Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vizualizace metod odmocňování
Visualization of rooting methods

Sára Ješetová

Vedoucí práce: Mgr. Kristýna Nižňanská
Studijní program: Specializace v pedagogice (B7507)
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

2024

Odevzdáním této bakalářské práce na téma *Vizualizace metod odmocňování* potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce Mgr. Kristýny Nižňanské samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha 2024

Na závěr bych ráda poděkovala všem, kteří mi pomohli s vypracováním této bakalářské práce. Zvláštní poděkování patří Mgr. Kristýně Nižňanské, mé vedoucí práce, za její cenné rady, podporu a odborné vedení, které mi poskytla během celého procesu psaní této bakalářské práce. Dále bych ráda poděkovala prof. RNDr. Ladislavu Kvaszovi, DSc., Dr., za jeho odborné znalosti v oblasti matematiky a didaktiky, které mi pomohly při analýze materiálů a metod, které tvořily základ mé práce. Jeho ochota a trpělivost při vysvětlování složitých témat byly pro mě neocenitelné.

Děkuji také mé rodině a přátelům za jejich podporu a povzbuzování během celého studia.

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zaměřuje na mocniny a odmocniny, zkoumá jejich historické metody výpočtu a vizualizace. Kromě popisu a srovnání metod výpočtu přibližných hodnot odmocnin bez kalkulačky se práce zabývá i prezentací mocnin a odmocnin ve výuce na základních a středních školách. Je strukturována do tří hlavních kapitol.

V úvodu se nachází shrnutí obsahu jednotlivých kapitol, které tvoří strukturu práce. Tato anotace slouží k orientaci čtenáře a k pochopení celkového zaměření práce. Je napsána srozumitelně a jasně, aby ji pochopili i ti, kteří se problematikou odmocňování hlouběji nezabývají.

První kapitola poskytuje přehled teoretických základů mocnin a odmocnin. Definovat budeme tyto základní pojmy, včetně jejich vlastností a pravidel pro násobení a dělení mocnin a odmocnin.

Druhá kapitola je věnována historickým metodám výpočtu odmocnin od starověkých civilizací až po moderní dobu. Nejprve je rozebrána *Babylónská metoda*, jedna z nejstarších známých metod, která nabízí systematický a opakující se proces k nalezení přesných výsledků. Poté následuje *Indická metoda*, která přináší další způsoby odmocňování k tradičním postupům výpočtu odmocnin. Následně je představena *metoda podle Ptolemaia*, která kombinuje geometrické a aritmetické principy pro dosažení vysoké přesnosti výsledků.

Nakonec je popsána *ruční metoda výpočtu odmocniny*, která je vhodná pro ilustraci základních principů. Dříve byla běžnou součástí výuky matematiky na základních školách, podobně jako základní aritmetické operace sčítání, odčítání, násobení a dělení. Tato metoda sloužila k pochopení principů výpočtu druhé odmocniny a zároveň rozvíjela u žáků logické a analytické myšlení.

Třetí kapitola analyzuje, jak jsou odmocniny prezentovány ve výuce matematiky. Zabývá se metodami výpočtu přibližných hodnot odmocnin bez kalkulačky.

Tato bakalářská práce si klade za cíl nejen přiblížit historické a teoretické aspekty mocnin a odmocnin, ale také poskytnout praktický pohled na jejich výuku a prezentaci v současných učebnicích.

KLÍČOVÁ SLOVA

mocniny, odmocniny, historické metody výpočtu, Babylónská metoda, Indická metoda, ruční metoda výpočtu odmocnin, vizualizace

ABSTRACT

This bachelor's thesis focuses on square root, examining their historical calculation methods and visualization. In addition to describing and comparing methods for approximating square roots without calculators, it also explores how powers and roots are presented in elementary and secondary school education. The thesis is structured into three main chapters. The introduction provides a summary of the contents of each chapter, outlining the structure of the work. This overview is designed to orient the reader and clarify the thesis's focus. It is written in a clear and accessible manner, ensuring comprehension even for those not deeply familiar with the topic of square roots.

The first chapter offers an overview of the theoretical foundations of powers and roots. It defines these fundamental concepts, including their properties and the rules for multiplying and dividing powers and roots.

The second chapter delves into historical methods for calculating square roots, spanning from ancient civilizations to the modern era. It begins with an analysis of the Babylonian method, one of the oldest known techniques, which provides a systematic and iterative approach to achieving precise results. This is followed by the Indian method, which introduces alternative ways of calculating roots based on traditional approaches. The chapter also examines Ptolemy's method, which combines geometric and arithmetic principles to achieve high levels of accuracy. Finally, a manual method for calculating square roots is described. This method, once a common part of elementary school curricula alongside basic arithmetic operations like addition, subtraction, multiplication, and division, serves to illustrate fundamental principles of square root calculations while fostering logical and analytical thinking in students.

The third chapter analyzes how square roots are presented in mathematics education, focusing on methods for approximating square roots without the use of calculators.

The goal of this bachelor's thesis is not only to illuminate the historical and theoretical aspects of square roots but also to provide a practical perspective on their teaching and presentation in contemporary textbooks.

KEYWORDS

square, roots, historical calculation methods, Babylonian method, Indian method, manual square roots method, visualization

Obsah

Úvod

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou mocnin a odmocnin, se zvláštním zaměřením na historické metody výpočtu odmocnin a jejich vizualizaci. Kromě popisu a srovnání moderních metod výpočtu přibližných hodnot odmocnin bez kalkulačky se práce věnuje i hlubšímu zkoumání historického vývoje těchto metod a jejich matematického zdůvodnění.

Cílem je nejen popsat, jak se odmocniny počítají dnes, ale také ukázat, jak se s nimi pracovalo v minulosti. Práce tak otevírá okno do historie matematiky a umožňuje sledovat vývoj numerických metod od starověku až do současnosti.

V první kapitole jsou definovány základní pojmy týkající se mocnin a odmocnin, které slouží jako teoretický základ pro další kapitoly, včetně jejich vlastností a aplikací. V této kapitole se podrobněji podíváme na vlastnosti grafů mocninných funkcí a její inverze.

Druhá kapitola se zaměřuje na historické metody výpočtu odmocnin. Zde jsou podrobně popsány a vizualizovány čtyři hlavní postupy: *Babylónská metoda*, *Indická metoda, metoda podle Ptolemaia a ruční metoda výpočtu odmocniny*. Každá z těchto metod je ilustrována na konkrétních příkladech, aby byla demonstrována jejich praktická aplikace.

Třetí kapitola analyzuje, jak jsou odmocniny prezentovány v současných učebnicích pro základní a střední školy. V této části jsou porovnány dvě vybrané učebnice základních škol a dvě učebnice středních škol. Práce se zabývá rozdíly v přístupu k výkladu odmocnin a metodami jejich výpočtu v těchto učebnicích. Učebnice jsou v souladu s RVP, kde se vyučují mocniny a odmocniny, co se žáci mají naučit. Co se od nich očekává.

Cílem této práce je poskytnout komplexní pohled na odmocniny z historického i pedagogického hlediska a zdůraznit důležitost jejich správného porozumění v matematickém vzdělávání. Práce také přispívá k lepšímu pochopení historického vývoje matematických metod a jejich vlivu na současné vzdělávání.

1 Mocniny a odmocniny

Mocniny a odmocniny jsou základní pojmy matematiky, se kterými se setkáváme již na základní škole. V této kapitole si je podrobněji definujeme, shrneme jejich vlastnosti a ukážeme jejich využití v praxi.

Definice 1.1 (Mocnina)
Mocnina je zkrácený zápis pro opakované násobení stejného čísla. Zapisujeme ji jako a^n, kde a je základ a n je exponent. Např.:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Definice 1.2 (Odmocnina)
Odmocnina je číslo, které po umocnění dává původní číslo. Odmocninu čísla a značíme $\sqrt{a}$. Např.:

$$\sqrt{9} = 3, \text{ protože } 3^2 = 9$$

Ve škole se často setkáváme s druhými odmocninami jako s čistě matematickou operací, která nám umožňuje vypočítávat hodnoty nebo řešit rovnice. Tyto odmocniny mají praktické využití v různých oborech, například v geometrii, fyzice nebo ve finančním oboru. Pomáhají nám určovat délky, objemy a povrchy či vztahy mezi veličinami. Lidé využívají druhé odmocniny odjakživa, aby mohli řešit reálné problémy a přesněji provádět výpočty pomocí aproximací iracionálních čísel.

Věta 1.1. (Základní vlastnosti mocnin a odmocnin)
Mocniny a odmocniny můžeme podle daných pravidel různě upravovat a výpočet si tak zjednodušit. Existuje hned několik takových pravidel, se kterými se při úpravách setkáváme a díky nim můžeme zjednodušit složité výrazy s mocninami a odmocninami a usnadnit si dané výpočty

Mocniny se stejným základem
U mocnin, které mají stejný základ, můžeme provést úpravu podle pravidel na stejný základ se součtem daných exponentů. Neboli v obecném tvaru zapíšeme mocninu:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

a konkrétně si ukážeme na příkladu:

$$2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+2}$$

a) Mocnina mocniny

Mocnina mocniny se rovná mocnině se součinem exponentů, platí tedy:

$$(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$$

např.:

$$(2^3)^5 = 2^{(3 \cdot 5)}$$

b) Odmocniny

Pokud je pod odmocninou součin či podíl a čísla a, b jsou nezáporná, můžeme postupovat podle následujících pravidel:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, b \neq 0$$

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$$

tyto pravidla však neplatí pro sčítání či rozdíl:

$$\sqrt{a \pm b} \rightarrow \boldsymbol{nelze}$$

Důkaz:

1) Součin a podíl

$$ab = \left(\sqrt{ab}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}\right)^2 = ab,$$

(u podílu bychom postupovali analogicky)

2) Sčítání a rozdíl

$$a \pm b = \left(\sqrt{a \pm b}\right)^2 \neq \left(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \pm 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = a^2 \pm 2\sqrt{ab} + b^2$$

Na konkrétních příkladech můžeme vidět rozdíl též:

$$\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$$

→ *našli jsme protipříklad, toto pravidlo tedy neplatí*

Díky těmto pravidlům můžeme spočítat odmocniny, které se zdají na první pohled složitější, viz:

$$\sqrt{2500} = \sqrt{25}\sqrt{100} = 5 \cdot 10 = 50$$

(Krynický, 2010a).

Mocninné funkce patří mezi základní a důležité funkce v matematice. Jejich grafy vykazují charakteristické rysy, které se liší v závislosti na exponentu. Inverzní funkce k mocninné funkci existuje pouze pro některé případy. Mocninné funkce a jejich inverzní funkce hrají důležitou roli v matematice a nacházejí uplatnění v mnoha oblastech, jako je fyzika, ekonomie, biologie a další. Znalost vlastností grafů těchto funkcí je klíčová pro pochopení jejich chování a řešení úloh s nimi souvisejících. Vlastnosti a grafické charakteristiky mocninných funkcí a jejich inverzí hrají významnou roli v mnoha oblastech matematiky, včetně řešení rovnic a nerovnic.

Grafy mocninných funkcí:

Graf mocninné funkce $y = x^n$ (kde $n \neq 0$) má specifický tvar, který závisí na hodnotě exponentu n:

a) **pro $\boldsymbol{n = 1}$**, funkce je lineární: $f(x) = x$ a její graf je přímka procházející počátkem $(0,0)$ se sklonem 1 (viz obr.1)

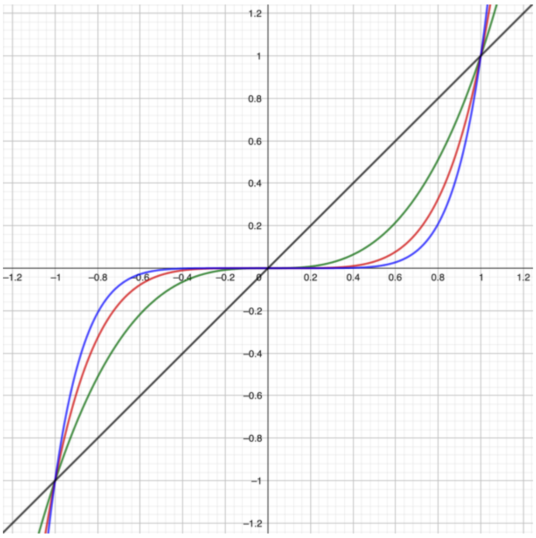
b) **pro $\boldsymbol{n > 1 \wedge n}$ je liché přirozené číslo**, graf funkce je symetrický vzhledem k počátku (viz obr.1)

c) **pro $\boldsymbol{n > 1 \wedge n}$ je sudé přirozené číslo**, grafem funkce je parabola, graf je symetrický vzhledem k ose y a všechny hodnoty y jsou kladné nebo nulové (viz obr.2)

d) **pro $\boldsymbol{n < 0 \wedge n}$ je liché celé číslo**, grafem funkce je hyperbola, například pro $n = -1$ je $f(x) = \frac{1}{x}$, což znamená, že graf se skládá ze dvou větví, jedna v kladné a druhá v záporné části osy y (viz obr.3)

e) **pro $\boldsymbol{n < 0 \wedge n}$ je sudé celé číslo**, grafem funkce je hyperbola, například pro $n = -2$ je $f(x) = \frac{1}{x^2}$, což znamená, že graf se skládá ze dvou větví, obě v kladné části osy y (viz obr.4)

Vlastnosti mocninných funkcí:



Obr.1: Liché mocninné funkce – kladné (zdroj: zpracováno autorkou)

$D(f) = R, H(f) = R$

lichá funkce

prostá funkce

rostoucí na celém $D(f)$

shora a zdola neomezená

nemá maximum ani minimum

supremum je ∞ a infimum je $-\infty$

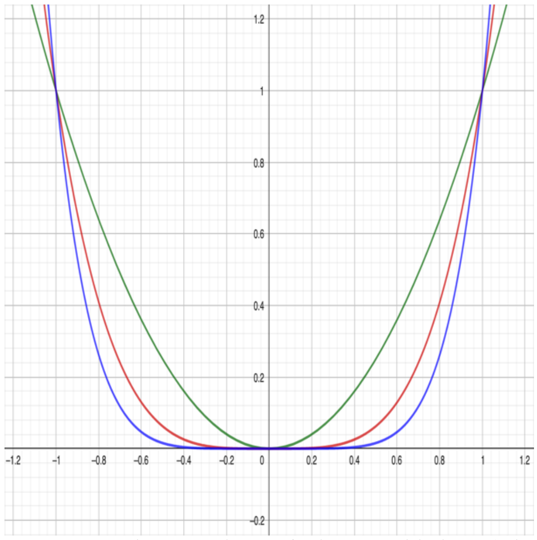
předpisy uvedených funkcí na *Obr.1*:

$f_1(x) = x$

$f_2(x) = x^3$

$f_3(x) = x^5$

$f_4(x) = x^7$



Obr.2: Sudé mocninné funkce – kladné (zdroj: zpracováno autorkou)

$D(f) = R, H(f) = R^+$

sudá fuknce

funkce není prostá

klesající na $(-\infty; 0\rangle$ a rostoucí na $\langle 0; \infty)$

shora neomezená a zdola omezená

nemá maximum, má ostré minimum v bodě $[0; 0]$

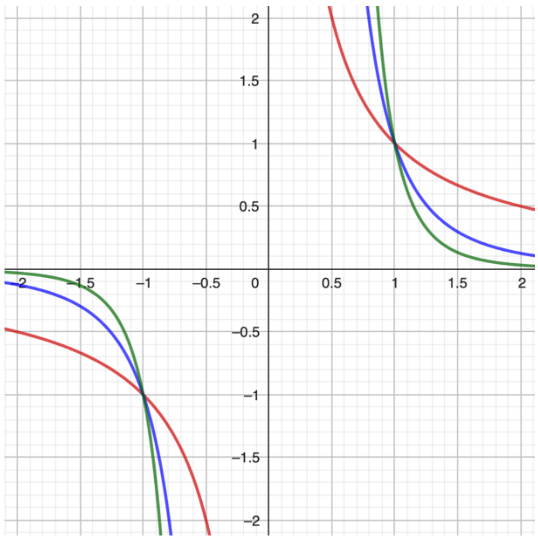
supremum je ∞ a infimum je 0

předpisy uvedených funkcí na *Obr.2*:

$f_1(x) = x^2$

$f_2(x) = x^4$

$f_3(x) = x^6$



Obr.3: Liché mocninné funkce – záporné (zdroj: zpracováno autorkou)

$D(f) = R\{0\}, H(f) = R\{0\}$

lichá funkce

prostá funkce

shora a zdola neomezená

klesající na $(-\infty; 0)$ a na $(0; \infty)$

nemá maximum ani minimum

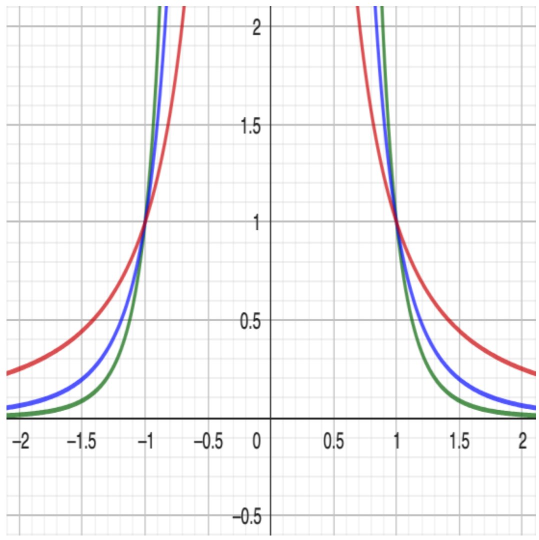
supremum je ∞ a infimum je -∞

předpisy uvedených funkcí na *Obr.3*:

$f_1(x) = \frac{1}{x}$

$f_2(x) = \frac{1}{x^3}$

$f_3(x) = \frac{1}{x^5}$



Obr.4: Sudé mocninné funkce – záporné (zdroj: zpracováno autorkou)

$D(f) = R\{0\}, H(f) = R\{0\}$

sudá funkce

funkce není prostá

shora neomezená a zdola omezená

rostoucí na $(-\infty; 0)$ a klesající na $(0; \infty)$

nemá maximum ani minimum

supremum je ∞ a infimum je 0

předpisy uvedených funkcí na *Obr.4*:

$f_1(x) = \frac{1}{x^2}$

$f_2(x) = \frac{1}{x^4}$

$f_3(x) = \frac{1}{x^6}$

Grafy inverzních a odmocninných funkcí:

Inverzní funkce existuje k funkcím prostým. Funkce je prostá, pokud je ryze monotónní na celém definičním oboru. Složením funkce a její inverze v libovolném pořadí dostaneme funkci identity: $f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x$.

Graf inverzní funkce f^{-1} je osově souměrný s grafem funkce f podle přímky $f(x) = x$.

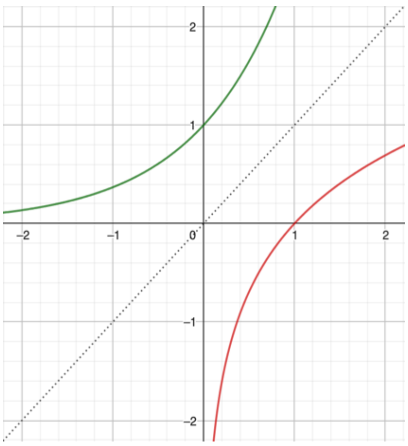
Graf odmocninné funkce má předpis $y = \sqrt[n]{x}$ a je inverzní funkcí k mocninné funkci, kde pro sudé n platí, že $x \in \langle 0; \infty)$.

Příklady funkcí a funkcí k nim inverzních:

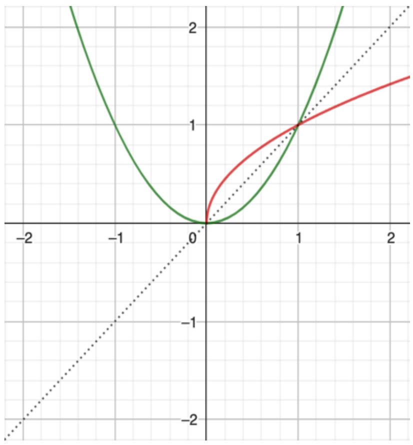
a) $f_1(x) = e^x$ a $f_1{}^{-1}(x) = \ln(x)$ (viz obr.5)

b) $f_2(x) = x^3$ a $f_2{}^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ (viz obr.6)

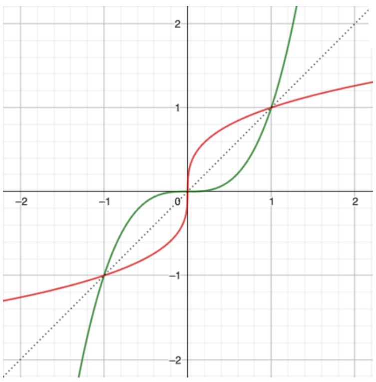
c) $f_3(x) = x^2$ a $f_3{}^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (viz obr.7)



a) Obr.5: Exponenciální a logaritmická funkce



c) Obr.7: Mocninná a odmocninná funkce – 2



b) Obr.6: Mocninná a odmocninná funkce – 3

2 Historické metody výpočtu odmocnin a jejich vizualizace

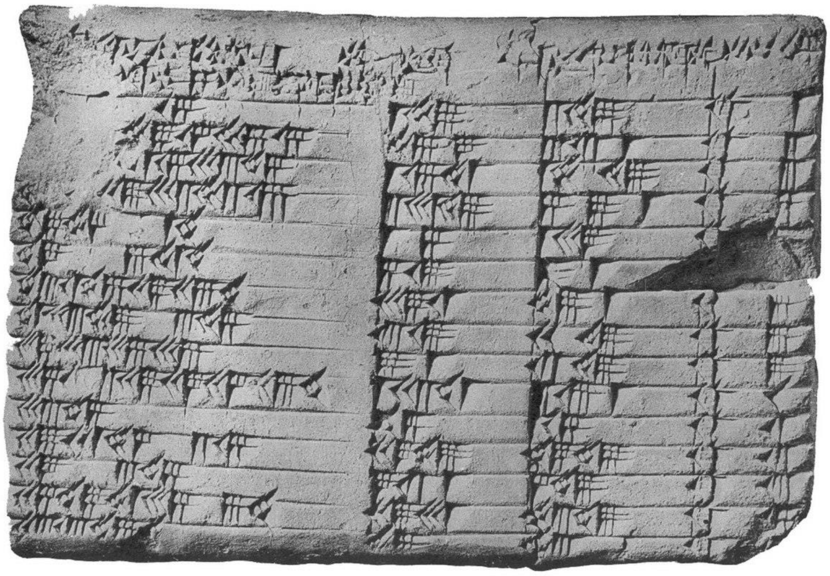
V této kapitole se zaměříme na historický vývoj odmocňování v následujících klíčových starověkých civilizacích. Prozkoumáme, jak Babylóňané, Indové a Řekové přistupovali k řešení problému výpočtu odmocnin, jaké metody používali a jak jejich práce ovlivnila další vývoj matematiky. Porozumění těmto historickým kořenům nám umožní lépe pochopit, jak se matematika vyvíjela a jaké byly její praktické aplikace v různých obdobích a kulturách.

2.1 Babylonská říše

Babylonie, známá také jako Mezopotámie, je často označována jako kolébka civilizace. Tato oblast, ležící mezi řekami Eufrat a Tigris, byla domovem jednoho z nejstarších a nejvýznamnějších civilizačních center světa. Babylonští obyvatelé byli nejen vynikající zemědělci a architekti, ale také vynikali ve vědě a matematice. Jejich matematické znalosti, které se dochovaly díky hliněným tabulkám popsaným klínovým písmem, ukazují pokročilou úroveň výpočtů a teoretických znalostí. Datování historických událostí a vládců v Babylónii není zcela přesné, přesto je zřejmé, že druhá polovina období po vládě krále Chammurabiho, která trvala zhruba od 1792 do 1750 př. n. l., představuje vrchol babylonské kultury a vědy. Chammurabi, známý svým zákoníkem, přispěl k rozvoji správy a organizace společnosti, což nepřímo podpořilo i rozvoj vědeckých disciplín včetně matematiky. Historie zabývání se odmocňováním sahá do dávné minulosti a zahrnuje příspěvky několika významných starověkých civilizací. V Babylónii byly vyvinuty metody výpočtu odmocnin, které měly praktické aplikace v geometrických výpočtech a stavebnictví.

Babylonští matematici, na rozdíl od nás, používali šedesátkovou soustavu. Důvodem pro tuto volbu bylo zřejmě to, že číslo 60 je beze zbytku dělitelné všemi čísly od dvou do šesti, a dále deseti, dvanácti, patnácti, dvaceti, třiceti a šedesáti. V šedesátkové soustavě lze násobky a převrácené hodnoty těchto dělitelů snadno a přesně zapsat. Navíc je číslo 60 pro běžné počítání dostatečně velké, což usnadňuje provádění aritmetických operací v mnoha ohledech. (Honzlová Exnerová, 2014)

Babylonští matematici často zůstávají anonymní, protože své práce zaznamenávali na hliněné tabulky bez uvedení autorství. Tyto tabulky, nalezené v oblasti Mezopotámie, obsahují různé matematické a astronomické výpočty. Jedna z nejvýznamnějších je tabulka *Plimpton 322* (viz obr.8), která obsahuje seznam pythagorejských trojic a dokládá pokročilé znalosti babylonských matematiků o pravoúhlých trojúhelnících.

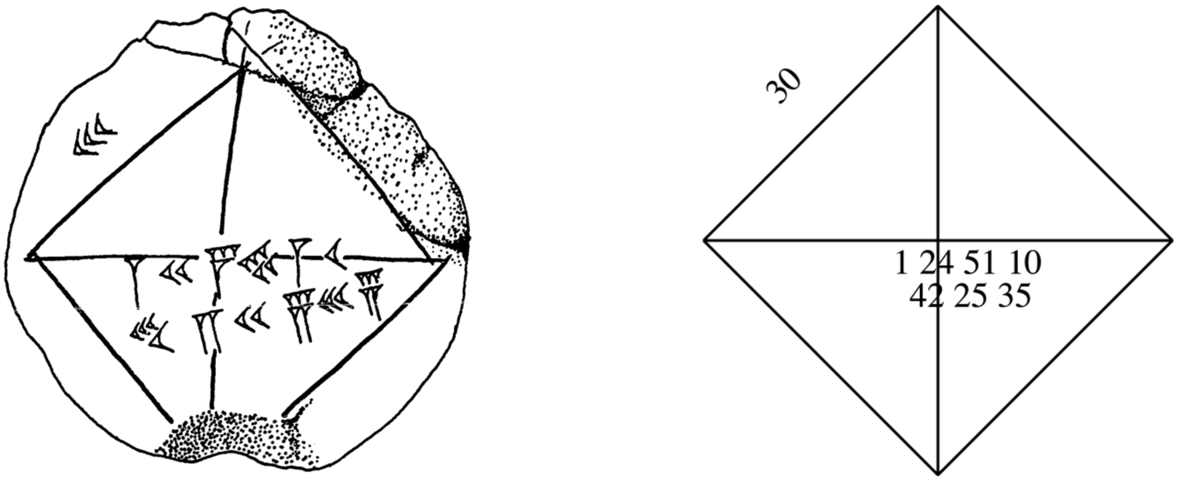


Obr.8: Tabulka Plimpton 322 (wikipedia)

Pravděpodobně prvním algoritmem použitým k aproximaci odmocnin byla *Babylónská metoda*. Ačkoliv se nám nedochovaly žádné přímé důkazy o tom, jak starověcí Babylóňané přesně počítali odmocniny, hliněné tabulky z této doby nám napovídají, že v matematice používali vzorce podobné těm, které dnes známe jako součtové (rozdílové) druhých mocnin:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad\qquad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Tyto znalosti jim pravděpodobně sloužily jako základ pro výpočet odmocnin, i když přesný postup s jistotou neznáme. Na hliněných tabulkách z období Babylóňanů můžeme najít přibližné hodnoty odmocnin. Dokázali vypočítávat odmocniny čísel s dostatečnou přesností pro běžné použití, a to i s relativně jednoduchými nástroji a technikami. Tyto hodnoty odpovídají maximálně třem opakováním metody, kterou používali k jejich výpočtu. Aproximace $\sqrt{2}$ byla používána již v době vlády Chammurabiho a je zaznamenána na hliněné tabulce *YBC 7289* (viz obr.9). Tato tabulka ukazuje vztah mezi délkou strany a délkou úhlopříčky čtverce, a sloužila jako důležitý nástroj pro výpočty v té době.



Obr.9: Tabulka YBC 7289 (Fowler, Robson, 1998, s. 367)

Pokud chceme vypočítat druhou odmocninu přirozeného čísla A, které není druhou mocninou nějakého přirozeného čísla, tak si číslo A nejdříve vyjádříme vztahem

$$A = a^2 + b,$$

kde a, b jsou přirozená čísla a pro číslo a platí

$$a^2 < A < (a+1)^2.$$

Potom můžeme odhadnout $\sqrt{A}$ takto:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} < \sqrt{a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2}} = a + \frac{b}{2a} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2a + \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 + b}{a} + a\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a} + a\right).$$

Číslo A však můžeme vyjádřit rovněž vztahem

$$A = a^2 - b,$$

kde a, b jsou přirozená čísla a pro číslo a platí

$$(\llbracket a - 1)\rrbracket^2 < A < a^2$$

Potom můžeme odhadnout $\sqrt{A}$ takto:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 - b} < \sqrt{a^2 - b + \frac{b^2}{4a^2}} = a - \frac{b}{2a} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2a - \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 - b}{a} + a\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a} + a\right).$$

Můžeme porovnat oba vzorce a vidíme, že jsme došli ke stejnému výsledku.

