Posudek bakalářské práce

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

Autor práce	Ali Czech
Název práce	Univerzalita množin bodů pro alternující hamiltonovské cesty
Rok odevzdání	2024
Studijní program	Informatika
Studijní obor	Informatika se specializací Obecná informatika

Autor posudku	doc. Mgr. Jan Kynčl, Ph.D.	**Role**	vedoucí
Pracoviště	Katedra aplikované matematiky		

Množina S sestávající z n bodů v obecné poloze v rovině je *univerzální* pro bipartitní graf G s n vrcholy, pokud pro každé dobré 2-obarvení G dvěma barvami, červeně a modře, a každé obarvení S se stejnými počty bodů jednotlivých barev jako v G, existuje rovinné úsečkové nakreslení G takové, že každý vrchol G je nakreslen na unikátní bod S stejné barvy. Tento pojem byl v minulosti studován hlavně pro případ, kdy G je cesta s n vrcholy. Množina S je potom univerzální pro cestu P_n, pokud pro každé *vyrovnané* 2-obarvení S, kde počty bodů jednotlivých barev se liší nejvýše o 1, lze pomocí úseček nakreslit *rovinnou alternující hamiltonovskou cestu* s vrcholy v S.

Pojem univerzální množiny zavedli Cibulka, Kynčl, Mészáros, Stolař a Valtr v článku z r. 2013, kde nalezli první příklad univerzálních množin pro cestu P_n: tzv. *double-chain (dvoj-řetěz)*, sestávající z bodů na dvou obloucích "vypouklých" proti sobě; konkrétněji konvexní oblouk je nad konkávním obloukem, a každá přímka určená body na horním oblouku je nad celým dolním obloukem a naopak. Cibulka a kol. ukázali, že množina S bodů na dvoj-řetězu je univerzální, pokud na každém z oblouků je aspoň $n/5$ bodů S.

Na druhou stranu je známo, že např. množina bodů na kružnici, obecněji v konvexní poloze, není univerzální pro cestu pro dostatečně veliké n. To znamená, že její body lze vyrovnaně 2-obarvit tak, že na ně nelze úsečkově nakreslit rovinnou alternující hamiltonovskou cestu.

Kromě dvoj-řetězu zatím nejsou známé další univerzální množiny pro cesty. Proto je zajímavé hledat další kandidáty. Zhruba "na půl cesty" mezi konvexní polohou a dvoj-řetězem je tzv. *dvoj-oblouk*, který vznikne z dvoj-řetězu zrcadlením jednoho z oblouků podle vodorovné osy.

Jedním z hlavních úkolů této práce bylo prozkoumat konfiguraci dvoj-oblouku a zjistit, zda by mohla být univerzální pro cesty. To se autorovi skutečně povedlo: nalezl třídu obarvení konfigurace dvoj-oblouku, pro které nelze úsečkově nakreslit rovinnou alternující hamiltonovskou cestu. Tato obarvení zahrnují případy, kdy horní oblouk má 14 bodů a dolní oblouk libovolný sudý počet bodů. Je také snadno vidět, jak by se tato obarvení dala zobecnit na libovolné větší počty bodů.

Nalezení tohoto protipříkladu (Věta 11) nebylo vůbec přímočaré; u několika slibných kandidátních konstrukcí se nakonec ukázalo, že jdou pospojovat nekřížící se alternující hamiltonovskou cestou. Nakonec pomohla systematičtější analýza různých konfigurací, o které se text nezmiňuje.

Většinu rozsahu práce zabírá Kapitola 3, kde se autor věnuje konfiguracím sudého počtu n bodů na kružnici, a podrobným rozborem případů ukáže, že tyto konfigurace jsou univerzální pokud $n \leq 14$, a nejsou univerzální pro $n \geq 16$. Tento výsledek byl v komunitě pravděpodobně aspoň částečně známý: konstrukce obarvení na $16k$ bodech v konvexní poloze je např. popsaná v článku [J. Kynčl, J. Pach and G. Tóth, Long alternating paths in bicolored point sets, *Discrete Mathematics* **308** (2008) 4315–4321], ale podrobný důkaz se pravděpodobně nikde v literatuře dříve neobjevil. Nejbližší podobný výsledek je konstrukce vyrovnaného obarvení pro 13 bodů na kružnici, bez rovinné alternující hamiltonovské cesty [A. Kaneko and M. Kano, Discrete Geometry on Red and Blue Points in the Plane — A Survey, Discrete and computational geometry, 551–570, Algorithms Combin. 25, Springer, Berlin, (2003)], tato konfigurace má ale lichý počet bodů.

Text práce je rozsahem spíše kratší, nicméně je téměř výhradně založená na vlastním výzkumu autora. Cíle byly původně poněkud ambicióznější; dokonce autor sám v rámci výzkumu dosáhl několika dalších "pozitivních" výsledků o konfiguraci dvoj-oblouku, t.j. pro určité typy obarvení vždy existuje rovinná alternující hamiltonovská cesta.

Text vykazuje výrazné znaky "šítí horkou jehlou", obsahuje mnoho nepřesných formulací a překlepů, dokonce i v abstraktu i ve znění hlavní věty; např. ve Větě 11 není popsané, v jakém pořadí mají body jednotlivých barev ležet na oblouku C_2, což je pro konstrukci obarvení podstatná informace. Konstrukce obarvení z Věty 11 není ani ilustrovaná obrázkem. Práci by velmi prospělo více času a péče na vychytání chyb, ale i na doplnění dílčích výsledků, které se kvůli nedostatku času "nevešly". Také bych doporučil vytvořit anglickou verzi výsledků o dvoj-oblouku a poslat k publikaci do časopisu.

Celkově mi předložená práce připadá na hranici uznatelnosti, z hlediska rozsahu a úrovně textu. Nicméně obsahuje originální netriviální výsledek řešící zajímavý kombinatorický problém.

Věřím, že v rámci obhajoby bude příležitost předvést přesněji popsanou konstrukci protipříkladu z Věty 11 včetně ilustrací i přehlednějšího důkazu.

26. 8. 2024

Podpis: