Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ali Czech

Univerzalita množin bodů pro alternující hamiltonovské cesty

Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Jan Kynčl, Ph.D.
Studijní program: Informatika
Studijní obor: Obecná informatika

Praha 2024

Chtěl bych poděkovat svým rodičům, své rodině za neustálou podporu při studiu. Dále děkuji vedoucímu bakalářské práce doc. Mgr. Jan Kynčl, Ph.D. za poskytnutí cenných odborných rad a informací při zpracování této práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Univerzalita množin bodů pro alternující hamiltonovské cesty

Autor: Ali Czech

Katedra: Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Jan Kynčl, Ph.D., Katedra aplikované matematiky

Abstrakt:

Množina M o n bodech v rovině je univerzální pro graf G na n vrcholech, pokud pro každé obarvení G, které nevytváří monochromatickou hranu, a každé obarvení S, je G nakreslitelná na S tak, že hrany jsou nakreslené jako úsečky a navzájem se nekříží. Tato práce se bude zabývá pouze dvoubarevnými případy, kdy máme červené a modré body. Popíšeme konkrétní obarvení množiny o 16 bodech na kružnici, kde polovina je červená, polovina modrá, ve které neexistuje alternující hamiltonovská cesta. Ukážeme, že množina bodů sudé délky menší než 16 ležící na kružnici je univerzální. V práci zavádíme konfiguraci dvoj-obloučku, která je podobná znamé konfiguraci dvoj-řetězce, kde jeden z oblouků je zrcadlově převrácený. Cílem práce je dokázat, že množina bodů v konfiguraci dvoj-obloučku není univerzální.

Klíčová slova: univerzální množina bodů, alternující se hamiltonovská cesta, graf

Title: Universality of point sets for alternating Hamiltonian paths

Author: Ali Czech

Department: Department of Applied Mathematics

Supervisor: doc. Mgr. Jan Kynčl, Ph.D., Department of Applied Mathematics

Abstract: The set M of n points in the plane is universal for a graph G on n vertices if for every coloring of G that does not create a monochromatic edge, and every coloring of S, G can be drawn on S such that the edges are drawn as straight lines and do not intersect. This work will only deal with two-colored cases, where we have red and blue points. We will describe a specific coloring of a set of 16 points on a circle, where half are red and half are blue, in which there is no alternating Hamiltonian path. We will show that a set of points of even length less than 16 lying on a circle is universal. In the work, we introduce the double-arc configuration, which is similar to the well-known double-chain configuration, where one of the arcs is mirror-inverted. The goal of this work is to prove that the set of points in the double-arc configuration is not universal.

Keywords: Universal point set, alternating Hamiltonian path, graph

Obsah

1 Úvod **2**

2 Definice **4**

3 Kružnice **6**

3.1 Důkaz věty 2 6

3.1.1 Kružnice typu 1 7

3.1.2 Kružnice typu 2 7

3.1.3 Kružnice typu 3+ 12

4 Dvoj-oblouk **13**

4.1 Důkaz věty 10 13

Literatura **15**

Seznam obrázků **16**

Kapitola 1

Úvod

Nechť $G = (V, E)$ je graf, kde V je množina vrcholů, E množina hran. Uvažujme dále množinu bodů M v rovině, kde žádné tři neleží na stejné přímce, tzn. body se nachází v obecné poloze. V této práci se zabýváme dvojbarevnou množinou bodů, tedy máme množinu R červených bodů a B množinu modrých bodů, a dvojbarevnou množinou vrcholů V.

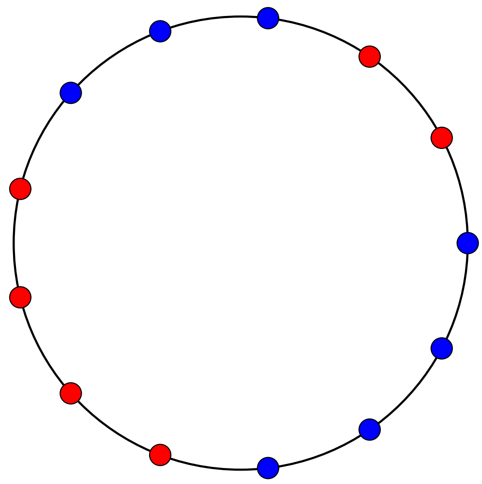
Zajímá nás za jakých okolností (a zda vůbec) lze nakreslit G na danou množinu bodů M tak, aby mezi body vznikla cesta, která prochází všemi body, jejíž hrany se nekříží a navíc každá hrana spojuje body opačných barev. V případě, že taková cesta mezi body množiny M existuje, řekneme, že M obsahuje alternující hamiltonovskou cestu ($NHAP$). Pokud $NHAP$ existuje pro libovolné obarvení bodů z M navíc řekneme, že M je univerzální množina.

Cibulka a kol. (2013) rozebrali konfiguraci *dvoj-řetězce (double-chain)* (C_1, C_2), což je případ, kdy konečná množina bodů červené a modré barvy leží v obecné poloze na konvexním a konkávním obloučku ("vypouklé"oblouky proti sobě) v rovině. Horní konvexní oblouk leží na grafu striktně konvexní funkce, dolní konkávní oblouk zase na grafu striktně konkávní funkce. Pro body na horním oblouku platí, že přímka procházející dvojicí bodů se nachází nad celým dolním obloukem, přímka procházející dvěma dolními body leží celá pod horním obloukem. Cibulka a kol. (2013) ukázali, že liší-li se celkový počet červených a modrých bodů nejvýše o 1, a obsahují-li oba oblouky alespoň pětinu z celkového počtu bodů, pak je tato množina univerzální.

Cibulka a kol. (2013) rovněž ukázali případy, kdy $NHAP$ sestrojit nelze. Nechť C_1 je množina bodů na horním oblouku a C_2 množina bodů na dolním oblouku. Pokud horní oblouk obsahuje periodicky 2 červené, 4 modré, 6 červených, 4 modré body, a platí-li $|C_1| \geq 28(|C_2|+1)$, pak mezi body nelze sestrojit $NHAP$.

Pilz a Welzl (2018) rozebrali problematiku *crossing dominance*. Mějme dvě množiny bodů K a L, které jsou stejně velké, jejich body leží v obecné poloze. Pokud existuje bijekce z K do L taková, že křížení vytvořená přidáním hran mezi body v K jsou zachovaná v L, pak toto zobrazení nazýváme *crossing preserving* (zobrazení zachovávající křížení). Vznik nových křížení v L je povolen. Pokud taková bijekce existuje, pak řekneme, že L *dominuje* množinu K.

Kaneko a Kano (2003) ukázali, že pro množinu bodů o 13 bodech na kružnici splňující $||R| - |B|| = 1$, existuje obarvení, pro které nelze sestrojit $NHAP$. Jedná se o posloupnost 2 červených, 3 modrých, 5 červených, 3 modrých bodů, viz obrázek 1.1.



Obrázek 1.1: Množina 13 bodů na kružnici bez NHAP

V této práci se zaměříme na množinu bodů sudé velikosti na kružnici, kde $|R| = |B|$. Ukážeme, že pro množinu bodů na kružnici s alespoň 16 body, kde polovina je červená a polovina modrá, existuje obarvení, ve kterém nelze sestrojit $NHAP$.

Dále se podíváme na případ dvoj-obloučku, což je podobná konfigurace, kterou zkoumali Cibulka a kol. (2013) s tím rozdílem, že oba oblouky jsou orientované stejným směrem a jeden oblouk je posunutím druhého. Tato konfigurace je zajímavá z důvodu toho, že z hlediska crossing dominance se nachází mezi případem kružnice a případem dvoj-řetězce, přičemž platí, že dvoj-řetězec je dominantní vůči dvoj-obloučku a dvoj-oblouček je dominantní vůči konfiguraci kružnice. Transitivně dvoj-řetězec je dominantní vůči kružnici. Toto pozorování, které si nebudeme dokazovat, vyplývá z následující myšlenky. Rozdělme si kružnici vertikálně dle osy x kartézské soustavy souřadnic na dva oblouky se stejným počtem bodů. Jeden oblouk překlopíme, např. dolní, a posuneme podle osy y kartézské soustavy souřadnic tak, abychom získali dvě disjunktní množiny bodů. Tedy dostaneme dva konkávní oblouky, který leží na grafu striktně konkávních funkcí. Tím navýšíme celkový počet způsobů, jak propojovat mezi sebou body hranami při sestrojování $NHAP$, aniž by došlo ke křížení. Vznikne konfigurace dvoj-obloučku.

Z konfigurace dvoj-obloučku můžeme analogickým způsobem dostat případ dvoj-řetězce otočením horního obloučku, což opět přispěje k navýšení možností, jak spojovat body mezi sebou hranami při hledání $NHAP$.

Crossing dominance s sebou nese i další zajímavou vlastnost týkající se univerzality množin. Pokud L je dominantní vůči K a K je univerzální množina, pak i L je univerzální.

V této práci dokážeme, že množina bodů na konfiguraci dvoj-obloučku, není univerzální množina, a ukážeme příklad konkrétního obarvení, ve které nelze sestrojit $NHAP$.

Kapitola 2

Definice

V této kapitole si zavedeme definice, které budeme používat v sekci napříč celou prací.

Definice 1 (Konfigurace dvoj-oblouku)**.** *Řekneme, že množina bodů se nachází v* konfiguraci dvoj-oblouku*, pokud jsou splněny následující vlastnosti:*

1. *Body leží v obecné poloze a jsou rozmístěny na dvou obloucích, které jsou pod sebou.*
2. *Oblouky jsou „vypuklé" stejným směrem (jeden oblouk je posunutím druhého).*
3. *Přímka procházející dvojicí bodů z horního oblouku je nad celým dolním obloukem, a analogicky přímka procházející dvojicí bodů z dolního oblouku je pod celým horním obloukem.*

Definice 2 (Interval bodů)**.** *Nechť $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jsou po sobě jdoucí body stejné barvy ležící na kružnici nebo na kruhovém oblouku dvoj-obloučku. Tyto body tvoří* interval *délky k dané barvy. Interval označíme $I[v_1, v_k]$, kde v_1 je začátek intervalu a v_k konec intervalu. Počátek a konec intervalu uvažujeme vždy ve směru hodinových ručiček.*

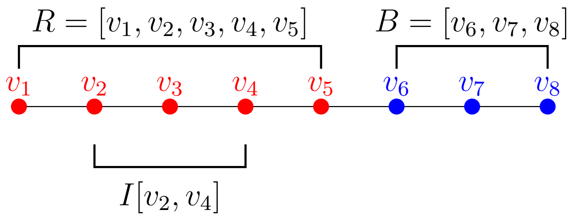
Definice 3 (Úsek bodů)**.** *Nechť $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jsou po sobě jdoucí body červené nebo modré barvy ležící na kružnici nebo na kruhovém oblouku dvoj-obloučku. Je-li $I[v_i, v_k]$ interval dané barvy, existují-li body v_{i-1} nebo v_{k+1} opačné barvy vůči krajním bodům intervalu, nebo pokud $v_i = v_1$ a $v_k = v_n$, pak body $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k$ tvoří* úsek *dané barvy s délkou $k - i + 1$, který značíme jako uspořádanou posloupnost*

$$[v_i, v_{i+2}, v_{i+3}, \ldots, v_k]$$

Body v_1 a v_k jsou krajními body úseku, všechny ostatní body jsou vnitřní.

Definice 4 (Opačný úsek)**.** *Mějme množinu bodů červené a modré barvy na kružnici nebo na kruhovém oblouku dvoj-obloučku. Úsek K označíme jako* opačný *vůči úseku L, je-li tvořen body opačné barvy, než jsou body obsažené v L*

Definice 5 (Úsekový typ kružnice)**.** *Mějme úseky červené a modré barvy tvořených $2n$ body, kde n jsou červené a n modré, ležících na kružnici.* Úsekový typ *této*



Obrázek 2.1: Ilustrace úseků a intervalů

konfigurace označuje celkový počet červených a celkový počet modrých úseků, kterých je na kružnici stejně. O kružnici řekneme, že je typu k*, pokud obsahuje* k *červených a* k *modrých úseků.*

Pozorování 1. *Počet červených a modrých úseků je na kružnici stejný.* □

Definice 6 (Úsekový typ oblouku dvoj-obloučku)**.** *Mějme úseky červené a modré barvy na kruhovém oblouku dvoj-obloučku. O oblouku řekneme, že je* typu (r, b)*, pokud obsahuje* r *červených a* b *modrých úseků.*

Definice 7 (Kontrakce bodů)**.** *Nechť* M *je množina bodů na kružnici,* $R \subseteq M$ *je množina červených,* $B \subseteq M$ *množina modrých bodů. Pokud body* $v_i, v_k \in M$ *sousedí na kružnici a zároveň platí, že* $v_i \in R$ *a* $v_k \in B$ *nebo* $v_i \in B$ *a* $v_k \in R$*, pak tyto body můžeme* zkontrahovat*. Kontrakcí* v_i *a* v_k *dostaneme* $\mathrm{contr}(v_k, v_i) = V_i$*, který je obarven barvou* v_k*. Pokud bychom provedli kontrakci* $contr(v_k, v_i) = V_i$*, vznikne bod obarvený barvou* v_i*, tzn. kontrakce na kružnicích není symetrická operace.*

Definice 8 (Kontrakce posloupnosti bodů)**.** *Mějme posloupnost červených a modrých bodů* $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ *ležících na kružnici takovou, že vrcholy s lichým indexem mají jednu barvu, vrcholy se sudým indexem mají opačnou barvu.* Kontrakci *posloupnosti bodů, značíme* contr∗*, definujeme induktivně:*

1. $\mathrm{contr}(v_1, v_2) = V_2$
2. $\mathrm{contr}{*}(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \mathrm{contr}(v_1, \mathrm{contr}{*}(v_2, v_3, v_4, \ldots, v_k)) = V_k$*, který má barvu posledního bodu* v_k

Definice 9 (NHAP)**.** *Nechť* M *je množina bodů, kde* R *je množina červených bodů,* B *je množina modrých bodů.* Alternující nekřížící se hamiltonovská cesta *(anglicky* non-crossing Hamiltonian alternating path*, zkráceně* NHAP*) na množině* M *je taková posloupnost bodů* $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots v_{2n} \in M$*, že každý bod se v posloupnosti vyskytuje právě jednou a žádné dvě hrany* $\{v_i, v_{i+1}\}$ *a* $\{v_j, v_{j+1}\}$ *se nekříží pro všechna* i, j*. Navíc platí, že hrany spojují vrcholy opačných barev.*

Definice 10 (Univerzální množina)**.** *O množině* n *bodů na kružnici nebo na dvoj-oblouku řekneme, že je* univerzální*, pokud pro libovolné obarvení bodů dvěma barvami existuje nekřížící střídající se cesta procházející všemi body, tj. NHAP.*

Kapitola 3

Kružnice

V této kapitole se zaměříme na případ, kdy počet červených a počet modrých bodů je na kružnici stejný. Ukážeme, že platí následující věta

Věta 2. *Množina n bodů ležících na kružnici, kde n je sudé a $n \geq 16$, není univerzální.*

3.1 Důkaz věty 2

Neuniverzalitu dané konfigurace dokážeme rozborem případů na základě počtu a délek úseků bodů ležících na kružnici.

Budeme přitom vycházet z následujícího pozorování

Pozorování 3. *Počet červených a modrých úseků je na kružnici stejný.* □

Nejprve si popíšeme, jak by měla měla vypadat $NHAP$ na kružnici.

Tvrzení 4. *Nechť C je kružnice s $2n$ body, kde n bodů je modrých a n červených, uspořádáných jako $v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}, ...v_{2n}$. NHAP mezi body na kružnici existuje, pokud je možné z každého bodu v_i ve směru nebo proti směru hodinových ručiček vytvořit hranu se sousedním nebo nejbližším bodem v_k opačné barvy tak, že mezi nimi nejsou žádné další body, které nejsou součástí cesty.*

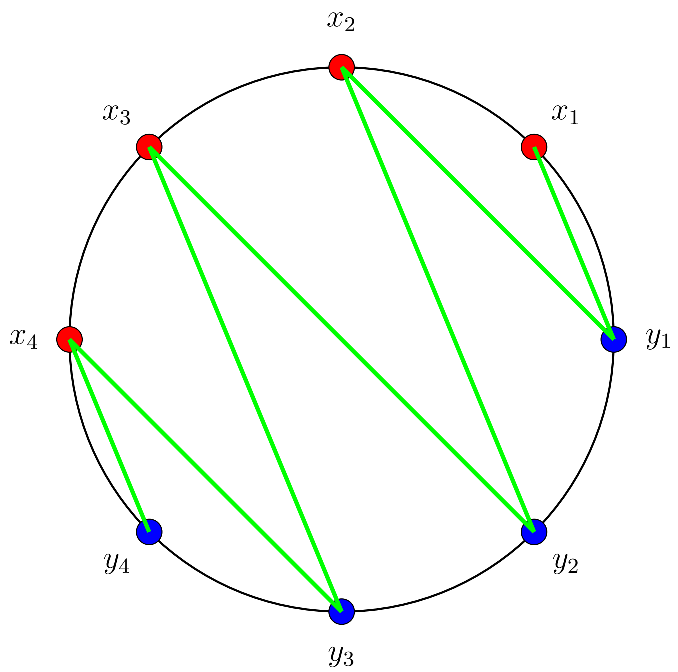
Důkaz. Existenci NHAP provedeme redukováním velikosti konfigurace kružnice pomocí kontrakcí sousedních bodů opačné barvy. Cestu zahájíme v bodu v_i, který je krajním bodem nejdelšího úseku. Body, které lze spojit hranou (sousední body) zkontrahujeme a obarvíme barvou "přidaného" (druhého) bodu, tzn. v našem případě pokud v_i zkontrahujeme s bodem v_k, vznikne bod V_k obarvený barvou původního bodu v_k. Takto kontrahujeme pokaždé dvojice bodů a zmenšujeme jejich celkový počet na kružnici. Tím se zbavíme bodů, které jsme již použili a nijak dále nepřispějí v prodlužování cesty. Pokud na konci zůstane kružnice tvořená jediným bodem, NHAP v daném obarvení existuje, přičemž posloupnost jednotlivých kontrakcí dvojic bodů určuje jednotlivé hrany hledané cesty. Pokud během kontrahování dostaneme bod V_i sousedící s dvěma body stejné barvy, tento bod nemůžeme s nimi kontrahovat, tzn. NHAP v daném obarvení neexistuje. □

3.1.1 Kružnice typu 1

Začněme případem, kdy na kružnici máme celkově 2 úseky, 1 červený a 1 modrý. Počet červených a modrých bodů je z definice problému stejný, tj. úseky mají stejnou délku.

Tvrzení 5. *Jsou-li $v_1, v_2, \ldots, v_n$ body červené a modré barvy na kružnici typu 1, pak kružnice obsahuje NHAP.*

Důkaz. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tvoří červený úsek a body $y_1, y_2, \ldots, y_k$ modrý úsek. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že x_1 sousedí s y_1. Pak posloupnost bodů $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots x_k, y_k)$ tvoří NHAP. □



Obrázek 3.1: Příklad kružnice typu 1 o 8 bodech s NHAP

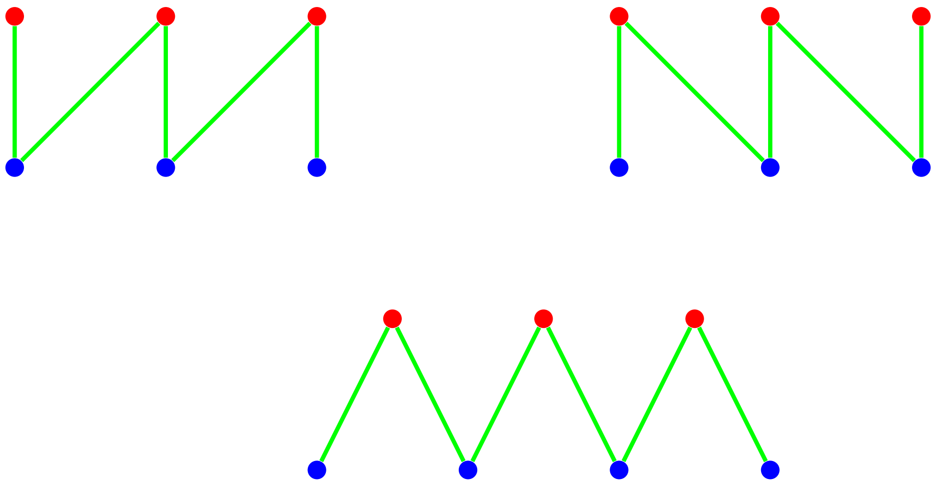
Z tohoto tvrzení vyplývá následující pozorování:

Pozorování 6. *Nechť K a L jsou vzájemně opačné úseky na kružnici. Pokud existuje NHAP na bodech těchto úseků, platí následující:*

1. *Je-li $|K| = |L|$, pak NHAP končí v bodu opačného úseku*
2. *Je-li $|K| = |L| + 1$, pak NHAP končí v krajním bodu L. Analogicky, je-li $|L| = |K| + 1$, pak NHAP končí v krajním bodu K.*

3.1.2 Kružnice typu 2

Mějme na kružnici 2 červené úseky R_1, R_2, a 2 modré B_1, B_2. Ukážeme nejprve případ, kdy se délky opačných úsekůliší nejvýše o 1.



Obrázek 3.2: NHAP mezi úseky bodů stejné délky, a mezi úseky s délkou různou o 1

Tvrzení 7. *NHAP v kružnici typu 2 na $2n$ bodech, z nichž n jsou červené a n modré, existuje, pokud pro červené úseky R_1, R_2, a modré úseky B_2, B_2 tvořených body z kružnice platí*

$$||B_1| - |R_1|| \leq 1$$

$$||B_2| - |R_2|| \leq 1$$

Důkaz.

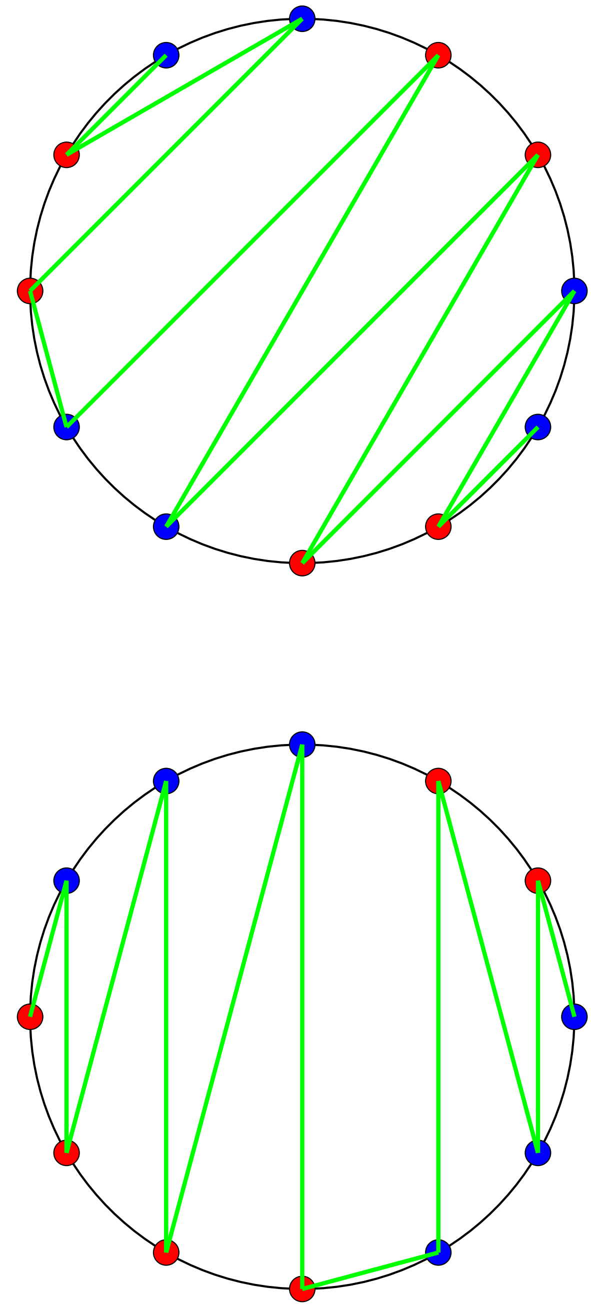
1. Délky všech úseků jsou stejné

   Nechť
   $$|R_1| = |R_2| = |B_1| = |B_2|,$$
   pak NHAP nalezneme podobným způsobem jako v situaci u kružnice typu 1. BÚNO cestu zahájíme v krajním bodě B_1 sousedícího s krajním bodem R_1. Tyto dva úseky spojíme dle Tvrzení 4, cestu následně prodloužíme do nejbližšího bodu B_2. Nakonec stejným způsobem spojíme B_2 s úsekem R_2, kde NHAP skončí.

2. Délky opačných úseků se liší o 1

   Předpokládejme, že
   $$|R_1| > |B_1|$$
   a nechť
   $$|R_1| = |B_1| + 1, |B_2| = |R_2| + 1, |B_1| \geq |B_2|$$
   NHAP zahájíme v krajním bodě úseku R_1 a spojíme všechny body R_1 s body B_2. Na základě Pozorování 6 víme, že po spojení R_1 s B_1 skončíme ve druhém krajním bodě R_1. Tento bod sousedí s krajním booem B_2, přes který prodloužíme cestu a spojíme B_2 s R_2. NHAP skončí v krajním bodě R_2, viz. obr. 3.3.

□



Obrázek 3.3: NHAP v kružnici typu 2 s úseky stejné délky, a v kružnici typu 2, kde existují opačné úseky s délkami různými o 1

Uvažme nyní případ, kdy se úseky opačných barev liší alespoň o 2.

Tvrzení 8. *Pro množinu bodů na kružnici typu 2 obsahující po sobě jdoucí opačné úseky o velikostech*

$$\begin{aligned} |B_1| &= k, \qquad\qquad k \in \mathbb{N}, \\ |R_1| &\geq |B_1| + 2, \\ |R_2| &\geq |R_1|, \end{aligned}$$

neexistuje NHAP.

Důkaz. Z nerovností uvedených v Tvrzení 8 plyne

$$|B_2| \geq |R_2| + 2 \tag{3.1}$$

Zároveň platí

$$|B_1| + |B_2| = n = |R_1| + |R_2| \tag{3.2}$$

Pojmenujme si body v jednotlivých úsecích:

$$\begin{aligned} B_1 &= [b_1, b_2, \dots, b_k], \\ R_1 &= [r_1, r_2, \dots, r_k, r_{k+1}, r_{k+2}, \dots, r_l], \\ R_2 &= [r'_1, r'_2, \dots, r'_l, \dots\ r'_m], \\ B_2 &= [b'_1, b'_2, \dots, b'_m, \dots, b'_{m+1}, b'_{m+2}, \dots\ b'_n], \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nechť b'_1 sousedí s r'_1, b'_n s r_1, r'_m sousedí s b_1, a b_k s r_l.

NHAP budeme konstruovat podle Tvrzení 4, zahájíme ji v krajním bodě b'_1 nejdelšího úseku B_2 a postupně ho spojíme s úsekem R_2, tzn. cesta je zahájená následující uspořádanou posloupností bodů

$$H = (b'_1, r'_1, b'_2, r'_2, \dots, b'_m, r'_m)$$

- $k = 1$

  Pokud $k = 1$, pak B_1 je tvořen jediným bodem, do kterého se dostaneme hranou $\{r'_m, b_1\}$. Z tohoto bodu hranou $\{b_1, r_l\}$ přejdeme do úseku R_1. Jelikož $|B_2| - |R_2| = |R_2| - |B_1|$, spojíme zbytek R_1 se zbývajícími body B_2, tj. zbývající body projdeme v následujícím pořadí

  $$(r_l, b'_{m+1}, r_{l-1}, b'_{m+2}, \dots, r_1, b'_n)$$

  Sjednocením všech hran získáme NHAP v dané kružnici.

- $k > 1$

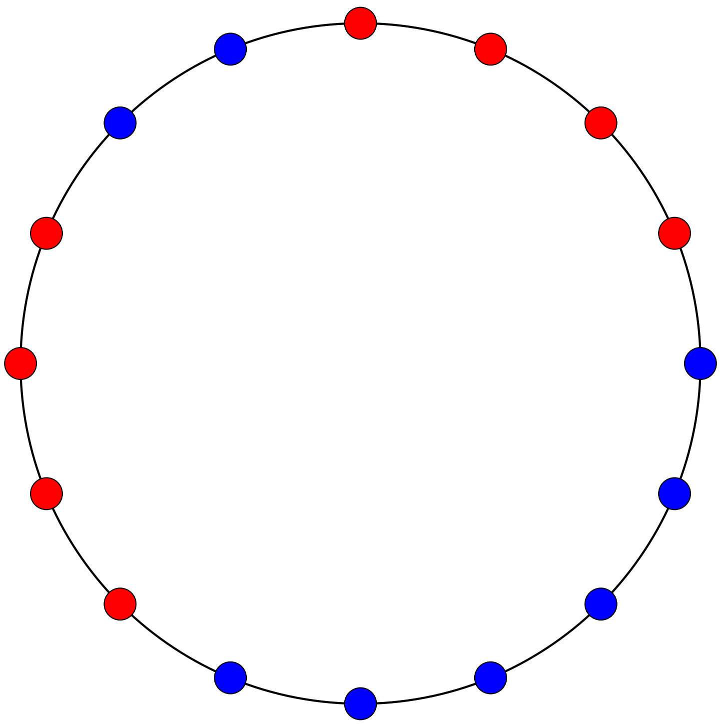
  Je-li $k > 1$, přidáme do H hranu $\{r'_m, b_1\}$ a zkontrahujeme všechny body z H. Vznikne bod V_1 s vlastnostmi bodz b_1. Tento bod sousedí s body b_2 z B_1 a b'_{m+1} z B_2, které mají stejnou barvu, tzn. V_1 nesousedí s bodem opačné barvy a tedy nemůžeme provést žádnou další kontrakci tohoto bodu s dalším. Podle Tvrzení 4 NHAP v tomto případě neexistuje.

