Posudek oponenta na bakalářskou práci

Lebesgueův integrál

Sarah Böhm

Předložená práce je věnována zavedení Lebesgueova integrálu a jeho porovnání s integrálem Riemannovým a Kurzweilovým.

V první kapitole je stručně nastíněna základní linie historického vývoje (Eudoxova exhaustivní metoda, Riemannův integrál, Lebesgueův integrál).

Druhá kapitola je věnována zavedení Lebesgueovy míry a integrálu. V této kapitole se (s výjimkou důkazu korektnosti definice 2.17 a důkazu věty 2.25) nevyskytují důkazy, jedná se o stručný přehled definic (vnější míra, měřitelné množiny, Leb. míra, σ-algebra, měřitelné funkce, jednoduché funkce a její integrál, integrál nezáporné a obecné měřitelné funkce; schodovitá funkce a její integrál; absolutně spojitá funkce) a základních vět, které jsou podstatné pro vybudování Lebesgueova integrálu. Míra je zavedena v $\mathbb{R}^n$, Lebesgueův integrál pak pro reálné funkce jedné reálné proměnné.

Ve třetí kapitole je uvedena definice Kurzweilova integrálu (funkce jedné reálné proměnné). Těžištěm je porovnání Riemannova, Lebesgueova a Kurzweilova integrálu na příkladech. Autorka zvolila tři funkce (1. $f(x) = x$ na intervalu $(0, 1)$, 2. $f(x) = 0$ pro všechna $x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ a $f(x) = 1$ pro všechna ostatní $x \in (0, 1)$, 3. $f(x) = 2x \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2\pi}{x} \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$ pro všechna $x \in (0, 1\rangle$, $f(0) = 0$).

Po formální stránce je práce v pořádku, je vysázena v TEXu (s občasnými drobnými prohřešky proti typografickým pravidlům), opatřena samostatně vytvořenými obrázky, které jsou názorné a dobře doplňují text. Vše je řádně citováno, autorka pracuje s česky psanou i zahraniční literaturou.

V historickém úvodu (kap. 1) se vyskytuje poměrně dost matematických nepřesností a nepěkných formulací. Např. místo „Newtonova fundamentálního vztahu“ je uvedena definice Newtonova integrálu; na Eudoxovu exhaustivní metodu se nijak nezapomnělo, navíc neumožňovala jen *poměrně přesné* výpočty obsahů a objemů; problematická je ilustrace Eudoxova důkazu (není mi jasné, odkud lze takový postup čerpat; očekávám, že existenci specifikovaného mnohoúhelníku Eudoxos považoval za zřejmou; není šikovné označovat velkým písmenem B číslo, nikoli útvar); *pro antickou matematiku totiž bylo typické popírání nekonečně malých veličin*; není moc srozumitelné, že *Riemann tento předpoklad* (spojitosti integrované funkce) *opustil a nikterak ho nespecifikoval*; obr. 2.19 neexistuje, má být 1.2; ... Jinak je samotná historická linie (při zvolené stručnosti) celkem v pořádku.

V kap. 2.1 za definicí 2.1 bych ocenil pečlivější zpracování, např.: použít kvantifikátory (a ve správném pořadí) u specifikace omezené funkce; specifikovat, odkud je j, navíc se množina, kterou j probíhá, mění; specifikovat typ konvergence funkcí ϑ a ζ k funkci f; oba horní indexy v ... $< \max(l_j^1 - l_{j-1}^2)$ mají být 1; myslím, že v poslední centrované formuli této kapitoly došlo k záměně limity a integrálu, jsou splněny předpoklady pro takovou operaci?

Místy se vyskytují poněkud nešťastné formulace, např.:

- V kap. 2.2.1 se diskutuje o nutnosti použít limitní proces v případě předpokladu aditivity míry. Obávám se, že to σ-aditivita neodstraní, neboť sama v sobě už obsahuje limitní proces (součet nekonečné číselné řady).
- V kap. 2.2.2: *Existence lebesgueovsky neměřitelné množiny je nekonstruktivní...* (patrně jde o důkaz existence)

- Některé definice jsou formulovány jako věty (def. 2.3, def. 2.19).
- V kap. 2.4 se hovoří o *monotónně rostoucích* funkcích.
- ...

Pozitivně hodnotím dobré didaktické zpracování. Zavedení Lebesgueova integrálu je relativně stručné (za cenu absence důkazů) a přehledné, kromě definic jsou vybrána taková tvrzení, která dobře dotvářejí obraz o celé konstrukci. Oceňuji, že před větším úsekem je shrnuto, co se bude dít dále, celkově lze výkladovou linii dobře sledovat. Jen kap. 2.4 (zavedení Leb. integrálu pomocí absolutně spojitých funkcí) by bylo dle mého názoru možno uspořádat přehledněji.

Srovnání integrálů v kapitole 3 by bylo možno pojmout naprosto obecně pomocí McShaneova integrálu. Rozsah práce by tím však neúměrně vzrostl. Porovnání integrálů (případně variant jejich definic) je tedy dobrou volbou. Zvolené příklady považuji za vhodné: předně je lze skutečně spočítat podle definice, také však dobře ilustrují rozdíly mezi jednotlivými integrály, které jsou diskutovány v závěru.

Vzhledem k výše uvedenému doporučuji, aby byla tato práce uznána jako bakalářská, a doporučuji ji k obhajobě. Navrhuji hodnocení ***velmi dobře***.

Praha 5. září 2024

Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky