Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

RIGORÓZNÍ PRÁCE

Postupy maturantů při řešení matematických slovních úloh řešitelných soustavou rovnic

Students' procedures for mathematical word problems solvable by systems of equations during the school leaving examination

Mgr. Jiří Doubrava

Vedoucí práce: PhDr. Martin Chvál, Ph.D.

Studijní program: Učitelství matematiky pro 2. stupeň základní školy a střední školy

Studijní obor: N M 20 (0114TA300095)

2024

Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Postupy maturantů při řešení matematických slovních úloh řešitelných soustavou rovnic

Students' procedures for mathematical word problems solvable by systems of equations during the school leaving examination

Bc. Jiří Doubrava

Vedoucí práce: PhDr. Martin Chvál, Ph.D.

Studijní program: Učitelství matematiky pro 2. stupeň základní školy a střední školy

Studijní obor: N M 20 (0114TA300095)

2023

Odevzdáním této diplomové práce na téma Postupy maturantů při řešení matematických slovních úloh řešitelných soustavou rovnic potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze 3. prosince 2023

Rád bych poděkoval na tomto místě PhDr. Martinu Chválovi, Ph.D., za jeho ochotu při konzultacích, za nápomocné připomínky a iniciativní nápady, které mi průběžně po dobu psaní této diplomové práce dával.

Dále děkuji RNDr. Michaele Kleňhové, tehdejší ředitelce Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání, za svolení k využití vybraných výřezů žákovských řešení slovních úloh ze společné části maturitní zkoušky pro účely této práce.

Děkuji svým nejbližším za neutichající podporu během studia.

ABSTRAKT

Tato diplomová práce se zabývá způsoby řešení slovních úloh řešitelných soustavami rovnic. Cílem práce je zjistit a doložit, které strategie řešení používají maturanti při řešení tohoto typu slovních úloh.

Klíčovou pro zpracování tématu práce se stala databáze žákovských výřezů pěti slovních úloh ze společné části maturitní zkoušky, a to z jarních termínů let 2016 až 2020.

Teoretická část se věnuje analýze tří učebnic pro žáky středních škol v Česku, a to z hlediska zařazení slovních úloh řešitelných užitím soustav rovnic. Tato část dále obsahuje seznam žákovských strategií řešení slovních úloh. V neposlední řadě v této části čtenář najde popis testu v rámci státní maturitní zkoušky z matematiky.

Empirická část se soustřeďuje na rozbor pěti zvolených úloh; tato část obsahuje několik možných postupů řešení sestavených během analýzy a priori, dále pomocí statistických výstupů dokládá psychometrické vlastnosti zvolených úloh. V této části jsou zařazeny samotné výřezy žákovských řešení, které jsou rozděleny do několika skupin na základě zvolených řešitelských strategií, a dokládají tak možné postupy maturantů při řešení daného typu úloh.

V závěru práce jsou shrnuta hlavní zjištění. Ukázalo se, že některé úlohy vykazovaly vysokou vynechanost, což může ukazovat na skutečnost, že pro mnoho žáků jsou slovní úlohy obtížné.

KLÍČOVÁ SLOVA

matematická slovní úloha, soustavy rovnic, řešitelské postupy

ABSTRACT

This diploma thesis investigates different approaches to solving word problems with systems of equations. The thesis aims to discover which strategies are used by senior students when solving these word problems and documents the processes involved.

The research presented in the thesis is based on an in-depth analysis of the database of student cut-outs from five word problems of the common part of the Maturita exam, specifically from the spring terms between the years 2016 and 2020.

The theoretical part involves an analysis of three textbooks for high school students in the Czech Republic which incorporate the named phenomena. Furthermore, this part includes a list of student strategies for solving word problems, moreover, the reader is provided with a description of the state Maturita exam in Mathematics.

The empirical part contains an overview of several possible procedures prepared during an a priori analysis. It also presents psychometric features of the chosen word problems by incorporating statistical outcomes. In addition, cut-outs of students' answers are divided into various groups based on the chosen solving strategies, thus demonstrating the possible techniques used by the students when solving this type of tasks.

The principal conclusions demonstrate immense omissions, supporting the theory of word problems being arduous for students.

KEYWORDS

mathematical word problem, system of equations, solving procedures

Obsah

Úvod

Motivací pro výběr tématu mé práce je skutečnost, že celá řada slovních úloh může být řešena několika navzájem odlišnými způsoby. Předkládaná práce se zabývá problémem, jak velká škála strategií byla použita maturanty při řešení konkrétních slovních úloh zařazených do vybraných didaktických testů společné části maturitní zkoušky.

Slovní úlohy jsou široce diskutovaným tématem v problematice vyučování matematice na různých stupních vzdělávání. Se slovními úlohami se žáci setkávají napříč kurikulem základní, ale také střední školy. Problematice maturanty používaných způsobů řešení slovních úloh by měla být odbornou veřejností věnována pozornost proto, že mohou poukázat na problematiku používání formalismů (tedy takových znalostí, které žáci nemají opřený o pojmotvorný proces) při předchozí výuce konkrétních typů slovních úloh.

Hlavním výzkumným problémem mé diplomové práce je odpověď na otázku „Které postupy řešení používají žáci maturitních ročníků k řešení slovních úloh?“. V návaznosti na tento formulovaný problém jsem si položil následující výzkumné otázky:

O1: Objevovalo se u některé z úloh použití povrchových strategií řešení výrazně častěji než u jiných?

O2: Byl v průběhu řešení některé slovní úlohy žáky použit vizuální model (např. obrázková legenda nebo nějaké schéma)?

Cíle:

Hlavním cílem práce je zjistit, jaké strategie řešení používají maturanti pro řešení slovních úloh. Tento hlavní cíl lze rozčlenit na dílčí cíle:

- **C1**: Na základě studia odborné literatury zpracovat rešerši na téma slovních úloh a věnovat se zejména zdrojům vztahujícím se k žákovským strategiím řešení.
- **C2**: Analyzovat tři vybrané v současnosti používané středoškolské učebnice z hlediska zastoupení vybraného typu úloh a sledovat jak četnost úloh neřešených, tak úloh vzorově řešených.
- **C3**: Zmapovat a zpracovat nejčastější strategie používané žáky při řešení slovních úloh zaměřených na rovnice a jejich soustavy v didaktických testech společné části maturitní zkoušky.

Metody:

Z pohledu metodologie budou použity metody kvalitativní i kvantitativní, v závislosti na povaze příslušné řešené otázky a konkrétního cíle.

Pro dosažení cíle **C1** bude v teoretické části práce zpracována rešerše a na základě informací získaných ze studia odborné literatury bude zpracována kapitola věnovaná slovním úlohám. V teoretické části bude také sestavena typologie úloh objevujících se v učebnicích a v návaznosti na cíl **C2** bude provedena kvalitativní analýza vybraných učebnic, v závěru této podkapitoly bude kvantitativně určena četnost výskytu jednotlivých typů úloh.

V empirické části bude dosaženo cíle **C3** na základě rozboru a posouzení použitých strategií řešení slovních úloh, a to jednak na základě analýzy jednotlivých výřezů ze záznamových archů, kam žáci maturitních ročníků zapisovali svá řešení, jednak v návaznosti na autorskou analýzu a priori, která je provedena u každé z pěti úloh zvlášť. Tyto analýzy budou doplněny psychometrickými vlastnostmi daných úloh na základě reálných výsledků celého testovaného vzorku žáků.

1 Teoretická část

Dílčím cílem teoretické části práce je zmapovat, které žákovské strategie řešení slovních úloh jsou diskutovány ve vybraných zdrojích. V návaznosti na tento výzkum empirická část této práce sleduje použití jednotlivých strategií v didaktických testech maturitní zkoušky.

Teoretická část práce je rozdělena na čtyři podkapitoly. První z nich je věnována vybraným odborným zdrojům, které se tématu slovních úloh věnují detailně. V následující podkapitole jsou zmapovány tři učebnice, dvě tištěné a jedna internetová, a to z pohledu počtu zastoupení různých typů slovních úloh řešitelných rovnicemi. Třetí podkapitola je věnována rozboru různých strategií řešení slovních úloh na konkrétních příkladech, přičemž jsou využity popisy dvou pohledů na proces řešení; každý z nich vychází z jiného ze zdrojů analyzovaných v první podkapitole. Na tuto podkapitolu teoretické části je také navázáno při rozboru jednotlivých výřezů v části empirické. V poslední podkapitole teoretické části práce jsou popsány verze didaktických testů z matematiky zadávaných v rámci společné části maturitní zkoušky, a to jak jejich současné podoby, tak i minulé od roku 2016. Z několika předchozích zadání těchto testů bylo vybráno pět úloh pro kvalitativní výzkum provedený v empirické části.

1.1 Přehled literatury zabývající se slovními úlohami

Následující podkapitola je rozdělena do několika oddílů, a to podle hlavního tématu vztahujícího se ke slovním úlohám, kterými se analyzované zdroje zabývají.

1.1.1 Parametry slovní úlohy ovlivňující její obtížnost

Vondrová a kol. (2020) popisuje výzkum, který proběhl na Pedagogické fakultě UK mezi roky 2015 a 2018. Tento výzkum byl zaměřený na parametry, které ovlivňují negativně obtížnost slovních úloh. (Vondrová et al., 2020, str. 7)

Detail popsaného výzkumu je možné najít v další publikaci od autorského kolektivu. Popisu aspektů výzkumu předchází poznámka o tom, že slovní úlohy nejsou mezi žáky dlouhodobě tolik oblíbené – mezi uvedenými důvody jsou řazeny kognitivní nároky, které souvisí jednak se zpracováním významů v jednom kódovacím systému[1], jednak s následným vytvořením tzv. matematického modelu[2]. Mezi další příčiny nepopularity slovních úloh u žáků autoři řadí ten fakt, že pro řešení slovní úlohy neexistuje, až na výjimky (např. úlohy na přímou úměrnost), předem daný algoritmus řešení. (Vondrová et al., 2019, str. 9)

K samotnému výzkumu pak autoři uvádějí, že konkrétním cílem výzkumu bylo zjistit, které prvky (a jakým způsobem) participují na míře obtížnosti slovních úloh. Výzkum pracoval s tzv. parametry úlohy, tedy charakteristikami vztahujícími se k příslušné úloze (charakteristikami jazykovými, matematickými, kontextovými), a samotnými vytvořenými úlohami. Úlohy byly zadávány výkonnostně srovnatelným žákům v různých ročnících základní školy. (Vondrová et al., 2019, str. 10)

Autoři uvádějí výčet charakteristik, které byly v souvislosti se zadávanými slovními úlohami sledovány. Vzhledem k vybraným zadáním úloh do empirické části jsou uvedeny následující charakteristiky: zkušenostní kontext (tj. obeznámenost řešitele s kontextem úlohy), verbální a neverbální složka zadání (např. (ne)přítomnost[3] obrázku), pořadí informací v zadání. (Vondrová et al., 2019, str. 10)

Jak uvádí Vondrová a kol. (2020), žákům činí řešení slovních úloh problémy, přičemž základní obtíže při řešení lze vyjádřit v následujících třech bodech:

- *„žák nerozumí kontextu úlohy nebo nevidí souvislost mezi kontextem a řešením slovní úlohy;“*
- *„žák z různých důvodů (např. délka textu, použitý jazyk, velký počet zadávaných informací, obtíže číst text s porozuměním) neuspěje při získávání informací o struktuře slovní úlohy ze zadání;“*
- *„žák získá potřebné informace ze zadání, ale neumí najít vhodný matematický model, nebo model najde, ale neumí ho vyřešit.“*

(Vondrová et al., 2020, str. 23)

[1] Žák potřebuje *„verbálně popsat situaci a činnosti prostředky přirozeného jazyka, spoléhat se při tom na mimojazykovou zkušenost a na intuitivní znalost vztahů mezi pojmovými obsahy lexikálních jednotek“.* (Vondrová et al., 2019, str. 9)

[2] Matematický model je představen v podkapitole 1.3.

[3] U žádného z pěti zadání analyzovaných úloh v empirické části práce nebyl zařazen obrázek.

1.1.2 Definice slovní úlohy

Z citovaných zdrojů můžeme zjistit, že jednotliví autoři definují slovní úlohu rozdílně. Jak uvádí Vondrová a kol. (2020), v odborné literatuře nepanuje jednotný pohled na to, co se slovní úlohou rozumí.

Vondrová a kol. (2019) uvádí několik možných definic. Např. z hlediska psychologického jde o *„specifický typ problému, přičemž problém představuje situaci, která není řešitelná obvyklým způsobem, a její zvládnutí tedy vyžaduje nalezení nového řešení“*. (Vondrová et al., 2019, str. 15, cit. podle Sternberga, 2003)

V návaznosti na definici slovní úlohy uvádí autoři pohled didakticko-matematický, a to podle Vyšína (1962), kde Vyšín na slovní úlohu nahlíží jako na jakýkoli slovně formulovaný matematický úkol[4]. Při takovém pojetí je však potřeba brát v úvahu, že matematický model může být v takto zobecněném případě předložen; není tedy potřeba, aby jej žák sestavoval. (Vondrová et al., 2019, str. 15)

Zhou a Huang (2019) definují slovní úlohu jako vyprávění[5] popisující určitý příběh v kontextu specifického tématu. Slovní úloha podle nich navíc může poskytovat určitá vodítka k sestavení rovnice, která interpretuje vztahy čísel a proměnných.

Jinou definici slovní úlohy a následné rozlišení úloh lze najít u Poláka (2014, str. 141).

„Slovními úlohami ve školské matematice se rozumí všechny takové úlohy, jejichž zadání i položené otázky nejsou vyjádřeny pomocí matematické symboliky, ale jsou vyjádřeny ve slovní formě. V didaktické literatuře o slovních úlohách se setkáváme s jejich klasifikací z různých hledisek.“

Jak dále píše Polák (2014) na str. 141, pro středoškolskou matematiku se jeví jako vhodné rozdělení slovních úloh na *slovní úlohy s matematickým obsahem* a *slovní úlohy s nematematickým obsahem*. Ve druhém případě jde o úlohy z různých nematematických oborů (např. chemie, fyziky, technických oborů, ale také třeba ekonomie apod.); takové úlohy nazýváme *aplikační úlohy*.

Tentýž autor používá dále pojem matematizace reálného problému – píše o takové matematizaci jako o první z fází postupu řešení. Podle něj je matematizace reálného problému *„přechod od dané reálné situace k matematickému vyjádření neboli vytvoření*

[4] Jako příklad je v publikaci uveden úkol: *„Urči takové číslo x, jehož trojnásobek zvětšený o jednu je 73.“*
[5] narrative (volně přeloženo)

matematického modelu reálné situace. Zpravidla je jím rovnice, nerovnice, resp. soustava rovnic či nerovnic." (Polák, 2014, str. 141)

Většina autorů podle Vondrové a kol. (2019) od slovních úloh požaduje, aby jejich zadání obsahovalo nějaký kontext. Kuřina (1989) uvádí, že součástí slovních úloh je nějaká reálná situace, ke které jsou přidány otázky.

Autorský kolektiv považuje za slovní úlohu takovou úlohu, *„která obsahuje nějaký kontext (který může být reálný, pseudo-reálný či imaginární) a v níž jsou některé numerické údaje dány a jiné se hledají."* (Vondrová et al., 2019, str. 15)

Jiný pohled uvádí Zong a Krishnamachari (2023[6]) podle Gerofskeho (2004); v tomto článku je slovní úloha typem zadání, které uvádí vlastnosti jednotlivých použitých prvků a jejich vztahy v „běžném" jazyce, spolu s jednou nebo více otázkami, které jsou položeny v závěru zadání úlohy. Žáci jsou typicky vyzváni, aby převedli jazykové vyjádření do jedné nebo více algebraických rovnic, které musejí pro zodpovězení položené otázky vyřešit.

1.1.3 Slovní úlohy vedoucí k soustavě rovnic

Autoři Zhou a Huang (2019) se v článku zabývají tvorbou zadání slovní úlohy řešitelné soustavou rovnic. Ačkoli se článek zabývá primárně vytvořením (generováním) zadání slovní úlohy na základě zadané soustavy, obsahuje také příklady, které mohou ilustrovat použití strategie „porovnání s prototypickou úlohou" (viz kapitola 1.3) – stručně řečeno, žák může „zasadit" řešení slovní úlohy do již známého algoritmu. Určitý typ slovní úlohy může žák „zařadit" např. k níže uvedené soustavě rovnic.

V úvodu článku jsou uvedeny dva příklady, přičemž každý z nich lze zařadit k jinému ze dvou témat (konkrétně zde jde o prodej vstupenek a výkup pozemků), ačkoli obě zadání vedou k témuž „typu" soustavy rovnic. V článku je dále představeno, jakým způsobem je možné vytvářet zadání slovních úloh.

Jako příklad je uveden následující vzor soustavy rovnic.

$$\begin{aligned} x + y &= [\text{číslo } 0] \\ [\text{číslo } 1] \cdot x + [\text{číslo } 2] \cdot y &= [\text{číslo } 3] \end{aligned}$$

(Zhou a Huang, 2019)

[6] Citovaný článek se zaměřuje na slovní úlohy řešitelné právě pomocí rovnic a jejich soustav. Jeho rešerše bude provedena detailněji v části 1.1.4, i se stručným odkazem na možné využití umělé inteligence, o němž se v tomto článku píše.

Zadání slovní úlohy č. 1 (přeloženo volně):

Lístky na promítání filmu byly prodávány v ceně 4 dolarů pro dospělého a v ceně 2,5 dolaru pro studenta. Jestliže bylo prodáno celkem 267 lístků v celkové hodnotě 1042,5 dolaru, kolik bylo prodáno lístků pro dospělé? (Zhou a Huang, 2019)

Téma: prodej lístků

Odpovídající soustava rovnic (odpovídá vzoru výše):

$$x + y = 267$$
$$4 \cdot x + 2{,}5 \cdot y = 1042{,}5$$

Níže v článku je možné najít zadání slovní úlohy č. 2, jejíž řešení vede k soustavě rovnic, která také odpovídá výše uvedenému vzoru.

Zadání slovní úlohy č. 2 (přeloženo volně, upraveno):

Farmář zakoupil 100 akrů půdy dvojího druhu, část za 370 dolarů za akr a část za 450 za akr, přičemž celkově zaplatil za všechny části půdy 42 200 dolarů. Kolik akrů půdy bylo v každé z částí? (Zhou a Huang, 2019)

Téma: nákup půdy

Odpovídající soustava rovnic:

$$x + y = 100$$
$$370 \cdot x + 450 \cdot y = 42\,200$$

(Co zde označují jednotlivé neznámé, není v článku sice explicitně uvedeno; nicméně v obou případech je označení neznámých vzhledem ke kontextu úlohy zřejmé.)

Domnívám se, že tento typ slovní úlohy (řešitelný soustavou rovnic) je možné vyřešit porovnáním s prototypickou úlohou (resp. na základě strategie klíčových slov – viz kapitola 1.3) – zadání zjevně přímo vede k předložené soustavě.

1.1.4 Použití umělé inteligence při řešení slovních úloh

Autoři Zong a Krishnamachari (2023) se zabývají slovními úlohami řešitelnými soustavami rovnic s využitím modelu GPT-3[7] umělé inteligence. Jde tak o další pohled na řešení tohoto typu úlohy, který je na konci roku 2023 nepochybně aktuální. Jak sami

[7] Jde o nový jazykový model vydaný OpenAI, který zpracovává přirozený jazyk; využívá učení ke generování textu, kódu aj. (Cooper, 2023)

autoři uvádějí, zajímala je možnost pomoci žákům s učením se slovním úlohám prostřednictvím nástroje umělé inteligence. Konkrétně se zaměřili právě na použití GPT-3.

Autoři v článku položili následující výzkumné otázky:

1. Jak úspěšný je model GPT-3 v třídění úloh do různých témat?
2. Jak úspěšný je model GPT-3 v generování soustav rovnic přímo ze slovního zadání?
3. Jak úspěšný je model GPT-3 v kreativní tvorbě zadání slovních úloh?

Některé slovní úlohy, které vedou k soustavě dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, rozdělili autoři článku do pěti různých kategorií. V jejich výčtu je u každého typu uveden i konkrétní příklad:

- **součet a rozdíl**[8]

„Součet poloviny čísla x a jiného čísla y je -28. Rozdíl čísel x, y je 7. Určete čísla x, y.“

- **věci a majetek**

„Tři jablka a čtyři banány stojí 4,85 dolaru. Tři jablka a deset banánů stojí 8,75 dolaru. Určete cenu jablka.“

- **obvod obdélníku**

„Velikost délky obdélníku je o 3 cm *menší, než je dvojnásobek velikosti šířky, přičemž obvod obdélníku je 53* cm. *Určete rozměry obdélníku.“*

- **pohyb**

„Joey a Natasha vycházejí ze stejného místa, ale opačnými směry. Rychlost chůze Joeyeho je o 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ *větší než rychlost chůze Natashy. Po dvou hodinách budou od sebe vzdáleni právě 31* km. *Jakou rychlostí jde každý z nich?“*

- **směsi**

„Dvanáct galonů 31% kyseliny získáme smícháním 23% roztoku se 48% roztokem. Kolik každého z roztoků je potřeba použít?“

Slovní úlohy byly modelu GPT-3 zadány prostřednictvím slovního zadání a následovala otázka „Do které z následujících skupin patří zadání předchozí úlohy?“. Poté bylo zadáno uvedených pět kategorií jako nabízené možnosti obecně známou formou multiple choice. Ukazuje se, že přesnost modelu v rozdělování zadání slovních úloh do těchto skupin je vysoká až na jednu ze skupin, a to na **věci a majetek**, tam byla „přesnost“ dokonce

[8] Dle pojetí podle většiny vybraných autorů (viz kapitola 1.1.2) by se nejednalo (kvůli chybějícímu kontextu) o slovní úlohu.

nulová. Všechny úlohy v kategorii **věci a majetek** byly zařazeny GPT-3 do kategorie **směsi**, a to patrně proto, že úlohy tohoto typu častokrát obsahují dva druhy „věcí“. V ostatních případech však byla přesnost alespoň 80%, u úloh zabývajících se obvodem obdélníku dokonce 100%. (Zong a Krishnamachari, 2023)

Druhým zadaným úkolem pro GPT-3 bylo vypsat dvě lineární rovnice příslušné k zadání zvolené slovní úlohy, a to na základě slovně formulovaného zadání. Jako běžné se zde považuje použití neznámých x, y pro zjednodušení.

V jedné z tabulek v článku je uvedeno, které odpovědi by byly označeny jako přípustné, a které již nikoli – mezi těmi nepřípustnými jsou ty případy, kde by byla uvedena jen jedna rovnice, nebo by model sestavil jen jednu rovnici s jednou neznámou, ale také případ, v němž by model nesprávně porozuměl zadání slovní úlohy (resp. chybně zadání interpretoval).

Příklad přípustného řešení a několika řešení nepřípustných uvádí následující tabulka (Tab. 1). (Zong a Krishnamachari, 2023)

Zadání úlohy	Určete, kolik galonů 20% nemrznoucí směsi a kolik galonů 10% nemrznoucí směsi je potřeba smíchat, abychom dostali 40 galonů 16% nemrznoucí směsi.
Přípustná odpověď	$0{,}2 \cdot x + 0{,}1 \cdot y = 0{,}16 \cdot (x + y)$ $x + y = 40$
Nepřípustná odpověď	$20x + 10y = 16 \cdot 40$ (byla odvozena pouze jedna rovnice)
Nepřípustná odpověď	$20x + 10(40 - x) = 16 \cdot 40$ (nebyla odvozena soustava s požadovanou neznámou y)
Nepřípustná odpověď	$2 \cdot x + 1 \cdot y = 40$ $0{,}2 \cdot x + 0{,}1 \cdot y = 0{,}16$ (nesprávná intepretace)

Tabulka 1 – Zadání úlohy a příklady odpovědí GPT-3 uvedené v článku autorů Zong a Krishnamachari (2023)

Třetí výzkumná otázka, kterou si autoři článku položili, se týkala generování slovních úloh. Autoři sledovali kreativitu GPT-3 zadáním jednoho konkrétního příkladu, úkolem pro model GPT-3 bylo vygenerovat analogické zadání. Ukázalo se, že např. úlohu pracující s čísly je možné transformovat do úlohy pracující s úhly. Přičemž úspěšnost vždy závisí na typu problému. (Zong a Krishnamachari, 2023)

V závěru autoři článku uvádějí, že studie měla za cíl prozkoumat použití GPT-3 ve třech aspektech ovládání slovních úloh zaměřených na rovnice. Ukázalo se, že ve všech třech oblastech ukázala studie slibné výsledky, výrazná je 80% úspěšnost v zobrazování soustavy rovnic na základě vepsaného zadání. Takový výsledek poukazuje na fakt, že je model GPT-3 pro tento účel použitelný v praxi. (Zong a Krishnamachari, 2023)

Jak se ukázalo v této podkapitole, každý z autorů nahlíží na dělení slovních úloh jinak. Se slovními úlohami o pohybu a o směsích se můžeme setkat v našich učebnicích, jak je podrobněji popsáno v následující podkapitole.

1.2 Slovní úlohy řešitelné soustavou rovnic ve středoškolských učebnicích

Tato podkapitola je věnována rozboru tří českých učebnic, které jsou v současné době používané na našich středních školách. Jedná se o dvě tištěné učebnice a jednu dostupnou v online verzi na internetu. Důvod výběru právě těchto učebnic bude ještě v následujícím odstavci upřesněn. Analyzované učebnice jsou postupně následující:

1. Charvát, J., Zhouf, J., & Boček, L. (2007). *Matematika pro gymnázia – rovnice a nerovnice.* Praha: Prometheus.
2. Cizlerová, M., Krupka, P., Polický, Z., & Škaroupková, B. (2013). *Matematika pro střední školy – 2. díl: Výrazy, rovnice a nerovnice (učebnice).* Brno: Didaktis,
3. www.realisticky.cz: když (se) chcete naučit… [online]. Martin Krynický, 2010. Dostupné z: realisticky.cz

Učebnice od nakladatelství Prometheus a Didaktis byly vybrány jednak proto, že se jedná o hojně používané učebnice (tento předpoklad vychází z vlastní zkušenosti získané během praxe), jednak proto, že obě tyto učebnice mají doložku vydanou Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT), jak vyplynulo z analýzy učebnic.

Učebnice od autorů Charvát, Zhouf, Boček je určena primárně pro studium na gymnáziích. Učebnice od autorky Cizlerové a kol. je určena pro žáky středních škol. Ovšem jak je uvedeno v sekci „představení učebnicové sady“ v učebnici od nakladatelství Didaktis, je v ní zařazeno také několik kapitol, které obsahují učivo přesahující rámec RVP pro střední odborné vzdělávání – tyto kapitoly je možné využít pro rozšíření vědomostí žáků, kteří se připravují (resp. budou připravovat) na studium na vysoké škole nebo na škole vyšší odborné. Tyto kapitoly také mohou být užitečné pro žáky gymnázií. Učebnice může být také plnohodnotnou oporou pro žáky, kteří přistupují k výuce formou samostudia. (Cizlerová et al., 2013, str. 136)

Třetí analyzovanou učebnicí je internetová učebnice autora Martina Krynického. Jak uvádí sám Krynický na svém webu http://www.realisticky.cz/clanky.php?id=historie, internetová učebnice známá mezi učiteli pod názvem realisticky.cz navazuje na předchozí stránky www.ucebnice.krynicky.cz, na které autor od roku 2008 přidával obsahy svých hodin matematiky (a fyziky). O několik let později byly přidány také materiály (obsahy hodin) pro 2. stupeň základní školy, a to v době, kdy začal autor vyučovat na nižším stupni víceletého gymnázia.

Učebnice Martina Krynického byla k analýze zvolena proto, že se jedná v českém prostředí o známou elektronickou učebnici. Na webu je kromě lekcí možné dohledat také cíle, které se týkají realistické pedagogiky. Explicitně sepsané cíle učebnice matematiky v našem prostředí nepovažuji za její standardní součást.

Ve všech třech případech byly analyzovány ty kapitoly, které obsahovaly zařazené slovní úlohy řešitelné rovnicemi[9] nebo soustavami rovnic.

Před analýzou těchto kapitol byla pro potřeby této práce nejprve zavedena autorská typologie úloh, a to následovně:

- vzorově řešené úlohy;
- neřešené[10] úlohy zadané žákům k procvičení;
- úlohy, které jsou označeny jako náročnější („úlohy s hvězdičkou“).

Následně byla provedena kvantitativní analýza – byly sledovány počty úloh[11] v jednotlivých učebnicích. Závěry a počty úloh v jednotlivých učebnicích jsou uvedeny

[9] Nejen rovnicemi lineárními, ale také dalšími typy rovnic (podle zařazení slovních úloh v příslušných kapitolách).
[10] Jedná se o úlohy, které neobsahují v učebnici uvedený celý postup řešení.
[11] Počty úloh byly sledovány dle navržené typologie.

v příslušné podkapitole. V návaznosti na popsanou typologii byla kvantitativní analýza provedena na základě následujících kritérií:

- počet vzorově řešených úloh;
- počet neřešených úloh zadaných žákům k procvičení;
- počet úloh, které jsou označeny jako náročnější („úlohy s hvězdičkou“);
- počet obrázků zařazených v zadání nebo řešení úlohy.

Porovnání všech vybraných učebnic podle stanovených kritérií je shrnuto v podkapitole 1.2.4.

1.2.1 Slovní úlohy v učebnici od nakladatelství Prometheus

Tato podkapitola je věnována analýze první ze zvolených učebnic. Jedná se o jeden z dílů ucelené sady učebnic matematiky pro gymnázia od nakladatelství Prometheus nazvaný *„Rovnice a nerovnice“*. Všechny části v této podkapitole vznikly na základě samotné učebnice, odkud jsou také zařazené obrázky.

Lze si všimnout, že slovním úlohám není věnována samostatná kapitola. Setkáváme se s nimi průběžně u jednotlivých kapitol zaměřených na různé typy rovnic (a nerovnic). Jedna úloha, v našem kontextu zajímavá, je uvedená hned v úvodu kapitoly týkající se lineárních rovnic. Je zajímavá proto, že můžeme na základě spektra definic slovních úloh spekulovat o tom, zda se o slovní úlohu jedná.

„Vašek dal za úkol Petrovi, aby si myslel přirozené číslo, vynásobil ho dvěma, k výsledku přičetl pět, získané číslo vynásobil třemi a k výsledku přičetl patnáct. Petr prozradil, že mu vyšlo číslo 96. Vašek ihned věděl, jaké číslo si Petr na začátku myslel. Zjistěte to i vy.“ (Charvát, Zhouf, Boček, 2007, str. 16)

Je možné si všimnout, že autoři nepíší o této úloze jako o slovní úloze. V úvodu kapitoly je uvedeno, že jde o matematickou hříčku; dále se o úkolu autoři zmiňují prostě jako o úloze. Je pravděpodobné, že autoři záměrně o úloze nemluvili jako o slovní úloze kvůli skutečnosti, že většina autorů požaduje od slovní úlohy nějaký reálný kontext (viz rešerše literatury v kapitole 1.1).

První slovní úloha je zařazena na str. 22 a je uvedena jako jedna z prvních mezi neřešenými úlohami zaměřenými na lineární rovnice. Další úlohy jsou zařazeny jako neřešené na str. 23. Na str. 24 jsou čtyři takové úlohy. Na str. 25 je zadána úloha ze 6. st. n. l., ve které se požaduje zjistit věk řeckého matematika Diofanta, což může být do určité míry pro některé žáky motivační.

V závěru kapitoly týkající se rovnic v součinovém tvaru, na str. 41, lze najít zadání čtyř neřešených úloh, jedna je s fyzikálním kontextem (vrh svislý vzhůru), jedna pracuje s pojmem obdélník, další dvě pracují s operacemi s čísly.

Je důležité poznamenat, že žádná z předchozích úloh není (krok po kroku) řešena. Výsledky je možné dohledat k úlohám zadaným k procvičení, nicméně postupy řešení uvedeny nejsou.

Na str. 53 jsou v kapitole o rovnicích v podílovém tvaru uvedeny dvě slovní úlohy – opět neřešené.

První řešenou slovní úlohu je možné najít na str. 84, na které začíná kapitola 4.3 týkající se soustav dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Kapitola je zahájena slovy *„Pomocí soustav lineárních rovnic lze řešit řadu úloh. Zde je jedna z nich.“* Motivační může být skutečnost, že je kapitola otevřena přímo řešenou slovní úlohou (viz Obr. 1). Soustava rovnic je vyřešena dosazovací metodou.

4.3 Soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými

Pomocí soustav lineárních rovnic lze řešit řadu úloh. Zde je jedna z nich:

Příklad 1

Určete věk otce a věk syna, víte-li, že za tři roky bude otec pětkrát starší než syn, avšak za pět let bude jen čtyřikrát starší než syn.

Řešení

Číselné hodnoty dvou neznámých údajů označme písmeny:

věk otce . . . . x let

věk syna . . . . y let

Za tři roky bude otci $(x+3)$ let a synovi $(y+3)$ let. Podle zadání má platit

$$x + 3 = 5(y + 3).$$

Druhá informace ze zadání úlohy dává rovnici

$$x + 5 = 4(y + 5).$$

Obě rovnice musejí být splněny současně. Jejich jednoduchou úpravou dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x - 5y &= 12 \\ x - 4y &= 15 \end{aligned} \qquad (1)$$

Můžeme ji řešit např. tak, že z první rovnice vyjádříme neznámou x pomocí neznámé y, tj.

$$x = 5y + 12, \qquad (2)$$

odtud dosadíme za x do druhé rovnice,

$$5y + 12 - 4y = 15,$$

a vypočteme, že $y = 3$; z (2) pak dopočítáme $x = 5 \cdot 3 + 12 = 27$.

Zjistili jsme, že jediným řešením soustavy (1) je uspořádaná dvojice $(x, y) = (27, 3)$.

Zkouškou se můžeme přesvědčit, že věk otce 27 let a věk syna 3 roky skutečně vyhovují zadání příkladu. Za tři roky bude otci 30 let, synovi 6 let, otec bude pětkrát starší než syn; za pět let jim bude 32 a 8 let, otec bude čtyřikrát starší než syn.

84

Obrázek 1 – Slovní úloha řešená soustavou rovnic v učebnici od nakladatelství Prometheus (Charvát, Zhouf, Boček, 2007, str. 84)

Tatáž kapitola, týkající se řešení soustav dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, je zakončena další slovní úlohou, opět řešenou. Jde zjevně o příklad řešení úlohy, proto zadání předchází věta *„Vyřešíme ještě jeden slovní příklad.“* Zadání i dva způsoby řešení jsou zachyceny postupně na Obr. 2 (první způsob řešení soustavy rovnic – dosazovací metodou) a na Obr. 3 (druhý způsob řešení soustavy rovnic – sčítací metodou).

Příklad 5

V chemické laboratoři je k dispozici 20% roztok a 35% roztok kyseliny sírové. Kolik kilogramů prvního a kolik kilogramů druhého roztoku musíme smíchat, abychom dostali 15 kg 29% roztoku?

Řešení

Jestliže smícháme x kg prvního a y kg druhého roztoku, dostaneme $(x+y)$ kg roztoku, v němž je $\left(\frac{20}{100}x + \frac{35}{100}y\right)$ kg čisté kyseliny, půjde tedy o $\dfrac{20x+35y}{x+y}\%$ roztok. Pro x, y jsme dostali rovnici

$$\frac{20x+35y}{x+y} = 29,$$

po úpravě

$$3x - 2y = 0.$$

Protože výsledného roztoku má být 15 kg, máme pro x, y soustavu dvou lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \\ x + y &= 15 \end{aligned} \qquad (10)$$

Vyřešíme ji dvěma způsoby, dosazovací i sčítací metodou.

1. způsob řešení (dosazovací metodou)
Z druhé rovnice soustavy (10) vyjádříme $x = 15 - y$, dosadíme do první rovnice, $3(15-y) - 2y = 0$, odtud vypočteme $y = 9$ a pak dopočítáme $x = 15 - 9 = 6$.

91

Obrázek 2 – Slovní úloha řešená soustavou rovnic v učebnici od nakladatelství Prometheus (Charvát, Zhouf, Boček, 2007, str. 91): způsob řešení užitím dosazovací metody

2. způsob řešení (sčítací metodou)
Jestliže k první rovnici soustavy (10) přičteme dvojnásobek druhé rovnice, dostaneme $5x = 30$, odtud $x = 6$. Po dosazení do kterékoliv rovnice soustavy (10) vypočítáme $y = 9$.

Abychom dostali 15 kg 29% roztoku kyseliny sírové, musíme smíchat 6 kg 20% a 9 kg 35% roztoku.

Obrázek 3 – Slovní úloha řešená soustavou rovnic v učebnici od nakladatelství Prometheus (Charvát, Zhouf, Boček, 2007, str. 92): způsob řešení užitím sčítací metody

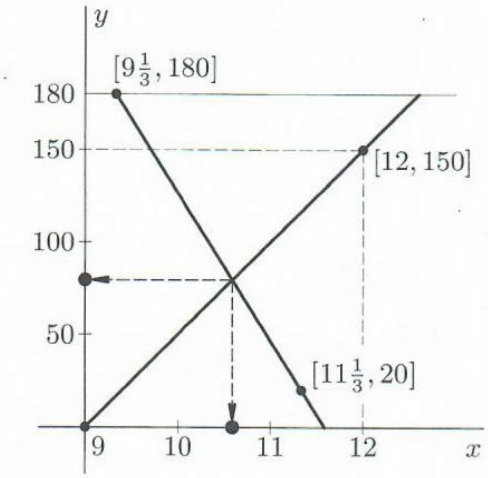
Další úlohy řešitelné soustavami rovnic je možné najít na str. 95, tentokrát jde již o úlohy neřešené.

Na str. 98 se nachází další řešená slovní úloha (viz Obr. 4). Jde o příklad zařazený v kapitole týkající se grafického řešení soustav lineárních rovnic a nerovnic se dvěma neznámými. V zadání je požadováno řešit úlohu *„graficky i výpočtem"*; na Obr. 4 není rozebráno celé řešení (to se nachází v učebnici na následující straně).

Příklad 3

Ze stanice A vyjíždí v 9 hodin do stanice B, která je od A vzdálena 180 km, nákladní vlak konstantní rychlostí $50\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Ze stanice B jede do A po vedlejší koleji rychlík konstantní rychlostí $80\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, čas jeho odjezdu z B je 9 hodin 20 minut. V kolik hodin a na kterém místě se vlaky potkají? Řešte graficky i výpočtem.

Řešení



Obr. 34

98

Obrázek 4 – Zadání a náznak řešení úlohy řešené soustavou rovnic (graficky) v učebnici od nakladatelství Prometheus (Charvát, Zhouf, Boček, 2007, str. 98)

Z Obr. 4 je zřejmé, že na osu x je nanášen čas v hodinách (od 9 hodin), na osu y je nanášena vzdálenost od stanice A v kilometrech. Lze dojít k tomu, že jízda nákladního vlaku je znázorněna úsečkou, která leží na přímce procházející body $[9; 0]$ a $[12; 150]$. Jízda rychlíku je znázorněna úsečkou, na které leží body $\left[\frac{28}{3}; 180\right]$ a $\left[\frac{34}{3}; 20\right]$. Takové úsečky se protínají přibližně v bodě $\left[\frac{21}{2}; 80\right]$. Vlaky se tedy potkají přibližně v 10.30 v místě vzdáleném přibližně 80 km od stanice A.

Na str. 99 je uvedeno také početní řešení. Následuje grafikon, který může být do určité míry pro žáky motivační (včetně zkratek a symbolů, které používají České dráhy).

O předchozím zadání lze říci, že jeho součástí jsou obrázky (byť nejsou přímo obrázkovou legendou[12]). Obrázky dále obsahuje také řešení slovních úloh 4.23, 4.24 a 4.25 – vše v části učebnice s řešeními.

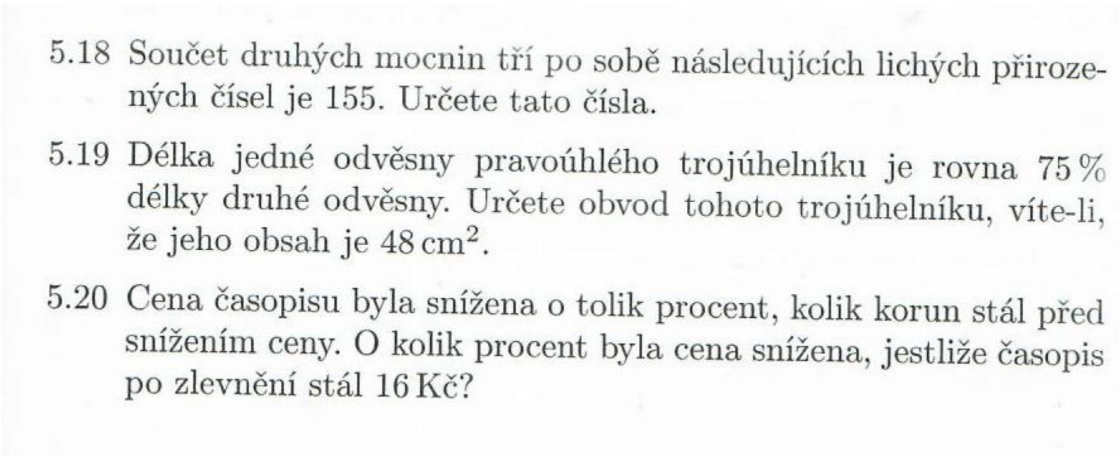
[12] Viz podkapitola 1.3.

Grafické řešení soustavy rovnic při řešení slovní úlohy může být sice názorné, byť ne vždy zcela praktické. Z tohoto důvodu lze očekávat, že v empirické části při analýze výřezů nebude nalezen ani jeden postup užitím grafického řešení. Žáci se s touto metodou řešení soustav lineárních rovnic setkávají přinejmenším při studiu na gymnáziu; jak je také uvedeno v dokumentu RVP pro gymnázia v oddílu 5.2.1 na str. 24 – *„žák využívá poznatky o funkcích při řešení rovnic a nerovnic“* (RVP G, str. 24). Nicméně nelze očekávat, že při řešení slovních úloh v didaktickém testu z matematiky kdokoli z maturantů tuto metodu řešení soustavy rovnic použil.

Na str. 113 je možné najít řešenou slovní úlohu týkající se roztoků – je vyřešena užitím soustavy dvou rovnic o třech neznámých. Další úlohy se nacházejí na str. 116.

V kapitole věnované kvadratickým rovnicím je na str. 121 zařazena řešená úloha – využívá zkrácení, resp. prodloužení strany čtverce. Na str. 122 je mezi úlohami k procvičení zařazena slovní úloha s fyzikálním kontextem (volný pád) a na str. 126 je úloha zabývající se obdélníkem.

Na str. 129 je možné najít mezi neřešenými úlohami dvě slovní úlohy, jejichž řešení vede ke kvadratické rovnici (viz Obr. 5) – úloha 5.18 by ale kvůli chybějícímu kontextu nemusela být považována za slovní.



5.18 Součet druhých mocnin tří po sobě následujících lichých přirozených čísel je 155. Určete tato čísla.

5.19 Délka jedné odvěsny pravoúhlého trojúhelníku je rovna 75 % délky druhé odvěsny. Určete obvod tohoto trojúhelníku, víte-li, že jeho obsah je 48 cm^2.

5.20 Cena časopisu byla snížena o tolik procent, kolik korun stál před snížením ceny. O kolik procent byla cena snížena, jestliže časopis po zlevnění stál 16 Kč?

Obrázek 5 – Neřešené úlohy vedoucí ke kvadratické rovnici v učebnici od nakladatelství Prometheus (Charvát, Zhouf, Boček, 2007, str. 129)

Na str. 134 je uvedena úloha od indického matematika Bháskary (viz Obr. 6). Úloha zde[13] není řešena.

[13] Úloha je vyřešena v učebnici od nakladatelství Didaktis (viz část 1.2.2).

5.26 Stará indická úloha od matematika Bháskary (1114 – 1185): Stádo opic bavících se v háji se rozdělilo na dvě části. Čtverec osminy jejich počtu se bavil skákáním ve větvích. Dvanáct opic vítalo radostným křikem rozbřesk dne. A teď řekni, jinochu, kolik opic bylo v háji.

Obrázek 6 – Úloha od indického matematika ze 12. století v učebnici od nakladatelství Prometheus (Charvát, Zhouf, Boček, 2007, str. 134)

Dvě neřešené úlohy „o společné práci“ je možné najít na konci kapitoly týkající se rovnic (a nerovnic) v součinovém a podílovém tvaru. Zajímavá je úloha 6.10 na str. 158, její zadání je uvedeno na Obr. 7. Úloha totiž obsahuje historický komentář, který žáky seznamuje s úlohou z Eukleidova díla, s návazností na dnes používaný pojem zlatého řezu. Pojem zlatý řez může být pro mnohé žáky motivační, kvůli svému obecně známému výskytu v přírodě i v umění.

6.10 Tyč je rozdělena na dvě části tak, že poměr délky kratší části ku délce delší části se rovná poměru délky delší části ku délce celé tyče. Jak dlouhá je delší část tyče, jestliže délka celé tyče je 1 jednotka?
[Tato úloha se nachází v díle řeckého matematika Euklida, který žil na počátku 3. století př. n. l. Dnes říkáme, že tyč je rozdělena v poměru zlatého řezu. Tento poměr má významné místo ve výtvarném umění, architektuře, technice atd.]

Obrázek 7 – Úloha z Eukleidova díla vedoucí k rovnici v podílovém tvaru v učebnici od nakladatelství Prometheus (Chvarvát, Zhouf, Boček, 2007, str. 158)

Co se týká úloh „s hvězdičkou“, je možné najít je na str. 177 – jde o slovní úlohy o pohybu a o společné práci (viz Obr. 8). Tyto neřešené úlohy jsou řešitelné užitím soustav rovnic.

*6.35 Dva dělníci udělají společně určitou práci za 15 dnů. Vykoná-li nejdříve rychlejší dělník čtvrtinu celé práce a ihned po něm práci dokončí pomalejší dělník, bude to trvat 36 dnů. Za jak dlouho by celou práci udělal každý dělník sám?

*6.36 Ze dvou míst vzdálených od sebe 57 km jdou proti sobě dva turisté a potkají se za 6 hodin. Jakými rychlostmi se pohybují, jestliže jeden potřebuje na 9 km o 12 minut méně než druhý?

*6.37 Jedním přívodem se naplní pětina nádrže o 20 minut dříve než druhým. Oba přívody společně naplní nádrž za 2 hodiny. Za jak dlouho se naplní nádrž každým přívodem zvlášť?

Obrázek 8 – Slovní úlohy „s hvězdičkou“ v kapitole o soustavách rovnic v učebnici od nakladatelství Prometheus (Charvát, Zhouf, Boček, 2007, str. 177)

Další řešené slovní úlohy jsou zařazeny v kapitole 7.1 nazvané „rovnice s parametry“, úvodní tři pracující s rozměry obdélníkového pozemku motivují problematiku řešení rovnic s parametrem[14].

Na Obr. 9 je uvedeno zadání úlohy pracující s průměrnou rychlostí; jedná o příklad uvedený na str. 190, řešení je uvedeno na str. 190–191. Řešení obsahuje sestavení rovnice s neznámou x a parametrem v a následnou diskusi jejího řešení.

Příklad 5

Řidič ujel 150 km průměrnou rychlostí $v\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Jakou průměrnou rychlostí musí jet zpátky, aby průměrná rychlost auta na celé cestě tam a zpět byla $50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$?

Obrázek 9 – Zadání slovní úlohy vedoucí k rovnici s parametrem v učebnici od nakladatelství Prometheus (Charvát, Zhouf, Boček, 2007, str. 190)

V závěru podkapitoly budou shrnuty jednotlivé počty úloh v analyzovaných kapitolách:

- počet vzorově řešených úloh:

  V učebnici od nakladatelství Prometheus je vzorově vyřešeno osm úloh v analyzovaných kapitolách; jde tak o menší část z celkového počtu obsažených slovních úloh. Můžeme se však setkat v případě zařazeného vzorového řešení i se dvěma způsoby řešení.

- počet neřešených úloh zadaných žákům k procvičení:

[14] Na parametr lze nahlížet jako na další proměnnou, která se v rovnici vyskytuje kromě neznámé. (Kubešová a Cibulková, 2011, str. 35)

Tohoto typu úloh je v učebnici nejvíce. Nacházejí se vždy na konci kapitoly; úlohy nejsou řešené a výsledky k nim je možné dohledat v zadní části v seznamu výsledků úloh. Celkově jde o 26 slovních úloh.

- počet úloh, které jsou označeny jako složitější („úlohy s hvězdičkou“):
  Takové úlohy jsou jasně odlišeny od ostatních, a to právě pomocí hvězdičky jako použitého grafického znaku u příslušných úloh. Jedná se o tři slovní úlohy.
- počet obrázků zařazených v zadání nebo vzorovém řešení úlohy:
  V učebnici se na str. 98 nachází obrázek ilustrující grafické řešení úlohy o pohybu, na str. 100 je obrázek při grafickém řešení. Jiné obrázky v zadání ani ve vzorovém řešení slovních úloh vedoucích k rovnicím a soustavám rovnic použity nejsou.

1.2.2 Slovní úlohy v učebnici od nakladatelství Didaktis

Všechny odstavce v této podkapitole vycházejí přímo z příslušné učebnice.

Učebnice *„Výrazy, rovnice a nerovnice“* od nakladatelství Didaktis obsahuje zařazené slovní úlohy vedoucí k lineární a kvadratické rovnici v kapitolách, jejichž názvy odpovídají příslušným typům rovnic. Učebnice však také obsahuje (na rozdíl od učebnice analyzované v kapitole 1.2.1) také samostatnou kapitolu zaměřenou na slovní úlohy, které jsou řešitelné užitím lineárních rovnic. Jde o kapitolu *„slovní úlohy o společné práci, směsích a pohybu“,* přičemž kapitola je zahájena na str. 81 nadpisem *„To musím zvládnout sám.“* Pod názvem kapitoly je umístěn text rozdělený do dvou barevných rámečků. Text má patrně za cíl motivovat žáky ke slovním úlohám (viz Obr. 10).

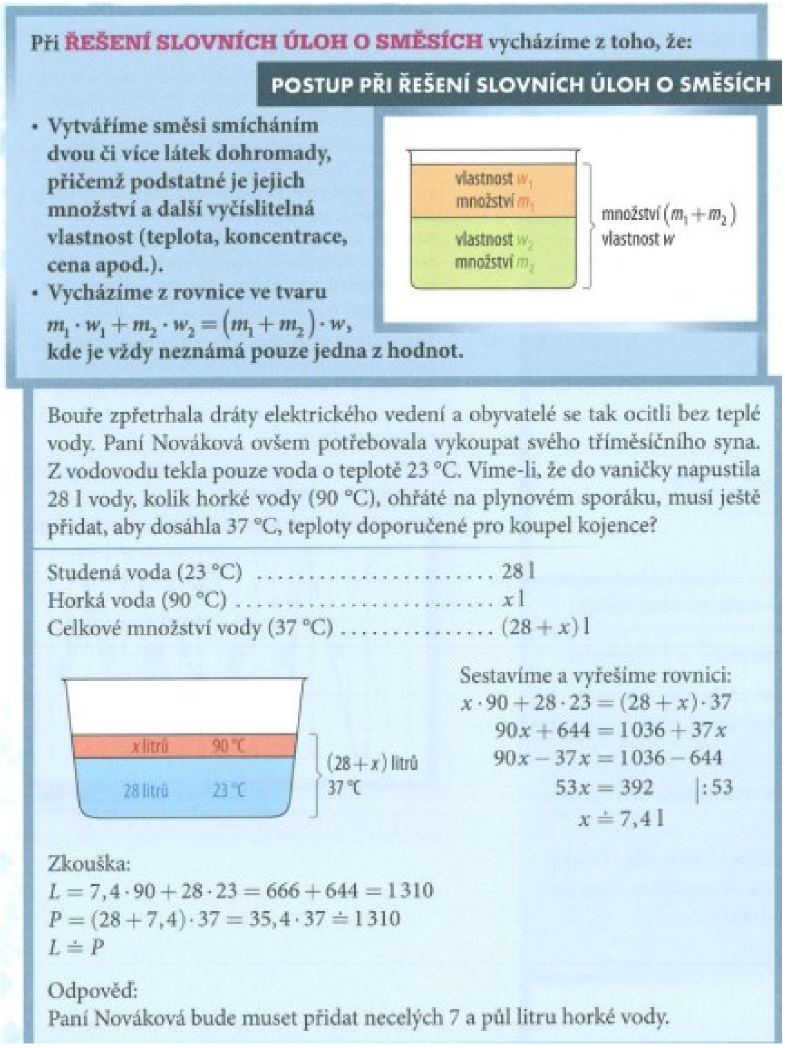
Jedním z problémů, se kterými se naše společnost často potýká, je rozdělení práce. Majitelé stavebních firem např. zvažují, kolik musejí najmout brigádníků, aby stihli včas vykopat studnu. My sami jsme občas nuceni přemýšlet nad tím, zda jsme si toho na svá bedra nenaložili příliš a zda není konečně na čase požádat kamaráda o pomoc. V takovýchto okamžicích se můžeme spolehnout na svou intuici. Jistější však je vzpomenout si na způsob řešení lineárních rovnic a jejich soustav a výsledek si přesně spočítat. To, jakým způsobem postupovat při podobných výpočtech týkajících se společné práce více lidí či strojů, ale také tehdy, když chceme vědět, jakou rychlostí musíme šlápnout do pedálů, abychom do[j] spolužáka, který vyrazil ze školy 10 minu[t] před námi, případně kolik horké vody je nutné přilít do vychladlé vany, abychom si připravili koupel ohřátou na příjemnýc[h] 38 °C, se dozvíme v této kapitole věnova[né] výhradně slovním úlohám.

S lineárními rovnicemi a jejich soustavami se velmi často setkáme také v každodenním životě. V hodinách matematiky se tomu děje prostřednictvím slovních úloh. Velkou část z nich lze rozdělit do tří základních skupin, kterými jsou:
- úlohy o společné práci,
- úlohy o směsích,
- úlohy o pohybu.

V této kapitole se jim budeme tedy věnovat podrobněji.

Obrázek 10 – Text na začátku kapitoly „To musím zvládnout sám“ o některých typech slovních úloh řešitelných rovnicemi v učebnici od nakladatelství Didaktis (Cizlerová et al., 2013, str. 81)

V učebnici je na str. 81 uveden stručný návod na řešení slovních úloh o společné práci, na str. 83 se dále píše o postupu při řešení slovních úloh o směsích, jedna z řešených úloh je vhodně doplněna názorným obrázkem (viz Obr. 11).



Při **ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH O SMĚSÍCH** vycházíme z toho, že:

POSTUP PŘI ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH O SMĚSÍCH

- **Vytváříme směsi smícháním dvou či více látek dohromady, přičemž podstatné je jejich množství a další vyčíslitelná vlastnost (teplota, koncentrace, cena apod.).**
- **Vycházíme z rovnice ve tvaru $m_1 \cdot w_1 + m_2 \cdot w_2 = (m_1 + m_2) \cdot w$, kde je vždy neznámá pouze jedna z hodnot.**

Bouře zpřetrhala dráty elektrického vedení a obyvatelé se tak ocitli bez teplé vody. Paní Nováková ovšem potřebovala vykoupat svého tříměsíčního syna. Z vodovodu tekla pouze voda o teplotě 23 °C. Víme-li, že do vaničky napustila 28 l vody, kolik horké vody (90 °C), ohřáté na plynovém sporáku, musí ještě přidat, aby dosáhla 37 °C, teploty doporučené pro koupel kojence?

Studená voda (23 °C) .... 28 l
Horká voda (90 °C) .... x l
Celkové množství vody (37 °C) .... $(28 + x)$ l

Sestavíme a vyřešíme rovnici:

$$\begin{aligned} x \cdot 90 + 28 \cdot 23 &= (28 + x) \cdot 37 \\ 90x + 644 &= 1036 + 37x \\ 90x - 37x &= 1036 - 644 \\ 53x &= 392 \qquad |:53 \\ x &\doteq 7{,}4 \text{ l} \end{aligned}$$

Zkouška:

$L = 7{,}4 \cdot 90 + 28 \cdot 23 = 666 + 644 = 1310$
$P = (28 + 7{,}4) \cdot 37 = 35{,}4 \cdot 37 \doteq 1310$
$L \doteq P$

Odpověď:
Paní Nováková bude muset přidat necelých 7 a půl litru horké vody.

Obrázek 11 – Postup pro řešení slovních úloh o směsích a řešená slovní úloha o směsích, obsahující obrázek (Cizlerová et al., 2013, str. 83)

V této kapitole se nachází celkem osm slovních úloh.

Vzhledem k tomu, že se empirická část této práce zabývá především slovními úlohami řešitelnými užitím rovnic (o jedné neznámé) a užitím soustav dvou rovnic o dvou neznámých, je podstatné uvést, že na str. 81 je možné najít v pravé části stránky sekci *„Víte, že?“*. V této sekci je zdůrazněna skutečnost, že některé slovní úlohy, které byly řešeny dříve užitím jedné lineární rovnice o jedné neznámé, je možné řešit také s využitím soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Autoři zařadili do sekce také konkrétní příklad (viz Obr. 12), na kterém vzorově ukazují a porovnávají způsoby řešení užitím rovnice a soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Nabízejí tak porovnání obou postupů. Autoři uvádějí také to, že *„v obou případech musíme dojít ke stejnému výsledku.“* (Cizlerová et al., 2013, str. 81)

Víte, že?

Část slovních úloh, které jsme řešili pomocí jedné lineární rovnice o jedné neznámé, je možné řešit také s využitím soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. To, který způsob použijeme, pak záleží pouze na našem uvážení – v obou případech musíme dojít ke stejnému výsledku.

Např.:

Ve třídě je 32 žáků. Dívek je o 6 více než chlapců. Kolik je ve třídě dívek a kolik chlapců?

Řešení pomocí lineární rovnice s jednou neznámou:

počet chlapců x
počet dívek .... $x+6$
celkový počet 42

Sestavíme a vyřešíme rovnici:

$$x + x + 6 = 42$$
$$2x = 42 - 6$$
$$x = 18$$

Dopočítáme, kolik je dívek: $x + 6 = 18 + 6 = 24$

Řešení pomocí soustavy lineárních rovnic se dvěma neznámými:

počet chlapců x
počet dívek .... y
celkový počet 42

Sestavíme a vyřešíme soustavu rovnic:

$$x + y = 42$$
$$x = y - 6$$

$$y - 6 + y = 42 \qquad x = y - 6$$
$$2y = 48 \qquad x = 24 - 6$$
$$y = 24 \qquad x = 18$$

V obou případech nám vyšlo, že ve třídě je 24 dívek a 18 chlapců.

Obrázek 12 – Sekce „Víte, že?“ porovnávající řešení užitím rovnice a užitím soustavy rovnic v učebnici od nakladatelství Didaktis (Cizlerová et al., 2013, str. 81)

Na str. 84 je sepsaný stručný „návod“ pro řešení slovních úloh o pohybu.

Motivační pro žáky může být také další sekce *„Víte, že?“* uvedená na str. 84, kde je uvedena zmínka o grafikonech, obdobně jako tomu bylo v učebnici od nakladatelství Prometheus. Jde o text, v němž je uvedeno, že při čtení z grafického jízdního řádu z něho lze vyčíst např. rychlosti vlaků v souvislosti s řešením slovních úloh o pohybu.

V závěru podkapitoly na str. 64 můžeme najít řešené slovní úlohy; lze si všimnout také jednoduchého „návodu k řešení slovních úloh“ na této straně (viz Obr. 13). Za důležitý v návaznosti na rešerši literatury považuji zejména bod č. 3, totiž provedení kontroly výsledků se zadáním slovní úlohy – zde může jít o odkaz na sémantickou zkoušku (jako jeden z procesů řešení slovní úlohy, viz kapitola 1.3).

U všech úloh, s nimiž jsme se prozatím v této kapitole setkali, byla zadána konkrétní rovnice, kterou jsme měli za úkol vyřešit. Tak tomu však nemusí být vždy. Často se setkáme se slovními úlohami, v nichž budeme rovnici muset nejprve odhalit a až následně bude možné začít počítat.

Při ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH postupujeme obvykle takto:

1. **Zapíšeme stručný zápis slovní úlohy pomocí zadaných i hledaných údajů, hledané údaje označíme jako neznámé.**
2. **Sestavíme a vyřešíme rovnici.**
3. **Provedeme kontrolu výsledku se zadáním slovní úlohy.**
4. **Zapíšeme odpověď.**

POSTUP PŘI ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH

Obrázek 13 – Postup při řešení slovních úloh v učebnici od nakladatelství Didaktis (Cizlerová et al., 2013, str. 64)

V návaznosti na sepsaný postup jsou uvedeny tři úlohy. Dvě z nich (viz Obr. 14, Obr. 15) by bylo možné označit za slovní úlohy – obě obsahují dokonce reálný kontext. Řešená úloha uvedená na str. 65 neobsahuje kontext.

Pavel si chtěl koupit nové kolo a využít lákavou nabídku několika letních slev. Při první slevě, která činila 20 % ceny, se rozhodl, že ještě počká. Při druhém zlevnění snížil prodejce cenu kola ještě o 350 Kč. Kolo po obou slevách stálo 8 650 Kč. Kolik stálo kolo před oběma slevami? Kolik Kč činila první sleva?

Původní cena kola .... x Kč
První sleva .... 20 % z $x = 0{,}2x$ Kč
Druhá sleva .... 350 Kč
Cena kola po obou slevách .... 8 650 Kč

Sestavíme a vyřešíme rovnici:

$$
\begin{aligned}
x - 0{,}2x - 350 &= 8\,650 \\
0{,}8x - 350 &= 8\,650 \quad |+350 \\
0{,}8x &= 9\,000 \quad |:0{,}8 \\
x &= 11\,250
\end{aligned}
$$

Od původní, neznámé ceny x Kč, odečteme postupně první a druhou slevu. Výsledný rozdíl se musí rovnat nové ceně (po obou slevách).

Rovnici vyřešíme.

Původní cena kola .... $x = 11\,250$ Kč
První sleva .... 20 % z 11 250 Kč $= 0{,}2 \cdot 11\,250$ Kč $=$ $= 2\,250$ Kč

Zkouška:

$11\,250 - 2\,250 - 350 = 8\,650$

Sečteme cenu zlevněného kola s oběma slevami. Vyšla nám původní cena kola, počítali jsme tedy správně.

Odpověď:
Cena kola před oběma slevami byla 11 250 Kč. První sleva činila 2 250 Kč.

Obrázek 14 – Řešená slovní úloha v kapitole zaměřené na lineární rovnice v učebnici od nakladatelství Didaktis (Cizlerová et al., 2013, str. 64)

V klenotnictví prodávají dětské, dámské a pánské hodinky od firmy Čas za celkovou částku 4 750 Kč. Pánské hodinky jsou o 200 Kč levnější než dámské, dámské jsou pětkrát dražší než dětské. Za kolik Kč mají jednotlivé typy hodinek?

Dětské hodinky .... x Kč
Dámské hodinky .... $5x$ Kč
Pánské hodinky .... $(5x - 200)$ Kč
Celková cena .... 4 750 Kč

Sestavíme a vyřešíme rovnici:

$$
\begin{aligned}
x + 5x + (5x - 200) &= 4\,750 \\
x + 5x + 5x - 200 &= 4\,750 \\
11x - 200 &= 4\,750 \quad |+200 \\
11x &= 4\,950 \quad |:11 \\
x &= 450
\end{aligned}
$$

Součet cen dětských, dámských a pánských hodinek se musí rovnat udané celkové ceně 4 750 Kč.

Rovnici vyřešíme.

Dětské hodinky .... $x = 450$ Kč
Dámské hodinky .... $5x = 5 \cdot 450 = 2\,250$ Kč
Pánské hodinky .... $5x - 200 = 2\,250 - 200 = 2\,050$ Kč

Zkouška:

$450 + 2\,250 + 2\,050 = 4\,750$

Sečteme cenu dětských, dámských a pánských hodinek. Vyšla nám zadaná celková cena, počítali jsme tedy správně.

Odpověď:
V klenotnictví prodávají dětské hodinky za 450 Kč, dámské hodinky za 2 250 Kč a pánské hodinky za 2 050 Kč.

Obrázek 15 – Řešená slovní úloha v kapitole zaměřené na lineární rovnice v učebnici od nakladatelství Didaktis (Cizlerová et al., 2013, str. 64)

Další slovní dvě úlohy najedeme na konci kapitoly týkající se kvadratických rovnic – jedna je zasazena do kontextu věků sourozenců (viz Obr. 16), další směřuje k výpočtu rozměrů obdélníkového pole při dané rozloze pole v hektarech (viz Obr. 17).

Kapitolu zakončíme slovními úlohami vedoucími k řešení kvadratických rovnic.

Denis, účastník matematické soutěže, zadal kamarádovi Tomášovi příklad týkající se jeho věku: „Jestliže vezmu dvojnásobek součinu mého věku a věku mé sestry Sofie, která je o čtyři roky starší, dostanu stejné číslo, jako když vynásobím Sofiin věk zvětšený o číslo 14 svým věkem. Kolik je mi let?“ Určete, kolik let je Denisovi a kolik jeho sestře Sofii.

Denisův věk .... x let
Sofiin věk .... $x + 4$ let

Sestavíme a vyřešíme rovnici:

$$2 \cdot x \cdot (x+4) = (x+4+14) \cdot x$$

$$2x^2 + 8x = (x+18) \cdot x$$

Dvojnásobek součinu věku Denise a věku Sofie se rovná součinu věku Denise a věku Sofie zvětšeného o 14.

$$2x^2 + 8x = x^2 + 18x$$

Obě strany rovnice roznásobíme.

$$2x^2 - x^2 + 8x - 18x = 0$$

Rovnici převedeme na anulovaný tvar, tzn. všechny členy převedeme na jednu stranu rovnice.

$$x^2 - 10x = 0$$

$$x \cdot (x-10) = 0$$

Získali jsme kvadratickou rovnici bez absolutního členu. Vyřešíme ji tedy pomocí rozkladu na součin.

$\cancel{x_1 = 0}$

$x_2 = 10$

Řešením této rovnice jsou dvě různá čísla. Protože je ze zadání zřejmé, že Denisův věk nemůže být 0, je hledanou hodnotou číslo 10.

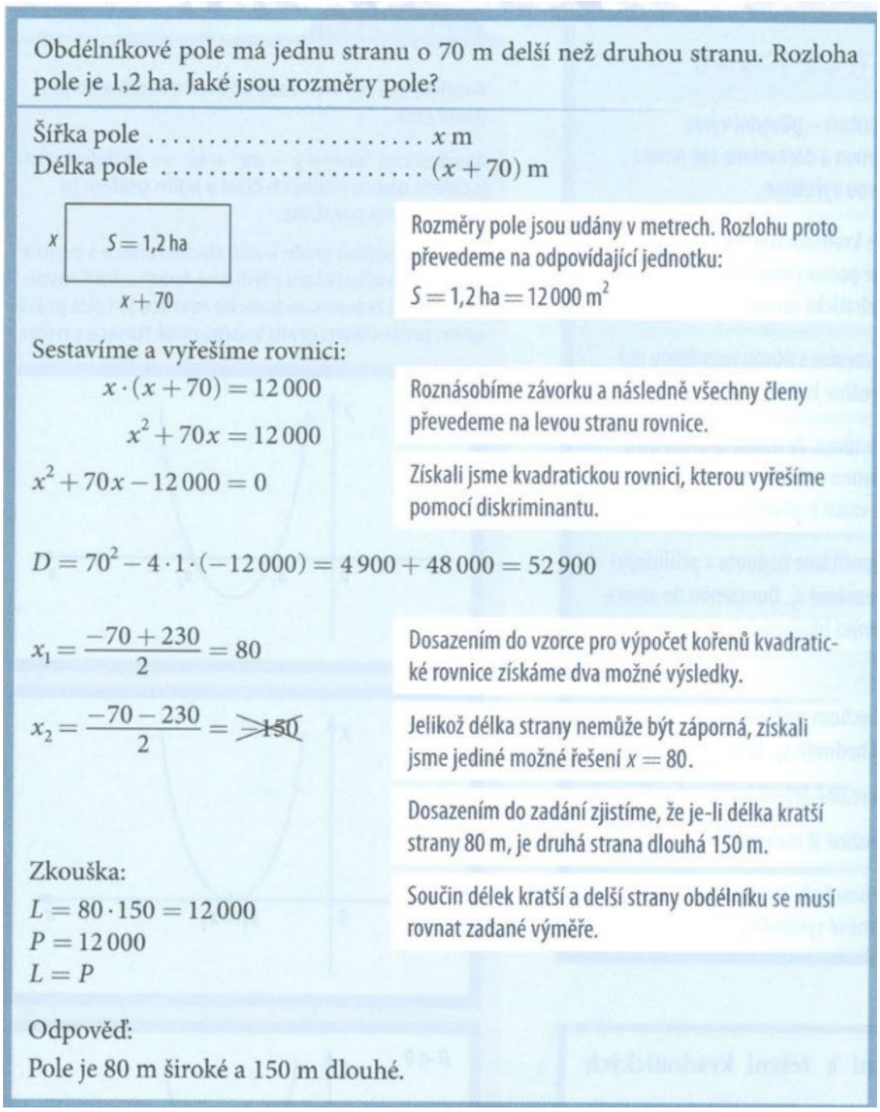
Zkouška:

$L = 2 \cdot 10 \cdot 14 = 280$; $P = (14+14) \cdot 10 = 280$; $L = P$

Odpověď:

Denisovi je 10 a Sofii 14 let.

Obrázek 16 – Uvedení do slovních úloh a první slovní úloha v kapitole týkající se kvadratických rovnic v učebnici od nakladatelství Didaktis (Cizlerová et al., 2013, str. 103)



Obdélníkové pole má jednu stranu o 70 m delší než druhou stranu. Rozloha pole je 1,2 ha. Jaké jsou rozměry pole?

Šířka pole .... x m
Délka pole .... $(x+70)$ m

Rozměry pole jsou udány v metrech. Rozlohu proto převedeme na odpovídající jednotku:
$S = 1{,}2\ \text{ha} = 12\,000\ \text{m}^2$

Sestavíme a vyřešíme rovnici:

$$x \cdot (x+70) = 12\,000$$
$$x^2 + 70x = 12\,000$$
$$x^2 + 70x - 12\,000 = 0$$

Roznásobíme závorku a následně všechny členy převedeme na levou stranu rovnice.

Získali jsme kvadratickou rovnici, kterou vyřešíme pomocí diskriminantu.

$$D = 70^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12\,000) = 4\,900 + 48\,000 = 52\,900$$

$$x_1 = \frac{-70+230}{2} = 80$$

Dosazením do vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice získáme dva možné výsledky.

$$x_2 = \frac{-70-230}{2} = \cancel{-150}$$

Jelikož délka strany nemůže být záporná, získali jsme jediné možné řešení $x = 80$.

Dosazením do zadání zjistíme, že je-li délka kratší strany 80 m, je druhá strana dlouhá 150 m.

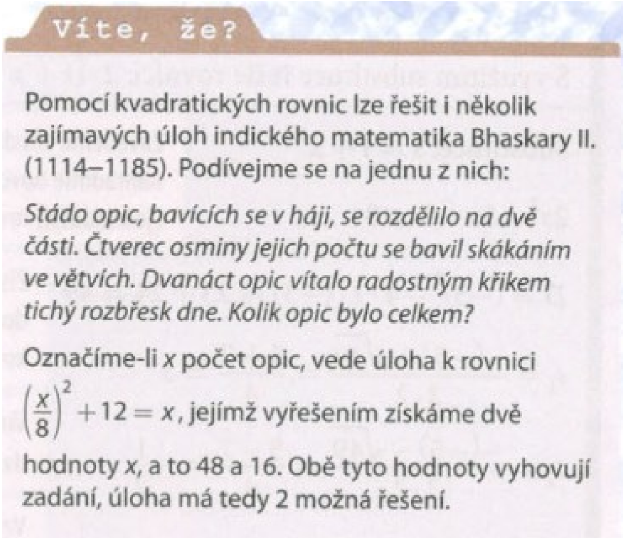
Zkouška:
$L = 80 \cdot 150 = 12\,000$
$P = 12\,000$
$L = P$

Součin délek kratší a delší strany obdélníku se musí rovnat zadané výměře.

Odpověď:
Pole je 80 m široké a 150 m dlouhé.

Obrázek 17 – Další slovní úloha zařazená v kapitole týkající se řešení kvadratických rovnic v učebnici od nakladatelství Didaktis (Cizlerová et al, 2013, str. 104)

Na str. 104 je zařazena další slovní úloha (viz Obr. 18) – tatáž úloha již byla zařazena v učebnici od nakladatelství Prometheus. Tentokrát je však již řešena, a to včetně konstatování, že úloha má dvě řešení.



Víte, že?

Pomocí kvadratických rovnic lze řešit i několik zajímavých úloh indického matematika Bhaskary II. (1114–1185). Podívejme se na jednu z nich:

Stádo opic, bavících se v háji, se rozdělilo na dvě části. Čtverec osminy jejich počtu se bavil skákáním ve větvích. Dvanáct opic vítalo radostným křikem tichý rozbřesk dne. Kolik opic bylo celkem?

Označíme-li x počet opic, vede úloha k rovnici $\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$, jejímž vyřešením získáme dvě hodnoty x, a to 48 a 16. Obě tyto hodnoty vyhovují zadání, úloha má tedy 2 možná řešení.

Obrázek 18 – Sekce „Víte, že?“ zaměřená na indickou úlohu řešenou kvadratickou rovnicí na str. 104 v učebnici od nakladatelství Didaktis (Cizlerová et al., 2013, str. 104)

Analýzou slovních úloh v učebnici od nakladatelství Didaktis bylo zjištěno následující rozložení typů slovních úloh:

- počet vzorově řešených úloh:
  V učebnici od nakladatelství Didaktis se nachází celkem 13 vzorově vyřešených slovních úloh; je poukázáno i na srovnání dvou způsobů řešení – užitím lineární rovnice a užitím soustavy rovnic.
- počet neřešených úloh zadaných žákům k procvičení:
  Učebnice neobsahuje žádné slovní úlohy, které by byly zařazené jako neřešené.
- počet úloh, které jsou označeny jako složitější („úlohy s hvězdičkou“):
  Takové úlohy v učebnici zařazené nejsou.
- počet obrázků zařazených v zadání nebo vzorovém řešení úlohy:
  V učebnici se nachází obrázek grafikonu. U každé z řešených slovních úloh o směsích se nachází obrázky, taktéž u každé řešené slovní úlohy o pohybu je možné najít obrázek. Celkově tak jde o 8 obrázků použitých v řešení slovních úloh a 10 obrázků vztahujících se ke slovním úlohám vedoucím k rovnicím a jejich soustavám.

1.2.3 Slovní úlohy v učebnici Martina Krynického

Všechny odstavce v této kapitole vznikly na základě analýzy příslušných lekcí zařazených v internetové učebnici Martina Krynického (viz http://www.realisticky.cz/).

Internetová učebnice obsahuje v sekci Matematika SŠ kapitolu *„Funkce a rovnice"*. V ní není, obdobně jako v učebnici od nakladatelství Prometheus, uvedena podkapitola zaměřená přímo na slovní úlohy. Je však možné najít téma týkající se slovních úloh jako součást několika lekcí[15] v rámci jednotlivých podkapitol. V podkapitole nazvané *„lineární rovnice a nerovnice"* hned čtyřikrát (Slovní úlohy vedoucí na lineární rovnice I, III, III, IV). V podkapitole zaměřené na *„některé rovnice a nerovnice převoditelné na lineární"* jsou k tématu slovních úloh zařazeny dvě lekce (Slovní úlohy vedoucí na soustavy rovnic I a II). Další dvě podkapitoly zabývající se slovními úlohami je možné najít v kapitole *„kvadratická funkce, kvadratické rovnice a nerovnice"*.

Hned v úvodu lekce nazvané Slovní úlohy vedoucí na lineární rovnice I je uvedeno, že ačkoli jsou zde slovní úlohy rozděleny do několika skupin, nepoužívá se obvyklé rozlišení na úlohy o společné práci, na úlohy o směsích atd. Krynický uvádí, že žáci mohou mít pak pocit, že všechny úlohy týkající se práce jsou řešeny stejným způsobem. Také je zde uvedeno, že všechny slovní úlohy jsou nazývány dále jako příklady. Krynický dále zmiňuje, že kromě správného řešení jsou v hodinách ukázány i *„nejzajímavější špatné nápady, které se ve třídě objeví."* (Krynický, 2023)

Z analýzy této lekce vyšlo najevo, že je v ní zařazeno 6 úloh.

Ve shrnutí lekce (viz Obr. 19) je uvedeno, že proměnné jsou voleny tak, aby bylo jasné, co v kontextu příslušné slovní úlohy představují (např. p označuje počet pětikorun a d označuje počet dvoukorun).

Shrnutí: Proměnné ve slovních úlohách značíme tak, aby bylo jasné, co zastupují.

Obrázek 19 – Závěrečné shrnutí lekce 2.2.10 v internetové učebnici realisticky.cz (Krynický, 2023)

Z analýzy lekce Slovní úlohy vedoucí na lineární rovnice II vyšlo najevo, že lekce obsahuje 9 příkladů. Ne každý z nich však obsahuje samotné řešení slovní úlohy – např. úloha označená jako př. 3 na str. 1–2 vede žáky k tomu, aby našli a opravili chyby v nesprávně sepsaných rovnicích k př. 2. (viz Obr. 20).

[15] Každá z lekcí je zpracována ve formě přípravy jedné vyučovací hodiny.

Př. 3: Následující rovnice jsou neúspěšnými pokusy o vyřešení předchozího příkladu. Pokus se je interpretovat a oprav chyby, které se v nich vyskytují.

a) $0,8k = 3000 + 0,5k$ b) $0,8k_o = 0,5(k_d + 3000)$

1

c) $0,8k_o + 0,5k_d + 3000 = v$ d) $0,8k + 0,5(k + 3000) = v$

e) $\frac{v}{0,8} = \frac{v}{0,5} + 3000 \cdot 0,5$

Obrázek 20 – Úkol zaměřený na opravu chyb v rovnicích, který je zařazený v lekci 2.2.11 na realisticky.cz (Krynický, 2023)

Lekce Slovní úlohy vedoucí na lineární rovnice III obsahuje celkem 8 řešených úloh, v lekci je navíc uvedena řada pedagogických poznámek. Úlohy jsou zaměřené na směsi a na společnou práci. Jako příklad je možné uvést úlohu č. 8 i s řešením a s pedagogickými poznámkami (viz Obr. 21). Zajímavá je druhá poznámka, která interpretuje použití rovnice

$$\frac{x}{20} - \frac{x}{30} = 1$$

v řešení úlohy 8.

Krynického text je zajímavý také v tom, že nabízí dva způsoby řešení příkladu 8 (viz Obr. 21).

Př. 8: Mistr společně s učedníkem postaví zeď za 20 hodin. Mistr sám by tuto práci vykonal za 30 hodin. Jak dlouho by zeď stavěl samotný učedník?

Mistr 30 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu $\frac{1}{30}$ práce.

Oba dva 20 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu $\frac{1}{20}$ práce.

Učedník x hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu $\frac{1}{x}$ práce.

Část udělaná za 1 hodinu mistrem + část udělaná za 1 hodinu učedníkem = část udělaná za 1 hodinu dohromady: $\frac{1}{30}+\frac{1}{x}=\frac{1}{20} \quad /\cdot 60x$.

$2x+60=3x$

$x=60$

Jiný postup řešení:

Práce udělaná mistrem + práce udělaná učedníkem = celá práce.

$20\left(\frac{1}{30}\right)+20\left(\frac{1}{x}\right)=1 \quad /\cdot 30x$ (oba pracují 20 hodin)

$20x+600=30x$

$10x=600$

$x=60$

Samotný učedník by zeď postavil za 60 hodin.

Pedagogická poznámka: Řešení tohoto příkladu dopadá často katastrofálně. I když jde o stejný příklad jako 1 (pouze neznáme jinou veličinu), studenti nejsou schopni rovnici sestavit.
Mám pocit, že problém spočívá v tom, že studenti se hlavně snaží vyřešit příklad a méně už popsat rovnicí realitu. Snažím se jim vysvětlit, že největší přínos proměnné tkví v tom, že nám umožňuje popsat rovnicí skutečnost i v případech, kdy neznáme její hodnotu. Jakmile přistupujeme k příkladu tímto způsobem, není mezi ním a prvním příkladem rozdíl, neznámá se pouze vyskytuje na jiném místě.

Pedagogická poznámka: Několikrát jsem se setkal s rovnicí $\frac{x}{20}-\frac{x}{30}=1$, která je sice správná, ale dost obtížně se interpretuje. Jde v podstatě o to, že v ní od toho, kolikrát by za dobu, za kterou by práci udělali oba společně, odečteme, kolikrát by práci vykonal za tuto dobu mistr, a tím získáme jedničku, která reprezentuje skutečnost, že učedník za tuto dobu práci udělá právě jednou. Pokud žák rovnici není schopen slovně popsat, nepovažuji jeho řešení za zcela správné.

Obrázek 21 – Zadání a řešení úlohy v lekci 2.2.12 na webu realisticky.cz (Krynický, 2023)

Lekce Slovní úlohy vedoucí na lineární rovnice IV obsahuje úlohy zaměřené na společnou práci. Zajímavým (netradičním) úkolem pro žáky je vytvořit vlastní zadání[16] k zadané rovnici s neznámou x.

Některé lekce se týkají přímo slovních úloh, které jsou řešeny užitím soustav lineárních rovnic. V lekci 2.3.18 (Slovní úlohy vedoucí na soustavy rovnic I) je popsána v úvodním textu ta skutečnost, že na základních školách většinou slovní úlohy učitelé zařadí do několika různých typů, které se žáci naučí řešit bez porozumění, vcelku automaticky. V další pedagogické poznámce uvedené ještě před prvním příkladem je dodáno, že *„některé slovní úlohy je možné řešit jednodušeji, když se nesnažíme sestavit jedinou rovnici s jedinou neznámou, ale sestavíme rovnic více s více neznámými“.* Krynický

[16] Tématem tvorby zadání k daným rovnicím se věnují detailněji Zhou a Huang (2019).

dodává, že volbu[17] ovlivňuje nejen konkrétní příklad, ale také to, který způsob nám více vyhovuje. V lekci je zařazeno celkem 6 řešených příkladů.

Lekce 2.3.19 (Slovní úlohy vedoucí na soustavy rovnic II) obsahuje obdobné úlohy jako předchozí lekce.

Další lekce se týkají slovních úloh vedoucích ke kvadratickým rovnicím. Lekce 2.5.13 (Slovní úlohy vedoucí na kvadratické rovnice) obsahuje sedm úloh. Obdobná úloha jako uvedený př. 4 (viz Obr. 22) byla zařazena už v učebnici od nakladatelství Prometheus (také v kapitole týkající se kvadratických rovnic, na str. 129). Na Obr. 22 je vidět, že součástí řešení je také stručná slovní legenda. Úloha v této lekci je na rozdíl od učebnice od nakladatelství Prometheus řešena.

Př. 4: Cena časopisu byla snížena o tolik procent, kolik korun stál před snížením ceny. Urči jeho původní cenu, jestliže po zlevnění stál 16 Kč.

Původní cena … x Kč

Nová cena ve formě zlomku … $\left(1-\frac{x}{100}\right)$

Nová cena … $x\left(1-\frac{x}{100}\right)=16$

$x-\frac{x^2}{100}=16$

$100x-x^2=1600$

$x^2-100x+1600=0$

$(x-20)(x-80)=0$

Dvě řešení: 20 Kč, 80 Kč.

Obrázek 22 – Úloha s cenou časopisu vedoucí ke kvadratické rovnici v internetové učebnici realisticky.cz (Krynický, 2021)

Lekce 2.5.14 (Slovní úlohy o pohybu) pak obsahuje sedm příkladů. Nechybí opět několik pedagogických poznámek.

Jednotlivé počty úloh jsou následující:

- počet vzorově řešených úloh:
  V internetové učebnici Martina Krynického jsou vesměs všechny úlohy řešené; jedinou výjimkou jsou úlohy zadané na procvičení ze sbírky od autorky Petákové. V analyzovaných kapitolách tak jde celkem o 43 příkladů, které se týkají slovních úloh řešitelných rovnicemi nebo jejich soustavami.

[17] Volbu mezi využitím rovnice a využitím soustavy rovnic.

- počet neřešených úloh zadaných k procvičení:
  K procvičení jsou doporučené úlohy ze sbírky od autorky Petákové, zadání příslušných úloh je uvedeno na konci většiny analyzovaných lekcí. Jde o celkem 15 úloh doporučených k dalšímu procvičení.
- počet úloh, které jsou označeny jako složitější („úlohy s hvězdičkou“):
  Krynický ve svých zpracovaných hodinách nemá žádné úlohy explicitně označeny jako složitější než ostatní.
- počet obrázků zařazených v zadání nebo vzorovém řešení úlohy:
  Obrázky v zadání ani v řešení úloh použity nejsou.

1.2.4 Srovnání vybraných učebnic

V závěru podkapitoly 1.2 jsou shrnuty zjištěné podobnosti a rozdíly mezi třemi analyzovanými učebnicemi zjištěné v předchozích podkapitolách. Detaily jsou zaznamenány v následující tabulce (Tab. 2).

Učebnice	Vzorově řešené úlohy	Neřešené úlohy	„Úlohy s hvězdičkou“	Obrázky
Prometheus	Jsou obsaženy. Celkem jedná se o pět úloh.	Nacházejí se na konci kapitoly. Jedná se o 26 úloh.	Ano, jsou jasně odlišeny od ostatních.	Obrázek grafikonu a obrázek při grafickém řešení úlohy o pohybu (2 různé obrázky)
Didaktis	Ano, celkem 13 úloh.	Nejsou.	Nejsou jasně odlišeny od ostatních.	Obsahuje grafikon a větší počet obrázků při řešení slovních úloh o směsích a pohybu – celkem 18 obrázků.
Krynický	Naprostá většina, 43 úloh.	Jedná se o 15 úloh.	Nejsou jasně odlišeny od ostatních.	Neobsahuje žádnou obrázkovou legendu.

Tabulka 2 – Srovnání vybraných učebnic

1.3 Žákovské strategie řešení matematických slovních úloh

V empirické části této práce je sledováno mimo jiného také používání tzv. povrchových strategií (pracuje s nimi i jedna z výzkumných otázek položených v úvodu práce).

O povrchových strategiích a jejich používání podrobněji pojednává Vondrová (2020). V tomto článku je na slovní úlohu nahlíženo jako na úlohu, která je zasazená do nějakého kontextu. V článku je popsán proces řešení slovní úlohy v následujících pěti fázích[18]:

I. Zpracování zadání slovní úlohy do tzv. sémantického modelu

- *„porozumění textu ve smyslu překladu obtížných slov, zjednodušení gramaticky složitých vět, převyprávění úlohy vlastními slovy"*

II. Vytvoření tzv. situačního modelu

- takový model *„stanovuje problém, o co v zadání jde, k čemu má řešení směřovat"*
- Vondrová (2020) uvádí podle Novotné (2000), že *„součástí této fáze je zaznamenání klíčových aspektů situačního modelu prostřednictvím tzv. zápisu nebo legendy"*

III. Konstrukce tzv. matematického modelu

- *„na základě procesu abstrahování situačního modelu"*
- jde např. o výpočet, rovnici, schéma.

IV. Provedení výpočtu, vyřešení rovnice apod.

- *„včetně případné numerické zkoušky"*

V. Provedení tzv. sémantické zkoušky

- Jak uvádí Nováková (2016) podle Stehlíkové (1995), žák při provádění této zkoušky ověřuje, zda výsledek úlohy vyhovuje kontextu úlohy a(nebo) realitě; v případě nevyhovění následuje oprava.
- Součástí je také *„vytvoření odpovědi, v níž je výsledek interpretován v kontextu situace úlohy i reálného světa"*

(Vondrová, 2020; mírně upraveno)

O povrchové strategii řešení pak lze mluvit v případě, kdy se žák nesnaží sestavit situační model, a rovnou se pokouší vyvodit přímo model matematický, a to na základě různých povrchových aspektů zadání. (Vondrová, 2020)

[18] Sestaveno podle Reussera (1985).

Jak dodává autorka, při rozhovorech s žáky uvedených v publikaci od Vondrové a kol. (2019) se ukázalo, že někteří žáci se k povrchovým strategiím uchýlili jako ke své první volbě – přešli tedy k matematickému modelu, aniž by sestavili model situační. V další kapitole článku jsou sledovány konkrétní případy, kdy se žák o řešení pokusil, avšak kdy řešení úlohy nebylo založeno na porozumění v zadání popisované situace, ale *„spíše na povrchové struktuře úlohy."*

Jedna z příčin povrchových strategií řešení slovních úloh je volba čísel do zadání – strategie návodných čísel. Jak je v témže článku dále uvedeno na str. 70, „návodnost" čísel může vést např. k operaci dělení bez vytvoření situačního modelu. Z mnoha příkladů uvedených v článku byl vybrán následující příklad použití strategie návodných čísel, známý i z výuky didaktiky matematiky.

„Firma provozuje luxusní plachetnice pro výlety na moři. Na každé plachetnici se plaví 40 turistů, o které se musí starat 30 členů posádky. Minulý týden se plavilo na lodích celkem 600 turistů. Kolik členů posádek se o ně staralo?" (Vondrová, 2020)

Je zajímavé, že cca 8 % žáků 6. ročníku, kterým byla úloha zadána, začalo úlohu řešit podílem $600 : 30 = 20$. Ze zmíněných rozhovorů vyplynulo, že tak někteří řešitelé neučinili proto, že by chtěli počet turistů dělit počtem členů posádky, ale proto, že je číslo 30 dělitelem čísla 600. (Vondrová, 2020)

Jako druhou povrchovou strategii je možné uvést strategii signálních slov, o které píše Hejný (2014). Strategie signálních slov je použita tehdy, jestliže žák ze zadání úlohy vybere několik čísel a následně se snaží na základě klíčových slov (o nich se mluví i jako o signálech) dedukovat příslušný matematický model. V některých jednodušších typech úloh může být tato strategie úspěšná – může vést ke správnému řešení. Abychom si ověřili, zda žák vytvořil situační model, v takovém případě se jeví jako vhodné zadat úlohy obsahující tzv. antisignál. O úlohách s antisignálem více dodává Hejný (2014) na str. 51 – jedná se o úlohy, ve kterých signální slovo (nebo slova) navádějí na operaci opačnou, než je ta, která vede ke správnému řešení.

Další uváděnou povrchovou strategii v článku lze vhodně spojit s problematikou článku, jehož autory jsou Zhou a Huang (2019) (viz kapitola 1.1). Jde o strategii, kterou nazývá Vondrová (2020) „porovnání s prototypickou úlohou". Strategie je založena na zařazení řešené úlohy do některého typu – žáci se při použití takové strategie snaží o vybavení si některé prototypické úlohy.

V empirické části bude při analýze výřezů k vidění jev, který je nazýván jako *iluze linearity*, takto tento jev označuje De Bock a kol. (2007). Jev je speciálním typem strategie spočívající v hledání prototypické situace pro řešenou slovní úlohu – jako příklad lze uvést výše uvedený popis řešení úlohy s plachetnicemi při jednom z rozhovorů – popis toho, co si pod iluzí linearity představit, ilustruje Vondrová (2020) na následujícím příkladu: jeden z žáků 6. ročníku vysvětlil svůj postup řešení úlohy s plachetnicemi následujícím způsobem: *„No, protože když je jich 40, tak se stará 30, takže když jich bude 600, tak se bude starat 500.“* Takové řešení je zjevně založeno na podobnosti s úlohou zaměřenou na úměrnost (jde však o podobnost povrchovou).

Jiná žákovská řešení obsahovala výpočet rozdílu $600 - 10 = 590$, i takový postup je zřejmě ovlivněn iluzí linearity; žáci tento postup odůvodňovali tím, že i rozdíl mezi 40 a 30 je 10. (Vondrová, 2020)

Článek autorky Vondrové obsahuje také popis možných didaktických příčin používání uvedených povrchových strategií. Lze očekávat, že některé z nich se ukážou jako zjevná překážka pro vyřešení úlohy při analýze výřezů v empirické části.

Jednou z příčin chybných řešení je problematika tvorby zápisu. Při rozhovorech s žáky se někteří žáci vyjadřovali v tom smyslu, že jako první krok musejí udělat zápis. Nenaznačovali, že by bylo potřeba udělat si předem představu o situaci a vytvořit situační model – např. si situaci nějak zaznamenat (či např. převyprávět vlastními slovy). Naopak, ukázalo se, že vyhledávají klíčová (signální) slova. Vyšlo najevo, že vyhledávají taková slova, která naznačují některou operaci. Zajímavé je, že byla občas patrná také obava, jestli dělají zápis „správně“[19] – ukazuje se, že návyk „jako první musím vždy udělat zápis“ může být *„kontraproduktivní i v tom, že žáci očima přebíhají od zadání slovní úlohy k zápisu, místo aby si nejdříve přečetli celé zadání a soustředili se na význam celé úlohy.“* (Vondrová, 2020)

Vondrová (2020) mluví dále také o několika psychologických příčinách neúspěchu při řešení slovních úloh – mezi ně může být zařazena např. naučená bezmocnost a nízká důvěra žáka ve vlastní schopnost řešit úlohu.

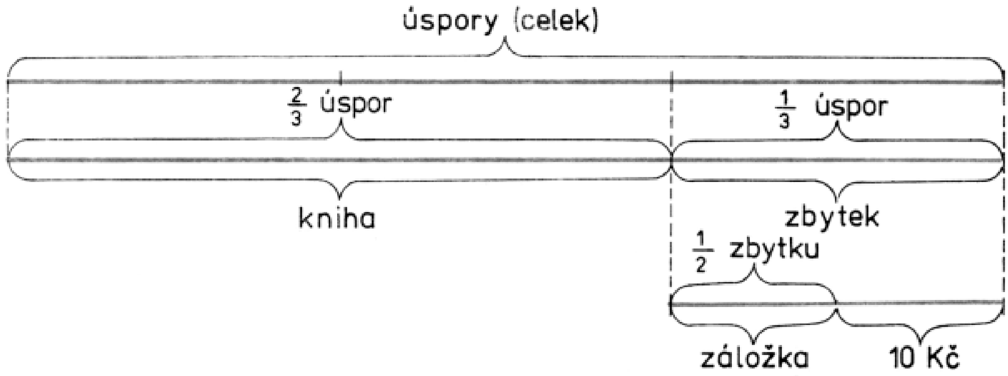
Další z kapitol, kterou zařadila do článku Vondrová (2020), se zabývá vizuální reprezentací slovní úlohy. Toto téma je důležité vzhledem k práci s výřezy – bude

[19] Je možné, že jsou žáci nevědomky vedeni vyučujícími k tomu, že existuje jediný správný způsob, jak zápis udělat.

sledováno také to, v kolika případech se objevil obrázek či schéma. Dále v článku je uvedeno, že metastudie, kterou provedl Hembree (1992), ukázala, že na řešení slovních úloh má pozitivní vliv používání náčrtů a obrázků. Jako příklad takového použití obrázku v řešení úlohy může být uvedena ilustrace modelu pro řešení úlohy z učebnice matematiky pro primu, od nakladatelství Prometheus. Zadání úlohy je převzato z článku autorky Vondrové (2020).

„Mirek se rozhodl koupit za uspořené peníze dárky k narozeninám pro svou sestru. Nejprve jí koupil knihu, za kterou zaplatil 2/3 svých úspor. Za polovinu zbytku pak koupil do knihy záložku a ještě mu zbylo 10 Kč na karafiát. Kolik korun měl Mirek na nákup dárků?“ (Vondrová, 2020, str. 86)

Způsob řešení je patrný z Obr. 23 – lze z něj také vyčíst řešení úlohy.



Obrázek 23 – Vizuální model úlohy (Vondrová, 2020)

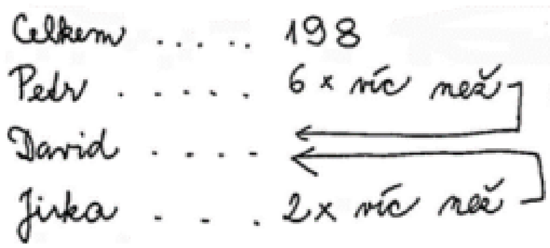
Sledování řešení slovních úloh užitím obrázků bylo zařazeno do analýzy učebnic v kapitole 1.2 této diplomové práce. K vizuálním modelům úlohy bude obrácena pozornost znovu v empirické části během analýzy výřezů – jedna z výzkumných otázek položených v úvodu se totiž zaměřuje právě na použití obrázkových legend v řešení.

Dále bude představeno několik typů tzv. legendy, kterou někteří žáci používají při řešení slovních úloh. Jako příklad je uvedeno použití jednotlivých legend při žákovském řešení následující úlohy.

„Petr, David a Jirka hrají kuličky. Dohromady mají 198 kuliček. Petr má šestkrát více kuliček než David a Jirka má dvakrát více kuliček než David. Kolik kuliček má Petr, kolik David a kolik Jirka?“ (Novotná, 2000, str. 30)

Při rozhovorech vyučujících s žáky a při sledování používání legend u našich žáků se ukazuje, že nejčastěji žáci využívají tzv. slovní legendu (příklad je uveden na Obr. 24) –

jedná se o stručnější záznam zadání, který je sestaven z vybraných slov (resp. jejich zkratek) obsažených v textu zadání. (Vondrová et al., 2020, str. 17)



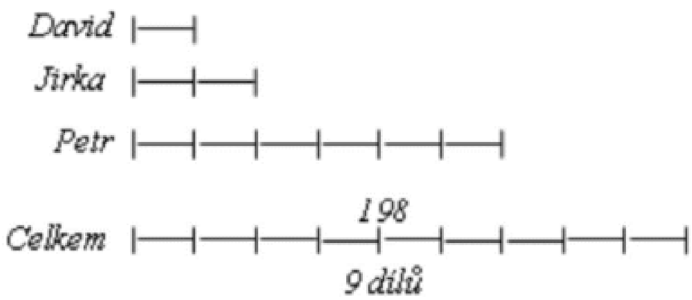
Obrázek 24 – Slovní legenda (Vondrová et al., 2020, str. 17)

Někdy bývá slovní legenda doplněna o tečky, svorky, šipky apod. Jsou-li informace uspořádány do tabulky, pak hovoříme o speciálním typu slovní legendy, a to o tzv. tabulkové legendě (příklad takové legendy je na Obr. 25). (Vondrová et al., 2020, str. 17)

David	1 díl	
Petr	6 dílů	
Jirka	2 díly	
Celkem	9 dílů	198

Obrázek 25 – Tabulková legenda (Vondrová et al., 2020, str. 17)

Další způsob zachycení informací obsažených v zadání patří k jednomu z nejstarších nástrojů užívaných při řešení úloh. Jedná se o tzv. legendu obrázkovou (viz Obr. 26). Tu žák použije tehdy, když zaznamená informace obsažené v zadání do formy obrázku nebo schématu odpovídajícímu kontextu obsaženém v úloze (vše s různou mírou věrnosti). (Vondrová et al., 2020, str. 17)



Obrázek 26 – Obrázková legenda (Vondrová et al., 2020, str. 17)

Co se týká tvorby legend, žáci mohou vytvořit i kombinované zápisy. To, jakou legendu žák zvolí při řešení příslušné úlohy, je ovlivněno tím, jaké legendy jsou žákům předkládány (nebo dokonce tím, které legendy jsou po žácích vyžadovány učitelem).

Je důležité, aby byli žáci seznámeni s co nejrozmanitějšími metodami, jak je možné vytvořit pro příslušnou úlohu legendu – a co víc, aby měli žáci možnost vybrat si ten způsob, kterému dávají přednost, a ten si zvolit k řešení. Na tvorbě legendy jako na aktivním procesu by se měli podílet žáci. (Vondrová et al., 2020, str. 17)

O tvorbě legendy také pojednávají Heater, Howard, Linz (2012). Je nutné zmínit, že příslušný článek je součástí časopisu[20] o vzdělávání žáků s poruchami učení. Popsaná metoda je tedy použitelná v zásadě v inkluzivní třídě a také ve třídě, do které docházejí žáci s poruchami učení. V kontextu řešitelských strategií je vhodné zmínit i následující postup pro řešení slovních úloh, který by mohl být užitečný právě pro tyto žáky.

Článek pracuje s akronymem PIES, který může být použit k popsání procesu[21] řešení slovní úlohy (řešitelné užitím rovnice), a to ve čtyřech krocích. PIES se skládá z prvních písmen následujících slov.

I. ***P = picture***

V této fázi žáci nakreslí jednoduchý obrázek (náčrtek), který je založen na situaci popsané v zadání slovní úlohy.

II. ***I = information***

Je vhodné nalézt podstatné informace v textu, zakroužkovat v něm klíčová slova a sepsat je vedle obrázku.

III. ***E = equation***

V této fázi řešení je potřeba sestavit rovnici, která vyhovuje informacím ze zadání. Rovnice by měla být v souladu s informací v obrázku.

IV. ***S = solve***

Vyřešení rovnice vede k vytvoření odpovědi.

(Heater, Howard, Linz, 2012)

Jednotlivé kroky procesu řešení jsou v článku ilustrovány na řešení následující slovní úlohy o pohybu (volně přeloženo):

„Carla jela rychlostí 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Zrychluje se zrychlením 2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Pokud je její rychlost nyní nově 20 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, po jak dlouhou dobu zrychlovala?“ (Heater, Howard, Linz, 2012)

---

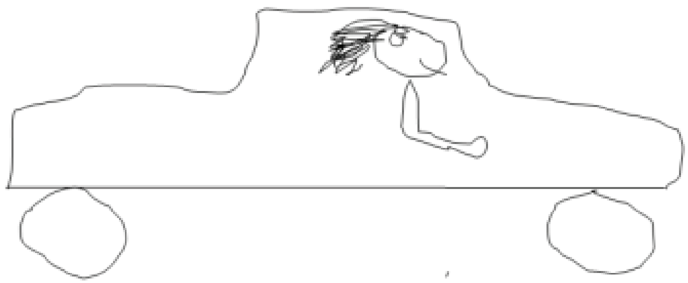
[20] Journal of Science Education for Students with Disabilities (https://scholarworks.rit.edu/jsesd/).

[21] Lze porovnat s popisem procesu řešení slovní úlohy uvedeným podle Vondrové (2020).

Jak autoři článku uvádějí pod zadáním úlohy, řešení úlohy vede k jednoduché rovnici $10 + 2x = 20$. Nicméně pro mnoho žáků se specifickými poruchami učení může být řešení nepřekonatelným problémem – jde především o slovní aspekt úlohy. Možnou reakcí žáků na tento typ úlohy je jednoduše úlohu přeskočit, v případě nabízení odpovědí (multiple choice) jednu z odpovědí zvolit; následně pokračovat k další úloze.

Prvním krokem pro žáky při řešení úlohy uvedené v příkladu výše je přečtení celého zadání úlohy. Dále je potřeba shromáždit dostatek informací k nakreslení nějakého náčrtku, jednoduchého obrázku, který by reprezentoval situaci popsanou slovy. Cílem je, aby žáci mohli od něčeho začít. Už nejsou ve stádiu, kdy by se „jen" dívali na slova v zadání. Už v tuto chvíli provedli něco, co by jiní žáci možná ani neudělali – začali slovní úlohu řešit. (Heater, Howard, Linz, 2012)

Jako příklad může být uveden obrázek k dané pohybové úloze (Obr. 27).



Obrázek 27 – Navržený obrázek k prvnímu kroku procesu řešení pohybové úlohy uvedené v článku (Heater, Howard, Linz, 2012)

V další fázi by měli žáci najít relevantní informace, které by mohly být přidány k vytvořenému obrázku. Žáci postupně čtou nahlas zadání a jakmile někdo z žáků dojde k názoru, že právě byla přečtena klíčová informace, řekne „stop". Následně může probíhat diskuse o tom, proč se žáci rozhodli říct „stop" právě zde, proč je podle nich informace pro vyřešení podstatná, resp. zda je např. informace o rychlostech či zrychlení v zadání relevantní (a zda jsou tyto informace pro vyřešení podstatné). Informace mohou zakroužkovat a následně přidat k obrázku. V další fázi řešení po diskusi dojdou žáci k sestavení rovnice. Autoři dodávají, že v některých případech je možné dodat žákům seznam několika rovnic, z nichž mají vybrat tu správnou. Vyřešením rovnice a sestavením odpovědi je popisovaný proces uzavřen. (Heater, Howard, Linz, 2012)

Při zpracování této kapitoly je vycházeno dále také z práce autorů Novotná, Eisenmann, Přibyl (2015) tak, jak ji zpracovala Vondrová a kol. (2020) na str.17–18. Níže je uveden výčet několika skupin strategií, které žák může použít při řešení slovní úlohy.

- *Pokus*: strategie, při níž řešitel plní cíl „vyřešit problém"; nebere v úvahu, zda úlohu správně vyřešil;
- *Přímý způsob*: strategie, která je založena na použití naučené strategie, algoritmu – řešitel zná nejen požadovaný sled kroků, ale také si uvědomuje, že je na místě jej použít;
- *Heuristická strategie*: jde o označení těch strategií, v nichž řešitel nezná příslušný sled kroků nebo jej není schopen použít; je však k řešení úlohy motivován.

V článku Vondrové (2020) je seznam několika příkladů konkrétních heuristických strategií. Jednou z nich je strategie „řešitelský obrázek", která spočívá v tom, že úlohu znázorníme prostřednictvím obrázku, v němž vyznačíme to, co známe (můžeme vyznačit také to, co máme najít); někdy může k řešení dopomoci dokreslení. Příkladem může být i využití grafů funkcí.

1.4 Koncepce testu z matematiky společné části maturitní zkoušky

Na závěr teoretické části bude stručně pojednáno o podobě testu zadávaného v rámci maturitní zkoušky z matematiky. Celá podkapitola vychází z webu CZVV.

Z analýzy zadání didaktických testů (dostupných na https://maturita.cermat.cz/menu/testy-a-zadani-z-predchozich-obdobi/matematika/testy-a-zadani-matematika) vyšlo najevo, že od roku 2016 do roku 2021 obsahoval test 26 úloh; od roku 2022 obsahoval test zatím vždy 25 úloh.

Zkouška z matematiky je uskutečňována pouze formou písemného didaktického testu, jak je uvedeno v katalogu požadavků, a jak také vyplývá ze školského zákona 561/2004 Sb. (§ 78). Test je tvořen několika typy úloh a jejich svazků – jde o úlohy uzavřené (s jedinou správnou odpovědí), otevřené úlohy (se stručnou odpovědí, ale také se širokou). U každé z úloh v didaktickém testu z matematiky je uvedena také příslušná bodová hodnota. (CZVV, 2014, Katalog požadavků platný od školního roku 2015/2016)

Žáci smějí při řešení testu z matematiky používat Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy, dále také rýsovací pomůcky a kalkulátor[22]. (CZVV, 2014, Katalog požadavků platný od školního roku 2015/2016)

Součástí katalogu požadavků je na str. 13 také tabulka, která zachycuje orientační zastoupení tematických okruhů, tzv. skupin požadavků, v maturitním didaktickém testu (viz Tab. 3). (CZVV, 2014, Katalog požadavků platný od školního roku 2015/2016)

Tematické okruhy	Zastoupené v testu (v %)
1. Číselné množiny	4–12
2. Algebraické výrazy	8–18
3. Rovnice a nerovnice	12–20
4. Funkce	10–20
5. Posloupnosti a finanční matematika	4–14
6. Planimetrie	8–18
7. Stereometrie	4–12
8. Analytická geometrie	4–14
9. Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika	4–14

Tabulka 3 – Orientační zastoupení tematických okruhů z katalogu požadavků ke společné části maturitní zkoušky z matematiky

V katalogu je jako součást seznamu požadavků uvedeno, že *„žák dovede užít lineární rovnice a jejich soustavy při řešení slovní úlohy"* a *„žák dovede užít kvadratickou rovnici při řešení slovní úlohy."* (CZVV, 2014, Katalog požadavků platný od školního roku 2015/2016)

[22] *„bez grafického režimu, řešení rovnic a úprav algebraických výrazů"* (CZVV, 2014, Katalog požadavků platný od školního roku 2015/2016)

2 Empirická část

Cílem empirické části je popsat[23] způsoby řešení, které využívají maturanti při řešení slovních úloh. V této části jsou analyzována řešení slovních úloh řešitelných soustavami rovnic, nicméně jsou sledována i jiná použitá řešení (např. užitím obrázků).

V empirické části práce jsou zdůrazněny některé nesprávné postupy řešení, které poukazují na skutečnost, že žáci mají tendenci používat povrchové strategie při řešení vybraných úloh. Všechny postupy jsou doloženy v části 2.4 prostřednictvím příslušných výřezů.

Další podkapitola empirické části obsahuje zpracované psychometrické vlastnosti zvolených úloh, a to na základě dat poskytnutých ke konkrétním variantám testů. V této části je kromě několika charakteristik úlohy sledována také obtížnost[24] úlohy vzhledem k ostatním úlohám v příslušném didaktickém testu; pro tento účel je použita kvantitativní metoda.

2.1 Zvolený vzorek úloh

Vybraných pět úloh jsem zvolil výhradně z jarních termínů společné části maturitní zkoušky. Tyto úlohy byly zvoleny pro analýzu z toho důvodu, že jsou z hlediska požadovaného postupu řešení obdobné, navíc jsou všechny tzv. široce otevřené – žáci musejí pro získání alespoň jednoho bodu uvést postup řešení. V sadě výřezů z databáze CZVV tedy bylo možné sledovat nejen samotné odpovědi („výsledná čísla“), ale také různé řešitelské strategie.

Každá z úloh měla v zadání explicitně uvedeno, že má být řešena užitím rovnice nebo soustavy rovnic. Následoval text informující maturanty o tom, že mají do záznamového archu uvést celý postup řešení, od roku 2018 i jaké součásti má tento postup obsahovat (označení proměnných, rovnici nebo soustavu rovnic včetně řešení a odpověď); takový text je v zadání úloh v této práci vynechán – text neobsahuje informaci, která by byla potřebná k vyřešení samotné úlohy.

[23] Jak již bylo zmíněno, použitá metodologie je kvalitativní.

[24] Je nutné zdůraznit, že cílem práce není srovnávat jednotlivých pět úloh mezi sebou z hlediska obtížnosti. Je přirozené, že obtížnosti úloh v didaktických testech zasazených do příslušných tematických celků by se měly v různých variantách měnit. Pokud by tomu tak nebylo, tak by se mnozí žáci připravovali jen na stabilně snazší úlohy. Nelze tedy ani předpokládat, že by vybraných pět úloh mělo být obtížnostně srovnatelných.

V práci jsou detailně analyzována řešení následujících slovních úloh.

- **jaro 2016; úloha 14 – cena knihy:**

„Petr s Radkem si chtějí koupit stejnou knihu. Petrovi ke koupi knihy 250 korun chybí, Radkovi naopak 150 korun přebývá. Radek má třikrát více korun než Petr.
Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtěte cenu knihy."

- **jaro 2017; úloha 15 – mince:**

„Na stole jsou dvě hromádky mincí. Obě hromádky obsahují pouze pětikorunové a dvoukorunové mince. První hromádka s 32 mincemi obsahuje pětinu všech pětikorunových mincí a polovinu všech dvoukorunových mincí. Druhá hromádka obsahuje zbývajících 68 mincí.
Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtěte v korunách hodnotu všech mincí na stole."

- **jaro 2018; úloha 15[25] – kapitál:**

„Pan Kocour uvažuje o výhodné investici, ale jeho kapitál by pokryl jen třetinu investice. Proto nabídl spoluúčast panu Malému, jehož kapitál je o 200 milionů korun vyšší než kapitál pana Kocoura. Aby společně pokryli celou investici, každý z nich uvolní přesně polovinu svého kapitálu.
Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtěte v korunách
15.1 hodnotu kapitálu pana Kocoura,
15.2 částku, kterou na investici uvolní pan Malý."

- **jaro 2019; úloha 14 – výrobky:**

„Během prvních 5 dnů se vyrobilo denně v průměru o čtvrtinu výrobků méně, než se vyrobilo v každém z 10 následujících dnů. Celkem se tak za 15 dnů vyrobilo 2 200 výrobků.
Užitím rovnice nebo soustavy rovnic určete celkový počet výrobků vyrobených za prvních 5 dnů."

- **jaro 2020; úloha 14 – čtení knihy:**

„Aleš a Blanka začali současně číst knihu, která má 240 stran. Aleš četl každý den stejný počet stran. Blanka četla denně o 4 strany více než Aleš, a to včetně pátku, kdy knihu dočetla. Aleš pak pokračoval oba víkendové dny, než knihu dočetl.
Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtěte, kolik stran knihy četl denně Aleš."

[25] Zadání úlohy 15 z roku 2018 je rozděleno na dvě části, které jsou označeny jako 15.1 a 15.2.

Každá ze sérií výřezů rozřazených podle jednotlivých ročníků byla po komunikaci s pracovníkem CZVV přidána do systému Certis. Do systému byly původně série zařazeny v počtu 6000 výřezů; v jeden okamžik nemohly být k dispozici všechny série. Od ročníku 2017 byla funkcionalita systému naprogramována na automatické vymazání prázdných výřezů – v každém ročníku vyjma prvního analyzovaného tak byly systémem automaticky eliminovány ty výřezy, které byly vyplněny z méně než 0,01 %. Při analýze řešení úlohy z roku 2016 (cena knihy) bylo nutné prázdné výřezy eliminovat manuálně, v dalších ročnících je již automaticky eliminoval systém. Do sledovaného vzorku výřezů také nebyla zařazena řešení žáků s přiznanými uzpůsobenými podmínkami. Počty analyzovaných výřezů spolu s používaným označením úlohy uvádí následující tabulka (viz Tab. 4).

Rok (označení úlohy)	Počet analyzovaných[26] výřezů (relativní četnost[27])
2016 (cena knihy)	6000 (35 %)
2017 (mince)	3987 (25 %)
2018 (kapitál)	4420 (30 %)
2019 (výrobky)	2099 (15 %)
2020 (čtení knihy)	3272 (25 %)

Tabulka 4 – Počty analyzovaných výřezů v systému Certis

Následující podkapitola obsahuje výstup analýzy a priori provedené před rozborem jednotlivých výřezů.

2.2 A priori analýza řešení daných úloh

V této kapitole jsou navrženy možné způsoby řešení jednotlivých pěti úloh. Texty jejich zadání je možné najít v podkapitole 2.1.

Analýza a priori je provedena podle ročníku příslušného testu chronologicky. Detailně komentuji u každé z úloh několik způsobů řešení.

2.2.1 Jaro 2016 – cena knihy

1. Řešení užitím rovnice, z níž zjistím částku Petra.

[26] Každý z těchto výřezů byl analyzován v prostředí IS Certis.
[27] Z celkového počtu řešitelů příslušného testu; zaokrouhleno na celá procenta.

Označím p částku v korunách, kterou má Petr. Podle zadání má pak Radek $3p$ korun. Sestavím odpovídající rovnici a vyřeším:

$$\begin{aligned} p + 250 &= 3p - 150 \\ 400 &= 2p \\ p &= 200 \end{aligned}$$

Cena knihy v korunách je pak zřejmě $200 + 250 = 3 \cdot 200 - 150 = 450$.

Očekávám, že pokud budou žáci řešit úlohu rovnicí, pravděpodobně namísto proměnné p využijí proměnnou x.

2. Řešení užitím rovnice, z níž zjistím částku Radka.

Označím r částku v korunách, kterou má Radek. Podle zadání má Petr třikrát méně korun než Radek, tj. $\frac{r}{3}$ korun, a tedy platí:

$$\begin{aligned} \frac{r}{3} + 250 &= r - 150 \\ 400 &= \frac{2r}{3} \\ r &= 600 \end{aligned}$$

Cena knihy v korunách je pak:

$$\frac{600}{3} + 250 = 600 - 150 = 450.$$

I při použití tohoto postupu řešení lze očekávat, že namísto proměnné r využijí mnozí maturanti proměnnou x.

3. Řešení užitím soustavy rovnic.

Označím p částku v korunách, kterou má Petr, a r částku v korunách, kterou má Radek. Pak platí:

$$\begin{cases} r = 3p \\ p + 250 = r - 150 \end{cases}$$

Soustava má řešení $p = 200$ a $r = 600$.

Cena knihy je tak $200 + 250 = 600 - 150 = 450$ korun.

U řešení užitím soustavy rovnic očekávám, že většina žáků použije proměnné x, y.

U soustavy rovnic nerozlišuji řešení s použitím antisignálu a bez něj – jedná se o ekvivalentní soustavu rovnic, řešením je tatáž uspořádaná dvojice $[p; r]$.

Pro každou z přechozích navržených variant řešení lze očekávat, že žák(yně) vypočte hodnotu neznámé, a prohlásí ji nesprávně za výsledek úlohy. Tedy např. vyjde-li hodnota $p = 200$, bude v odpovědi napsána částka 200 korun.

4. Řešení užitím rovnice, z níž zjistím cenu knihy.

Zvolím neznámou k jako cenu knihy v korunách. Petr má částku $k - 250$ korun, Radek pak má $k + 150$ korun. Dle zadání platí:

$$\begin{aligned} 3(k - 250) &= k + 150 \\ 3k - 750 &= k + 150 \\ 2k &= 900 \\ k &= 450 \end{aligned}$$

I nyní lze očekávat, že pokud budou žáci řešit úlohu rovnicí, namísto proměnné k využijí mnozí proměnnou x.

5. Řešení „úvahou“ bez použití rovnice[28].

Rozdíl v částkách Petra a Radka v korunách je celkem $250 + 150 = 400$, což podle zadání odpovídá dvěma „dílkům“, přičemž jeden „dílek“ odpovídá částce Petra v korunách (má-li totiž Radek třikrát více než Petr, je rozdíl obou částek zřejmě roven dvojnásobku částky Petra v korunách).

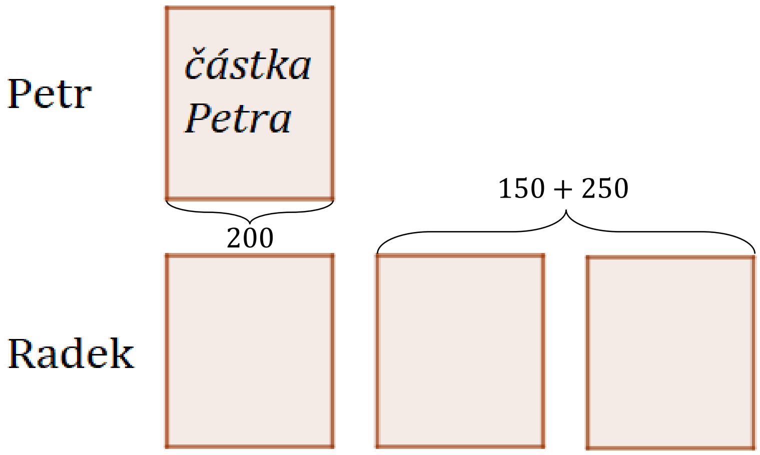
Dva popsané „dílky“ tak odpovídají celkem 400 korunám, a tedy částka Petra je právě 200 korun.

Cena knihy je pak o 250 korun vyšší než částka v korunách, kterou má Petr, a tedy cena knihy je 450 korun.

6. Řešení užitím obrázkové legendy či jiného nákresu.

Bude mě zajímat, zda někdo z řešitelů využil k řešení (ať už správnému či nesprávnému) libovolný obrázek, který by mohl napomoci k řešení úlohy, např. obrázková legenda na Obr. 28[29].

[28] V zadání každé z pěti úloh se požaduje řešení úlohy užitím rovnice nebo soustavy rovnic.
[29] Obrázek je autorský, vytvořený v programu GeoGebra.



Obrázek 28 – Navržená obrázková legenda (lze vyčíst, že částka Petra je 200 korun, a tedy cena knihy je 450 Kč)

7. Řešením užitím povrchové strategie.

Použití povrchové strategie v některé podobě: např. pokud žák vypočte rozdíl částek: $250\text{ Kč} - 150\text{ Kč} = 100\text{ Kč}$, a tedy cena knihy je (chybně) $3 \cdot 100\text{ Kč} = 300\text{ Kč}$ atp.

8. Ostatní řešení.

Lineární rovnice a jejich soustavy je také možné řešit graficky. Využití grafického řešení však nelze očekávat.

2.2.2 Jaro 2017 – mince

1. Řešení užitím soustavy rovnic – „každá hromádka zvlášť“.

Označím-li p počet pětikorun a d počet dvoukorun na stole, pak platí podle zadání:

$$\begin{cases} \frac{1}{5}p + \frac{1}{2}d = 32 \\ \frac{4}{5}p + \frac{1}{2}d = 68 \end{cases}$$

Řešením soustavy je $d = 40$ a $p = 60$. Celková hodnota všech mincí na stole je tak zřejmě $40 \cdot 2 + 60 \cdot 5 = 80 + 300 = 380$ korun.

2. Řešení užitím soustavy rovnic – „první (resp. druhá) hromádka a všechny mince“.

Je zřejmé, že celkově je na stole 100 mincí. Označím-li p počet pětikorun a d počet dvoukorun, platí:

$$\begin{cases} \frac{1}{5}p + \frac{1}{2}d = 32 \\ p + d = 100 \end{cases}$$

Stejně jako v předchozím způsobu řešení zjistím, že řešením soustavy je $d = 40$ a $p = 60$. Celková hodnota všech mincí na stole je tak 380 korun.

Analogickou soustavu rovnic lze sestavit i pro „druhou hromádku a všechny mince“.

3. Řešení užitím rovnice, z níž zjistím počet pětikorun (resp. počet dvoukorun) na stole.

Označím celkový p počet pětikorun. Pak je dvoukorun zřejmě $100 - p$. Podle zadání platí:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}p + \frac{1}{2}(100 - p) &= 32 \\ 2p + 500 - 5p &= 320 \\ 3p &= 180 \\ p &= 60 \end{aligned}$$

Dvoukorun je $100 - p = 100 - 60 = 40$. Celková hodnota všech mincí je 380 korun.

Analogicky je možné sestavit rovnici s neznámou d, která označuje počet dvoukorun.

4. Řešení užitím rovnice, ze které zjistím počet pětikorun (resp. dvoukorun) na první (resp. druhé) hromádce.

Z následujícího postupu řešení zjistím počet pětikorun na první hromádce. Označím neznámý počet pětikorun na první hromádce x. Pak je dvoukorun na první hromádce zřejmě $32 - x$. Na druhé hromádce je zřejmě stejný počet dvoukorun jako na první hromádce, navíc podle zadání je zřejmě počet pětikorun na druhé hromádce čtyřikrát větší než na první. A tedy platí:

$$\begin{aligned} 4x + (32 - x) &= 68 \\ 3x &= 36 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Na první hromádce je tedy 12 pětikorun a $32 - 12 = 20$ dvoukorun. Pětikorun na stole je tak 60 a dvoukorun 40. Celková částka je pak 380 korun.

Analogicky je možné sestavit rovnici, z níž lze zjistit počet dvoukorun na první hromádce. Obdobně by bylo možné zjistit počet některého druhu mincí na druhé hromádce.

5. Řešení „úvahou“ bez použití rovnic.

Úlohu je možné vyřešit i některou heuristickou strategií, např. v případě, že se žákovi nepodaří sestavit odpovídající rovnici nebo soustavu.

Vzhledem k tomu, že řešení lze poměrně dobře uhádnout (resp. odhadnout), je možné, že některé výřezy budou obsahovat řešení užitím odhadnutí.

6. Řešení užitím obrázkové legendy či jiného nákresu.

Do této kategorie zařadím takové výřezy, v nichž žák(yně) použije některý nákres v průběhu řešení (např. náčrtek dvou hromádek s několika mincemi atp.).

7. Řešení užitím povrchové strategie.

Úlohu je možné vyřešit chybně např. s použitím strategie signálních slov.

8. Ostatní řešení.

Do této kategorie zařadím takové výřezy, v nichž žák(yně) vyřešil(a) úlohu jiným způsobem.

2.2.3 Jaro 2018 – kapitál

Úloha je sestavená ze dvou podúloh. Podúloha 15.2 však využívá řešení nalezeného v části 15.1; uvádím tedy řešení obou částí úlohy současně.

1. Řešení užitím soustavy rovnic s neznámými označujícími výši kapitálu pana Kocoura a hodnotu investice (obojí v milionech korun).

Označím k kapitál pana Kocoura a i hodnotu investice v milionech korun. Pak platí:

$$\begin{cases} \dfrac{k}{2} + \dfrac{k+200}{2} = i \\ k = \dfrac{i}{3} \end{cases}$$

Řešením soustavy dostanu $k = 50$ a $i = 150$.

Pan Malý pak uvolní v milionech korun částku:

$$\frac{k+200}{2} = \frac{50+200}{2} = 125.$$

Závěr: Hodnota kapitálu pana Kocoura je 50 milionů korun. Pan Malý uvolní částku 125 milonů korun.

2. Řešení užitím soustavy rovnic s neznámými označujícími výše kapitálů pana Kocoura a pana Malého (obojí v milionech korun).

Označím postupně k, m hodnoty kapitálů pánů Kocoura a Malého v milionech korun. Pak platí podle zadání:

$$\begin{cases} m = k + 200 \\ \frac{k}{2} + \frac{m}{2} = 3k \end{cases}$$

Řešením dostanu $k = 50$ a $m = 250$. Pan Malý uvolní polovinu z 250 milionů korun, tj. 125 milionů korun.

Závěr: Hodnota kapitálu pana Kocoura je 50 milionů korun. Pan Malý uvolní částku 125 milonů korun.

3. Řešení užitím rovnice, ze které zjistím kapitál pana Kocoura (v milionech korun).

Označím k hodnotu kapitálu pana Kocoura v milionech korun. Pak platí:

$$\frac{k}{2} + \frac{k + 200}{2} = 3k$$

$$k + k + 200 = 6k$$

$$4k = 200$$

$$k = 50$$

Pan Malý uvolní částku v milionech korun:

$$\frac{k + 200}{2} = \frac{50 + 200}{2} = 125.$$

Závěr: Hodnota kapitálu pana Kocoura je 50 milionů korun. Pan Malý uvolní částku 125 milonů korun.

4. Řešení užitím rovnice, ze které zjistím hodnotu investice (v milionech korun).

Označím i hodnotu investice v milionech korun. Pak má podle zadání pan Kocour částku $\frac{1}{3}i$ milionů korun a pan Malý částku $\frac{1}{3}i + 200$ milionů korun. Pak platí:

$$\frac{\frac{1}{3}i}{2} + \frac{\frac{1}{3}i + 200}{2} = i$$

$$\frac{1}{3}i + 100 = i$$

$$100 = \frac{2}{3}i$$

$$i = 150$$

Hodnota investice je 150 milionů korun. Pan Kocour pak má částku $\frac{1}{3}i = 50$ milionů korun, pan Malý uvolní částku v milionech korun:

$$\frac{\frac{1}{3}i + 200}{2} = 125.$$

Závěr: Hodnota kapitálu pana Kocoura je 50 milionů korun. Pan Malý uvolní částku 125 milonů korun.

5. Řešení „úvahou“, bez použití rovnice.

Pan Kocour uvolnil polovinu ze třetiny investice, tj. šestinu investice. Pan Malý tak musel dát pět šestin investice. Čtyři šestiny investice odpovídají polovině z 200 milionů korun, tj. dvě třetiny investice odpovídají 100 milionům korun, z toho je zřejmě hodnota investice 150 milionů korun. Kapitál pana Kocoura je třikrát menší, tj. 50 milionů korun. Snadno dopočtu, že pan Malý uvolní polovinu ze součtu $50 + 200$ milionů korun, tj. uvolní 125 milionů korun.

6. Řešení užitím obrázku či jiného nákresu.

Žák využije některý obrázek, který napomůže řešení.

7. Řešení užitím povrchové strategie.

Do této kategorie zařadím postupy využívající některé povrchové řešitelské strategie.

8. Ostatní řešení.

Tato kategorie bude obsahovat případné nezařazené postupy.

2.2.4 Jaro 2019 – výrobky

1. Řešení užitím rovnice, z níž zjistím počet výrobků v šestém dnu.

Označím počet výrobků vyrobených v šestém dnu s. Pak podle zadání platí:

$$5 \cdot \frac{3}{4}s + 10s = 2\,200$$

$$\frac{15}{4}s + 10s = 2\,200$$

$$55s = 8\,800$$

$$s = 160$$

Průměrný počet výrobků vyrobených v každém z prvních pěti dnů je tak $\frac{3}{4} \cdot 160 = 120$. Celkově se tak v prvních pěti dnech vyrobilo 600 výrobků.

2. Řešení užitím rovnice, z níž zjistím průměrný počet výrobků v každém z prvních pěti dnů.

Označím počet výrobků vyrobených v každém z prvních pěti dnů p. Pak podle zadání platí:

$$
\begin{aligned}
5p + 10 \cdot \frac{4}{3}p &= 2\,200 \\
15p + 40p &= 6\,600 \\
55p &= 6\,600 \\
p &= 120
\end{aligned}
$$

V prvních pěti dnech se vyrobilo dohromady 600 výrobků.

3. Řešení užitím rovnice, z níž zjistím přímo hledaný počet výrobků vyrobených v prvních pěti dnech.

Označím hledaný počet výrobků v prvních pěti dnech v. Pak podle zadání zřejmě platí:

$$
\begin{aligned}
v + 2 \cdot \frac{4}{3}v &= 2\,200 \\
3v + 8v &= 6\,600 \\
11v &= 6\,600 \\
v &= 600
\end{aligned}
$$

Celkově bylo v prvních pěti dnech vyrobeno 600 výrobků.

4. Řešení užitím soustavy rovnic.

Označím p průměrný počet výroků vyrobených v každém z prvních pěti dnů a s počet výrobků vyrobených v šestém dnu. Pak podle zadání platí:

$$
\begin{cases}
5p + 10s = 2\,200 \\
p = \frac{3}{4}s
\end{cases}
$$

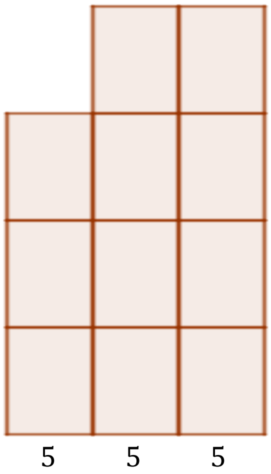
Řešením soustavy dostanu $p = 120, s = 160$. Celkový počet výrobků vyrobených v prvních pěti dnech je tak 600.

5. Řešení „úvahou“ bez použití rovnic.

Celkový počet patnáct dnů rozdělím do trojic po pěti dnech. Ve druhé a poslední třetině uvažuji vyrobení čtyř „dílků“. V prvních pěti dnech tak byly vyrobeny tři „dílky“ (totiž o čtvrtinu méně, než v následujících pěti dnech). Celkem bylo vyrobeno 11 „dílků“, které odpovídají podle zadání 2 200 výrobkům. Snadno vypočtu, že „dílek“ odpovídá 200 výrobkům, a tedy tři „dílky“ odpovídají 600 výrobkům, což je hledaný počet.

6. Řešení užitím obrázkové legendy či jiného nákresu.

Řešitel(ka) sestaví libovolnou obrázkovou legendu, která by mohla být nápomocná při řešení úlohy. Např. v návaznosti na předchozí řešení „úvahou“ lze úlohu vyřešit s užitím následujícího obrázku (viz Obr. 29[30]).



Obrázek 29 – Možná obrázková legenda k řešení úlohy „výrobky“

7. Řešení užitím povrchové strategie.

Úlohu je možné vyřešit chybně např. s použitím strategie signálních slov.

8. Ostatní řešení.

Do této kategorie zařadím takové výřezy, v nichž žák(yně) vyřešil(a) úlohu jiným způsobem.

2.2.5 Jaro 2020 – čtení knihy

1. Řešení užitím soustavy rovnic s neznámými označujícími počet stran, které denně přečetl Aleš, a počet dnů, po které četl Aleš knihu.

[30] Obrázek je autorský, vytvořený v programu GeoGebra.

Označím a počet stran knihy, které denně přečetl Aleš, a $d > 2$ počet dní, po které četl Aleš knihu. Pak Blanka denně přečetla $a + 2$ stran a četla knihu $d - 2$ dní. Platí:

$$\begin{cases} a \cdot d = 240 \\ (a+4) \cdot (d-2) = 240 \end{cases}$$

Po vyřešení soustavy dostanu, že $a = 20$ (jako jediné kladné řešení příslušné kvadratické rovnice s neznámou a).

Závěr: Aleš denně četl 20 stran.

2. Řešení užitím soustavy rovnic s neznámými označujícími počet stran, které denně přečetla Blanka, a počet dnů, po které četla Blanka celou knihu.

Označím $b > 4$ počet stran knihy, které přečetla denně Blanka, a n počet dnů, po které četla Blanka celou knihu. Platí:

$$\begin{cases} b \cdot n = 240 \\ (b-4) \cdot (n+2) = 240 \end{cases}$$

Po vyřešení soustavy dostanu, že $b = 24$ je jediné kladné řešení příslušné kvadratické rovnice s neznámou b, a tedy Aleš denně četl 20 stran.

Závěr: Aleš denně četl 20 stran.

Dále je možné sestavit další dvě analogické soustavy rovnic. Takové postupy zařadím do sekce „ostatní řešení“, neočekávám totiž vysoké zastoupení těchto postupů v analyzovaném vzorku.

3. Řešení užitím lineární rovnice, z níž zjistím počet stran, které denně četl Aleš.

V návaznosti na první způsob řešení označuji a v následující rovnici počet stran, které denně četl Aleš.

$$\frac{240}{a} - 2 = \frac{240}{a+4}$$

$$240(a+4) - 2a(a+4) = 240a$$

$$240a + 840 - 2a^2 - 8a = 240a$$

$$a^2 + 4a - 420 = 0$$

$$(a-20)(a+24) = 0$$

Jediným kladným řešením je $a = 20$.

Závěr: Aleš přečetl denně 20 stran.

Lze očekávat, že mnoho žáků využilo diskriminant při řešení kvadratické rovnice $(a-20)(a+24)=0$.

4. Řešení užitím rovnice, z níž zjistím počet dnů, po které četl knihu Aleš.

Hledaný počet označím d. Pak platí:

$$\left(\frac{240}{d}+4\right)\cdot(d-2)=240$$

$$240-\frac{480}{d}+4d-8=240$$

$$-\frac{480}{d}+4d-8=0$$

$$-480+4d^2-8d=0$$

$$d^2-2d-120=0$$

$$(d-12)(d+10)=0$$

Jediné kladné řešení je $d=12$. Počet stran, které přečetl denně Aleš, je tak roven:

$$\frac{240}{12}=20.$$

Závěr: Aleš denně přečetl 20 stran.

5. Řešení „úvahou" bez použití rovnic.

Je možné, že žák vyřeší úlohu některou z heuristických strategií, např. pokusí se odhadnout řešení a následně jej ověří.

6. Řešení užitím obrázkové legendy či jiného nákresu.

Řešitel(ka) sestaví libovolnou obrázkovou legendu, která by mohla být nápomocná při řešení úlohy.

7. Řešení užitím povrchové strategie.

Úlohu je možné vyřešit chybně např. s použitím strategie signálních slov.

8. Ostatní řešení.

Do této kategorie zařadím takové výřezy, v nichž žák(yně) vyřešil(a) úlohu jiným způsobem.

2.3 Charakter analyzovaných dat a postup výběru žákovského řešení

Analýza žákovských řešení probíhala chronologicky po jednotlivých ročnících. Při analýze řešení každého z ročníků jsem se držel analýzy a priori (viz kapitola 2.2) úlohy z příslušného termínu. Každý z výřezů jsem se v první řadě snažil přiřadit k některé z předpokládaných použitých strategií. Výřezy s postupy, které se vymykaly kategoriím navržených během analýzy a priori, byly zařazeny do kategorie „ostatní řešení“.

Ze všech analyzovaných výřezů byly vybrány jen ty nejzajímavější výřezy do jednotlivých skupin vytvořených během analýzy a priori, a to také v návaznosti na teoretickou část práce (zejména v návaznosti na strategie řešení); vybrané počty jsou různé a výběr závisí na konkrétních úlohách, především na zařazení „zajímavých“ úloh v sérii náhodně vybraných výřezů.

Lze také očekávat, že většina z analyzovaných výřezů bude obsahovat správné řešení.

2.4 Analýza žákovských řešení

Jednotlivá žákovská řešení byla průběžně zařazována do jednotlivých skupin, které odpovídají navrženým způsobům řešení v kapitole 2.2 zaměřené na analýzu a priori. Některé postupy řešení by bylo možné zařadit i do více skupin – jde o případy, kdy postup obsahuje sestavenou rovnici, ale použitá strategie je povrchová; pak jsem dal přednost kategorii sledující povrchové strategie, název této kategorie směřuje více k chybnému řešení.

2.4.1 Jaro 2016 – cena knihy

1. Řešení užitím rovnice, z níž zjistím částku Petra.

Na Obr. 30 je jedno z mnoha správných řešení užitím lineární rovnice, ze které lze zjistit Petrovu částku a následně dopočítat cenu knihy (obojí v korunách).

Uveďte postup řešení.

peněz

P .... chybí 250 Kč ... x

R ... přebývá 150 Kč ... $3x$

$$3x - 150 = x + 250$$
$$400 = 2x$$
$$x = 200$$

$$200 + 250 = 450,-$$
$$200 \cdot 3 - 150 = 450,-$$

Kniha stojí 450 Kč.

Obrázek 30 – Příklad správného řešení užitím rovnice, ze které lze zjistit Petrovu částka; následně je dopočtena cena knihy

Jiná řešení obsahují rovnici ekvivalentní s tou, kterou jsem navrhl v analýze a priori, ovšem s jinými výrazy na obou stranách. Na Obr. 31 je správně sestavená rovnice, kterou lze interpretovat následovně: trojnásobek částky Petra je právě o 400 korun větší než Petrova částka; což je zjevně součet chybějící a přebývající částky.

Uveďte postup řešení.

$$3x = x + 400 \qquad 200 + 250 = \underline{\underline{450}}$$
$$2x = 400$$
$$x = 200$$

Obrázek 31 – Ekvivalentní rovnice s navrženou rovnicí

Jak jsem předpokládal v podkapitole 2.2 během analýzy a priori, některé výřezy obsahují správně vyřešenou rovnici, ale příliš brzy sepsaný závěr – příklad takového „nedopočtení“ je na Obr. 32.

Uveďte postup řešení.

Petr .. x Kč .. 250 Kč chybí

Radek ... $3x$ Kč .. 150 Kč přebývá

$$x + 250 = 3x - 150$$
$$400 = 2x$$
$$\underline{\underline{x = 200 \text{ Kč}}}$$

Kniha stojí 200 Kč.

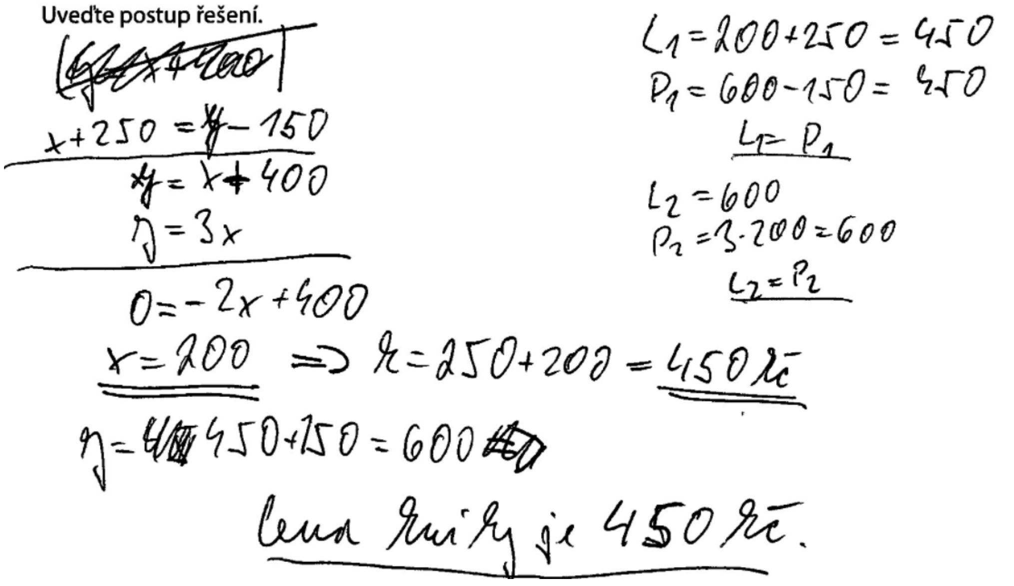
Obrázek 32 – Správná rovnice, ale nedokončené řešení

2. Řešení užitím rovnice, z níž zjistím částku Radka.

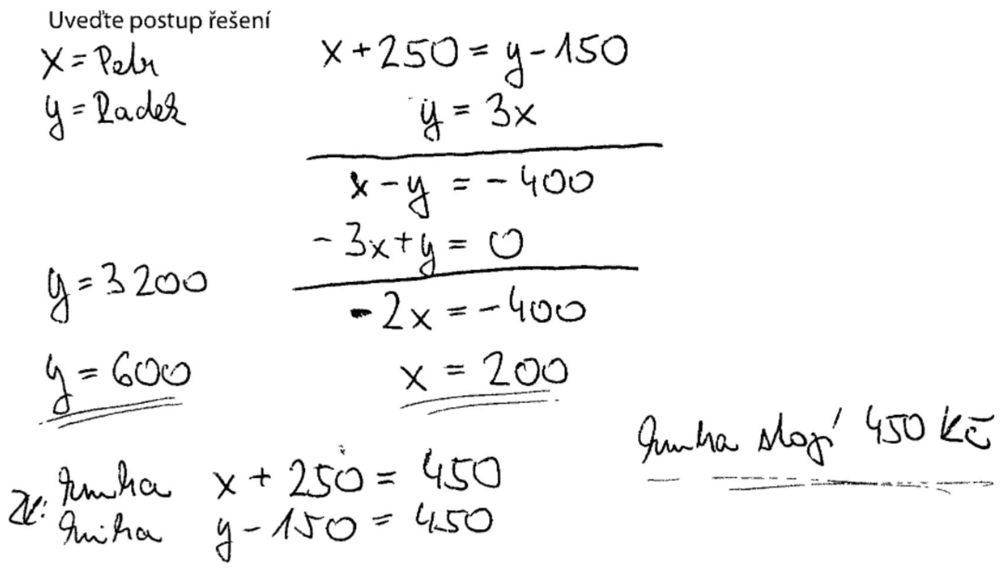
Takový postup nebyl k mému překvapení v analyzovaném vzorku výřezů zastoupen.

3. Řešení užitím soustavy rovnic.

Na každém z následujících dvou výřezů (viz Obr. 33 a Obr. 34) je vidět, že žák(yně) sepsal(a) kromě správného postupu řešení také zkoušku správnosti řešení alespoň jedné rovnice sestavené soustavy. Na Obr. 33 se jedná o ověření správnosti řešení obou rovnic. Na Obr. 34 je provedena zkouška správnosti druhé rovnice, zjevně se záměrem vypočtení ceny knihy a ověření správnosti řešení. Je také možné si všimnout, že na Obr. 33 nejsou označeny neznámé, zatímco na Obr. 34 řešitel(ka) označil(a) obě neznámé.

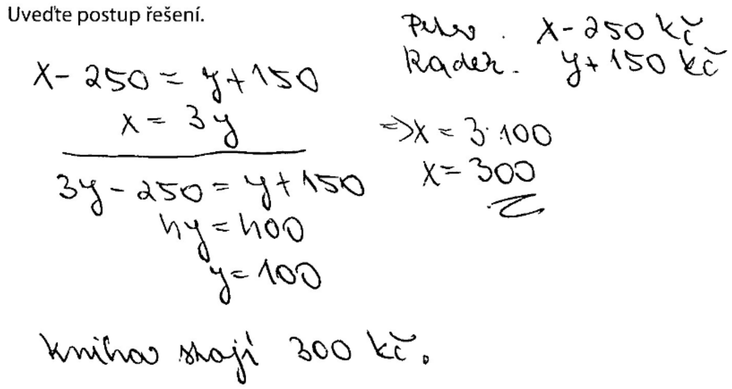


Obrázek 33 – Řešení užitím soustavy rovnic s provedenou zkouškou správnosti řešení obou rovnic soustavy



Obrázek 34 – Řešení užitím soustavy s provedenou zkouškou správnosti řešení první rovnice soustavy

V některých případech je soustava sice správně sestavena, ale je chybně vyřešena (např. viz Obr. 35 – chyba je při ekvivalentní úpravě rovnice s neznámou y).

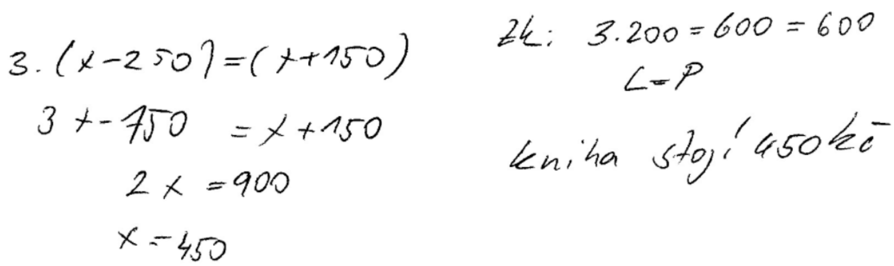


Obrázek 35 – Správně sestavená soustava, avšak chybně vyřešená

4. Řešení užitím rovnice, z níž zjistím cenu knihy.

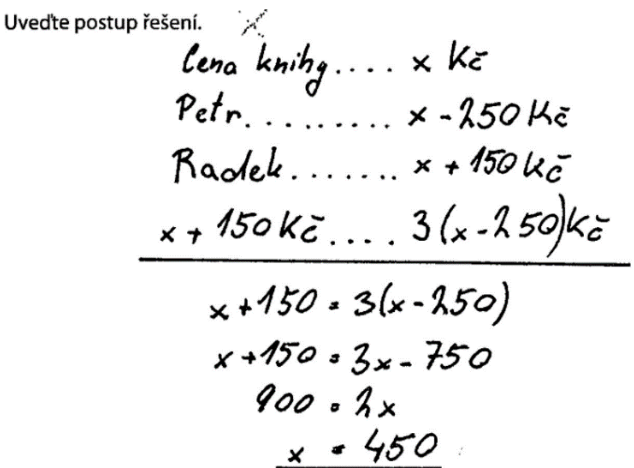
Tento postup řešení byl mezi správnými řešeními ten nejčastější.

Na výřezu na Obr. 36 je sepsané správné řešení. Dodávám, že žák(yně) provedl(a) také zkoušku správnosti řešení rovnice.



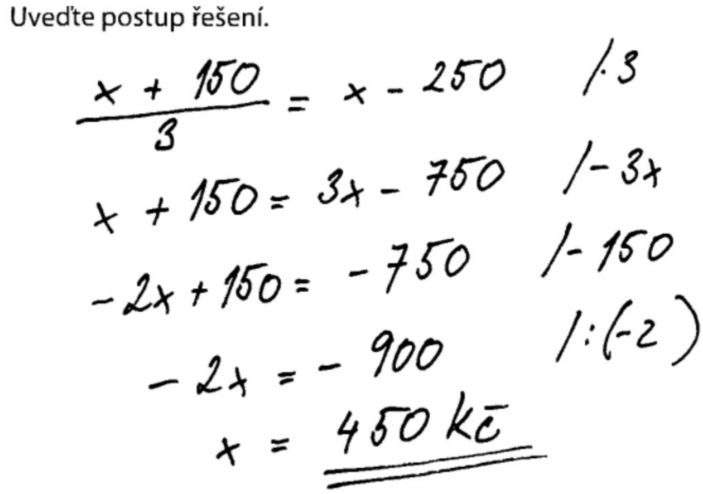
Obrázek 36 – Správné řešení užitím lineární rovnice, v níž neznámá označuje cenu knihy; je provedena také zkouška správnosti řešení

Další správné řešení na Obr. 37 vybírám proto, že obsahuje také zápis – slovní legendu (viz kapitola 1.3).



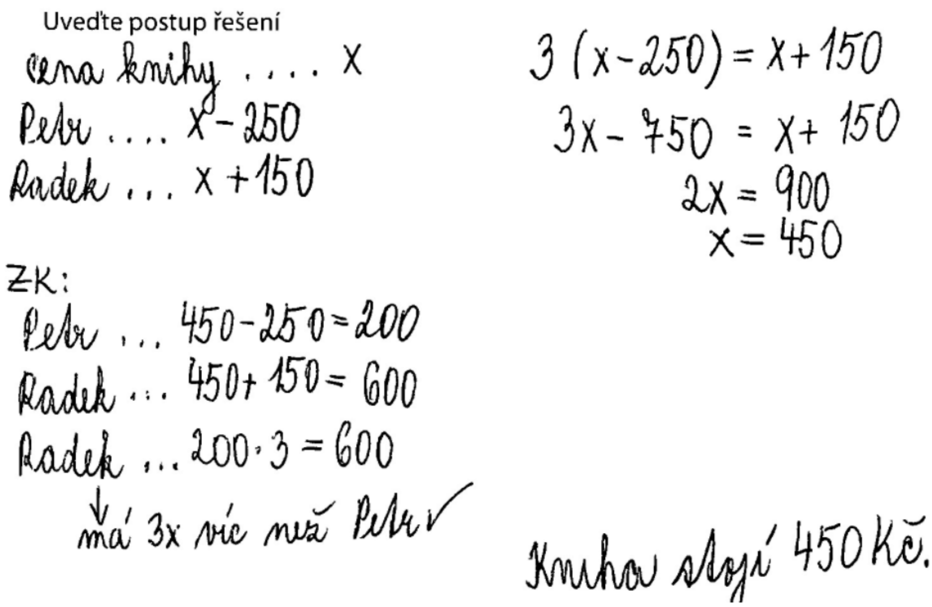
Obrázek 37 – Správné řešení rovnicí obsahující slovní legendu

Některá řešení obsahují řešení rovnice, která zjevně vyšla z úvahy, že Petr má třikrát méně korun než Radek (jak vyplývá ze zadání) (viz Obr. 38). S využitím jedné lineární rovnice[31] o jedné neznámé lze přímo zjistit cenu knihy, tj. hledaných 450 Kč.



Obrázek 38 – Řešení s užitím antisignálu při převedení situačního modelu do matematického modelu

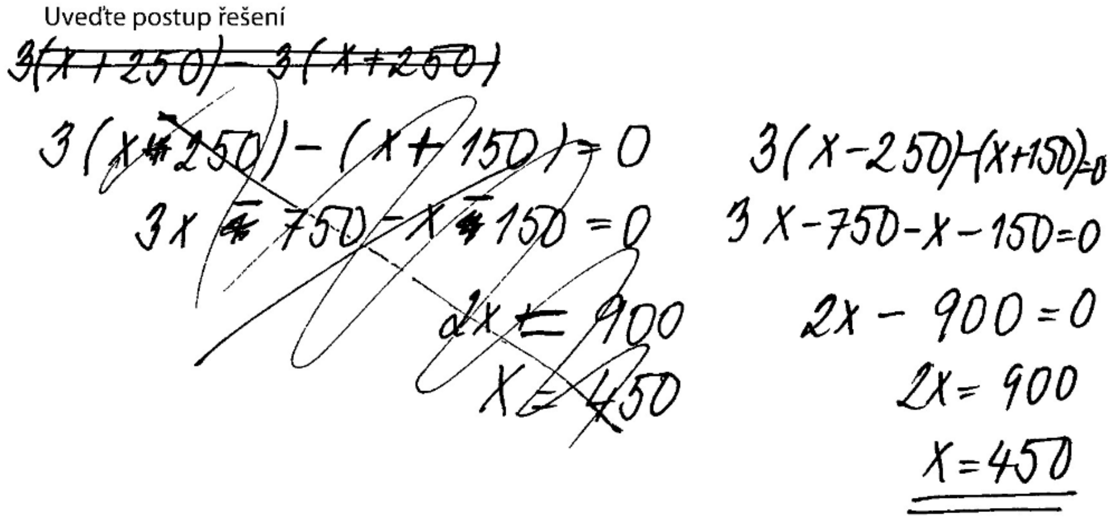
Na následujícím výřezu (viz Obr. 39) je vidět, že žák(yně) provedl(a) zkoušku.



Obrázek 39 – Provedení zkoušky

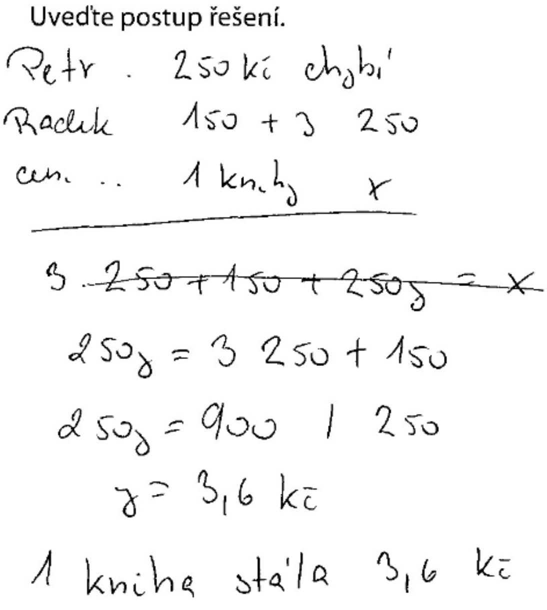
Jiné postupy obsahují jinou rovnici, avšak rovnici v analýze a priori navržené ekvivalentní; např. rovnice na Obr. 40 byla sestavena na základě toho, že rozdíl trojnásobku částky Petra a Radka je roven 0.

[31] Příslušná rovnice je ekvivalentní s rovnicí $x + 150 = 3(x - 250)$, kde x označuje cenu knihy v korunách.



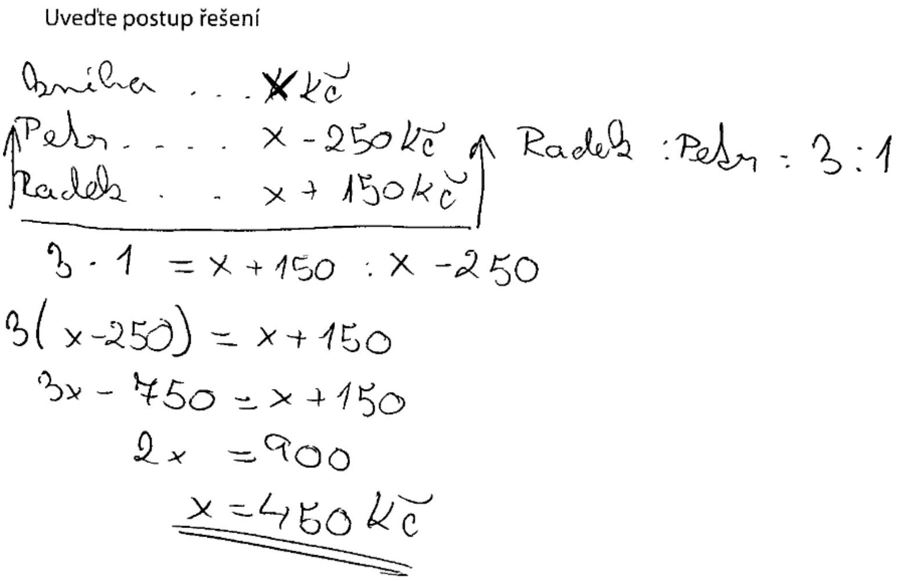
Obrázek 40 – Ekvivalentní rovnice (rozdíl trojnásobku Petrovy částky a částky Radkovy je nulový)

Zajímavý je následující výřez na Obr. 41. Výřez totiž dokládá, že žáci mohou chybně interpretovat také spojení „třikrát více než“ – ve druhém řádku slovní legendy je uvedeno, že Radek má $150 + 3 \cdot 250$, k čemuž patrně vede část zadání „Radek má třikrát více korun než Petr.“ Skutečnost, že podle řešitele je cena knihy 3,6 koruny, zde považuji za vedlejší.



Obrázek 41 – Chybně interpretované spojení „třikrát více než“

Následující řešení považuji za zajímavé proto, že obsahuje ještě před sestavením rovnice zápis vyjadřující skutečnost, že částky Radka a Petra jsou v poměru $3 : 1$ (jak plyne ze zadání). K sestavení rovnice lze vhodně využít trojčlenky, jak sepsal(a) žák(yně) v postupu na Obr. 42 (nedostatkem jsou sice chybějící závorky na pravé straně rovnice sestavené „podle šipek“, další operace s jednotlivými výrazy jsou však již provedené správně).



Uveďte postup řešení

Knížka ... x Kč

Petr .... x - 250 Kč

Radek . . x + 150 Kč   Radek : Petr = 3 : 1

3 · 1 = x + 150 : x - 250

3(x - 250) = x + 150

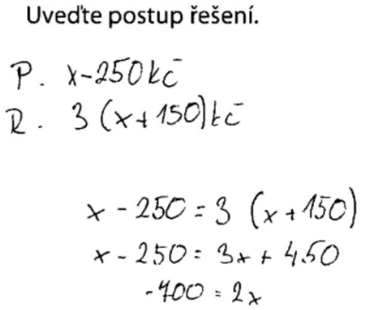
3x - 750 = x + 150

2x = 900

x = 450 Kč

Obrázek 42 – Trojčlenka vedoucí k sestavení rovnice jako součást řešení

Mezi řešeními můžeme najít i takové postupy, v nichž žáci chybně interpretovali informaci, že „Radek má třikrát více korun než Petr." – rovnici častokrát sestavili do tvaru: $x - 250 = 3(x + 150)$. Jiná řešení obsahovala rovnici ve tvaru $3(x - 150) = x + 250$ nebo $3(x + 250) = x - 150$. Příklady takto chybně sestavených rovnic jsou zachyceny na Obr. 43 a Obr. 44. Na Obr. 44 je dokonce vidět, že se žák(yně) pozastavil(a) nad zápornou hodnotou výsledku (nad kořenem chybně sestavené rovnice $x = -350$).



Uveďte postup řešení.

P. x-250 kč

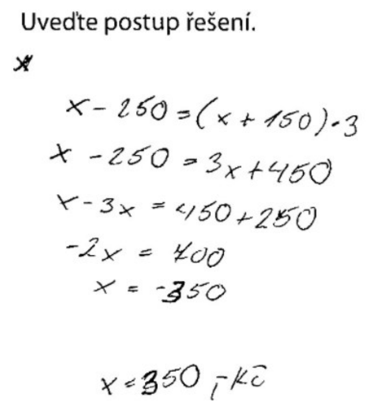
R. 3 (x+150) kč

x - 250 = 3 (x + 150)

x - 250 = 3x + 450

-700 = 2x

Obrázek 43 – Nesprávně interpretovaná část zadání (nedořešeno)



Uveďte postup řešení.

x

x - 250 = (x + 150)·3

x - 250 = 3x + 450

x - 3x = 450 + 250

-2x = 700

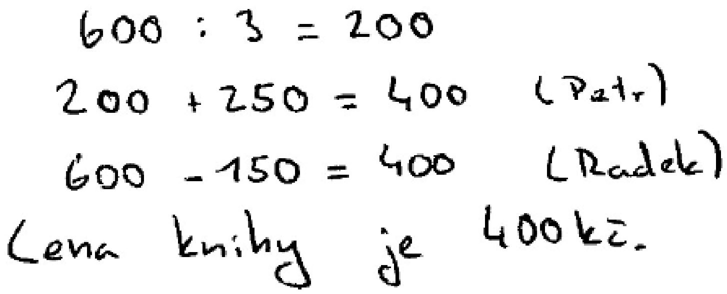
x = -350

x = 350 ,- kč

Obrázek 44 – Nesprávně interpretovaná část zadání (změna v opačné číslo)

5. Řešení „úvahou“ bez použití rovnice.

Zajímavé řešení je na Obr. 45. Žák(yně) začal(a) postup s číslem 600 možná proto, že je to číslo dělitelné třemi. Mohlo by (náhodou) odpovídat v korunách částce, kterou má Radek. Z prvního řádku je zřejmé, že řešitel(ka) zjistil(a), že částka Petra je 200 korun. V další části řešení správně uvažoval(a), že pokud Petrovi chybí 250 korun ke koupi knihy, stojí kniha 200 + 250 korun. Výsledek je však chybně sepsaný, namísto 450 korun je uvedeno 400 korun. Analogicky v případě Radka. Žák(yně) již nyní může udělat závěr – cena knihy je 400 korun. Je tak možné, že bylo v tomto řešení použito „hádání s ověřením“ (mohlo jít o strategii pokus – ověření – korekce[32]).



Obrázek 45 – Použití heuristické strategie (výsledek chybný)

6. Řešení užitím obrázkové legendy či jiného nákresu.

Mezi analyzovanými výřezy se nevyskytl ani jeden postup řešení, který by obsahoval obrázkovou legendu.

7. Řešení užitím povrchové strategie.

Do této kategorie jsem řadil také takové výřezy, které obsahují řešení užitím rovnice. Nicméně ze zařazených postupů je patrné, že žáci řešili úlohu bez správného sestavení potřebného situačního modelu.

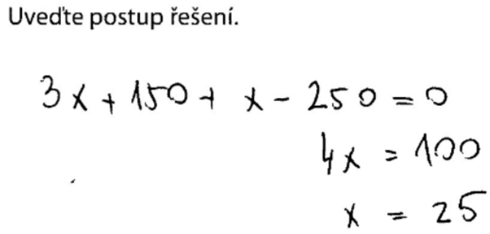
U následujícího výřezu (viz Obr. 46) je možné, že žák(yně) dodržuje naučenou zásadu, že při řešení některé rovnice (např. kvadratické nebo v součinovém tvaru) je potřeba mít rovnici v anulovaném tvaru. Chybějící označení neznámé nebo legenda neumožňuje zjistit, co zde představuje[33] neznámá x, levá strana rovnice byla sestavena povrchově[34].

---

[32] Jako „pokus – ověření – korekce“ je označována jedna z heuristických strategií, o které píše Vondrová et al. (2020).

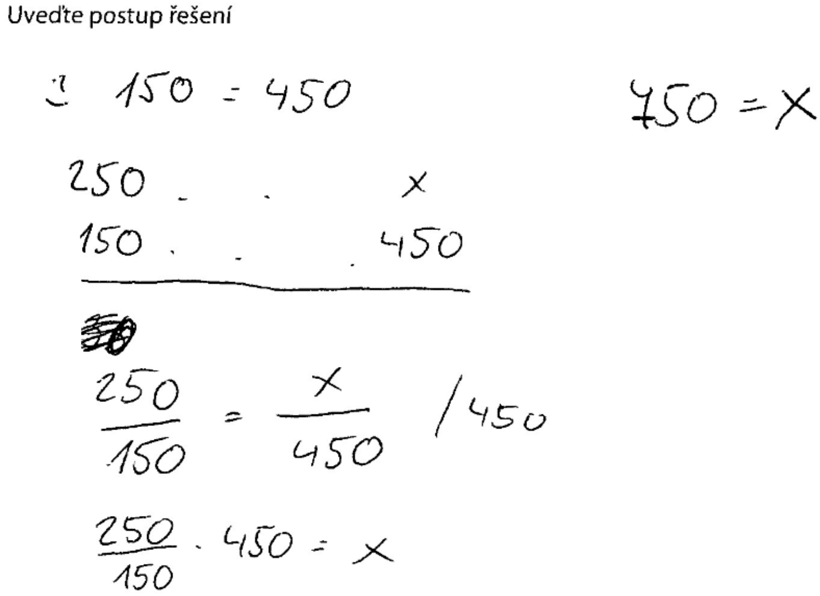
[33] Jde patrně o částku Petra, nebo o částku Radka (v korunách).

[34] Považuji za možné i to, že žák(yně) považoval(a) výraz $3x + 150$ za částku Radka v korunách, totiž zjevně za trojnásobek částky Petra. Ve slovních úlohách vedoucích k lineárním rovnicím je někdy úkolem



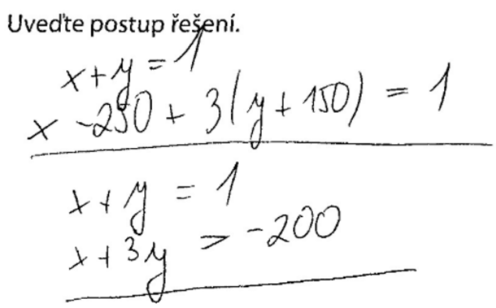
Obrázek 46 – Povrchová strategie vedoucí k chybné rovnici v anulovaném tvaru

Mezi řešitelskými strategiemi můžeme najít jev, který je označován jako iluze linearity – viz Obr. 47, na němž je zachycen postup, který je založen na předpokladu, že lze uvedená čísla (trojnásobek čísla 150, 250 a 150) zapsat uvedeným způsobem do trojčlenky a využít přímé úměrnosti.



Obrázek 47 – Trojčlenka

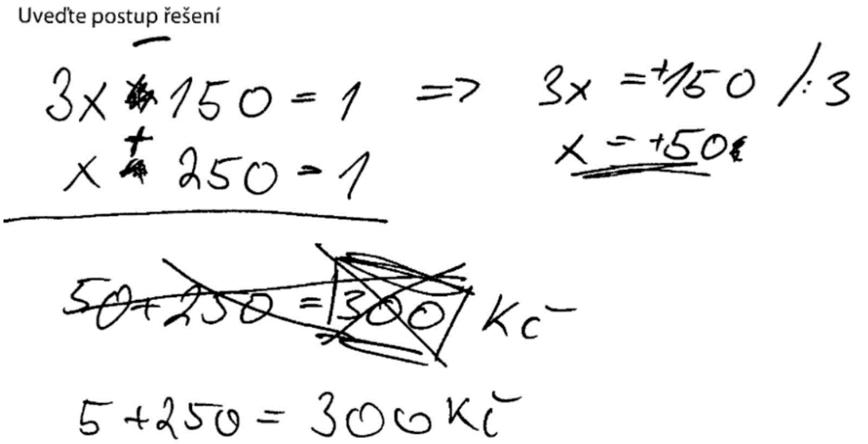
Následující popis se týká výřezu na Obr. 48. Je také velmi pravděpodobné, že v tomto řešení může „jednička" představovat „jednu knihu".



Obrázek 48 – Povrchové řešení („jednička na pravé straně")

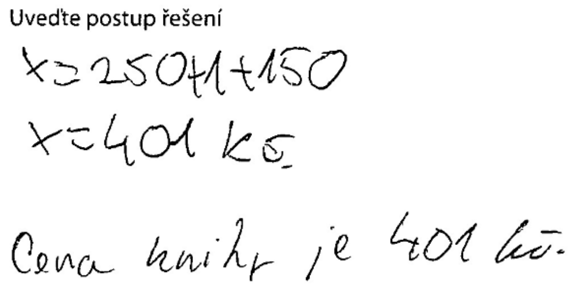
sčítat částky obsažené v zadání (viz např. Obr. 14), a tedy je možné, že žák(yně) použil(a) tuto zkušenost při řešení této úlohy.

Z výřezu na Obr. 49 je zjevné, že žák(yně) sestavil(a) soustavu původně s opačnými znaménky – na levé straně v první rovnici bylo patrně původně plus a ve druhé mínus. Když z rovnice v pravé části výřezu žák(yně) zjistil(a), že $3x = -150$ vede k $x = -50$, pozastavil(a) se patrně právě nad zápornou hodnotou kořene, a znaménka v rovnici „přepsal(a)“ na základě nesmyslného výsledku. Lze si také všimnout, že z lineární rovnice $3x - 150 = 1$ vytvořil(a) rovnici $3x = 150$; za možný důvod této chyby považuji uvědomění si, že $1 \cdot 150 = 150$.



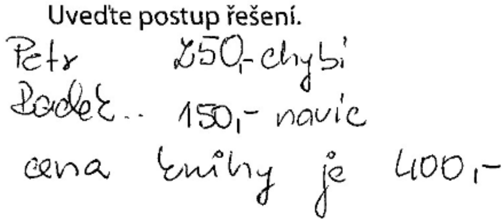
Obrázek 49 – Povrchová strategie a chybná úprava rovnice („jednička na pravé straně“)

Jiný náhled na kontext úlohy přináší následující výřez (viz Obr. 50), na němž je možné vypozorovat řešení obdobné předchozímu. Žák(yně) pravděpodobně uvažoval(a) tak, že rozdíl v obou zadaných částkách je roven ceně knihy, ale je potřeba přidat určitý „střed“. Má-li Petr o 250 korun méně, než je cena knihy, a má-li Radek o 150 korun více, než je cena knihy, mohlo by se zdát, že je potřeba do součtu (který udává rozdíl v částkách Petra a Radka) započítat i tu „jednu knihu“, navíc žák(yně) napsal(a) na pravou stranu rovnice „jedničku jako prostřední“.



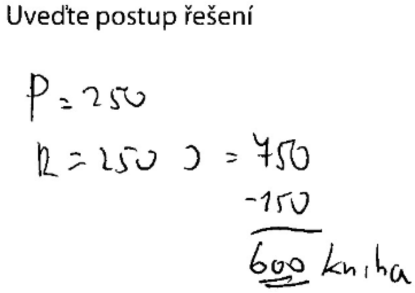
Obrázek 50 – Výpočet rozdílu částek Petra a Radka zvětšený o jedna

Také v některých dalších případech se ukazuje jako chybné využití povrchové strategie – na Obr. 51 žák(yně) zjistil(a) chybně cenu knihy tak, že jednoduše sečetl(a) částky 250 korun a 150 korun uvedené v zadání.



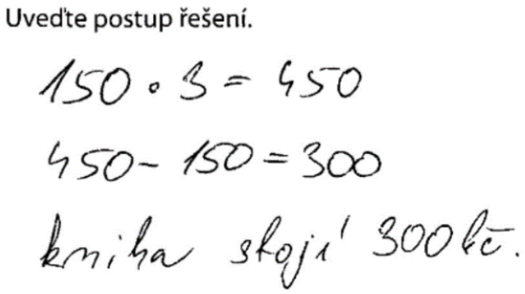
Obrázek 51 – Povrchová strategie využívající klíčových slov: 250 + 150 = 400

Neúspěšně použitou strategii signálních slov ilustruji na výřezu na Obr. 52. Žák(yně) pracuje s chybným předpokladem, že Petr má částku 250 korun. Z toho, že Radek má třikrát více korun než Petr, vypočítal(a) 750 korun jako částku Radka. Jelikož Radkovi přebývá 150 korun, snadno zjistil(a), že kniha stojí $750 - 150$ Kč $= 600$ Kč.



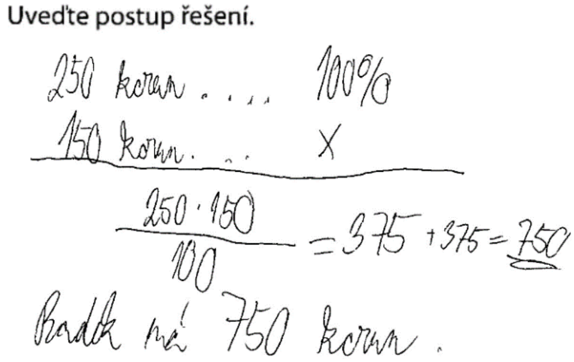
Obrázek 52 – Použití povrchové strategie v důsledku chybné intepretace zadání (trojnásobek čísla 250 zmenšen o 150)

Je zřejmé, že se při řešení zaznamenaném na Obr. 53 žák(yně) domníval(a), že Petr má částku 150 korun (a tedy Radek má $3 \cdot 150$ korun $= 450$ korun), následně dopočítal(a) cenu knihy v korunách tak, že částku 450 korun zmenšil(a) o 150 korun.



Obrázek 53 – Použití povrchové strategie v důsledku chybné intepretace zadání (trojnásobek čísla 150 zmenšen o 150)

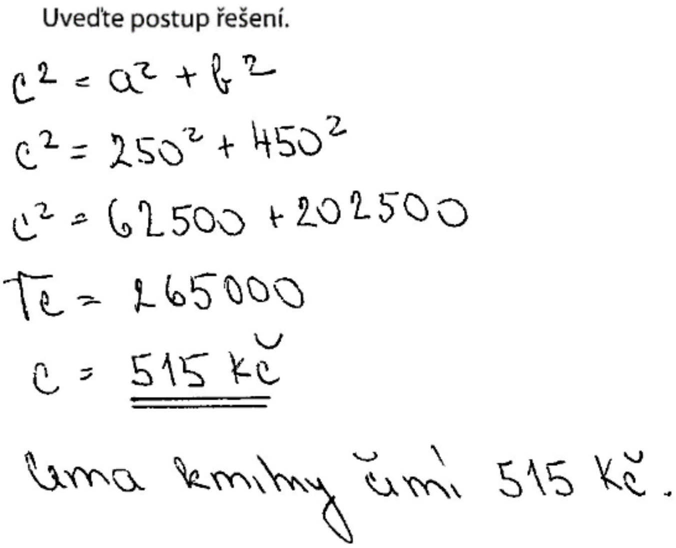
Jedna z povrchových strategií je porovnání s prototypickou úlohou – žák(yně) se při postupu na Obr. 54 chybně pokusil(a) o sestavení zlomku. Zlomek je navíc chybně vyčíslen.



Obrázek 54 – Chybné porovnávání s prototypickou úlohou (na přímou úměrnost)

8. Ostatní řešení.

Jako zajímavost v závěru této podkapitoly uvedu jedno z velmi originálních řešení, které využívá ke zjištění ceny knihy v korunách Pythagorovu větu (viz Obr. 55).



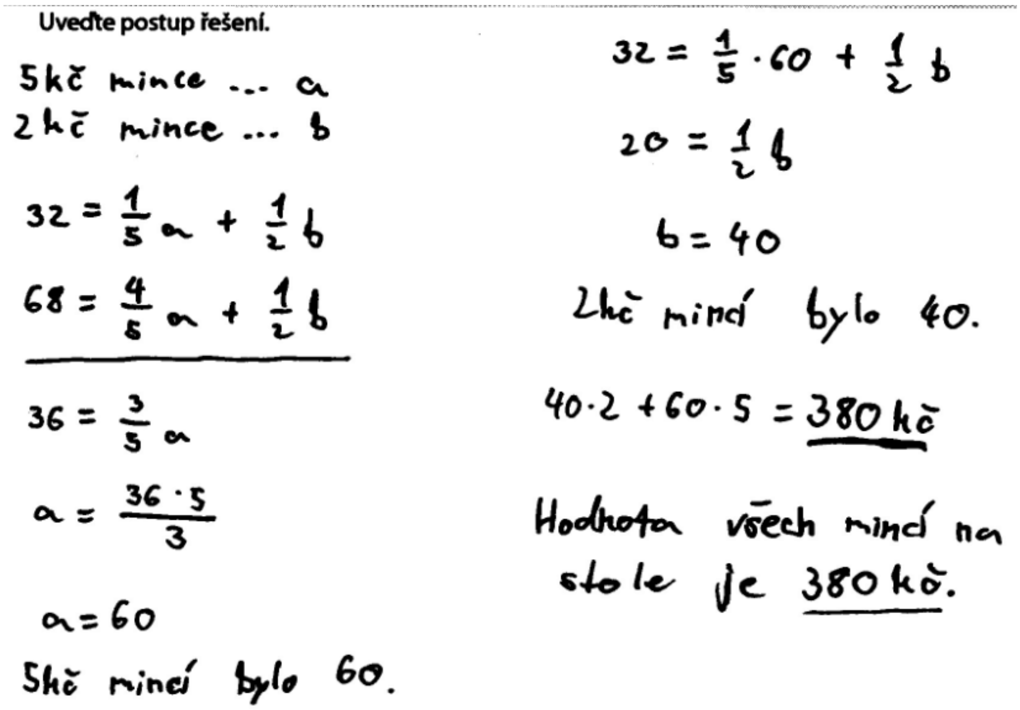
Obrázek 55 – Využití Pythagorovy věty pro zjištění ceny knihy

Je zajímavé, že se mezi analyzovanými výřezy neobjevilo řešení, které by obsahovalo „zápornou částku“ v korunách – a pokud vyšel kořen rovnice záporně, do odpovědi bylo vloženo příslušné opačné číslo. Je tak zjevné, že si příslušní řešitelé nebo řešitelky uvědomili (ne)reálnost výsledku. Neobjevovala se ani taková řešení, která by obsahovala ve výsledku rekordně vysoké ceny knih.

2.4.2 Jaro 2017 – mince

1. Řešení užitím soustavy rovnic – „každá hromádka zvlášť“.

Na Obr. 56 je jedno z mnoha správných řešení. Řešení je zajímavé v tom, že nevyužívá jako jedno z mála označení počtů mincí užitím x, y, ale užitím a, b.



Uveďte postup řešení.

5kč mince ... a

2kč mince ... b

$32 = \frac{1}{5}a + \frac{1}{2}b$

$68 = \frac{4}{5}a + \frac{1}{2}b$

$36 = \frac{3}{5}a$

$a = \frac{36 \cdot 5}{3}$

$a = 60$

5kč mincí bylo 60.

$32 = \frac{1}{5} \cdot 60 + \frac{1}{2}b$

$20 = \frac{1}{2}b$

$b = 40$

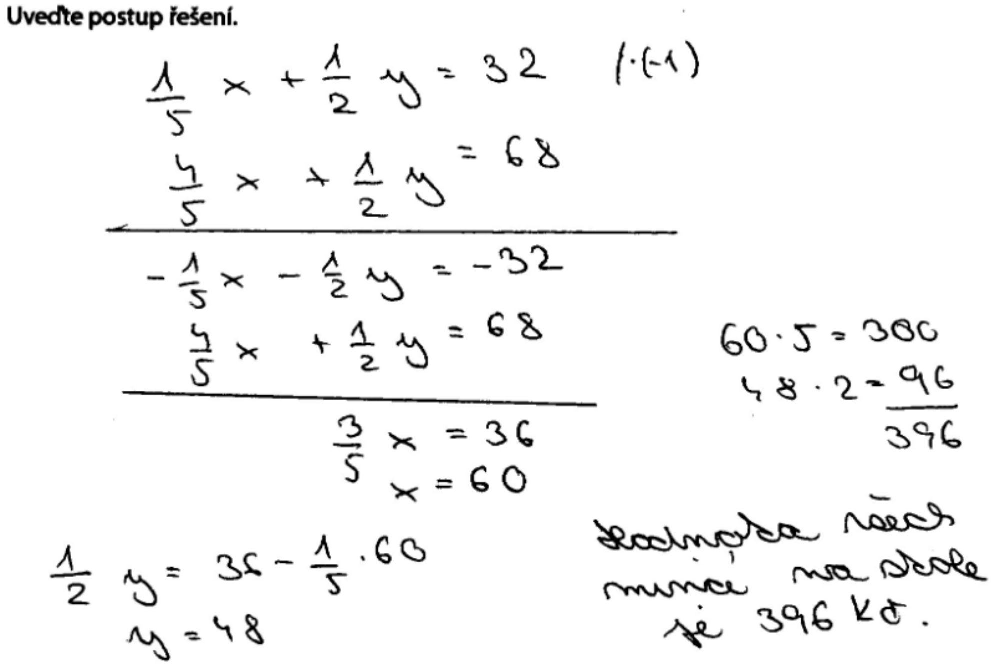
2kč mincí bylo 40.

$40 \cdot 2 + 60 \cdot 5 = \underline{380\text{ kč}}$

Hodhota všech mincí na stole je 380 kč.

Obrázek 56 – Správné řešení (použití neznámých a, b)

Jiná řešení obsahují správně sestavenou soustavu, ale už nikoli správně vyřešenou (viz Obr. 57). Řešitel(ka) správně zjistil(a), že $x = 60$. V levé dolní části výřezu je možné všimnout si vyjádření y; chyba je zjevně v dalším opsání čísla 32 (žák(yně) napsal(a) číslo 36 z jiné rovnosti).

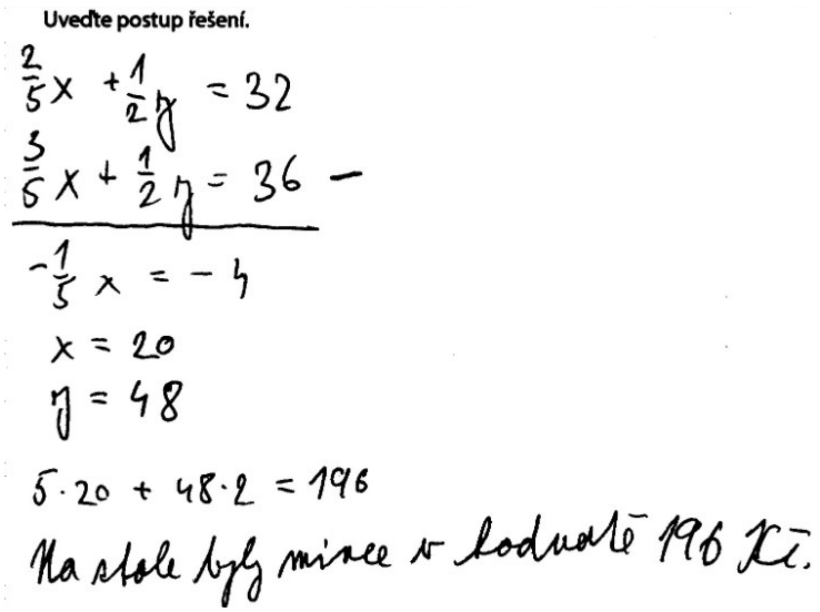

Uveďte postup řešení.

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 32 \quad /\cdot(-1)$$
$$\frac{4}{5}x + \frac{1}{2}y = 68$$
$$-\frac{1}{5}x - \frac{1}{2}y = -32$$
$$\frac{4}{5}x + \frac{1}{2}y = 68$$
$$\frac{3}{5}x = 36$$
$$x = 60$$
$$\frac{1}{2}y = 36 - \frac{1}{5}\cdot 60$$
$$y = 48$$
$$60\cdot 5 = 300$$
$$48\cdot 2 = 96$$
$$396$$

Hodnota všech mincí na stole je 396 Kč.

Obrázek 57 – Správně sestavená soustava, avšak chybně vyřešená

Za zajímavý považuji výřez na Obr. 58. Žáky(yně) se jednak chybně domnívá, že počet pětikorun na první hromádce tvoří dvě pětiny celkového počtu pětikorun, navíc však počet mincí na druhé hromádce zjevně určil(a) jako $68 - 32 = 36$. Obě chyby v témže řešení mohou poukazovat na nesprávné vytvoření situačního modelu.


Uveďte postup řešení.

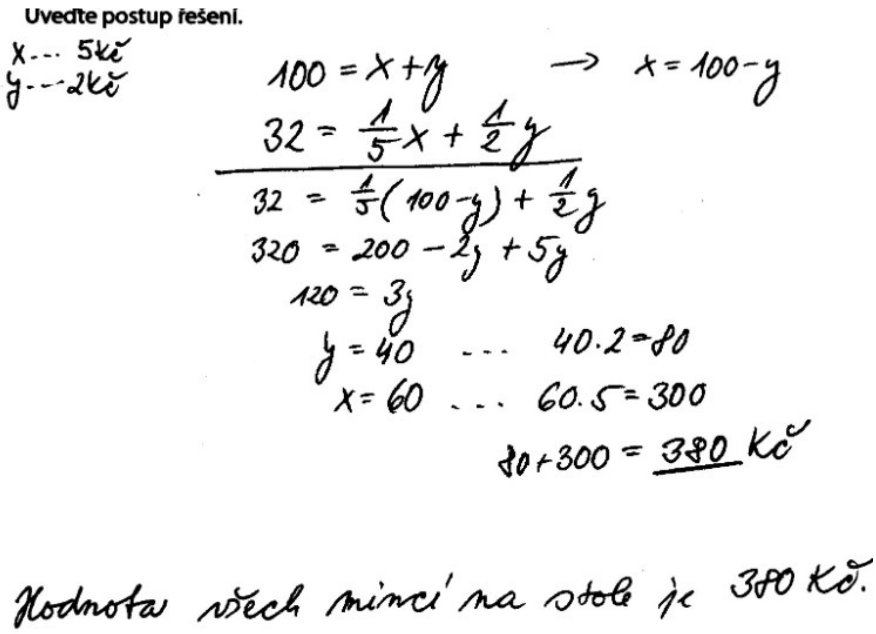
$$\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}y = 32$$
$$\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}y = 36 \quad -$$
$$-\frac{1}{5}x = -4$$
$$x = 20$$
$$y = 48$$
$$5\cdot 20 + 48\cdot 2 = 196$$

Na stole byly mince v hodnotě 196 Kč.

Obrázek 58 – Chybně sestavená soustava rovnic

2. Řešení užitím soustavy rovnic – „první (resp. druhá) hromádka a všechny mince“.

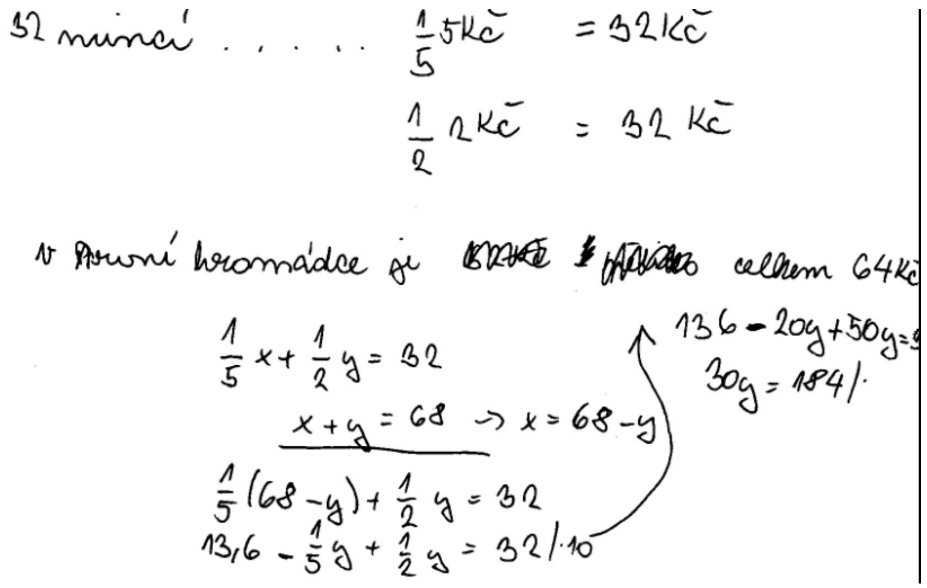
Na Obr. 59 je zachyceno jedno z mnoha správných řešení; obsahuje označení neznámých a slovní odpověď.



Obrázek 59 – Užitím soustavy, v níž jedna rovnice představuje součet všech mincí na stole, a druhá rovnice představuje součet všech mincí na první hromádce

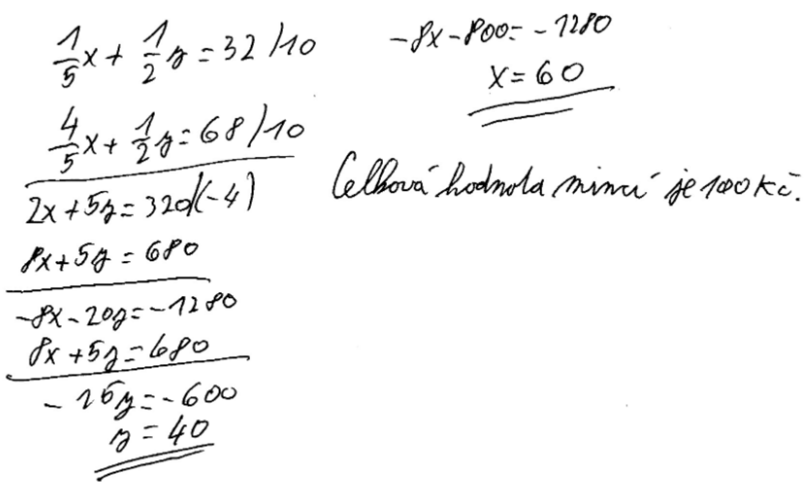
Ačkoli řešení na Obr. 60 obsahuje nevhodný[35] způsob zápisu v horní části výřezu, zajímavá je úvaha při sestavení soustavy rovnic: žák(yně) správně sestavil(a) první rovnici (jako matematický model), a to i přes to, že ještě před sestavením uvádí informaci, že na první hromádce je 64 mincí (zjevně interpretoval(a) zadání tak, že je na první hromádce 32 pětikorunových a 32 dvoukorunových mincí); chybně sestavená je druhá rovnice (vyšla možná z dalšího chybného předpokladu, že je celkový počet mincí na stole 68).

[35] Řešitel(ka) se zjevně snažil(a) vyjádřit, že 32 mincí na první hromádce se sestává z pětiny všech pětikorunových mincí a poloviny všech mincí dvoukorunových.

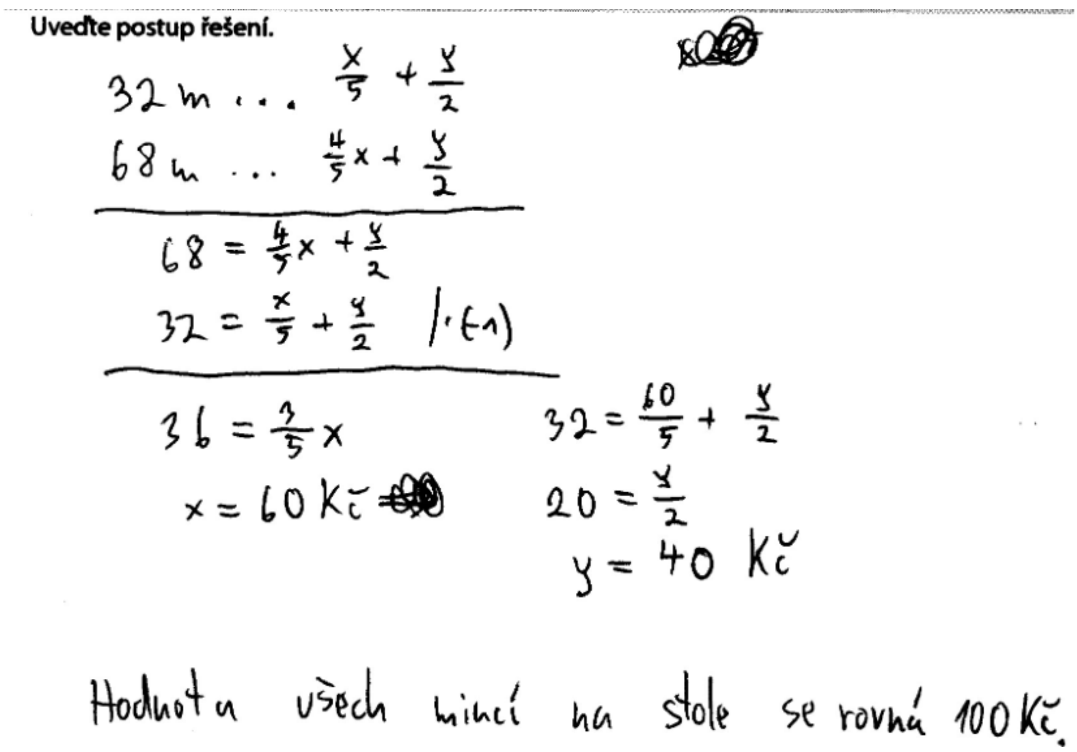


Obrázek 60 – Částečně chybně sestavená soustava rovnic

Některá z řešení obsahují správně sestavenou i vyřešenou soustavu, avšak brzy sepsaný závěr – řešitel(ka) na Obr. 61 a na Obr. 62 nedokázal(a) správně rozpoznat, co zde znamenají hodnoty 60 a 40.

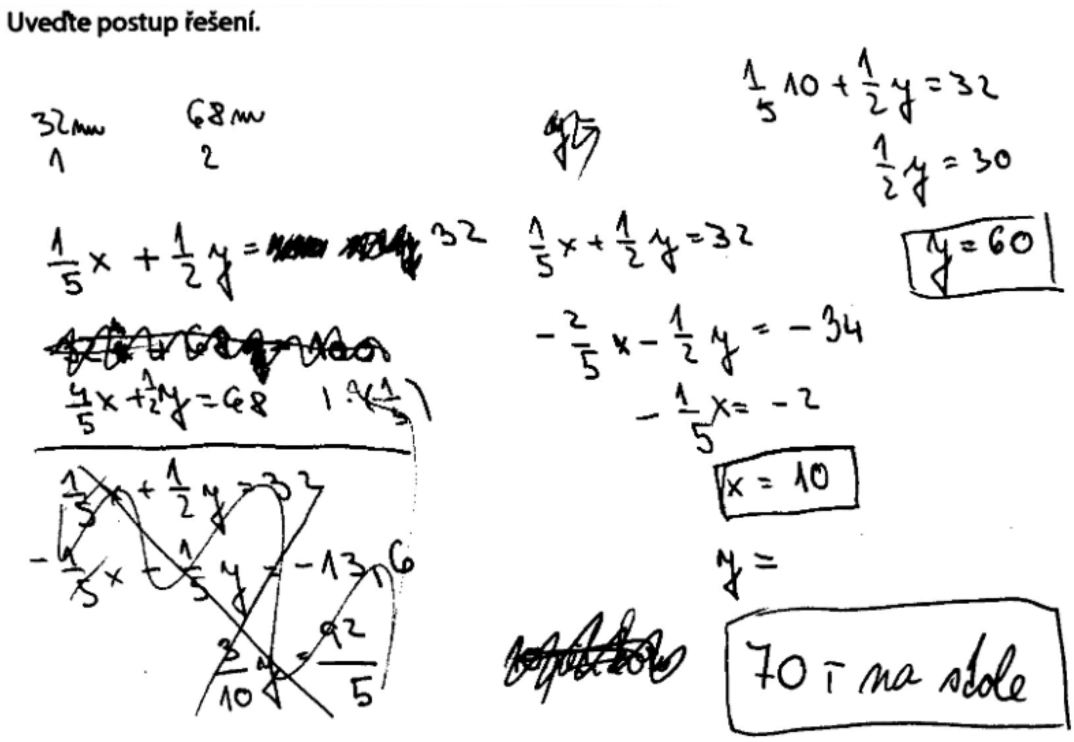


Obrázek 61 – Matení „mincí“ a „korun“



Obrázek 62 – Další příklad matení „mincí“ a „korun“

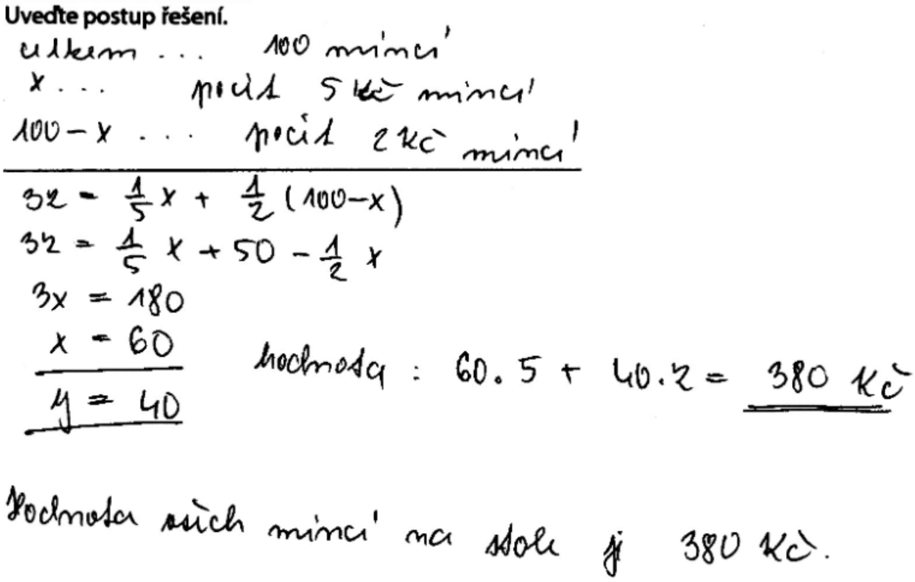
Řešení na Obr. 63 obsahuje správně sestavenou soustavu, ale chybně vyřešenou – násobení obou stran druhé rovnice číslem mínus jedna polovina nevede k další sepsané rovnici.



Obrázek 63 – Chybně vyřešená soustava

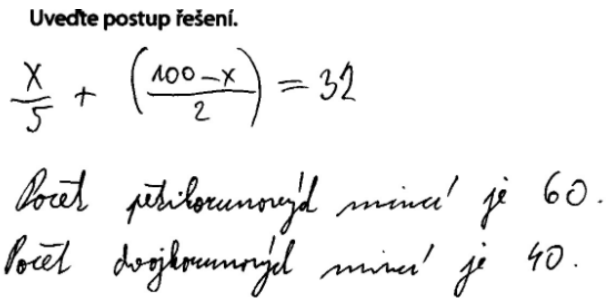
3. Řešení užitím rovnice, z níž zjistím počet pětikorun (resp. počet dvoukorun) na stole.

Na Obr. 64 uvádím jedno z mnoha správných řešení.



Obrázek 64 – Správné řešení užitím rovnice, ze které lze zjistit počet pětikorun

Jiná řešení neobsahují slovní legendu ani označenou neznámou, řešení na Obr. 65 navíc neobsahuje sepsaný závěr, totiž vypočtenou hodnotu všech mincí na stole. Je možné si všimnout i toho, že řešitel(ka) neuvedl(a) postup řešení rovnice. Je možné, že řešení uhodl(a).



Obrázek 65 – Řešení užitím rovnice; nedopočteno

4. Řešení užitím rovnice, ze které zjistím počet pětikorun (resp. dvoukorun) na první (resp. druhé) hromádce.

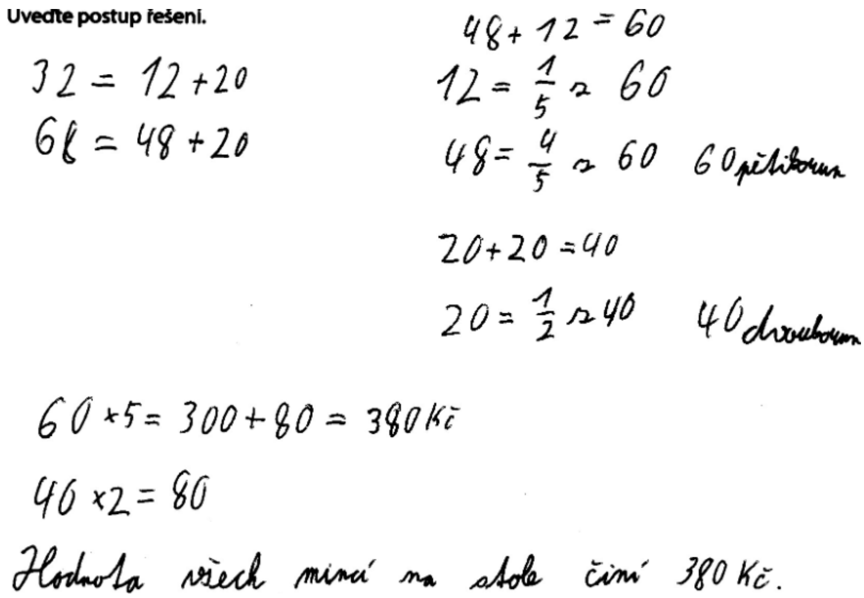
Takový postup jsem mezi analyzovanými výřezy nezaznamenal.

5. Řešení „úvahou" bez použití rovnic.

Na výřezu na Obr. 66 je uvedeno jedno z několika málo uvedených řešení bez použití rovnice nebo soustavy rovnic. Žák(yně) zjevně uhodl(a)[36] čísla $12, 48, 20$ tak, aby platily popsané vztahy uvedené v zadání. Součástí řešení je také nesprávně zapsaná rovnost.

[36] Číslo 20 představující počet dvoukorun na obou hromádkách musí být obsaženo v obou součtech v levé horní části výřezu, navíc počet pětikorun na druhé hromádce musí být čtyřikrát větší, než je počet

Uveďte postup řešení.



$32 = 12 + 20$

$68 = 48 + 20$

$48 + 12 = 60$

$12 = \frac{1}{5} z\ 60$

$48 = \frac{4}{5} z\ 60$ 60 pětikorun

$20 + 20 = 40$

$20 = \frac{1}{2} z\ 40$ 40 dvoukorun

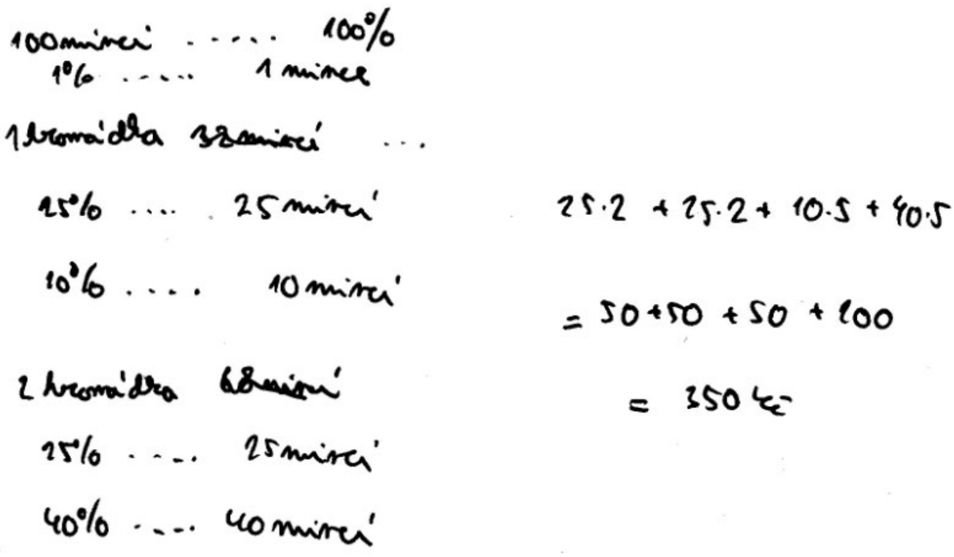
$60 \times 5 = 300 + 80 = 380$ Kč

$40 \times 2 = 80$

Hodnota všech mincí na stole činí 380 Kč.

Obrázek 66 – Jedno z řešení bez použití rovnice (uhodnutí čísel)

Na následujícím výřezu na Obr. 67 je chybné řešení s užitím procent. Řešitel(ka) si neuvědomuje, že součet počtů na jednotlivých hromádkách neodpovídá součtu uvedenému v zadání; navíc mylně předpokládá, že dvoukorunových a pětikorunových mincí musí být stejně.



100 mincí 100%

1% .... 1 mince

1 hromádka 32 mincí ...

25% .... 25 mincí

10% .... 10 mincí

2 hromádka 68 mincí

25% .... 25 mincí

40% .... 40 mincí

$25 \cdot 2 + 25 \cdot 2 + 10 \cdot 5 + 40 \cdot 5$

$= 50 + 50 + 50 + 100$

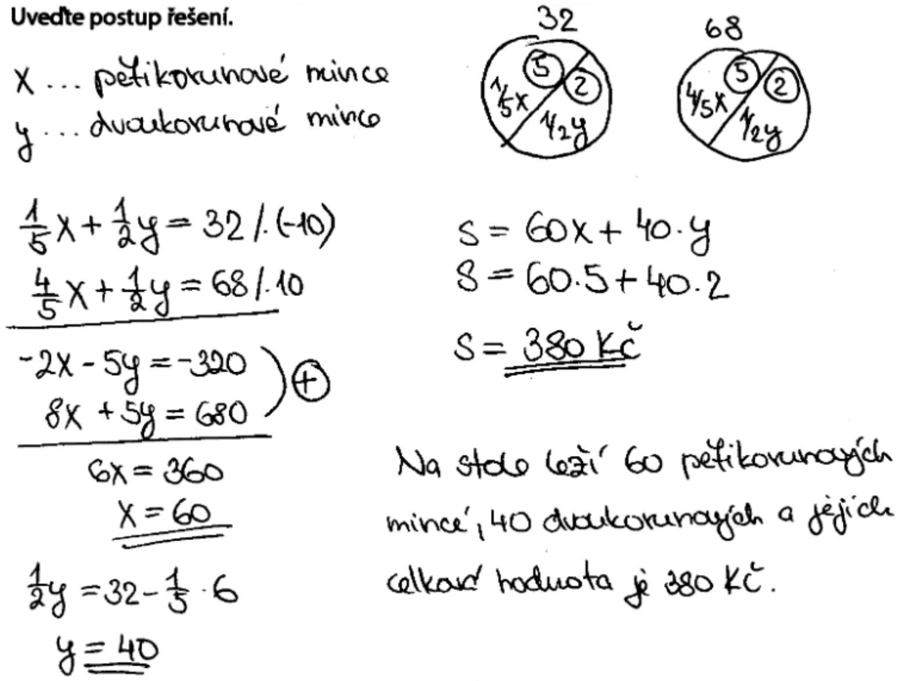
$= 350$ Kč

Obrázek 67 – Chybné řešení s využitím procent

6. Užitím obrázkové legendy či jiného nákresu.

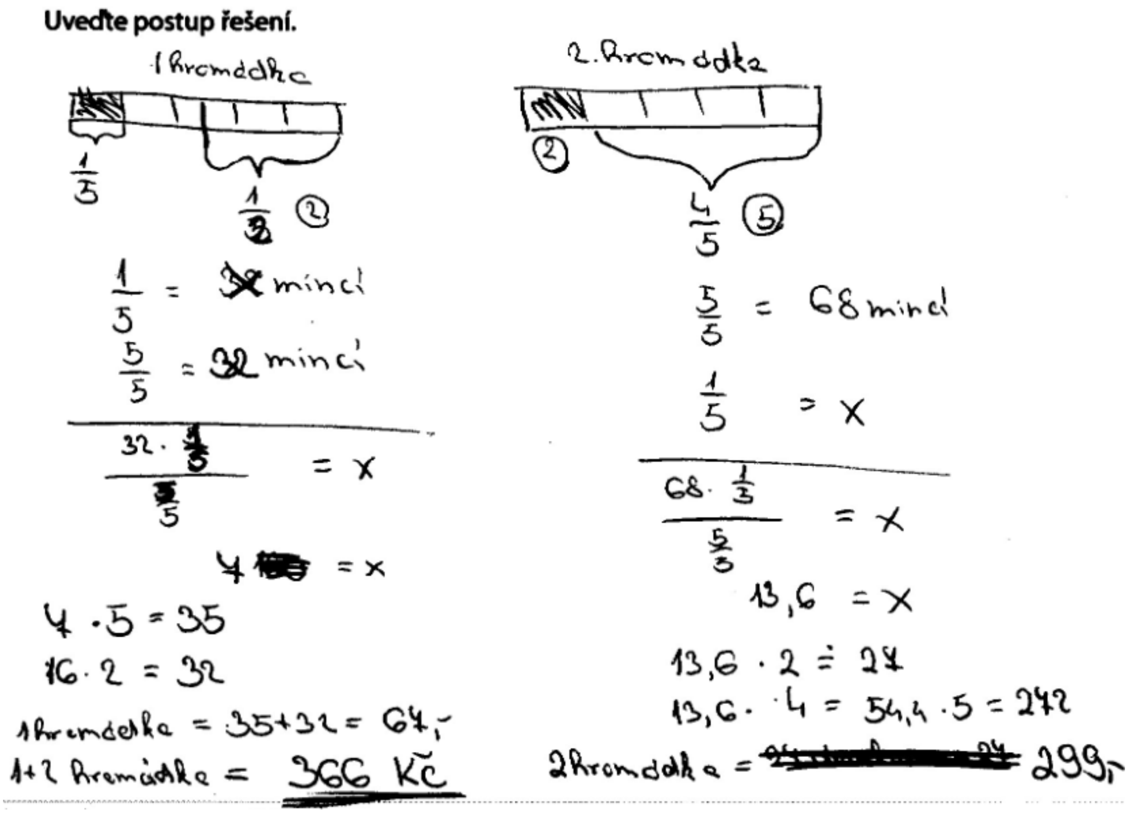
Řešení na následujícím výřezu (viz Obr. 68) obsahuje úplně správné řešení užitím soustavy rovnic, navíc však obsahuje obrázkovou legendu, která mohla napomoci při správném řešení slovní úlohy.

pětikorun na první hromádce. Vzhledem k tomu, že čísla 32 a 68 jako počty mincí nejsou „vysoká“, lze řešení uhodnout.



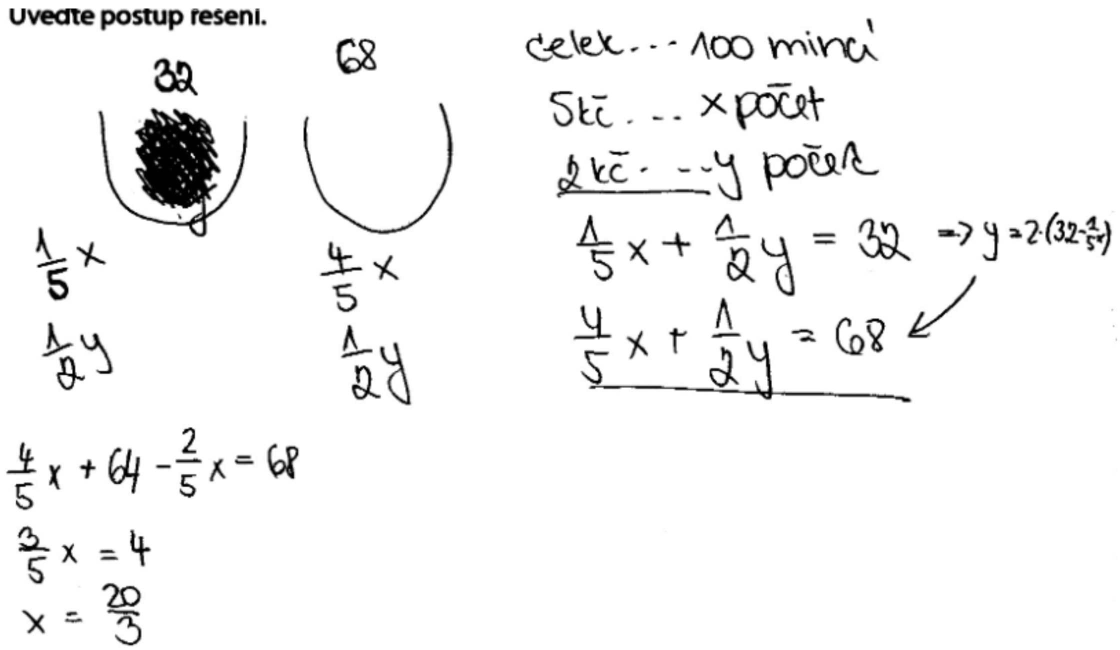
Obrázek 68 – Využití jednoduché obrázkové legendy při řešení slovní úlohy

Na dalším výřezu na Obr. 69 je zaznamenána obrázková legenda zvlášť pro první a pro druhou hromádku. Zdůrazňuji, že řešení není správné – příslušné pětiny nejsou počítány z počtu pětikorun, ale z celkového počtu mincí. Obrázková legenda nevedla ke správnému řešení – vyznačená pětina se vztahuje k celkovému počtu mincí na příslušné hromádce.



Obrázek 69 – Příklad zavádějícího využití obrázkové legendy

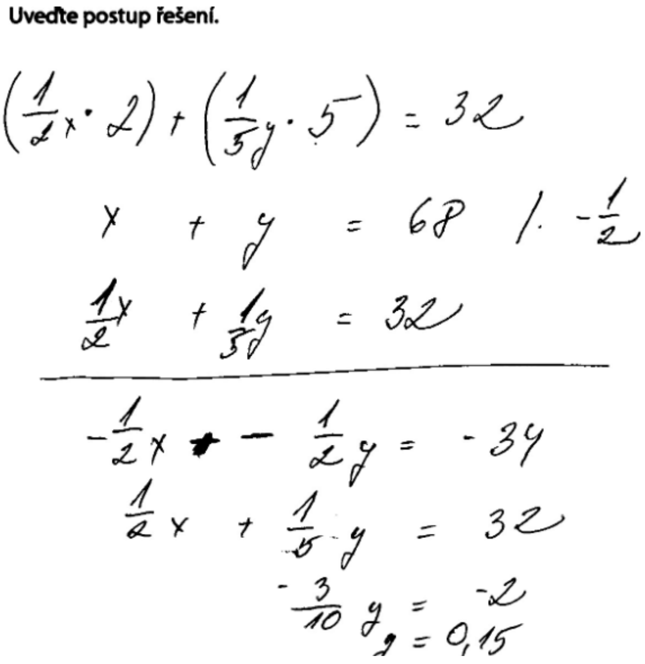
Jednoduchá obrázková legenda je i na následujícím obrázku (viz Obr. 70). Soustava je sestavena správně, nicméně obsahuje chybu v řešení.



Obrázek 70 – Využití obrázkové legendy (chybně vyřešená soustava)

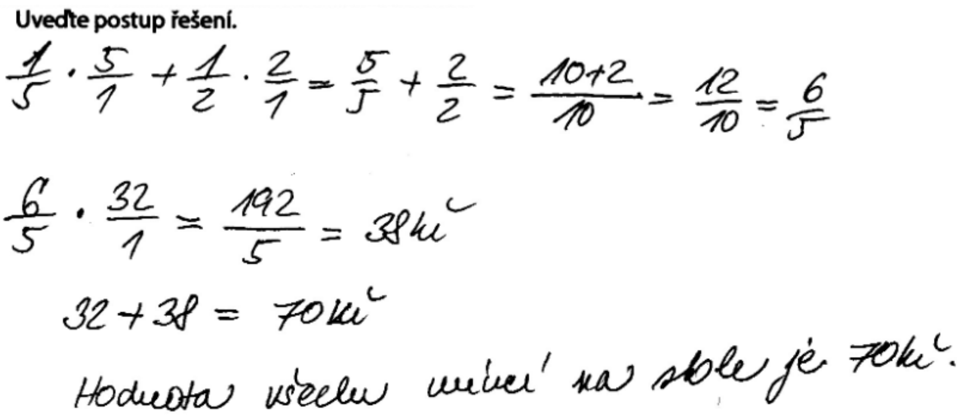
7. Užitím povrchové strategie.

Na Obr. 71 si žák(yně) možná uvědomil(a), že první rovnice byla sestavena pravděpodobně chybně. Je možné, že rovnice ve druhém a třetím řádku byly sestaveny na základě strategie signálních slov, x zde patrně označuje počet dvoukorun a y počet pětikorun.



Obrázek 71 – Povrchová strategie signálních slov

Žák(yně) na výřezu na Obr. 72 interpretoval(a) zadání tak, že „jedna pětina pětikorun“ je klíčem k výpočtu jedné pětiny z pěti, analogicky s jednou polovinou dvoukorun (vnímáno jako polovina ze dvou). Zlomky pět pětin a dvě poloviny jsou navíc v prvním řádku chybně sečteny. Výsledných šest pětin je vypočteno z částky 32 korun (navíc pak zjevně zaokrouhleno) a k výsledku je připočtena částka 32 korun ze zadání.


Uveďte postup řešení.

$\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}=\frac{5}{5}+\frac{2}{2}=\frac{10+2}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$

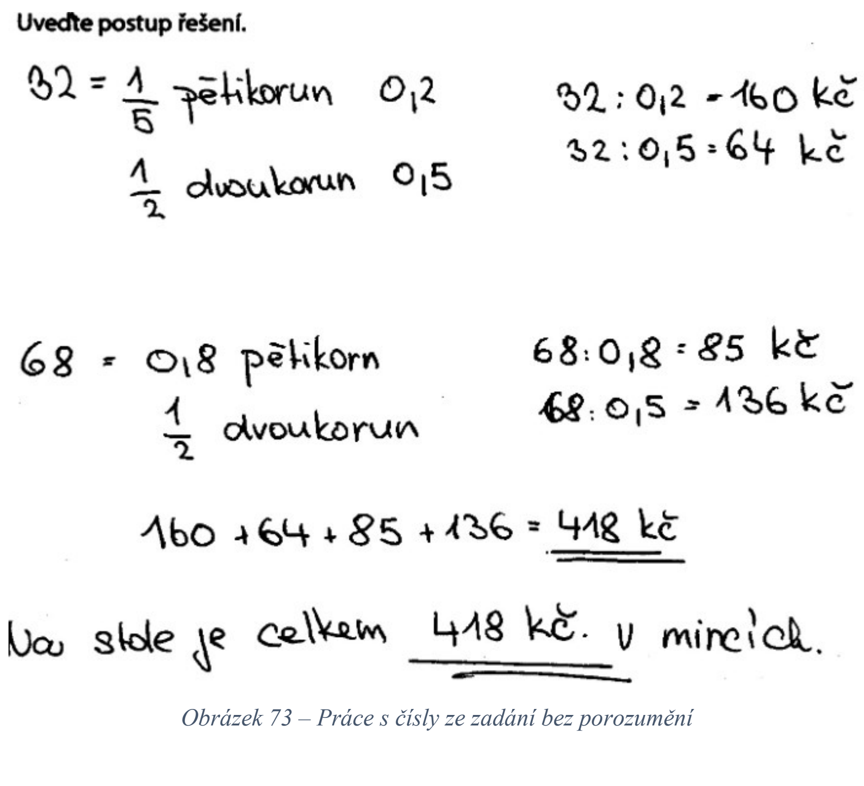
$\frac{6}{5}\cdot\frac{32}{1}=\frac{192}{5}=38$ kč

$32+38=70$ kč

Hodnota všech mincí na stole je 70 kč.

Obrázek 72 – Povrchová strategie

Další povrchové strategie jsou zachyceny na Obr. 73 a Obr. 74. V řešení jde o práci s čísly bez jakéhokoli porozumění. Na Obr. 74 je vidět, že žák(yně) sečetl(a) zlomky uvedené v zadání a následně pracoval(a) s trojčlenkou.


Uveďte postup řešení.

32 = $\frac{1}{5}$ pětikorun 0,2 — 32 : 0,2 = 160 kč

$\frac{1}{2}$ dvoukorun 0,5 — 32 : 0,5 = 64 kč

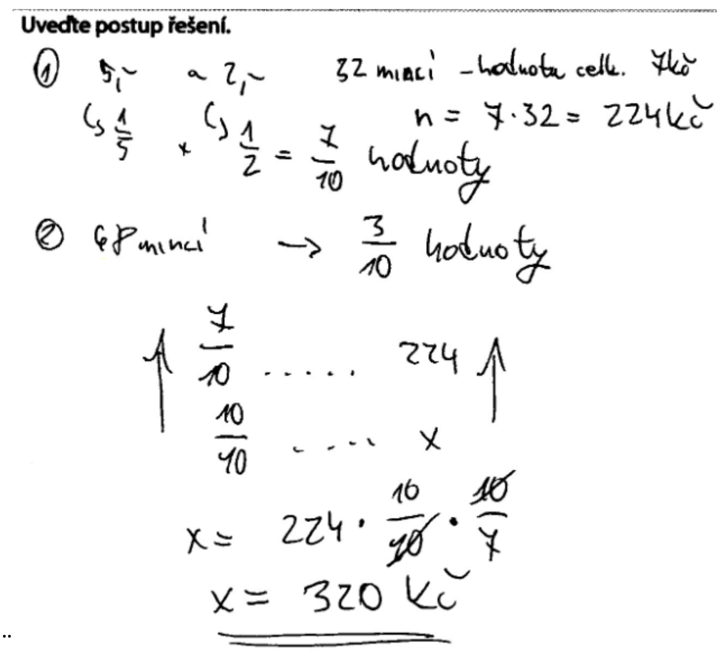
68 = 0,8 pětikorn — 68 : 0,8 = 85 kč

$\frac{1}{2}$ dvoukorun — 68 : 0,5 = 136 kč

160 + 64 + 85 + 136 = 418 kč

Na stole je celkem 418 kč. v mincích.

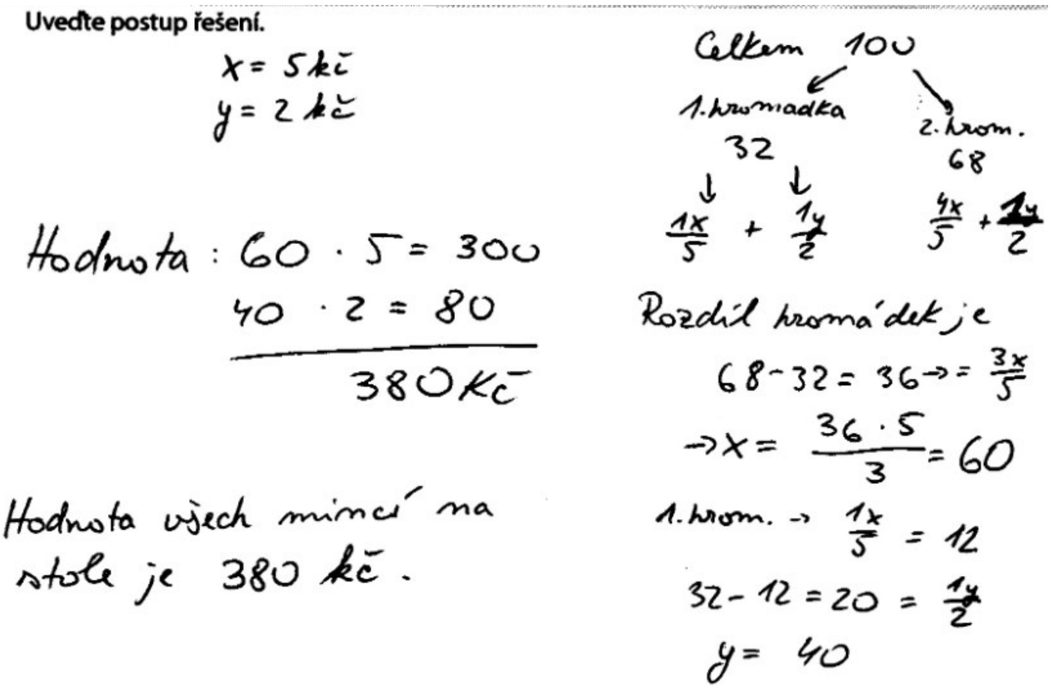
Obrázek 73 – Práce s čísly ze zadání bez porozumění



Obrázek 74 – Povrchová práce s trojčlenkou a s číslem 7

8. Ostatní řešení.

Za zajímavé považuji následující řešení na Obr. 75. Toto řešení je provedeno s využitím proměnných (x, y), ačkoli tatáž úvaha by mohla být vyjádřena bez jejich použití: řešitel(ka) si uvědomil(a), že rozdíl počtu mincí na hromádkách je 36, což odpovídá zřejmě třem pětinám počtu pětikorun. Počet pětikorun na první hromádce je tak roven $36 \cdot 5 : 3 = 60$. Snadno dopočítal(a), že počet dvoukorun na stole je 40, a že celková hodnota všech mincí na stole je 380 korun (v levé části výřezu).

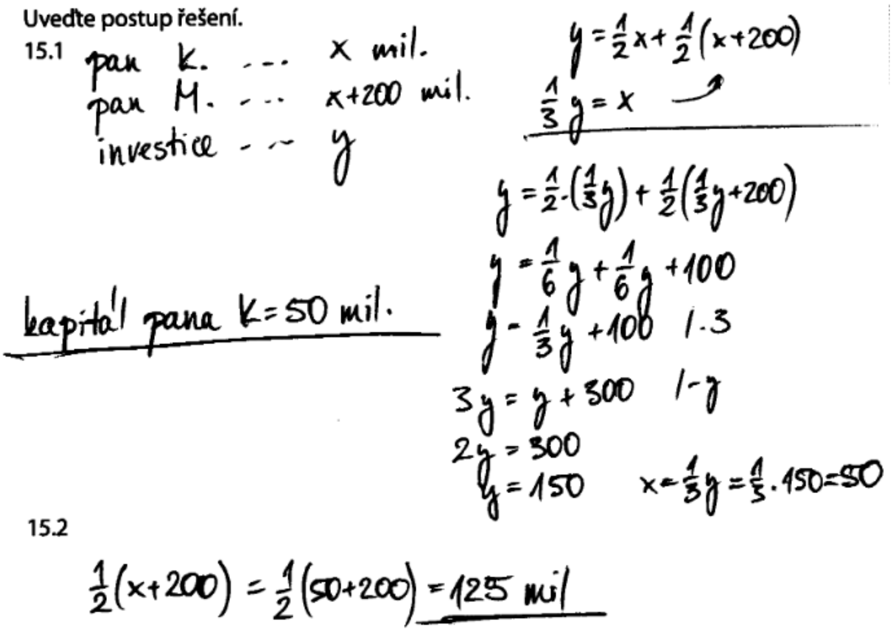


Obrázek 75 – Řešení využívající rozdílu počtu mincí na hromádkách

2.4.3 Jaro 2018 – kapitál

1. Řešení užitím soustavy rovnic s neznámými označujícími výši kapitálu pana Kocoura a hodnotu investice (obojí v milionech korun).

Na Obr. 76 je jedno z mnoha správných řešení. Řešení obsahuje označení neznámých jako součást slovní legendy.


Uveďte postup řešení.

15.1

pan K. ... x mil.

pan M. ... x+200 mil.

investice ... y

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x+200)$

$\frac{1}{3}y = x$

$y = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}y\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}y + 200\right)$

$y = \frac{1}{6}y + \frac{1}{6}y + 100$

$y = \frac{1}{3}y + 100 \quad /\cdot 3$

$3y = y + 300 \quad /-y$

$2y = 300$

$y = 150 \qquad x = \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}\cdot 150 = 50$

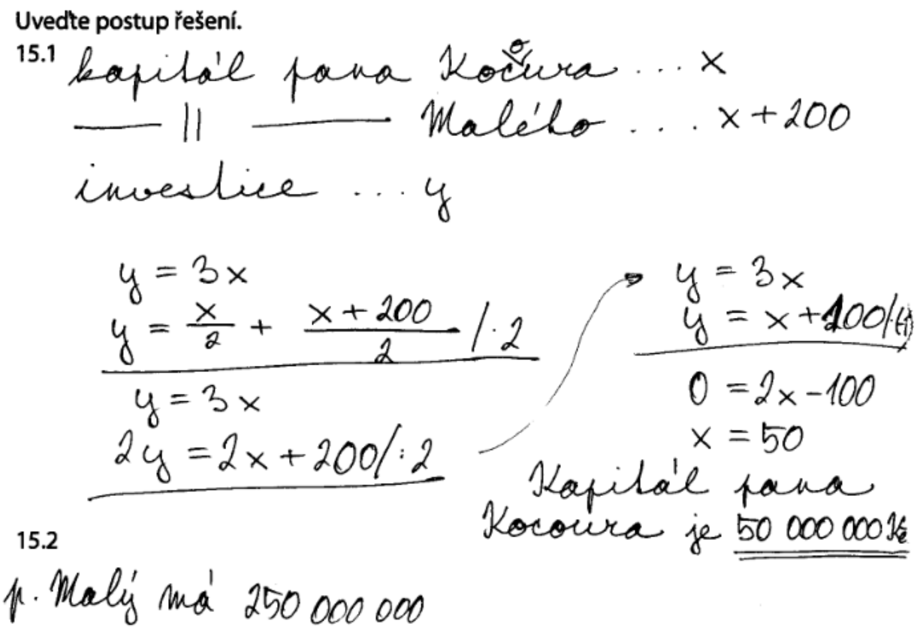
kapitál pana K = 50 mil.

15.2

$\frac{1}{2}(x+200) = \frac{1}{2}(50+200) = 125$ mil

Obrázek 76 – Jedno z mnoha správných řešení užitím jedné z možných soustav rovnic

Dále na Obr. 77 uvádím jedno z mnoha částečně správných řešení – částka, kterou uvolní pan Malý, není správně vypočtena.


Uveďte postup řešení.

15.1 kapitál pana Kočura ... x

— || — Malého ... x + 200

investice ... y

$y = 3x$

$y = \frac{x}{2} + \frac{x+200}{2} \quad /\cdot 2$

$y = 3x$

$2y = 2x + 200 \quad /:2$

$y = 3x$

$y = x + 100 \quad /(-)$

$0 = 2x - 100$

$x = 50$

Kapitál pana Kocoura je 50 000 000 Kč

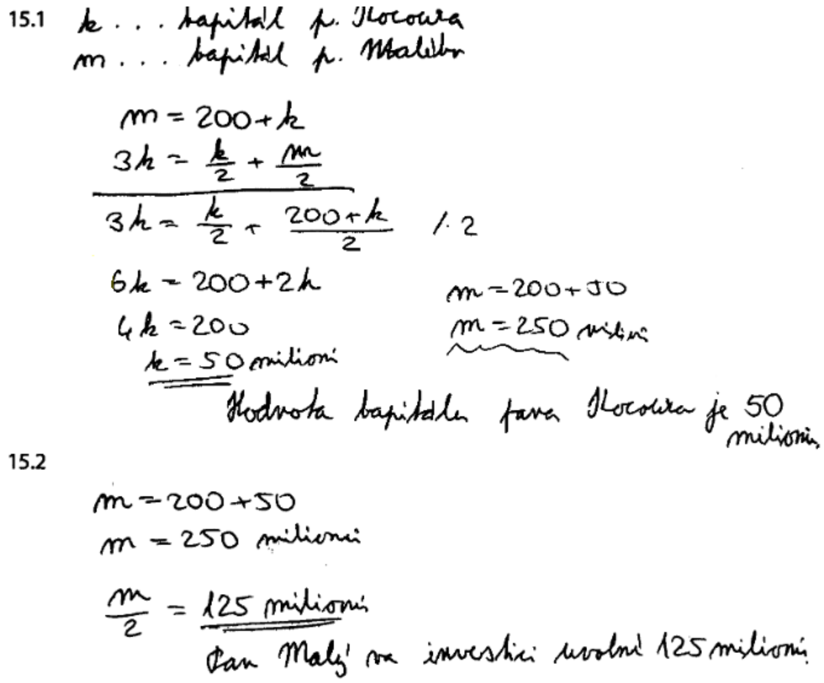
15.2

p. Malý má 250 000 000

Obrázek 77 – Částečně správné řešení užitím jedné z možných soustav rovnic

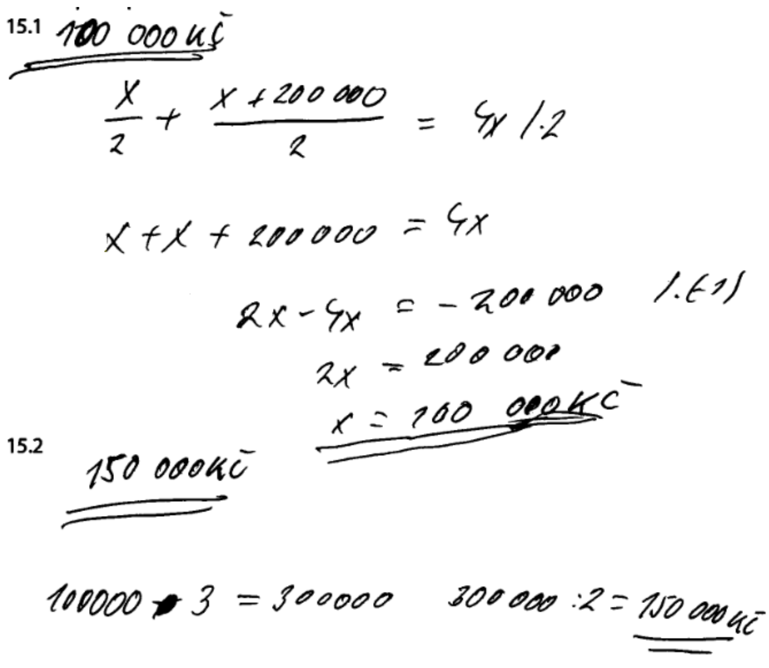
2. Řešení užitím soustavy rovnic s neznámými označujícími výše kapitálů pana Kocoura a pana Malého (obojí v milionech korun).

Taková řešení jsou ojedinělá, velmi výjimečná. Na Obr. 78 je příklad správného řešení užitím tohoto postupu.



Obrázek 78 – Příklad správného řešení užitím soustavy rovnic, z níž lze zjistit kapitál pana Kocoura

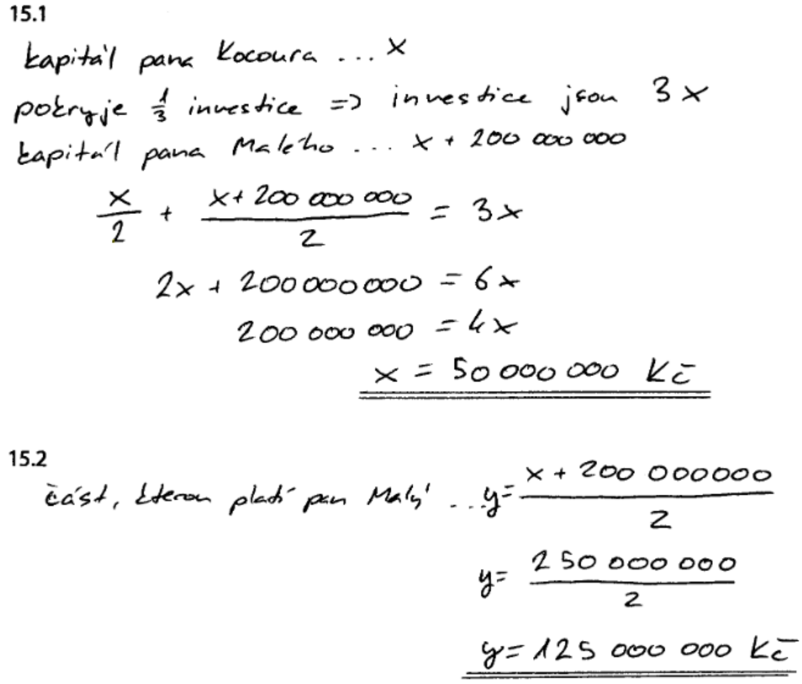
Řešení na Obr. 79 obsahuje chybu v sestavené rovnici (je pravděpodobné, že řešitel(ka) sestavil(a) správně situační model). Maturant(ka) navíc pracuje s čísly v tisících korun, nikoli v milionech.



Obrázek 79 – Chyba v sestavení pravé strany rovnice

3. Řešení užitím rovnice, ze které zjistím kapitál pana Kocoura (v milionech korun).

Takové řešení bylo velmi ojediněle zastoupené. Žáci volili k řešení úlohy nejčastěji soustavu rovnic. Příklad správného řešení je na Obr. 80.



15.1

kapitál pana Kocoura ... x

pokryje $\frac{1}{3}$ investice $\Rightarrow$ investice jsou $3x$

kapitál pana Malého ... $x + 200\,000\,000$

$$\frac{x}{2} + \frac{x + 200\,000\,000}{2} = 3x$$

$$2x + 200\,000\,000 = 6x$$

$$200\,000\,000 = 4x$$

$$x = 50\,000\,000 \text{ Kč}$$

15.2

část, kterou platí pan Malý ... $y = \frac{x + 200\,000\,000}{2}$

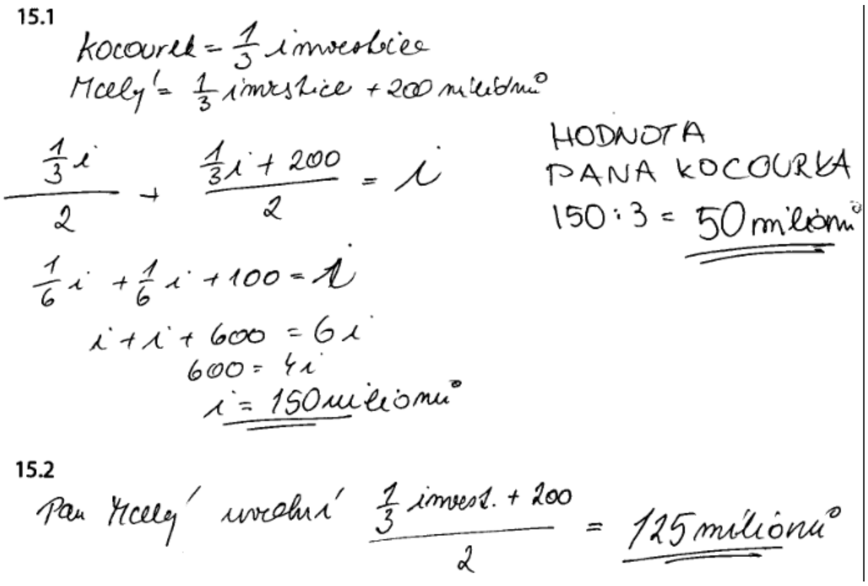
$$y = \frac{250\,000\,000}{2}$$

$$y = 125\,000\,000 \text{ Kč}$$

Obrázek 80 – Příklad správného řešení užitím rovnice

4. Řešení užitím rovnice, ze které zjistím hodnotu investice (v milionech korun).

Taková řešení se mezi výřezy v analyzovaném vzorku objevovala častěji než užitím rovnice, z níž lze zjistit kapitál pana Kocoura. Příklady dvou správných řešení jsou na Obr. 81 a 82.



15.1

kocourek = $\frac{1}{3}$ investice

Malý = $\frac{1}{3}$ investice + 200 milionů

$$\frac{\frac{1}{3}i}{2} + \frac{\frac{1}{3}i + 200}{2} = i$$

$$\frac{1}{6}i + \frac{1}{6}i + 100 = i$$

$$i + i + 600 = 6i$$

$$600 = 4i$$

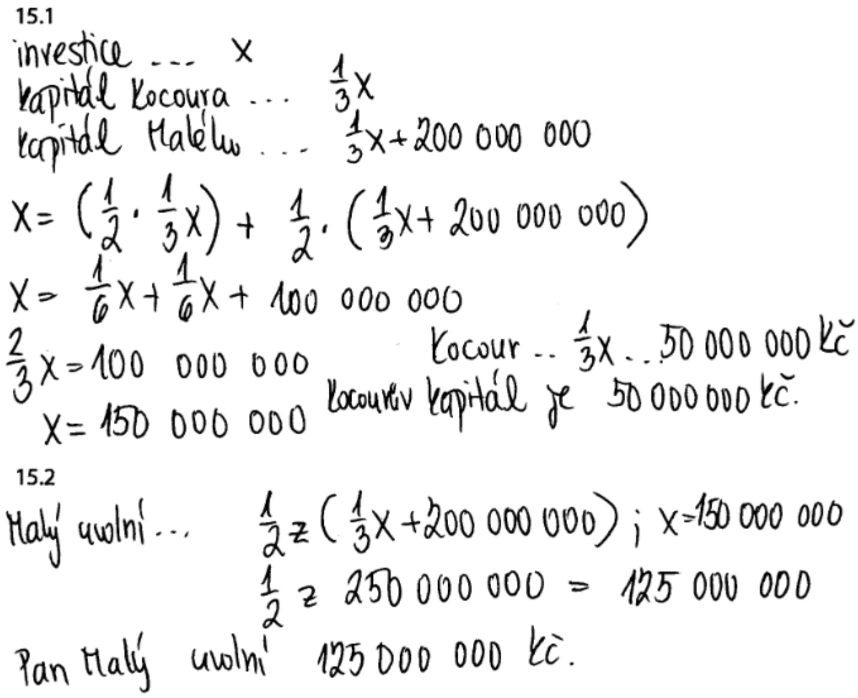
$$i = 150 \text{ milionů}$$

HODNOTA PANA KOCOURKA $150 : 3 = 50$ milionů

15.2

Pan Malý uvolní $\frac{\frac{1}{3}\text{invest.} + 200}{2} = 125$ milionů

Obrázek 81 – Správné řešení užitím rovnice, z níž lze zjistit hodnotu investice



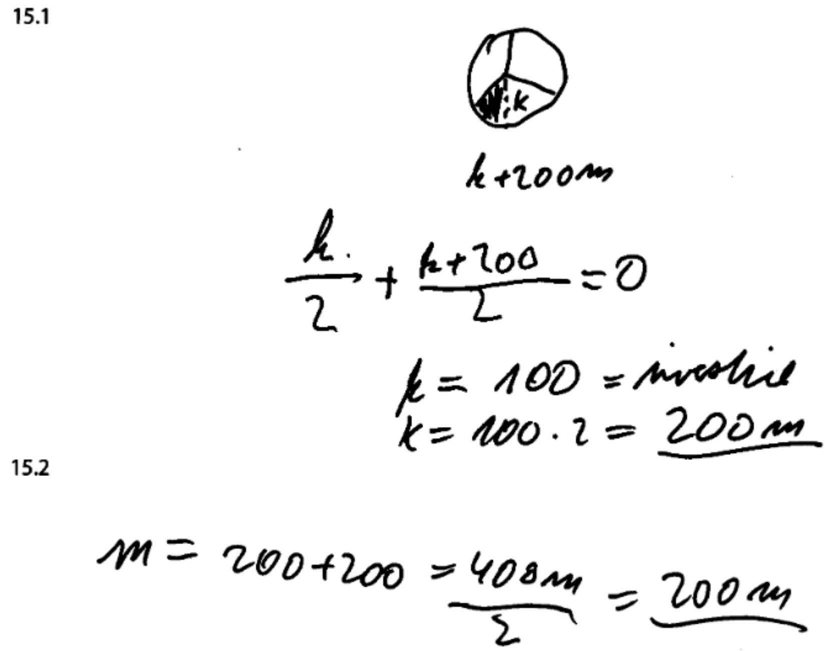
Obrázek 82 – Další správné řešení užitím rovnice, z níž lze zjistit hodnotu investice

5. Řešení „úvahou“, bez použití rovnice.

Takové řešení se v analyzovaném vzorku nevyskytlo.

6. Řešení užitím obrázkové legendy nebo jiného nákresu.

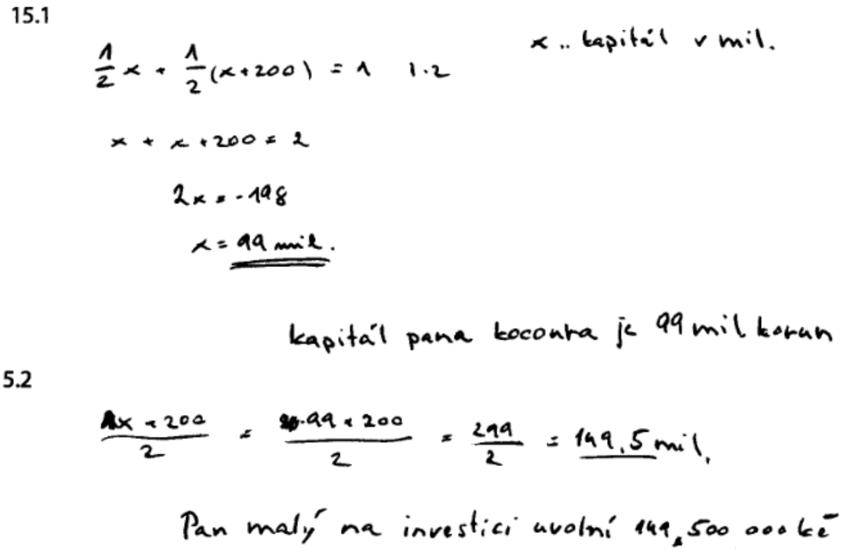
Na jediném výřezu v analyzovaném vzorku byl zachycen obrázek – na Obr. 83 je řešení, které obsahuje zakreslený kruhový model s vyznačenou třetinou; řešení však není správné. Je možné si všimnout také nuly na jedné straně sestavené rovnice.



Obrázek 83 – Použití obrázku při nesprávném řešení úlohy „kapitál“

7. Řešení užitím povrchové strategie.

Některá řešení obsahují sestavenou rovnici, jejíž jedna strana je 1. Ta může představovat jednu celou investici. Na Obr. 84 je zachyceno řešení užitím rovnice, jejíž levá strana odpovídá součtu uvolněných částek pana Kocoura a pana Malého; z rovnice $2x = -198$ určil(a) maturant(ka) kořen $x = 99$.


15.1

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x+200) = 1 \quad | \cdot 2$ x .. kapitál v mil.

$x + x + 200 = 2$

$2x = -198$

$x = 99$ mil.

kapitál pana kocoura je 99 mil korun

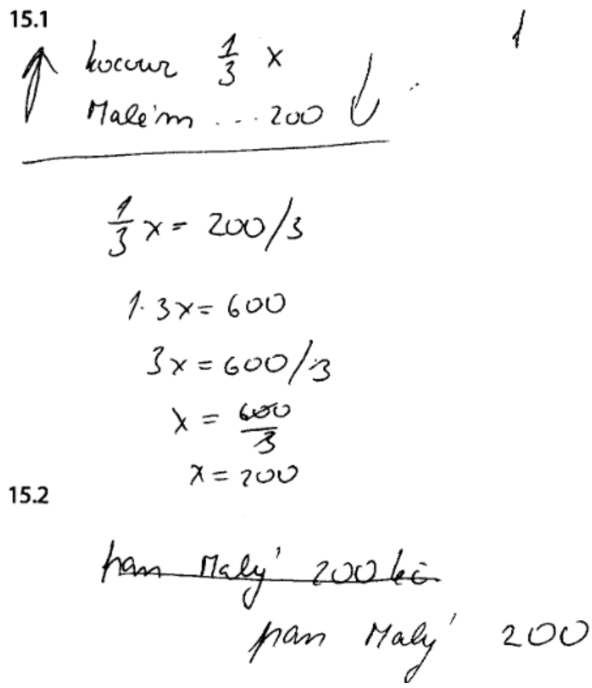
15.2

$\frac{1x+200}{2} = \frac{1\cdot 99+200}{2} = \frac{299}{2} = 149,5$ mil.

Pan malý na investici uvolní 149,500 000 kč

Obrázek 84 – Číslo 1 na pravé straně rovnice; záporné řešení rovnice

V některých výřezech je zřejmé použití porovnání s prototypickou úlohou – např. na Obr. 85 je zachyceno povrchové porovnání s úlohou na nepřímou úměrnost.


15.1

kocour $\frac{1}{3}x$

Malém ... 200

$\frac{1}{3}x = 200/3$

$1 \cdot 3x = 600$

$3x = 600/3$

$x = \frac{600}{3}$

$x = 200$

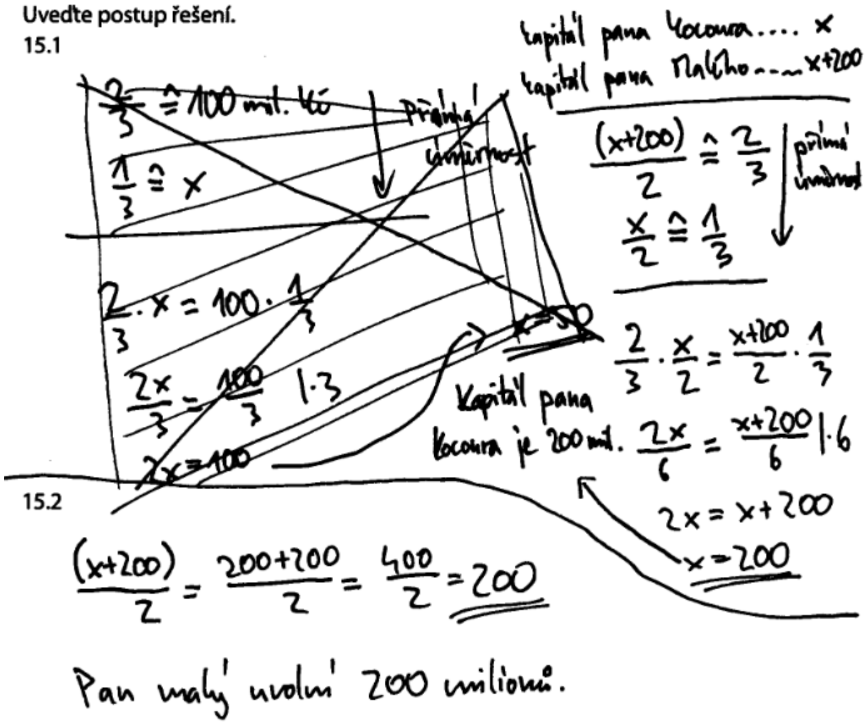
15.2

~~pan Malý 200 kč~~

pan Malý 200

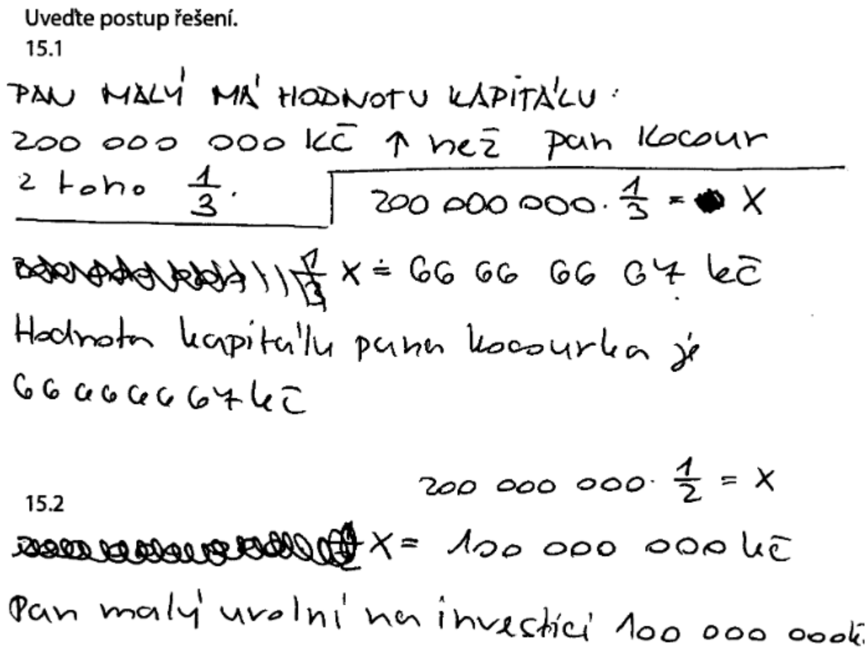
Obrázek 85 – Porovnání s prototypickou úlohou: nepřímá úměrnost

Na dalším výřezu (viz Obr. 86) je zjevné porovnání s prototypickou úlohou na přímou úměrnost – řešitel(ka) vychází z chybného předpokladu, že polovina uvolněného kapitálu pana Kocoura odpovídá třetině hodnoty investice.



Obrázek 86 – Porovnání s prototypickou úlohou: přímá úměrnost

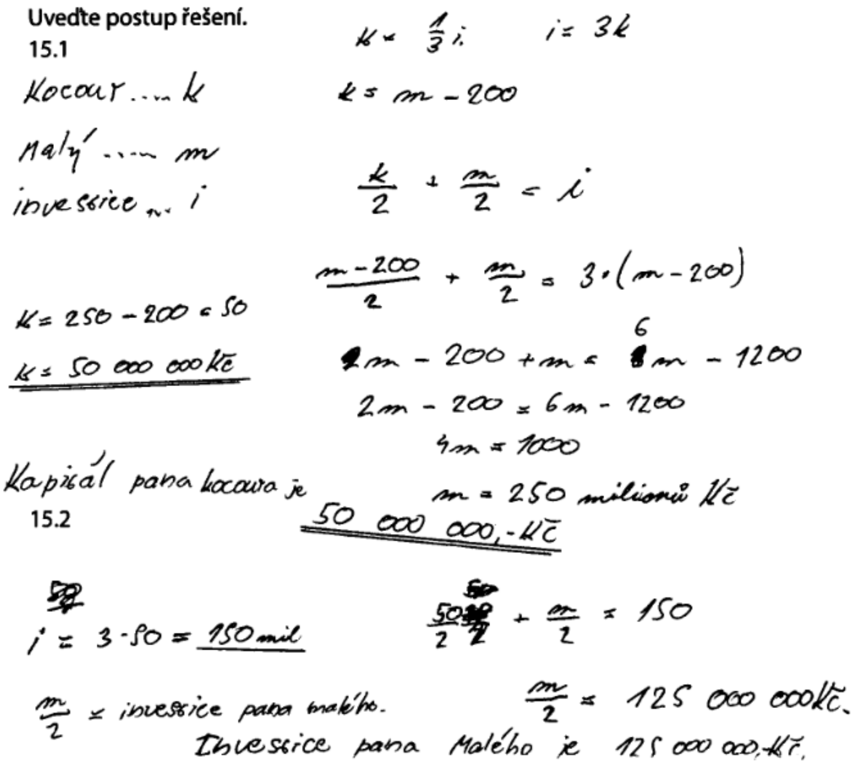
Jako typickou povrchovou strategii uvádím také strategii signálních slov – několikrát se objevilo řešení spočívající v určení třetiny z 200 milionů – byla tak pospojována dvě čísla ze zadání (viz Obr. 87).



