme dle vztahu (1.1). Newtonův integrál budeme značit $(\mathscr{N})\int_a^b f(x)dx$.

Věta 3.3. *(Vztah Newtonova a Kurzweilova integrálu, [[6],str. 71])*
Buď $-\infty < a < b < \infty$ a funkce $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ má Newtonův integrál $(\mathscr{N})\int_a^b f(x)dx$. Potom existuje také Kurzweilův integrál $(\mathscr{K})\int_a^b f(x)dx$ a platí rovnost

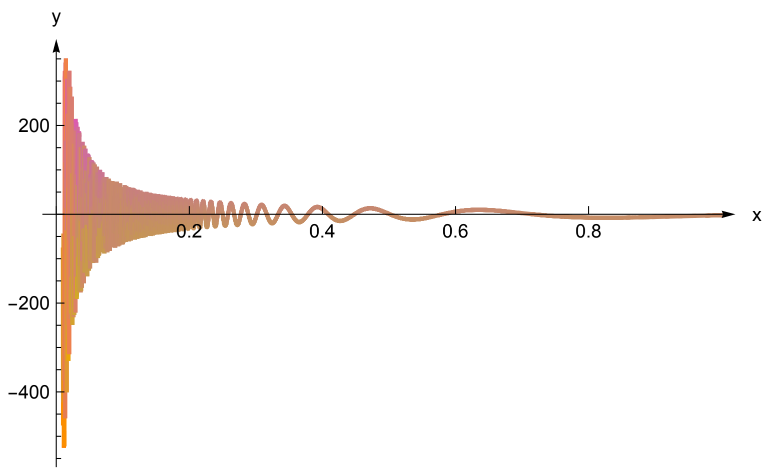
$$(\mathscr{K})\int_a^b f(x)dx = (\mathscr{N})\int_a^b f(x)dx.$$

Příklad 3.3. Uvažujme funkci f na intervalu $[0,1]$ definovanou předpisem

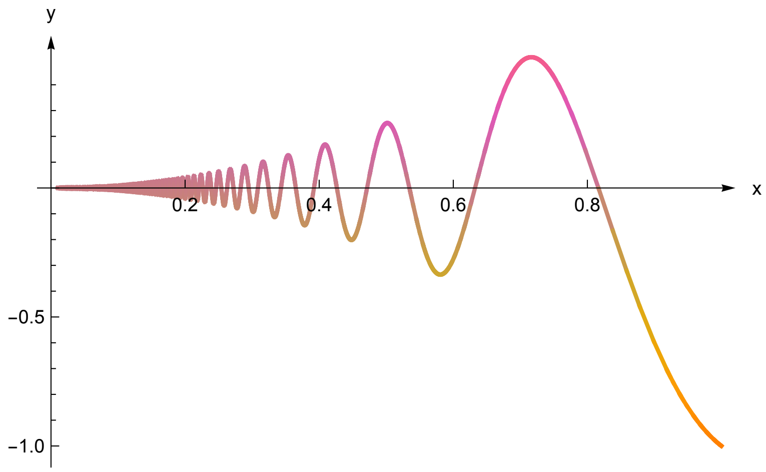
$$f(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2\pi}{x}\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{pro } x \in (0,1], \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Primitivní funkcí k této funkci je

$$F(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{pro } x \in (0,1], \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$



Obrázek 3.5: Funkce $f(x) = 2x\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2\pi}{x}\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$



Obrázek 3.6: Primitivní funkce $F(x) = x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$

Tvrdíme, že funkce F nemá na intervalu [0,1] konečnou variaci, tudíž dle Věty 2.21 není na intervalu [0,1] absolutně spojitá, a proto f nemá v [0,1] Lebesgueův integrál.