  Analogicky pokud bychom do H přidali hranu $\{r'_m, b'_{m+1}\}$, dospěli bychom ke stejnému závěru.

□

Ukázali jsme, že splňuje-li množina bodů na kružnici vztahy (3.1), (3.2) a (3.3) uvedené výše, neexistuje v ní NHAP. Nejmenší $k > 1$, pro které tyto vztahy můžeme zaručit, je 2, tj. nejmenší počet bodů, pro který kružnice typu 2 není univerzální, je 16.

Důsledek. Množina alespoň 16 bodů v konvexní poloze není univerzální.



Obrázek 3.4: Kružnice I(2,2) bez existence NHAP

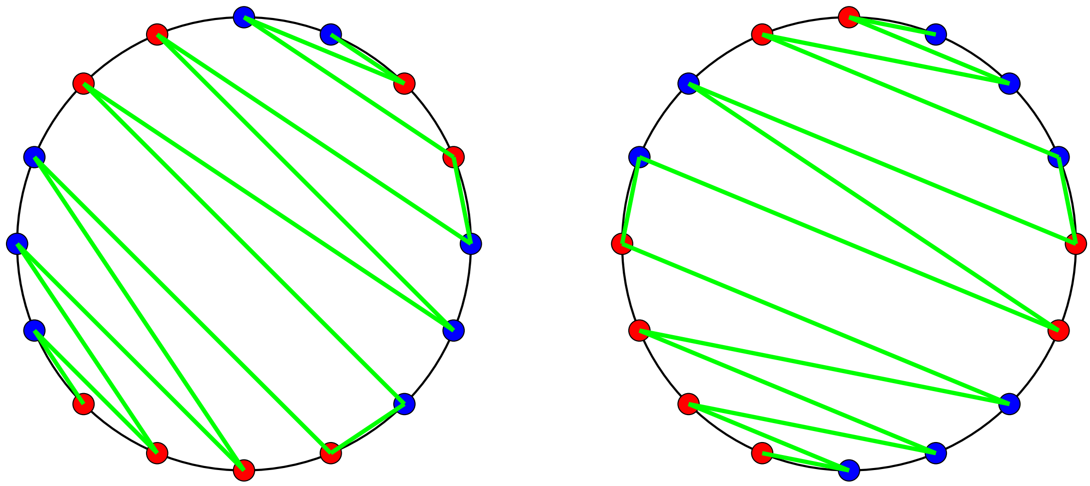
3.1.3 Kružnice typu 3+

Je 16 nejmenší počet bodů na kružnici, pro který neexistuje NHAP? V Tvrzení 8 jsme ověřili, že množina 16 bodů tvořící kružnici typu 2 existuje případ, kdy v kružnici nemůžeme provést NHAP skrz všechny body. Pojďme zkusit navýšit počet úseků při zachování počtu bodů.

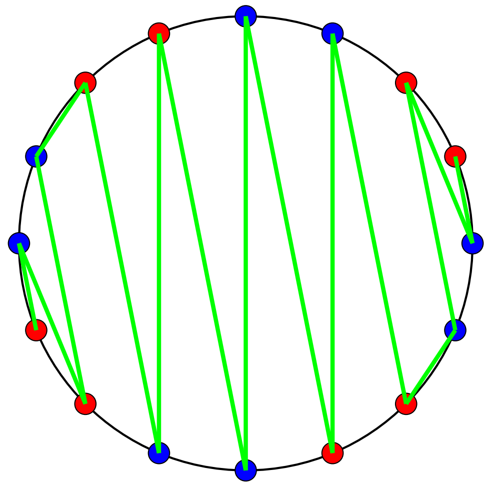
Lemma 9. *Kružnice o 16 bodech typu 3 a typu 4, kde polovina je červená a polovina modrá, obsahuje NHAP.*

Důkaz. Pro kružnici typu 3 můžeme vytvořit úseky s délkami $2, 2, 4$ nebo $2, 3, 3$. V případě, že červené i modré úseky mají délky $2, 2, 4$ nebo $2, 3, 3$, $NHAP$ lze nalézt spojením opačných úseků stejných délek. V případě, že jedna barva je tvořena úseky o délkách $2, 2, 4$, úseky druhé barvy mají délky $2, 3, 3$, tak $NHAP$ stále existuje, viz obr. 3.5.