Obrázek 87 – Jedno z řešení, v němž je vypočtena třetina ze dvou milionů korun

8. Ostatní řešení.

Některá řešení užitím soustavy rovnic využívají tří neznámých. Jejich význam považuji za zřejmý. Příklady řešení jsou uvedeny na Obr. 88 a Obr. 89.



Uveďte postup řešení.

15.1

Kocour .... k

Malý .... m

investice ... i

$k = \frac{1}{3} i \qquad i = 3k$

$k = m - 200$

$\frac{k}{2} + \frac{m}{2} = i$

$\frac{m-200}{2} + \frac{m}{2} = 3\cdot(m-200)$

$m - 200 + m = 6m - 1200$

$2m - 200 = 6m - 1200$

$4m = 1000$

$m = 250$ milionů Kč

$k = 250 - 200 = 50$

$k = 50\,000\,000$ Kč

Kapitál pana Kocoura je 50 000 000,- Kč

15.2

$i = 3\cdot 50 = 150$ mil

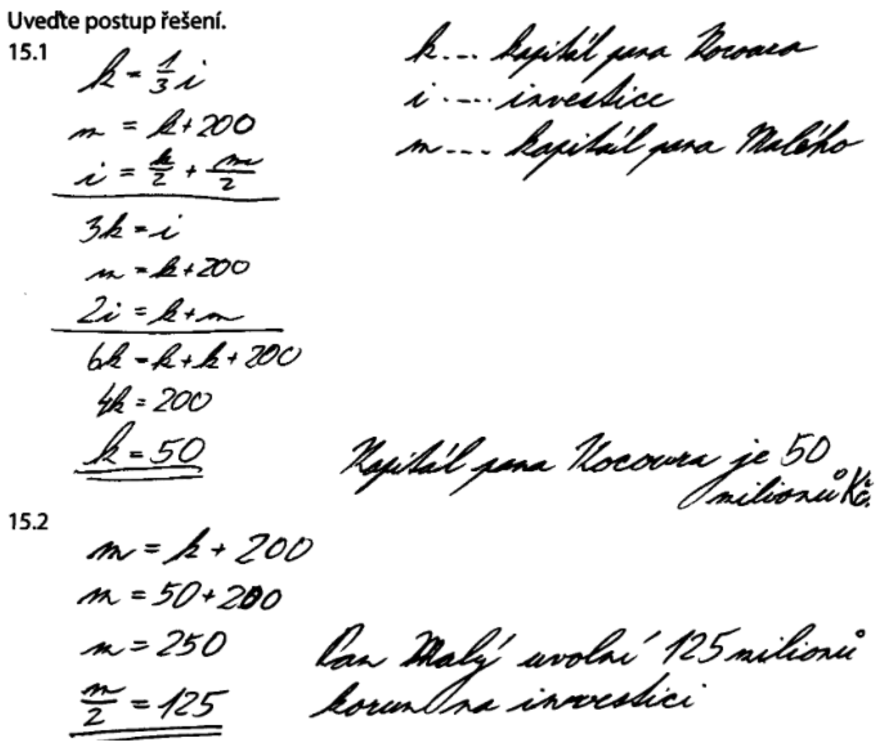
$\frac{50}{2} + \frac{m}{2} = 150$

$\frac{m}{2}$ = investice pana Malého.

$\frac{m}{2} = 125\,000\,000$ Kč.

Investice pana Malého je 125 000 000,- Kč.

Obrázek 88 – Jedno z řešení užitím tří neznámých



Uveďte postup řešení.

15.1

$k = \frac{1}{3} i$

$m = k + 200$

$i = \frac{k}{2} + \frac{m}{2}$

$3k = i$

$m = k + 200$

$2i = k + m$

$6k = k + k + 200$

$4k = 200$

$k = 50$

k ... kapitál pana Kocoura

i ... investice

m ... kapitál pana Malého

Kapitál pana Kocoura je 50 milionů Kč.

15.2

$m = k + 200$

$m = 50 + 200$

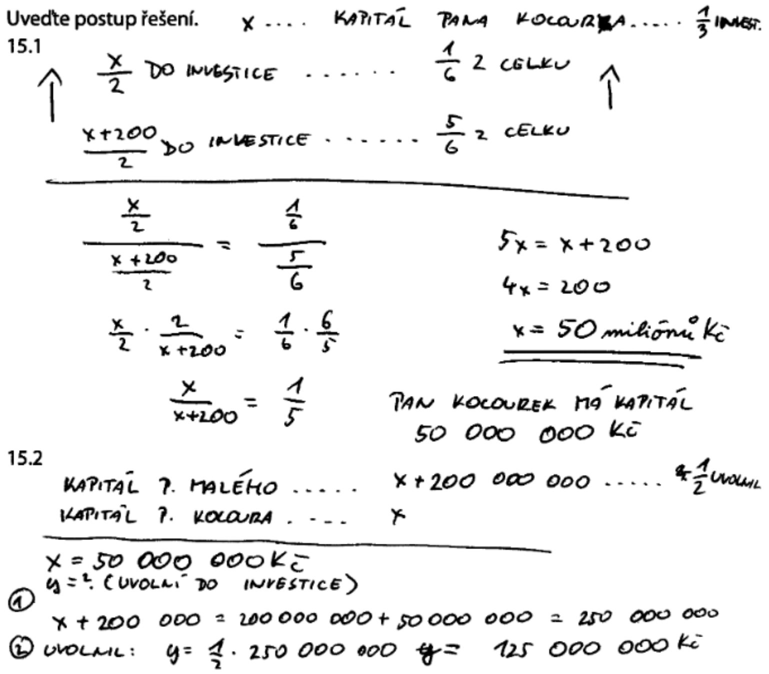
$m = 250$

$\frac{m}{2} = 125$

Pan Malý uvolní 125 milionů korun na investici

Obrázek 89 – Další z řešení užitím tří neznámých

Podkapitolu zakončím správným, a navíc originálním řešením užitím přímé úměrnosti (viz Obr. 90). V podstatě využívá způsobu uvedeném v kategorii o řešení úvahou, avšak zde je využita rovnice.

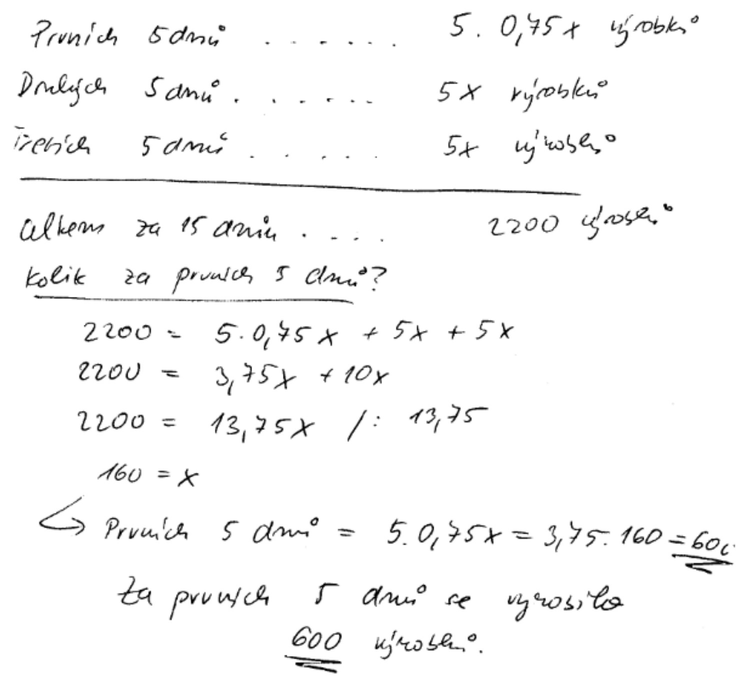


Obrázek 90 – Využití přímé úměrnosti při správném řešení

2.4.4 Jaro 2019 – výrobky

1. Řešení užitím rovnice, z níž zjistím počet výrobků v šestém dnu.

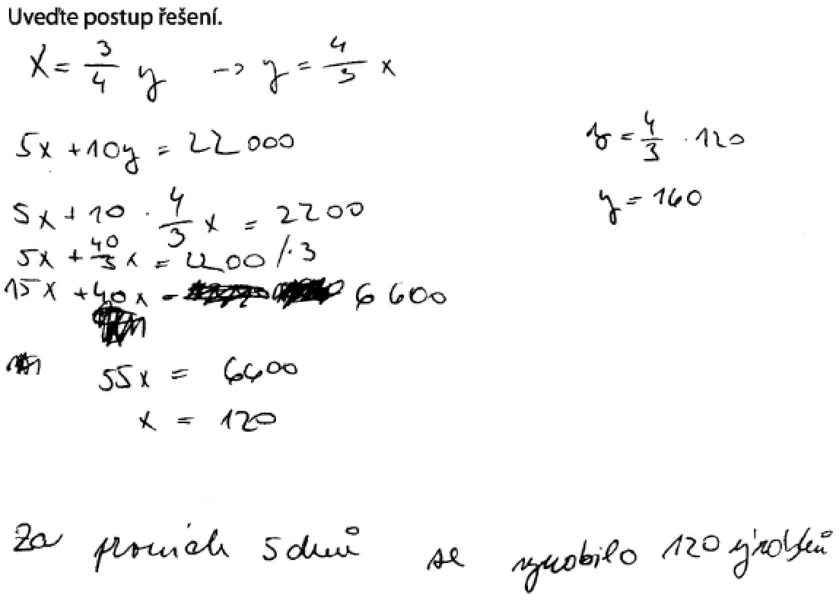
   Jedno z mnoha správných řešení užitím lineární rovnice uvádím na Obr. 91.



Obrázek 91 – Správné řešení užitím rovnice

2. Řešení užitím rovnic, z níž zjistím průměrný počet výrobků v každém z prvních pěti dnů.

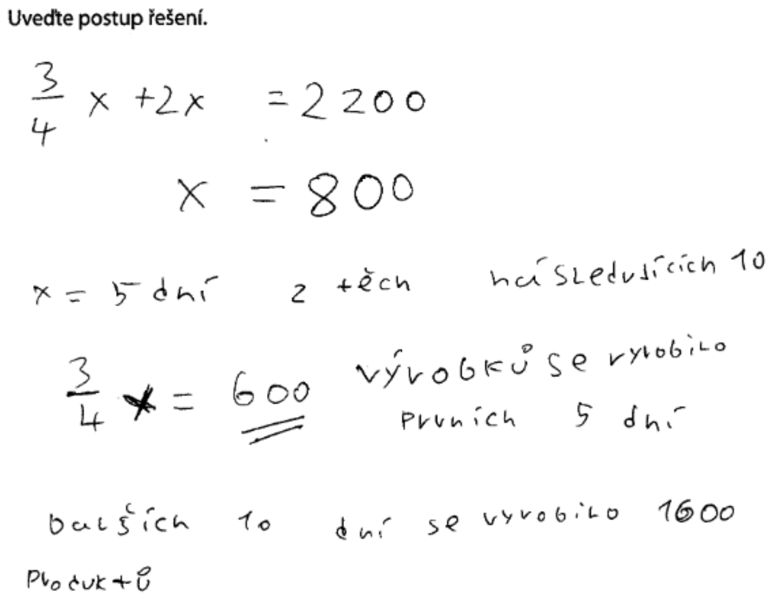
Následující řešení (viz Obr. 92) obsahuje správně sestavenou i vyřešenou rovnici, ale příliš brzy sepsaný závěr – maturant(ka) zřejmě nedokončil(a) řešení úlohy.



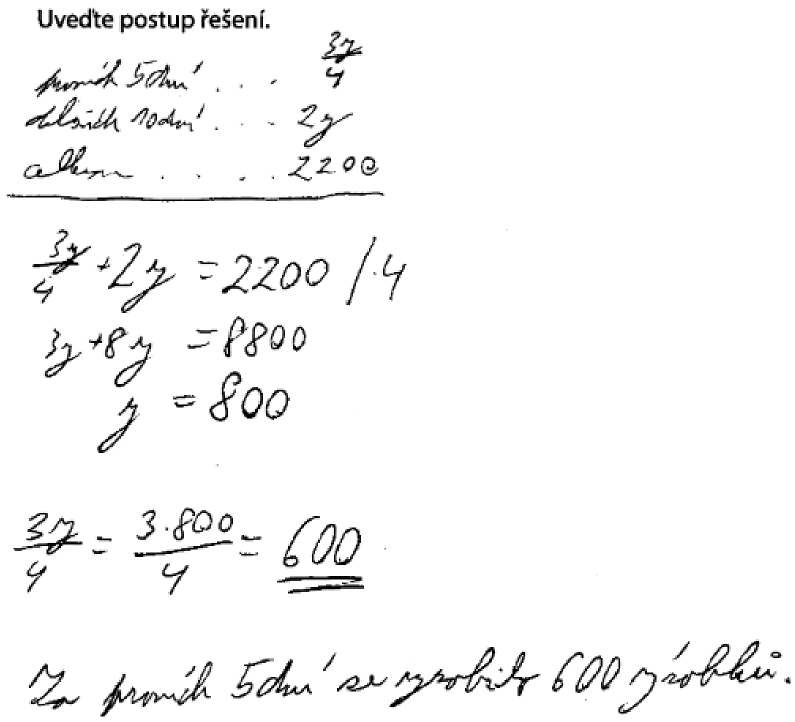
Obrázek 92 – Řešení užitím rovnice; nedokončené řešení

3. Řešení užitím rovnice, z níž zjistím přímo hledaný počet výrobků vyrobených v prvních pěti dnech.

Takové řešení bylo zastoupené v malé míře. Příklady dvou správných řešení dokládám na Obr. 93 a na Obr. 94.



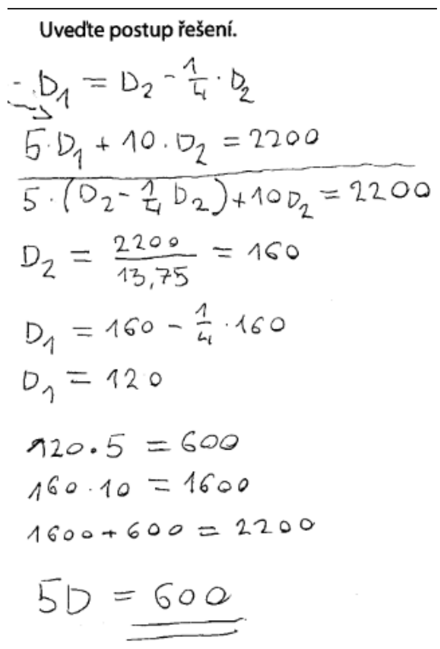
Obrázek 93 – Správné řešené užitím rovnice



Obrázek 94 – Správné řešení užitím rovnice

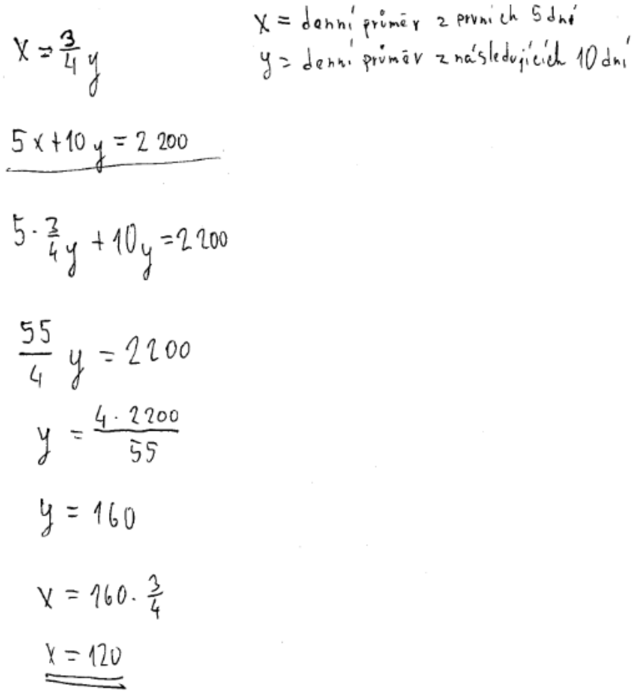
4. Řešení užitím soustavy rovnic.

Na výřezu na Obr. 95 je jedno ze správných řešení.



Obrázek 95 – Příklad správného řešení užitím soustavy rovnic

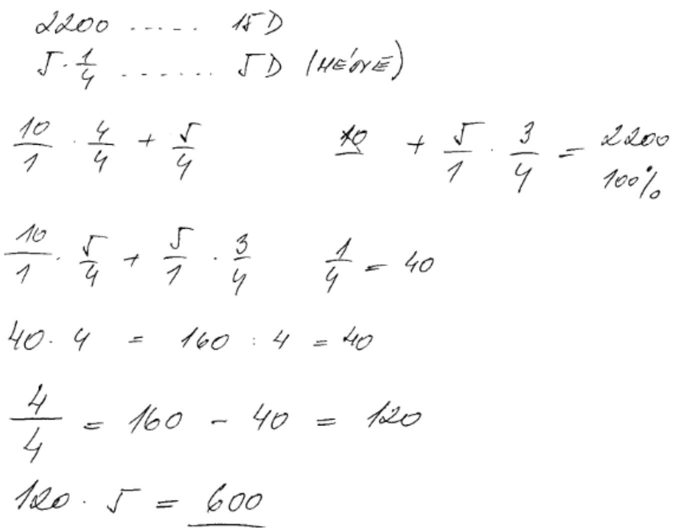
Řešení užitím soustavy není v analyzovaném vzorku natolik časté jako hojně zastoupené řešení užitím lineární rovnice. Soustava na následujícím výřezu (viz Obr. 96) je sestavena správně. Bezchybně je i dopočtena hodnota $x = 120$, avšak chybí vynásobení pěti. Lze si všimnout, že řešení obsahuje označené proměnné.



Obrázek 96 – Řešení užitím soustavy rovnic; nedopočteno

5. Řešení „úvahou" bez použití rovnic.

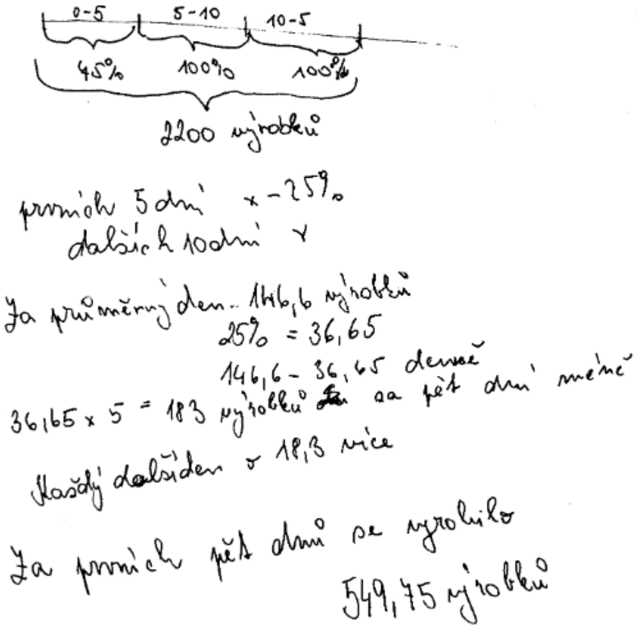
Ze všech výřezů vybírám zajímavé řešení, které nevyužívá proměnných (viz Obr. 97).



Obrázek 97 – Řešení úvahou

6. Řešení užitím obrázkové legendy či jiného nákresu.

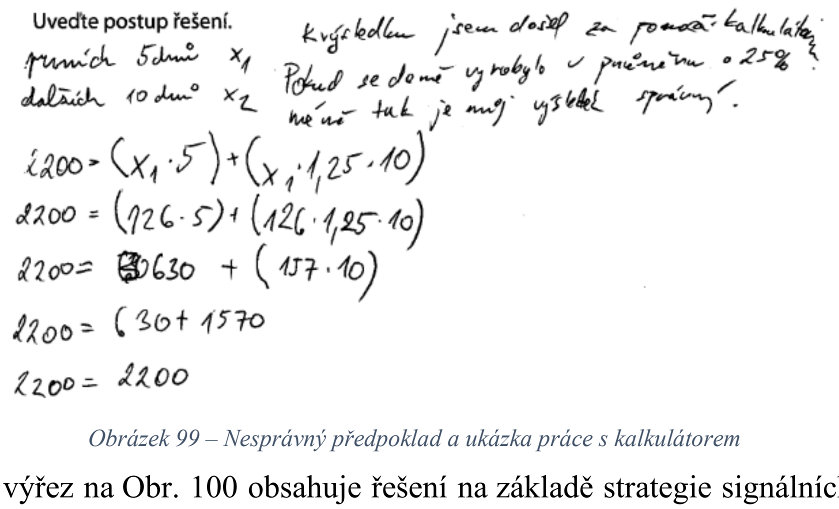
V analyzovaném vzorku využívalo jedno řešení spojitý model, v němž jsou vyznačeny počty procent – viz Obr. 98. Řešení však není správné. Je vypočtena patnáctina z 2 200 jako průměrný počet výroků vyrobených za den; z tohoto čísla je dále určována čtvrtina, což poukazuje na chybné vytvoření situačního modelu. Výřez by bylo možné zařadit i do kategorie s povrchovými strategiemi, avšak od dalších řešení se liší využitím obrázkové legendy.



Obrázek 98 – Využití obrázkové legendy při nesprávném řešení úlohy „výrobky“

7. Řešení užitím povrchové strategie.

Jedna z chyb, kterou bylo možné při analýze řešení úlohy najít, byla práce s chybným předpokladem, že se v posledních deseti dnech vyrobilo o čtvrtinu výrobků více než v každém z prvních pěti dnů. Žák na výřezu na Obr. 99 takto chybně interpretuje zadání, podle takové interpretace je nesprávně sestaven matematický model. Za zajímavé považuji i to, že žák dodává, že k výsledku došel pomocí kalkulátoru – kořen zjevně uhodl a „zkontroloval“ pomocí kalkulačky (využil tedy heuristickou strategii, byť ne zcela úspěšně).



Obrázek 99 – Nesprávný předpoklad a ukázka práce s kalkulátorem

Následující výřez na Obr. 100 obsahuje řešení na základě strategie signálních slov (zde se snaží řešitel(ka) do rovnice sepsat jednu čtvrtinu, která je uvedena v zadání – není tak správně provedena matematizace). Jiná chyba však v postupu není; žák(yně) si dokonce uvědomuje, že je potřeba kořen rovnice vynásobit pěti pro získání výsledku.

15 dní = 2200 výrobků
5 dní = $x - \frac{1}{4}$
10 dní = x

$$5\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)+10x=2200$$
$$5x-\frac{5}{4}+10x=2200$$
$$15x=\frac{8\,805}{4}$$
$$x=\frac{587}{4}=146{,}75 \text{ výrobků}$$
$$(10\cdot 146{,}75)+5\cdot\left(146{,}75-\frac{1}{4}\right)=2200 \Leftarrow \text{zkouška}$$

$$5\cdot\left(146{,}75-\frac{1}{4}\right)=732{,}5$$

Za prvních 5 dní se vyrobilo 732,5 výrobků.

Obrázek 100 – Strategie signálních slov (nevztažení k základu x)

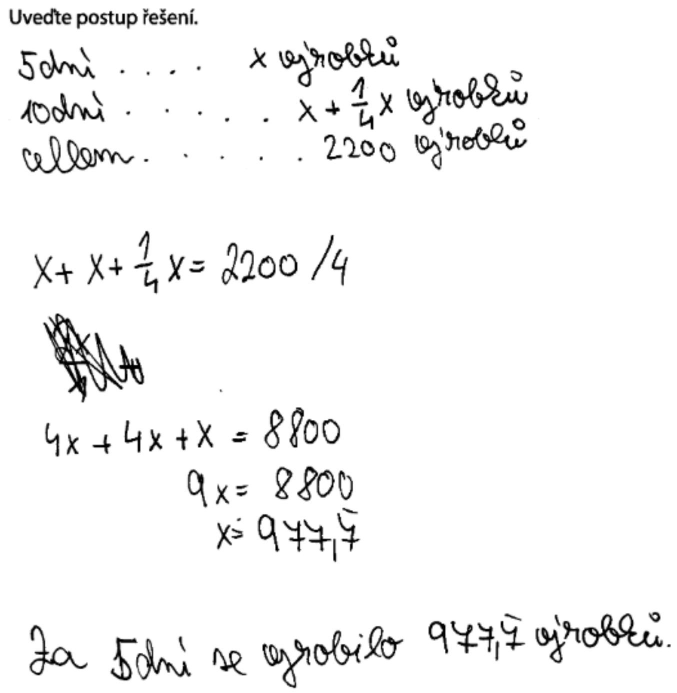
Zmenšení o jednu čtvrtinu bez vztažení k počtu výrobků jako k základu jako důsledek povrchového zpracování úlohy se vyskytuje ve více výřezech. Jako příklad uvádím řešení na Obr. 101. Je možné si všimnout, že maturant(ka) dělil(a) kořen rovnice pěti; použil(a) tedy dělení namísto násobení.

$$x-\frac{1}{4}=2200 \quad /\cdot 4$$
$$4x-1=8800 \quad /+1$$
$$4x=8801 \quad /:4$$
$$x=2200{,}25 \doteq 2200$$

$$2200:5=\underline{\underline{440}}$$
20
00

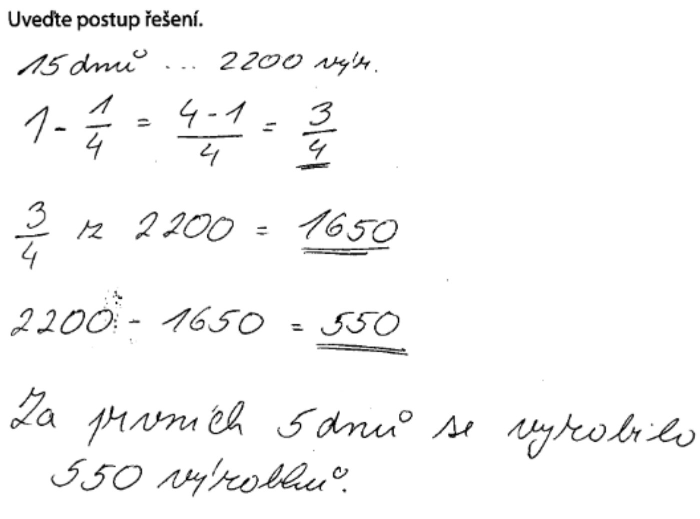
Obrázek 101 – Zmenšení čísla x o jednu čtvrtinu bez dobrému porozumění zadání

V následujícím řešení (viz Obr. 102) byla sestavena rovnice, avšak nebylo v ní zohledněno zmíněných pět ani deset dnů. Řešitel(ka) navíc uvádí jako počet výrobků $977{,}\overline{7}$, patrně tak ani neprovedl(a) sémantickou zkoušku.



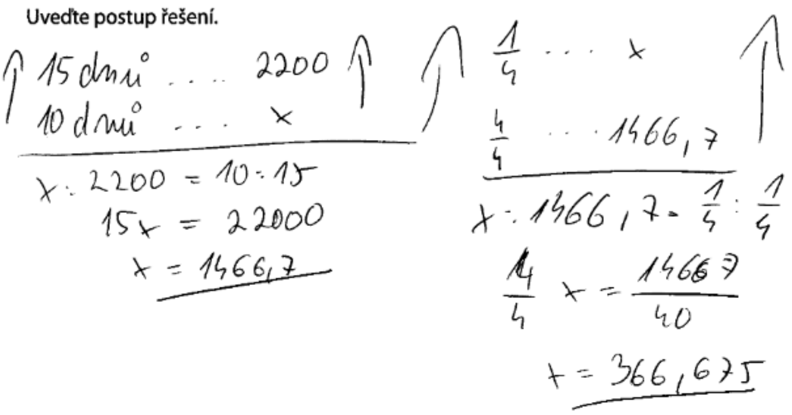
Obrázek 102 – Nevyužití informace o pěti nebo deseti dnech v sestavení matematického modelu

Následující řešení na Obr. 103 bylo provedeno bez sestavení situačního modelu na základě strategie signálních slov – byly vypočteny tři čtvrtiny z čísla $2\,200$, následně vypočten rozdíl čísel $2\,200 - 1\,650 = 550$. V zásadě byla ve finále řešení vypočtena čtvrtina z čísla $2\,200$.



Obrázek 103 – Určení čtvrtiny z celkového počtu výrobků

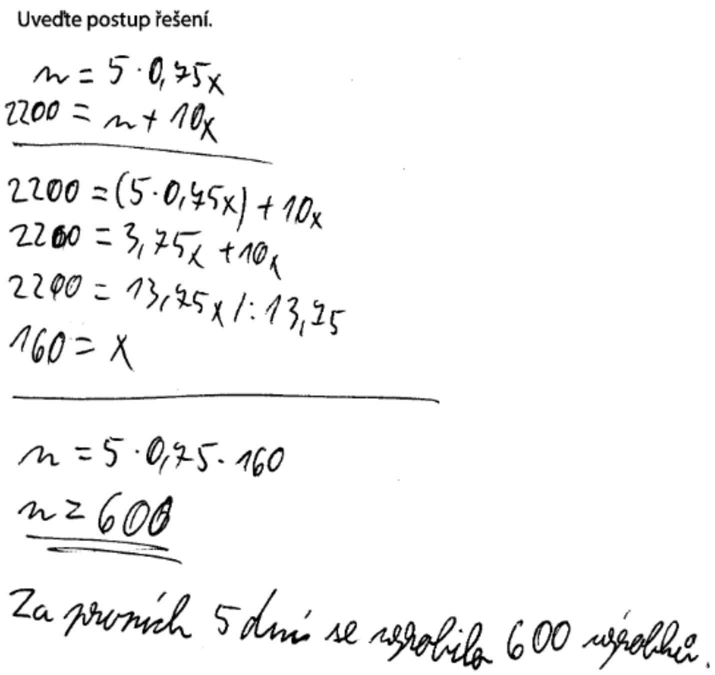
I při řešení této úlohy bylo možné najít chybný postup porovnávající úlohu s úlohou na přímou úměrnost – je možné, že řešení na Obr. 104 je ovlivněno iluzí linearity.



Obrázek 104 – Chybné využití trojčlenky

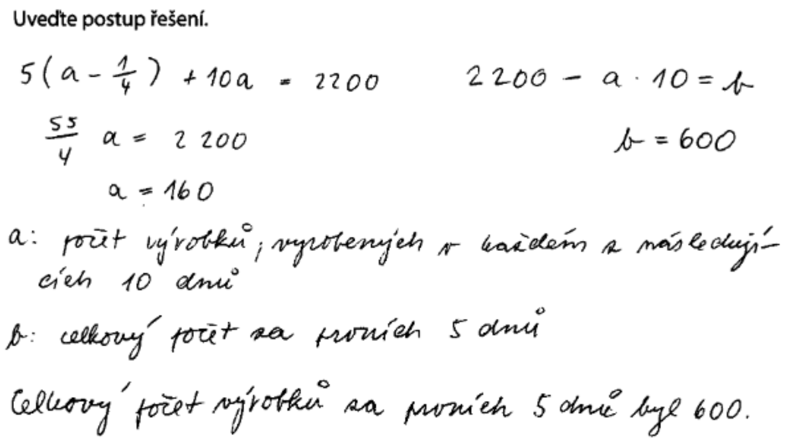
8. Ostatní řešení.

V postupech se objevilo i několik soustav rovnic. Odlišnou soustavu, avšak podobnou výše navržené, přináší následující výřez (viz Obr. 105); řešení je správné.



Obrázek 105 – Jedno ze správných řešení užitím soustavy rovnic

Obdobná soustava je využita v řešení na Obr. 106. Je možné si všimnout, že řešitel(ka) zapisuje chybně zmenšení čísla a o čtvrtinu z čísla a, avšak dále je s příslušnými výrazy počítáno správně.



Uveďte postup řešení.

$5(a-\frac{1}{4})+10a=2200 \qquad 2200-a\cdot 10=b$

$\frac{55}{4}a=2200 \qquad b=600$

$a=160$

a: počet výrobků vyrobených v každém z následujících 10 dnů

b: celkový počet za prvních 5 dnů

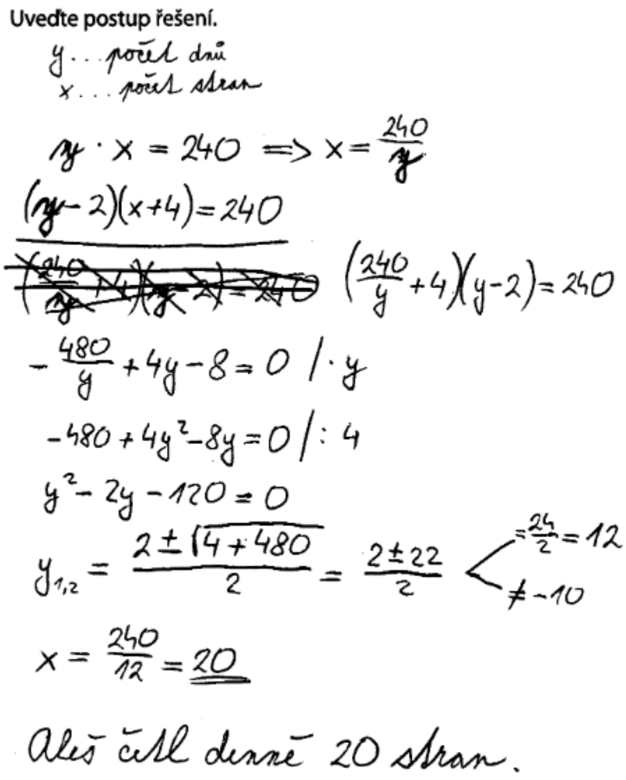
Celkový počet výrobků za prvních 5 dnů byl 600.

Obrázek 106 – Využití soustavy rovnic

2.4.5 Jaro 2020 – čtení knihy

1. Řešení užitím soustavy rovnic s neznámými označujícími počet stran, které denně přečetl Aleš, a počet dnů, po které Aleš četl knihu.

Tento způsob řešení je mezi těmi správnými ten nejčastější. Některé z rovnic jsou řešeny užitím diskriminantu; příklad takového správného řešení je na Obr. 107. Jiné postupy obsahují rozklad kvadratického trojčlenu na součin; např. viz Obr. 108. Řešení na Obr. 108 uvádím také proto, že využívá označení příslušných fyzikálních veličin; jak je také na výřezu uvedeno.



Uveďte postup řešení.

y... počet dnů

x... počet stran

$y\cdot x=240 \Rightarrow x=\frac{240}{y}$

$(y-2)(x+4)=240$

$(\frac{240}{y}+4)(y-2)=240$

$-\frac{480}{y}+4y-8=0 \quad /\cdot y$

$-480+4y^2-8y=0 \quad /:4$

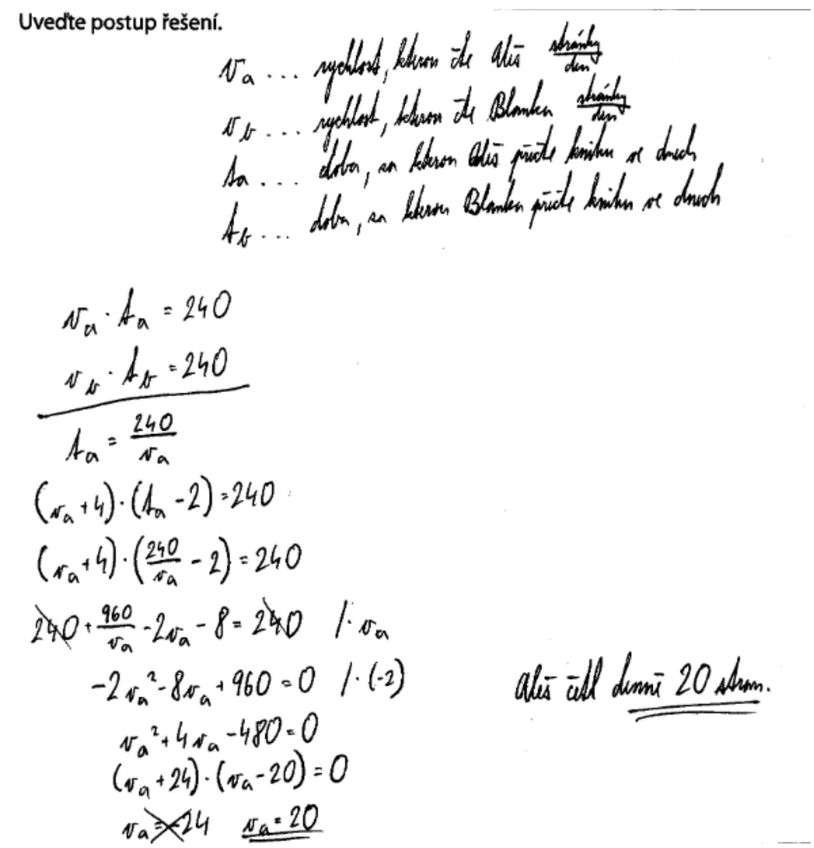
$y^2-2y-120=0$

$y_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+480}}{2}=\frac{2\pm 22}{2} \begin{cases} =\frac{24}{2}=12 \\ \neq -10 \end{cases}$

$x=\frac{240}{12}=\underline{\underline{20}}$

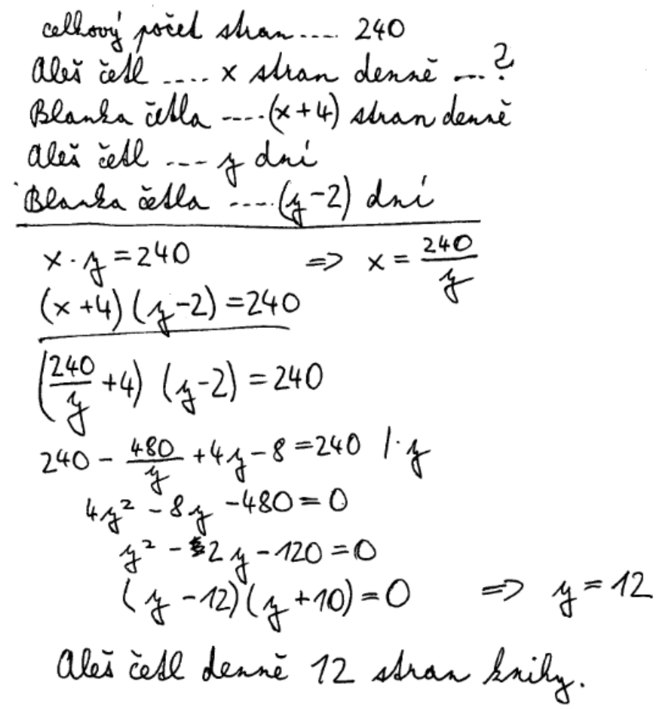
Aleš četl denně 20 stran.

Obrázek 107 – Řešení užitím soustavy rovnic, z níž lze vypočítat počet stran, které denně četl Aleš



Obrázek 108 – Práce s „dobou" a „rychlostí"

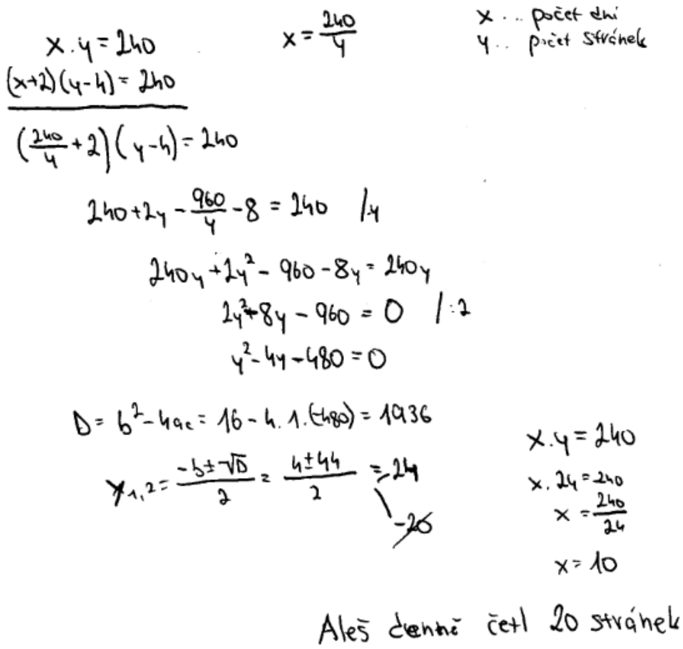
Postup na Obr. 109 obsahuje správně sestavenou rovnici a také správně vypočtenou hodnotu $y = 12$, ovšem maturant(ka) si neuvědomil(a), že pro hledaný počet stran je potřeba určit hodnotu $x = 20$.



Obrázek 109 – Nedokončené řešení

2. Řešení užitím soustavy rovnic s neznámými označujícími počet stran, které přečetla denně Blanka, a počet dnů, po které Blanka četla celou knihu.

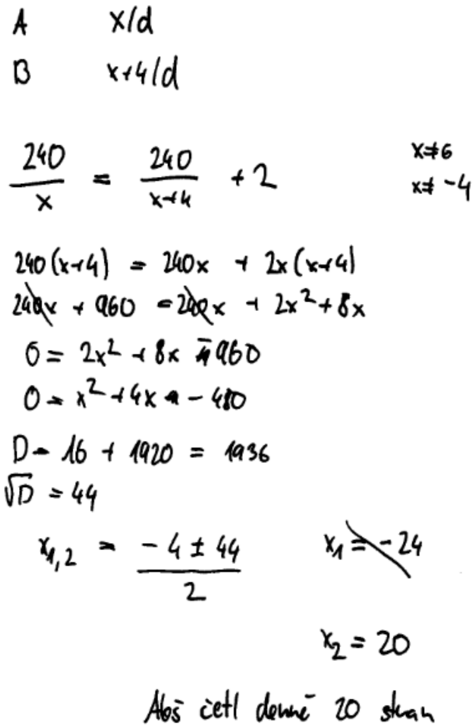
Takové řešení bylo zastoupeno v menší míře. Příklad použití dokládám formou výřezu na Obr. 110.