Dokažme tedy, že funkce F nemá na intervalu [0,1] konečnou variaci. Uvažujme posloupnost $x_i = \frac{1}{\sqrt{i}}$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$. Pak

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |F(x_{i+1}) - F(x_i)| &= \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{i+1} \cos(i+1)\pi - \frac{1}{i} \cos i\pi \right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i+1} + \frac{1}{i} \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + 1 \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) \\
&= 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{n+1} \\
&= 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - 1 + \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Jelikož v naší rovnici figuruje harmonická řada, vidíme, že pro $n \to \infty$ řada diverguje. Tedy dostáváme, že F nemá konečnou variaci na intervalu [0,1], dle Věty 2.21 není absolutně spojitá, a tedy f nemá v [0,1] Lebesgueův integrál $(\mathscr{L}) \int_0^1 f(x)dx$.

Z Věty 3.3 víme, že existuje-li Newtonův integrál, pak existuje Kurzweilův integrál a jejich hodnota se rovná. Jelikož existuje primitivní funkce F k funkci f na [0,1], funkce f má Newtonův integrál, a tedy i

$$(\mathscr{K}) \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = -1.$$

Pro více příkladů, které nejsou lebesgueovsky integrovatelné, avšak jsou integrovatelné v Kurzweilově smyslu, doporučujeme nahlédnout do [11]. Předešlý příklad byl převzat ze stejného zdroje.

Zrekapitulujme nyní postřehy z předešlých příkladů. V příkladu 3.1 jsme ukázali, že lineární funkce $f(x) = x$ je na intervalu (0,1) integrovatelná jak v Riemannově, Lebesgueově, tak Kurzweilově smyslu. Pro lineární funkci samozřejmě existoval Riemannův integrál, neboť funkce f je na intervalu (0,1) omezená. Existoval-li Riemannův integrál, pak existoval i Lebesgueův integrál. Porovnáme-li nyní náročnost výpočtu dle různých, avšak ekvivalentních, definic pro Lebesgueův integrál, všimneme si, že výpočet integrálu dle definice, která využívá jednoduchých funkcí a Lebesgueovy míry a definice, která využívá řady schodovitých funkcí, byl poněkud pracnější než například výpočet užitím definice, která pracuje s absolutně spojitou funkcí.

V příkladu 3.2 jsme ukázali, že pro obrácenou Dirichletovu funkci na intervalu (0,1) neexistoval Riemannův integrál, ale existoval Lebesgueův integrál a stejně tak Kurzweilův integrál. Srovnáme-li opět náročnost výpočtu dle ekvivalentních definic Lebesgueova integrálu, stojí za povšimnutí, že obrácená Dirichletova funkce je vlastně jednoduchá funkce. Z tohoto důvodu se jako nejsnazší jeví využít definice integrálu s jednoduchou funkcí a Lebesgueovou mírou. Schodovitou funkci jsme taktéž nalezli vcelku snadno. O trochu náročnější je pak výpočet užitím definice, která pracuje s absolutně spojitou funkcí.

Vidíme, že pro každý příklad je třeba dobře rozmyslet, kterou definici Lebesgueova integrálu bychom zvolili, aby byl pro nás výpočet co nejsnazší. Upozorněme však na fakt, že definice, která pracuje s jednoduchými funkcemi a s Lebesgueovou mírou, nám umožňuje pracovat i s abstraktními množinami na rozdíl od zbylých definic, které v definici integrálu připouští jen množiny, které jsou nutně intervaly. Zajisté si však čtenář všiml, že Lebesgueova míra svým způsobem figuruje v každé z těchto definic, ačkoliv pojem Lebesgueovy míry explicitně nepoužíváme.

Ohlédneme-li se za Kurzweilovým integrálem, určení jeho hodnoty přímo z definice bylo v obou příkladech obtížné. Ve skutečnosti musíme hodnotu integrálu nejprve odhadnout (nebo pomocí jiné definice, např. Newtonovy, nalézt), a poté k danému ε sestrojit vhodný kalibr δ.

Na posledním příkladu 3.3 jsme demonstrovali, že Kurzweilův integrál dokáže integrovat mnohem širší třídu funkcí než Lebesgueův integrál.