Kružnice typu 4 má jediný způsob, jak úseky rozdělit, jedná se o délky $2, 2, 2, 2$. Opět $NHAP$ lze nalézt, viz. obr. 3.6 □



Obrázek 3.5: Kružnice typu 3 s NHAP



Obrázek 3.6: Kružnice typu 4 s NHAP

Kapitola 4

Dvoj-oblouk

Věta 10. *Množina $2n$ bodů konfigurace dvoj-oblouku, kde polovina je červená, polovina modrá, a oba oblouky obsahují n bodů, není univerzální.*

4.1 Důkaz věty 10

Věta 11. *Nechť C_1 je horní oblouk dvoj-oblouku, C_2 dolní oblouk. Pokud C_1 obsahuje posloupnost bodů 3 červené, 2 modré, 4 červené, 5 modrých, a na C_2 leží k červených a k modrých bodů, kde $k \geq 1$, pak v dané konfiguraci nelze vytvořit NHAP.*

Důkaz. Pojmenujme si nejprve jednotlivé úseky na horním oblouku. Nechť R_1 je úsek o 3 červených bodech, B_1 je úsek 2 modrých bodů, R_2 je úsek 4 červených bodů, B_2 je úsek 5 modrých bodů. Pokud $k = 1$, pak cyklicky dostáváme 4 červené, 2 modré, 4 červené a 6 modrých bodů. Důsledkem toho, že kružnice je dominantní vůči dvoj-obloučku a podle Věty 2 platí, že pro danou množinu bodů na dvoj-obloučku neexistuje NHAP.

Pokud $k > 1$ rozebereme možné cesty na dané množině bodů. Aby bylo možné spojit body z C_1 bez použití bodů C_2, musí cesta začínat v krajním bodě B_2, který sousedí s krajním bodem z R_2, nebo musí začínat v krajním bodě R_1, který sousedí s krajním bodem B_1. To ovšem znamená, že cesta bude začínat v jednom z těchto bodů a zároveň končit ve druhém bodě, ze kterého by se dala zahájit cesta. Pak ale musí existovat hrana z nejpravějšího krajního bodu B_2 do nejlevějšího bodu R_1. NHAP takto vytvořit nemůžeme, neboť bychom danou hranou zcela zamezili přístup k bodům z dolního oblouku. Důsledkem toho je pozorování, že v horním oblouku nesmí existovat hrana spojující bod z R_1 s bodem z B_2, jelikož si tímto "odřízneme" body z B_1 a R_2, nebo body z dolního oblouku. Záleží na další hraně.

Jelikož nesmí existovat jakákoliv hrana z R_1 do B_2, pak pokud budeme chtít využít všechny body R_1, musíme je spojit s body souseního úseku B_1. Po využití všech modrých bodů B_1 se vrátíme do zbývajícího krajního bodu R_1. Nyní potřebujeme spojit tento bod s opačným bodem. Nabízí se možnost přejít hranou na bod z B_2, to ovšem není možné. Zbývající možností je spojit nejbližší modrý bod z dolního oblouku, který sousedí s červeným úsekem. Nemůžeme použít žádný jiný modrý bod dole, jinak bychom si zamezili spojení se zbývajícími body z R_2. Z dolního modrého úseku nemůžeme pokračovat se spojováním do R_2, protože tím odřízneme červené body dolního úseku od B_2. Spojením dolního modrého úseku s dolním červeným úsekem, ale vypotřebujeme červené body, tzn. nebudeme mít dostatek červených bodů na spojení s body z B_2. NHAP tedy neexistuje.

Podobně by to dopadlo, pokud bychom začali v bodě B_2. $\square$

Literatura

CIBULKA, J., KYNČL, J., MÉSZÁROS, V., STOLAŘ, R. a VALTR, P. (2013). *Universal Sets for Straight-Line Embeddings of Bicolored Graphs*, pages 101–119. Springer New York, New York, NY. ISBN 978-1-4614-0110-0. doi: 10.1007/978-1-4614-0110-0_8. URL `https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0110-0_8`.

KANEKO, A. a KANO, M. (2003). *Discrete Geometry on Red and Blue Points in the Plane — A Survey —*, pages 551–570. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. ISBN 978-3-642-55566-4. doi: 10.1007/978-3-642-55566-4_25. URL `https://doi.org/10.1007/978-3-642-55566-4_25`.

PILZ, A. a WELZL, E. (2018). Order on order types. *Discrete & Computational Geometry*, **59**(4), 886–922. ISSN 1432-0444. doi: 10.1007/s00454-017-9912-9. URL `https://doi.org/10.1007/s00454-017-9912-9`.

Seznam obrázků

1.1 Množina 13 bodů na kružnici bez NHAP 3

2.1 Ilustrace úseků a intervalů 5

3.1 Příklad kružnice typu 1 o 8 bodech s NHAP 7
3.2 NHAP mezi úseky bodů stejné délky, a mezi úseky s délkou různou o 1 8
3.3 NHAP v kružnici typu 2 s úseky stejné délky, a v kružnici typu 2, kde existují opačné úseky s délkami různými o 1 9
3.4 Kružnice I(2,2) bez existence NHAP 11
3.5 Kružnice typu 3 s NHAP 12
3.6 Kružnice typu 4 s NHAP 12