Obrázek 110 – Řešení užitím soustavy rovnic, z níž lze určit počet stran, které denně četla Blanka

3. Řešení užitím rovnice, z níž zjistím počet stran, které denně četl Aleš.

Uvádím jedno ze správných řešení na Obr. 111



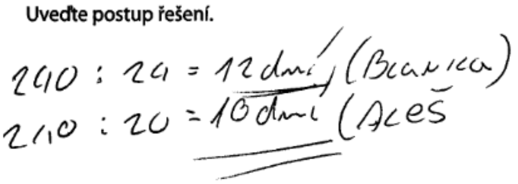
Obrázek 111 – Řešení užitím rovnice s využitím diskriminantu

4. Řešení užitím rovnice, z níž zjistím počet dnů, po které četl knihu Aleš.

Pokud byla v řešení taková rovnice použita, řešení vycházelo ze sestavené soustavy rovnic.

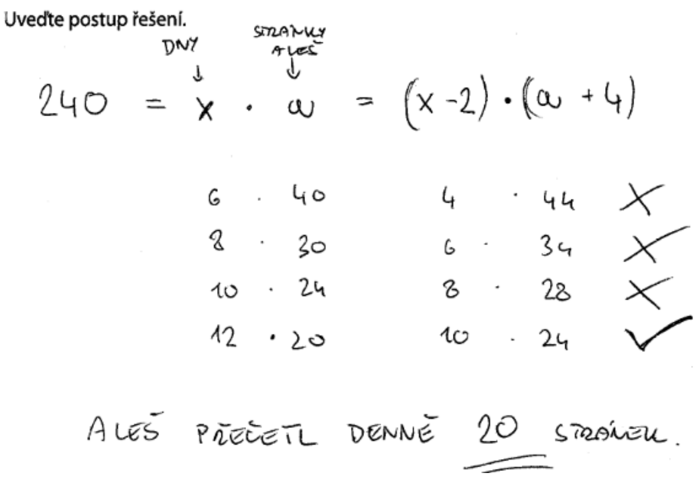
5. Řešení „úvahou“ bez použití rovnic.

Na následujícím řešení (viz Obr. 112) je zřejmé, že řešitel(ka) patrně zadání uhodl(a), ale také ověřil(a), že rozdíl čísel 24 a 20 je 4.



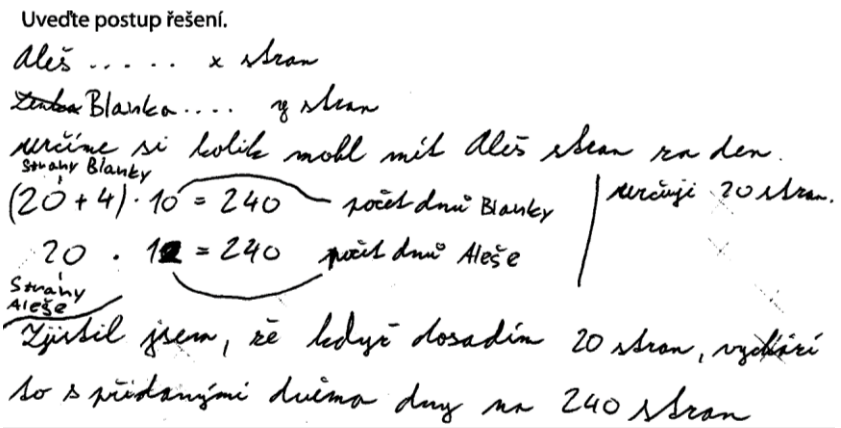
Obrázek 112 – Jedno z možných řešení úvahou

Následující řešení (viz Obr. 113) využívá proměnných, avšak soustava rovnic není řešena. Žák(yně) určil(a) správný výsledek dosazením do zadání úlohy.



Obrázek 113 – Strategie „systematického experimentování“

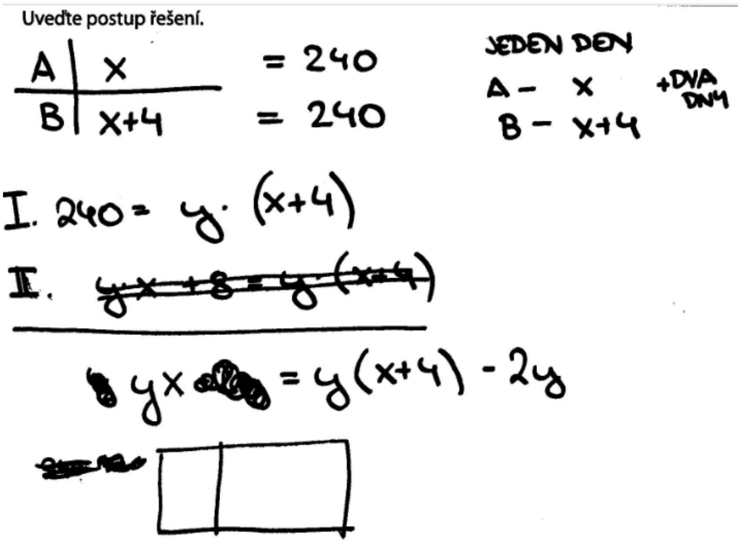
Správný výsledek je určen i na Obr. 114, přičemž maturant vysvětlil v příslušném poli záznamového archu svůj způsob řešení.



Obrázek 114 – Uhodnutí výsledku a ověření platnosti

6. Řešení užitím obrázkové legendy či jiného nákresu.

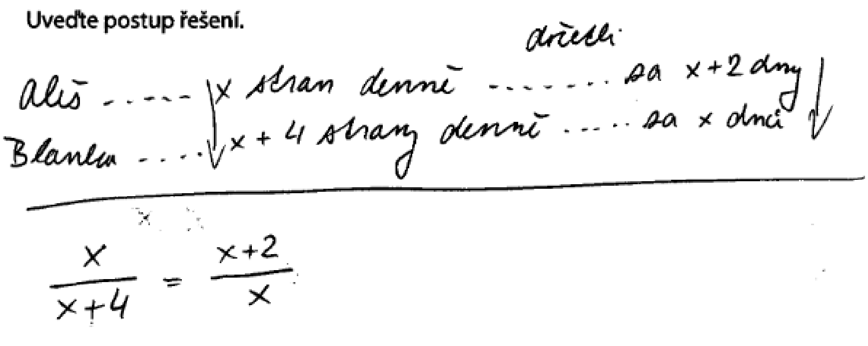
Výřez obsahující jednoduchý obrázek při řešení úlohy „čtení knihy“ je na Obr. 115. Řešení neobsahuje správně sestavenou soustavu rovnic.



Obrázek 115 – Obrázková legenda

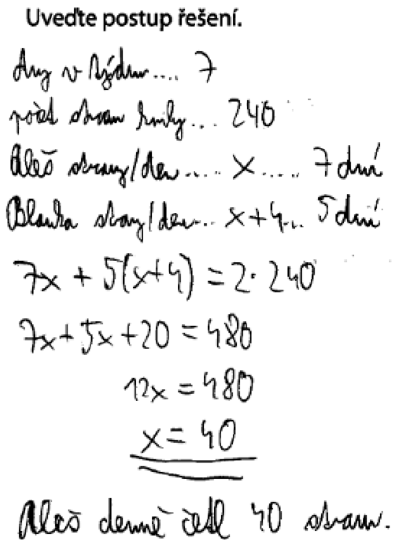
7. Řešení užitím povrchové strategie.

I mezi výřezy s řešeními k úloze „čtení knihy“ se objevila řešení užitím přímé úměrnosti. Zde na Obr. 116 je navíc chybně použito označení x pro počet dnů i pro počet stran, jako kdyby tyto dvě hodnoty musely být stejné.



Obrázek 116 – Nesprávné využití trojčlenky a jediné proměnné

Ve větším množství řešení v analyzovaném vzorku je patrné, že řešitelé chybně předpokládali, že Aleš nebo Blanka začali číst knihu v pondělí. Řešení na Obr. 117 využívá rovnici sestavenou zjevně na základě strategie povrchových slov s využitím čísla 7 a 5 (číslo 5 zde patrně představuje počet dnů, po které četla knihu Blanka).

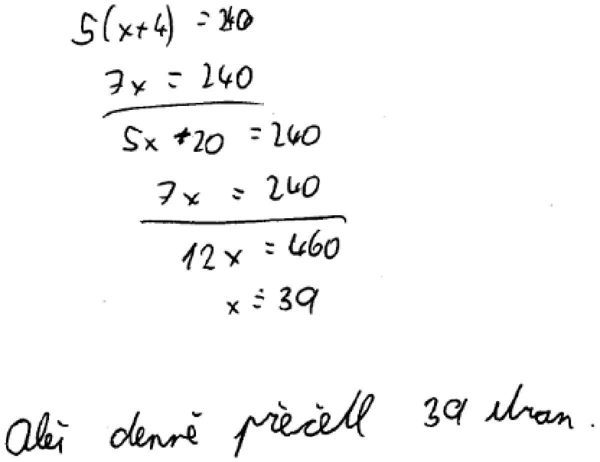

Uveďte postup řešení.

dny v týdnu.... 7
počet stran knihy... 240
Aleš strany/den..... x..... 7 dní
Blanka strany/den... x+4... 5 dní
$7x + 5(x+4) = 2\cdot 240$
$7x+5x+20 = 480$
$12x = 480$
$x = 40$

Aleš denně četl 40 stran.

Obrázek 117 – Práce s čísly 5 a 7 jako s počty dnů

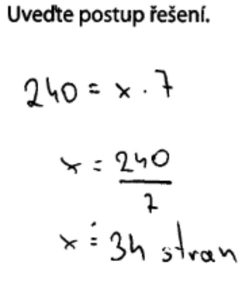
Obdobné řešení je na Obr. 118.


$5(x+4) = 240$
$7x = 240$
$5x + 20 = 240$
$7x = 240$
$12x = 460$
$x \doteq 39$

Aleš denně přečetl 39 stran.

Obrázek 118 – Další ukázka práce s čísly 5 a 7 jako předpokládanými dobami čtení knihy ve dnech

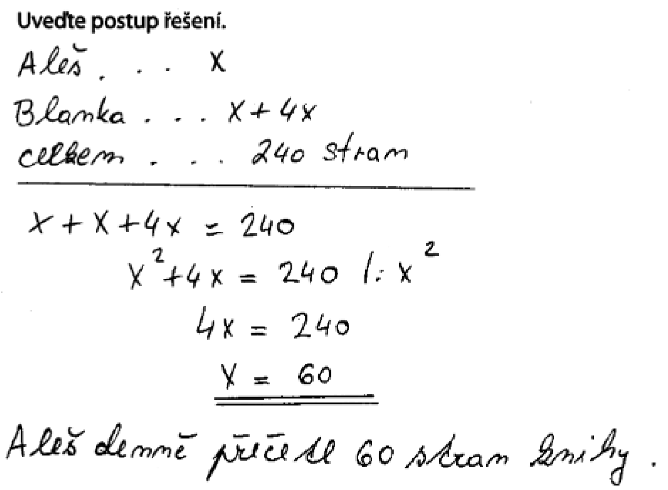
Jednoduché řešení obdobné těm předchozím je zachyceno na Obr. 119. Situační model, který řešitel(ka) vytvořil(a), je zjevně následující: kniha o 240 stranách je čtena celý týden včetně víkendu, tj. sedm dnů, a tedy denně Aleš musí přečíst přibližně 34 stran. Totožné řešení se vyskytovalo mezi analyzovanými výřezy opakovaně.


Uveďte postup řešení.

$240 = x \cdot 7$
$x = \frac{240}{7}$
$x \doteq 34$ stran

Obrázek 119 – Chybně využitá strategie signálních slov

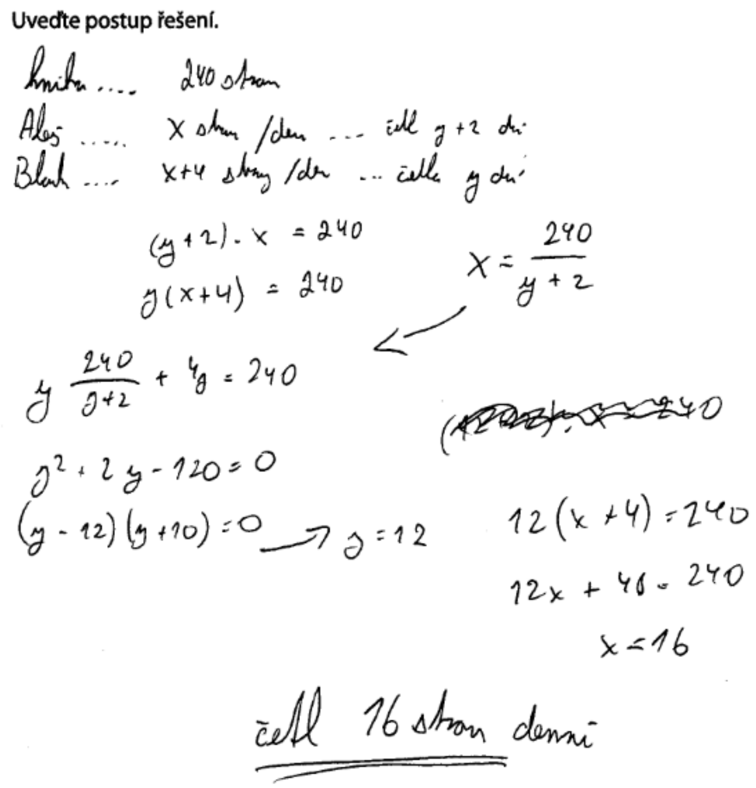
Řešení na výřezu na Obr. 120 chybně předpokládá, že součet počtů stran, které denně přečte Aleš (zde x) a Blanka (zde $x + 4x$) je 240. Navíc žák(yně) opakovaně chyboval(a) v dalších úpravách výrazů.



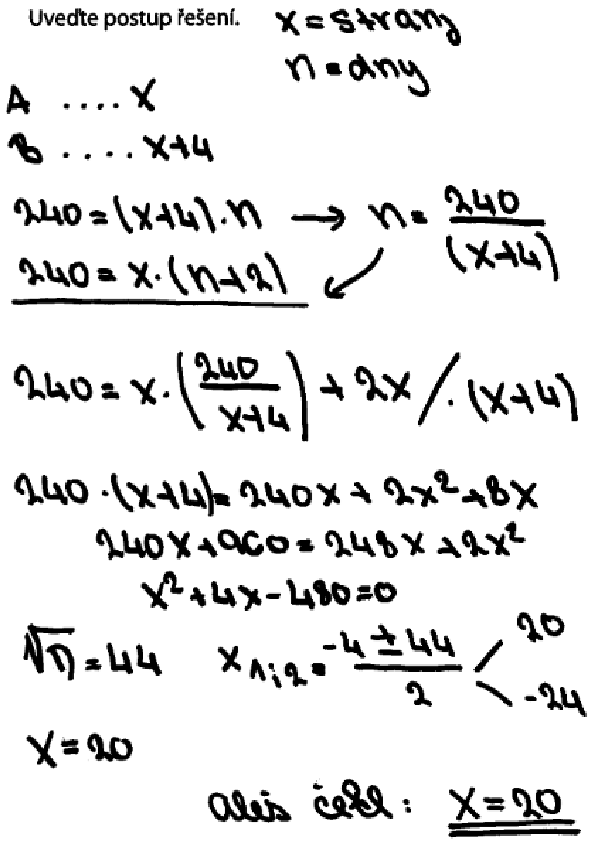
Obrázek 120 – 240 jako součet počtů stran, které za den přečtou Aleš a Blanka

8. Ostatní řešení

V této kategorii uvedu dva příklady použití jiné soustavy rovnic než té, která byla sestavena v analýze a priori. Na výřezu na Obr. 121 není správě vyhodnocen závěr. Na Obr. 122 je řešení správné.



Obrázek 121 – Chybné vyřešení úlohy se správně sestavenou soustavou



Obrázek 122 – Správně provedené řešení se správně sestavenou soustavou

2.5 Psychometrické vlastnosti vybraných úloh

V této části práce uvedu některá data týkající se jednak vybraných pěti slovních úloh, jednak odpovídajících didaktických testů.

Každá z vybraných pěti slovních úloh mohla být ohodnocena maximálně třemi body (tj. bylo možné získat 0, 1, 2, nebo 3 body). U každé z úloh se požadovalo uvést celý postup řešení.

Při zpracování této podkapitoly jsem sledoval následující charakteristiky úloh:

- vynechanost[37] v procentech (pouze u úloh z období 2018, 2019, 2020; do roku 2017 byla v tehdejším software zaznamenávána jen u uzavřených úloh);
- procentuální rozdělení bodů v příslušné úloze a průměrný procentuální dosažený skór v celém testu;
- koeficient citlivosti (diskriminace) ULI[38];

[37] Uvádí počet procent žáků, kteří danou úlohu neřešili.
[38] Všichni řešitelé testu jsou při výpočtu rozděleni do pěti skupin podle dosaženého výsledku. Diskriminace ULI je v tomto případě určena jako rozdíl průměrné úspěšnosti nejlepší a nejhorší z těchto

- korelační koeficienty RIT nebo RIR[39] úlohy (do roku 2019 bylo uváděno jako součást výstupů z analýz číslo RIT; v roce 2020 s využíváním nového software začal být nově uváděn koeficient RIR).

Vybrané charakteristiky jednotlivých úloh uvádím v příslušných odstavcích níže.

2.5.1 Jaro 2016 – cena knihy

Jak vyplynulo ze souhrnných informací o celém didaktickém testu, celkový počet řešitelů testu byl 16 975. Vynechanost sledované úlohy 14 není k dispozici.

Co se týká rozdělení bodového ohodnocení, v následující tabulce (viz Tab. 5) jsou zaznamenány příslušné relativní četnosti. V dolní části tabulky lze najít také tzv. průměrný procentní skór.

Počet bodů	Četnost v procentech
0	51,5 %
1	1,6 %
2	2,6 %
3	44,2 %
Průměrný procentní skór	54,3 %

Tabulka 5 – Rozdělení bodů v úloze 14 z roku 2016 (cena knihy)

Koeficient ULI je zde 87,5 %. Korelační koeficient RIT (ve výstupu v původním software používaném do roku 2019 uvedeno jako tzv. biseriální korelace) je 0,615.

2.5.2 Jaro 2017 – mince

Celkový počet řešitelů testu na jaře 2017 byl 16 013.

Vynechanost úlohy 15 také není k dispozici.

V následující tabulce (viz Tab. 6) jsou zaznamenány příslušné relativní četnosti a průměrný procentní skór.

---

pěti skupin. Zde uváděno v procentech. U všech úloh jde o poměrně velká čísla, což poukazuje na relativně větší citlivost vzhledem k ostatním úlohám v testu.

[39] V případě RIT jde o korelační koeficient úlohy a celého testu. V případě RIR jde o korelační koeficient úlohy a ostatních úloh (tedy celého testu vyjma příslušné úlohy). V praxi jsou obě čísla z intervalu ⟨0; 1⟩; koeficient RIT je o něco vyšší než RIR.

Počet bodů	Četnost v procentech
0	42,9 %
1	3,0 %
2	6,2 %
3	47,9 %
Průměrný procentní skór	53,9 %

Tabulka 6 – Rozdělení bodů v úloze 15 z roku 2017 (mince)

Koeficient ULI je zde 76,1 %. Koeficient RIT je 0,523.

2.5.3 Jaro 2018 – kapitál

Jarní didaktický test v roce 2018 řešilo celkem 14 766 žáků.

Vynechanost úlohy 15 dosáhla 36,6 % (úlohu vynechalo 5408 žáků). Průměrná vynechanost úloh v testu pak byla 9,4 %.

V následující tabulce (viz Tab. 7) jsou zaznamenány příslušné relativní četnosti a průměrný procentní skór.

Počet bodů	Četnost v procentech
0	22,0 %[40]
1	2,4 %
2	5,2 %
3	33,7 %
Průměrný procentní skór	52,9 %

Tabulka 7 – Rozdělení bodů v úloze 15 z roku 2018 (kapitál)

Koeficient ULI je zde 80,7 %. Číslo RIT je 0,577.

2.5.4 Jaro 2019 – výrobky

Didaktický test na jaře 2019 řešilo test celkem 13 702 žáků.

Vynechanost úlohy dosáhla 29,4 % (úlohu vynechalo 4034 žáků). Průměrná vynechanost úloh v testu pak byla 8,4 %.

[40] Do tohoto počtu nově nejsou zařazováni žáci, kteří úlohu vynechali. Obdobně je tomu u úloh „výrobky“ (2019) a „čtení knihy“ (2020).

V následující tabulce (viz Tab. 8) jsou zaznamenány příslušné relativní četnosti a průměrný procentní skór.

Počet bodů	Četnost v procentech
0	27,2 %
1	0,7 %
2	2,6 %
3	40,0 %
Průměrný procentní skór	52,9 %

Tabulka 8 – Rozdělení bodů v úloze 14 z roku 2019 (výrobky)

Koeficient ULI je zde 81,0 %. Koeficient RIT je zde 0,544. Lze tedy říci, že úlohy „kapitál" (2018) a „výrobky" (2019) mají podobnou schopnost rozlišovat mezi „slabšími" a „v testu úspěšnými" žáky.

2.5.5 Jaro 2020 – čtení knihy

Na jaře 2020 řešilo test celkem 13 261 žáků.

Vynechanost úlohy dosáhla 39,1 % (úlohu vynechalo 5180 žáků), je tak zdaleka nejvyšší u všech pěti vybraných úloh. A co víc, v porovnání[41] s ostatními 39 položkami v testu je vynechanost této slovní úlohy výrazně vyšší.

V následující tabulce (viz Tab. 9) jsou zaznamenány příslušné relativní četnosti a průměrný procentní skór.

Počet bodů	Četnost v procentech
0	29,4 %
1	4,3 %
2	2,8 %
3	24,5 %
Průměrný procentní skór	27,8 %

Tabulka 9 – Rozdělení bodů v úloze 14 z roku 2020 (čtení knihy)

Koeficient ULI je zde 62,9 %. Koeficient korelace RIR je 0,57.

[41] U ostatních položek v jarním didaktickém testu z roku 2020 dosahovala maximální vynechanost okolo 20 %, většinou byla dokonce pod 15 %.

2.5.6 Shrnutí psychometrických vlastností vybraných úloh

Tato podkapitola obsahuje stručné shrnutí zjištění uvedených v předchozích kapitolách.

- Čtyři z pěti úloh vykazují úspěšnost okolo 50 %. Řešitelé úlohy „čtení knihy" z roku 2020 byli celkově méně úspěšní, což vypovídá o vyšší náročnosti – úloha vede ke kvadratické rovnici.
- Všechny tři slovní úlohy, u nichž byla sledována vynechanost, vykazují větší vynechanost, než vykazovaly ostatní položky v příslušných testech.
- Vyšší koeficient diskriminace ULI u většiny úloh poukazuje na to, že příslušné úlohy mají vyšší citlivost – žáci úspěšní v testu řeší úlohy lépe než žáci v testu neúspěšní. Tyto úlohy dobře rozlišují mezi žáky úspěšnými a neúspěšnými v celém testu.
- Počet žáků, kteří získali za každou z vybraných pěti slovních úloh 1 nebo 2 body, je výrazně nižší (jedná se vždy o cca 5–10 % maturantů v příslušném období) oproti počtu žáků, kteří získali 0 nebo 3 body. Po provedené analýze vzorku výřezů a po prozkoumání odpovídajících klíčů správných řešení ke všem testům obsahujícím vybrané slovní úlohy, dostupných na https://maturita.cermat.cz/menu/testy-a-zadani-z-predchozich-obdobi/matematika/testy-a-zadani-matematika, lze říci, že menší část žáků sestavila rovnici nebo soustavu rovnic za situace, kdy byla rovnice nebo soustava chybně vyřešena (nebo nebyla řešena). Nejvíce maturantů z těch, kteří řešili příslušné testy, tedy buď správně sestavilo rovnici nebo soustavu, vyřešilo ji (a příp. dopočítalo příslušnou veličinu), nebo naopak byla rovnice nebo soustava sestavena chybně, resp. úloha nebyla řešena správně (nebo vůbec).

2.6 Diskuse výsledků

Při hodnocení výřezů je potřeba zohlednit skutečnost, že je tato práce věnována analýze úloh z didaktických testů zadaných v rámci společné části maturitní zkoušky. Řešitelé si tak matematiku dobrovolně zvolili jako maturitní předmět; je tak možné předpokládat, že na tom budou celkově se schopností řešit úlohy tematicky odpovídající středoškolské matematice lépe než maturanti, kteří si namísto matematiky zvolili ve společné části maturitní zkoušky cizí jazyk.

V rámci empirické části bylo prozkoumáno **19 778** výřezů systémem náhodně vybraných žákovských řešení, přičemž do vzorku nebyla zařazena řešení žáků s přiznanými uzpůsobenými podmínkami. Ve sledovaném období pěti ročníků se počty maturantů v jednotlivých ročnících pohybovaly od **13 261** do **16 975**, jak vyplývá z podkapitoly zaměřené na psychometrické vlastnosti úloh. Do těchto počtů jsou však zařazeni i žáci, kteří měli přiznané uzpůsobené podmínky. Z vybraných pěti ročníků bylo sledováno **26** % z celkového počtu odevzdaných žákovských řešení.

Vzhledem k tomu, že se v náhodném výběru výřezů viditelně opakovala řada správně zvolených řešitelských postupů, stejně tak častých chyb (zejména povrchových strategií), považuji zjištěná fakta a z nich vyplývající závěry za vcelku relevantní. Domnívám se, že se i ve zbývajících „vyplněných“[42] výřezech tytéž postupy a typy chyb opakovaly s podobnou četností.

Z analýzy základních statistických charakteristik týkajících se příslušných úloh a celých testů vyplynulo, že slovní úlohy vykazovaly vysokou vynechanost oproti jiným úlohám (alespoň v posledních třech ročnících, v nichž byla vynechanost sledována). Zejména u úlohy z roku 2020 může vyšší vynechanost poukazovat na naučenou bezmocnost při řešení, jako na jednu z příčin neúspěchu při řešení slovních úloh.

V souladu s odbornou literaturou patří slovní úlohy, jak bylo popsáno v podkapitole 1.1.1, k nejméně oblíbeným typům úloh, přestože právě slovní úlohy přibližují matematiku ve známých kontextech. Vysoká vynechanost slovních úloh v analyzovaném vzorku tuto nízkou oblibu potvrzuje.

Vyšší procenta vynechanosti slovních úloh v didaktických testech mohou být však také důsledkem faktu, že mnozí žáci do záznamových archů přepisují svá skutečná řešení; pokud nedojdou k závěru, který oni sami považují za výsledek úlohy, nechají většinou v záznamovém archu prázdné pole a nevpisují v mnoha případech ani částečná řešení, ani neúspěšné pokusy. Přesto se ale občas částečně správná řešení v záznamových arších objevují, např. výřezy s nedořešenými rovnicemi.

Z analýzy psychometrických vlastností se ukázalo, že většina žáků získala za řešení příslušné slovní úlohy buď plný počet bodů (zde 3 body), nebo naopak nezískala žádný bod; naprosté minimum z řešitelů didaktických testů tak mělo v záznamovém archu vyřešenou slovní úlohu jen částečně (hodnocení 1 nebo 2 body). Tato skutečnost je nejvýraznější u úlohy o výrobcích z roku 2019 (viz Tab. 8); u žádné z pěti úloh nepřesáhl

[42] Od roku 2017 byly systémem automaticky z původně nahraných 6000 výřezů eliminovány ty, které byly vyplněny z méně než z 0,01 %.

podíl částečně správných řešení 10 % z celkového počtu odevzdaných řešení v daném období.

Za zmínku stojí volba značení proměnných při řešení slovních úloh. Jiné označení pro proměnnou než x (resp. x, y u soustavy rovnic) je v analyzovaných postupech výjimkou. I v případě, že bylo zvoleno jiné značení, např. a, b u úlohy o mincích, nejednalo se o srozumitelnější pojmenování proměnných. Tato skutečnost však není nijak překvapující, jelikož pouze jedna z analyzovaných učebnic (Krynický) cíleně vede žáky k logickému označování neznámých. Pro mnoho žáků je naprosto intuitivní, že *„to, co neznám, je x"*, což může vést k chybám v případě, že není známo více hodnot (např. v případě úlohy s kapitálem z jara 2018).

V úlohách, u kterých otázka přímo souvisela s popisovanou situací, např. cena knihy (jaro 2016) nebo počet stran Aleše nebo Blanky (jaro 2020), volili řešitelé jako neznámou právě tuto veličinu. Pak po sestavení a vyřešení rovnice získali přímo odpověď na zadanou otázku. Naopak u úloh, u nichž bylo potřeba po vyřešení rovnice dokončit úvahu a teprve poté odpovědět, např. kapitál (jaro 2018) nebo celková hodnota mincí (jaro 2017), se objevovaly nesprávné odpovědi, kdy řešitelé chybně vyhodnotili i správně vypočtenou hodnotu zvolené neznámé. Domnívám se, že žáci řešení rovnice považovali za odpověď na zadanou otázku bez ohledu na své předchozí úvahy při sestavování rovnice.

Ukazuje se, že heuristické strategie podle Novotné, Eisenmanna, Přibyla (2015) byly používány v případech, kdy se žákovi nepodařilo sestavit matematický model, zde konkrétně rovnici nebo soustavu rovnic. Žáci se ale i tak mnohdy ke správnému výsledku úlohy dostali – bylo možné se setkat např. s úspěšným použitím strategie systematického ověřování, jako s jednou z heuristických strategií zmiňovanou v citované literatuře. Zde je nutné zmínit, že v zadání všech slovních úloh bylo výslovně uvedeno, že je k řešení nutné použít rovnici nebo soustavu rovnic. Je tedy možné, že někteří z žáků nejprve vyřešili úlohu heuristickou strategií apod. a teprve poté sestavili rovnici nebo soustavu rovnic v případě, v němž sice jinou metodou řešení našli, ale potřebovali se držet zadání úlohy.

Závěr

Práce obsahuje teoretickou a empirickou část, teoretická část se zabývá zejména rešerší literatury k tématu slovních úloh a také analýzou tří českých učebnic používaných při výuce matematiky na středních školách. Empirická část obsahuje kromě analýzy výřezů také doložené psychometrické vlastnosti zvolených úloh.

Při zpracování teoretické části jsem sestavil přehled literatury, která se tématu věnuje, přičemž jsem se zaměřil na definici slovní úlohy. Součástí teoretické části je podkapitola shrnující zastoupení různých typů slovních úloh ve třech zvolených učebnicích. Sledoval jsem počty zařazených slovních úloh a také to, zda obsahují obrázkovou legendu. Zjištěné informace jsem shrnul do tabulky.

Hlavním cílem empirické části práce bylo popsat žákovské strategie řešení použité u pěti vybraných slovních úloh zařazených do jarních termínů maturitních testů z let 2016 až 2020. V rámci analýzy a priori jsem vytvořil u každé z úloh osm kategorií, do kterých jsem rozdělil jednotlivé analyzované výřezy. Kromě různých správných možných postupů užitím rovnice nebo soustavy rovnic jsem zařadil také kategorie pro použití povrchové strategie, řešení úvahou a s pomocí vizuálního modelu. Analýza všech kategorií všech pěti úloh je doplněna výřezy konkrétních žákovských řešení z didaktických testů.

Při hledání odpovědi na otázku **O1** o četnosti použití povrchových strategií u jednotlivých úloh bylo zjištěno, že se jejich častější použití objevilo u obou úloh „o knihách" (2016 a 2020). Jako jedno z vysvětlení se nabízí to, že se kniha jako téma slovní úlohy vyskytuje v mnoha různých obměnách. Žák tedy hledá „podobnou" úlohu mezi těmi, u nichž postup řešení zná – takovou strategii řešení použije. Povrchové strategie různého typu jsou i žáky maturitních ročníků používány poměrně často.

V návaznosti na hlavní výzkumný záměr mé diplomové práce, tedy analýzu používaných postupů řešení slovních úloh, byla formulována výzkumná otázka **O2**, zda maturanti v průběhu řešení úlohy použili nějaký vizuální model.

Ukázalo se, že ve vzorku téměř dvaceti tisíc řešení byl obrázek použit v naprosto minimálním počtu několika jednotek výřezů (jedná se setiny procent z celkového počtu výřezů), což jednoznačně poukazuje na skutečnost, jak málo jsou řešitelé zvyklí na využití vizuálního modelu při řešení slovních úloh. Domnívám se, že žáci nejsou k používání obrázků jako součásti řešení slovních úloh systematicky vedeni, přestože, jak vyplynulo z rešerše literatury popsané v teoretické části práce, mohou obrázky významně přispět ke správnému sestavení situačního modelu, a mohou tak podpořit správné provedení matematizace úlohy. Jak bylo uvedeno v podkapitole 1.2.4, ve všech třech analyzovaných učebnicích se objevilo jako součást řešení slovní úlohy celkem pouze 20 obrázků, přičemž obrázkovou legendu zařazují autoři k úlohám o směsích, o společné práci a o pohybu.

Pokud porovnáme počty výřezů obsahujících obrázkovou legendu u jednotlivých pěti úloh navzájem mezi sebou, vykazuje nejvyšší četnost úloha o mincích (jaro 2017). Naopak u úlohy o ceně knihy (jaro 2016) nebyl vizuální model použit v žádném z analyzovaných řešení. U žádné z ostatních tří úloh navíc obrázek nevedl ke správnému sestavení rovnice nebo soustavy rovnic. Vyšší výskyt vizuálních modelů u úlohy o mincích je možné vysvětlit tím, že žákům nejvíce připomíná svým zadáním úlohu o směsích, u tohoto typu úloh jsou obrázky používány v učebnicích (viz podkapitola 1.2.4); žák už tak mohl být s použitím obrázkové legendy u úloh tohoto typu seznámen.

Na tomto místě je potřeba zmínit, že byly analyzovány výřezy obsahující řešení v té formě, v jaké ji řešitelé považují za definitivně zpracovanou a upravenou, nikoliv žákovské zápisy vznikající v průběhu samotného řešení úlohy. Mohlo se tedy stát, že žáci vizuální model sestavili při hledání správného řešení úlohy. Je tedy možné, že poté, co řešení našli, už tento model do odevzdávaného řešení neuvedli.

Jako pozitivní lze hodnotit skutečnost, která vyšla najevo při analýze řešení s chybným číselným výsledkem. Z několika výřezů vyplynulo, že žáci umějí dobře reagovat na chybné záporné výsledky. Pokud jako kořen některé z rovnic vyšlo záporné číslo, provedli maturanti v analyzovaných postupech sémantickou zkoušku, a do odpovědi již byla napsána jako výsledná hodnota příslušné opačné číslo.

Některé výřezy dokládají to, že během řešení dochází k evidentnímu matení pojmů (např. ceny knihy a počtu knih, počtu korun a počtu mincí atp.). Dokonce se ukázalo, že u řešení úlohy s cenou knihy mají někteří žáci problém uchopit pojem „třikrát více než“ – nevědí, na kterou stranu rovnice dát číslo 3, na kterou stranu napsat symbol kterého znaménka. Z doložených výřezů je jasné, že některým maturantům dělá problém algebraizace slovně popsané situace. Obdobně u úlohy s výrobky bylo u mnoha postupů zjevné, že model „zmenšení x o jednu čtvrtinu“ interpretují žáci jednoduše jako $x - \frac{1}{4}$.

Kromě zmíněných chyb, kdy žák má minimálně představu o tom, že v případě zadání „třikrát více než“ nebo „o čtvrtinu méně“ musí tuto informaci promítnout do sestaveného matematického modelu, se objevovaly i jiné typy chyb. Jako příklad lze uvést použití Pythagorovy věty u úlohy s cenou knihy (viz Obr. 55). Je možné, že žák(yně) pomocí Pythagorovy věty v minulosti řešil(a) úlohu, která se knihy týkala, např. určení délky úhlopříčky ze znalosti některých rozměrů knihy.

Z analyzovaného vzorku výřezů vyšlo najevo, že se mnozí žáci snaží v první řadě o sestavení zápisu. Není však možné zjistit, zda zápis sestavili jen proto, že mají pocit, že je po nich požadován. V zadání tří úloh bylo uvedeno, které části má řešení obsahovat – popis označení proměnných, rovnici nebo soustavu rovnic spolu s řešením a odpovědí. V některých výřezech bylo např. označení proměnných zjevně dodáno do záznamového archu až později, zřejmě až poté, co si žák uvědomil, že mu tato část v přepsaném řešení chybí. Přesto v mnoha případech chybí zápis nebo odpověď, z čehož je možné usoudit, že za hlavní část řešení považují žáci rovnici a její vyřešení.

Pro případný navazující výzkum by bylo možné porovnávat skutečné řešení provedené do testových sešitů a řešení, která žáci zapsali do záznamových archů.

Použité zdroje

Cermat. (2014). Katalog požadavků k maturitní zkoušce z matematiky. Dostupné z: https://maturita.cermat.cz/files/files/katalog-pozadavku/MA_Katalog_pozadavku_MZ_1718.pdf

Cermat. (2023). Testy a zadání z předchozích období – matematika. Dostupné z: https://maturita.cermat.cz/menu/testy-a-zadani-z-predchozich-obdobi/matematika/testy-a-zadani-matematika

Cizlerová, M., Krupka, P., Polický, Z., & Škaroupková, B. (2013). M*atematika pro střední školy – 2. díl: Výrazy, rovnice a nerovnice (učebnice).* Brno: Didaktis,

Cooper, K.: OpenAI GPT-3: Everything You Need to Know [online]. Dostupné z: https://www.springboard.com/blog/data-science/machine-learning-gpt-3-open-ai/

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The illustion of linearity: From analysis to improvement*. Netherlands: Springer.

Gerofsky, S. (2004). *A man left Albuquerque Heading East: Word Problems as Genre in Mathematics Education.* New York: Peter Lang.

Heater J. H., Howard L. A., & Linz, E. (2012). Solving Word problems: As easy as PIES! *Journal of Science Education for Students with Disabilies,* 16(1), 15–22. Dostupné z: https://scholarworks.rit.edu/jsesd/vol16/iss1/3/

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: Aritmetika 1. stupně.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Hembree, R. (1992). Experiments and Relational Studies in Problem Solving: a Meta-Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education,* 23(3), 242–273. Dostupné z: https://www.jstor.org/stable/749120

Charvát, J., Zhouf, J., & Boček, L. (2007). *Matematika pro gymnázia – rovnice a nerovnice.* Praha: Prometheus.

Krynický, M. (11. 11. 2023). *Lineární rovnice a nerovnice.* Načteno z realisticky.cz: http://www.realisticky.cz/kapitola.php?id=123

Krynický, M. (21. 11. 2021): *Kvadratická funkce, kvadratické rovnice a nerovnice.* Načteno z realisticky.cz: http://www.realisticky.cz/kapitola.php?id=120

Krynický, M. (4. 10. 2020). *Některé rovnice a nerovnice převoditelné na lineární.* Načteno z realisticky.cz: http://www.realisticky.cz/kapitola.php?id=124

Kubešová, N., & Cibulková, E. (2006): *Matematika – přehled středoškolského učiva.* Třebíč: Nakladatelství Petra Mrákotová.

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (2021). Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. Dostupné z: https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2021/09/001_RVP_GYM_-vyznacene_zmeny.pdf

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (2023). Školský zákon v znění účinném ode dne 1. 7. 2023. Dostupné z: https://www.msmt.cz/dokumenty/skolsky-zakon-ve-zneni-ucinnem-ode-dne-1-7-2023

Nováková, E. (2016). *Analýza úloh ze soutěže Matematický klokan a jejich řešení žáky primární školy.* Shrnutí výsledků výzkumného šetření. Brno: Masarykova univerzita.

Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Novotná, J., Eisenmann, P. & Přibyl, J. (2015). Tvořivě při řešení úloh ve školské matematice. *Dva dny s didaktikou matematiky*, 9–22. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Polák, J. (2014). *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. Plzeň: Fraus.

Reusser, K. (1985). *From situation to equation. On formulation, understanding and solving "situation problems".* Technical Report no. 143. University of Colorado: Institute of Cognitive Science.

Stehlíková, N. (1995). *Analýza žákovských písemných řešení*. Praha: Univerzita Karlova.

Sternberg, R. (2003). *Cognitive Psychology.* Belmond, CA: Wadsworth.

Vondrová, N. (2020). Příčiny používání povrchových strategií slovních úloh a jak jim předcházet. *Učitel matematiky,* 28(2), 66–93. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/354655055_Priciny_pouzivani_povrchovych_strategii_reseni_slovnich_uloh_a_jak_jim_predchazet_Ucitel_matematiky_2020_282_66-93

Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A, Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019). *Matematická slovní úloha: Mezi matematikou, jazykem a psychologií.* Praha: Nakladatelství Karolinum.

Vondrová, N., Šmejkalová, M., Novotná, J., Havlíčková, N., Páchová, A, Smetáčková, I., Sigmundová, A., Hirschová, M., & Chvál, M. (2020). *Slovní úlohy ve výuce matematiky a českého jazyka*. Metodický materiál pro učitele. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Vyšín, J. (1962). *Metodika řešení matematických úloh.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Www.realisticky.cz: když (se) chcete naučit… [online]. Martin Krynický, 2010. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/

Zhou, Q., & Huang, D. (2019). Towards Generating Math Word Porblms from Equations and Topics. *Proceedings of the 12th International Conference of Natural Language Generation,* 494–503. Tokyo: Association for Computational Linguistics. Dostupné z: https://doi.org/10.18653/v1/W19-8661

Zong, M., & Krishnamachari, B. (2023). Solving Math Word Problems concerning Systems of Equations with GPT-3. Dostupné z: https://doi.org/10.1609/aaai.v37i13.26896

Seznam obrázků

Seznam tabulek