To nám mimo jiné říká i následující věta, která poukazuje právě na absolutní konvergenci Lebesgueova integrálu. Říká, že třída lebesgueovsky integrovatelných funkcí je podtřídou kurzweilovsky integrovatelných funkcí a to, o co se liší, jsou pouze neabsolutně integrovatelné funkce v Kurzweilově smyslu.

Věta 3.4. *(Vztah Lebesgueova a Kurzweilova integrálu,[[6],str. 296])*
Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ má v intervalu [a,b] Lebesgueův integrál, právě když je absolutně integrovatelná v Kurzweilově smyslu (tj. $|f|$ i f jsou integrovatelné). Potom platí

$$(\mathscr{L}) \int_a^b f(x)dx = (\mathscr{K}) \int_a^b f(x)dx.$$

Závěr

V práci jsme se věnovali různým způsobům zavedení Lebesgueova integrálu v oboru reálných čísel, přičemž byla zdůrazněna jejich vzájemná ekvivalence a praktické aplikace.

První kapitola byla věnována historickému kontextu, který vedl k vývoji Lebesgueova integrálu.

V druhé kapitole byl čtenář seznámen s Lebesgueovým původním přístupem k integraci a podrobně dalšími třemi různými definicemi, které vedly k zavedení tohoto integrálu. Součástí této kapitoly byl důkaz ekvivalence mezi moderním pojetím Lebesgueova integrálu, který ve své definici využívá jednoduchých funkcí a Lebesgueovy míry a definicí, která pracuje s absolutně spojitými funkcemi.

V třetí kapitole jsme se zaměřili na dva konkrétní příklady, které ilustrují všechny prezentované definice a porovnávají je s Riemannovým a Kurzweilovým integrálem. Tím jsme demonstrovali, jak se jednotlivé přístupy liší v různých kontextech a jaké jsou jejich výhody a nevýhody. Taktéž jsme ukázali, že všechny uvedené definice Lebesgueova integrálu vedou ke stejnému výsledku, což podtrhuje jejich ekvivalenci. Na posledním příkladu jsme demonstrovali, že i Lebesgueův integrál trpí jistými nedostatky a že existují funkce, které tento typ integrálu nedokáže integrovat.

Literatura

[1] SCHWABIK Š.; ŠARMANOVÁ P. *Malý průvodce historií integrálu. Dějiny matematiky.* Praha: Prometheus, 1996.

[2] LUKEŠ J.; MALÝ J. *Míra a integrál.* 2.vyd. *Učební texty Univerzity Karlovy v Praze.* Praha: Karolinum, 2002.

[3] NETUKA I. *Integrální počet: vícerozměrný Lebesgueův integrál.* Praha: Matfyzpress, 2016.

[4] BRESSOUD D. M. *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration.* The United States of America: Cambridge University Press, 2008.

[5] NELSON G. S. *A User–Friendly Introduction to Lebesgue Measure and Integration.* The United States of America: American Mathematical Society, 2015.

[6] SCHWABIK Š. *Integrace v* $\mathbb{R}$*: (Kurzweilova teorie).* Praha: Karolinum, 1999.

[7] EUKLEIDÉS. *Eukleidovy Základy [Elementa].* Praha: Jednota českých mathematiků a fysiků, 1907.

[8] ASPLUND E.; BUNGART L. *A First Course in Integration.* The United States of America: Holt, Rinehart and Winston, Inc, 1996.

[9] PICK L.; HENCL S.; SPURNÝ J.; ZELENÝ M. *Matematická analýza.* Verze 2024-03-21. Dostupné online: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza-pro-studenty.pdf`.

[10] DIJK E. *The Henstock-Kurzweil Integral.* Groningen: Rijksuniversiteit Groningen, 2014. Dostupné online: `https://fse.studenttheses.ub.rug.nl/11862/1/The_Henstock-Kurzweil_integral.pdf`.

[11] TURNER J. L. *An Analysis of the Henstock-Kurzweil Integral.* Muncie: Ball State University, 2015. Dostupné online: `https://cardinalscholar.bsu.edu/server/api/core/bitstreams/370ebbd1-867f-4ac7-9ab0-352718710ccf/content`.

Seznam obrázků