Při užití těchto vzorců získáme pouze hrubou aproximaci. Ukážeme si na příkladu druhé odmocniny čísel 2 a 3:

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+1} \doteq \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2} \qquad \text{(chyba asi 6 \%),}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{4-1} \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+2\right) = 1\frac{3}{4} \qquad \text{(chyba asi 1 \%).}$$

(Bečvář, Bečvářová, Vymazalová, 2003, s. 230-231)

2.2 Starověká Indie

Kolem roku 500 n. l. začíná období známé jako klasická éra indické matematiky. V této době nevznikaly samostatné matematické texty, protože matematika byla často součástí astronomických pojednání nazývaných *siddhānty*. Tato kapitola poskytuje přehled nejvýznamnějších autorů, od Āryabhaṭy I. po Nārājanu, a jejich děl. Biografické informace jsou často neúplné, protože pocházejí především ze zmínek v dílech jiných autorů. Většina těchto vědců se soustředila primárně na astronomii nebo astrologii, přičemž matematika byla zahrnuta pouze v některých částech jejich prací (Sýkorová, 2014)

Indičtí matematici se zabývali širokou škálou matematických oblastí, včetně algebry, geometrie a trigonometrie. Jejich myšlení se rozvíjelo v úzkém propojení s náboženstvím, astronomií a filosofií. Védántská literatura, soubor náboženských textů, obsahuje zmínky o matematických konceptech, jako jsou geometrické útvary a numerické systémy. Součástí je i text *Śatapatha Brāhmaṇa*, kde se nachází Pythagorova věta v geometrickém kontextu (Sýkorová, 2014). Matematici dosáhli významného pokroku v oblasti výpočtu odmocnin a vyvinuli metody pro výpočet dalších odmocnin libovolných čísel, včetně iracionálních.

Mezi nejvýznamnější indické matematiky patřili Āryabhaṭy I. (cca asi 476 až 550), Brahmagupta (cca 598 až 670), Bhāskara II (cca 1114 až 1185) a Nārājana (asi 1340 až 1400). Tito matematici zanechali rozsáhlá díla, která zahrnují učebnice, pojednání a komentáře k dřívějším textům. Jejich práce významně přispěly k rozvoji matematiky a inspirovaly učence v jiných částech světa.

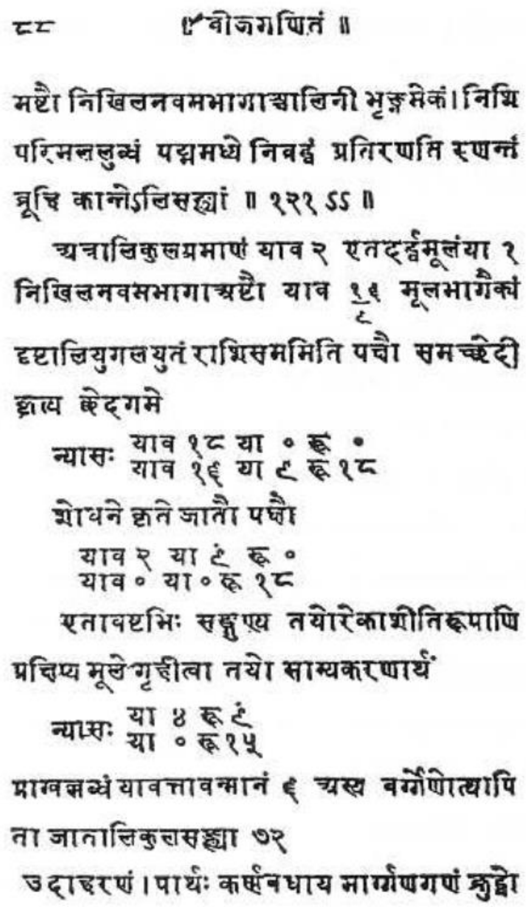
Významná díla a jejich přínosy

Āryabhaṭīya od Āryabhaṭy I. obsahuje významné koncepty astronomie a geometrie, pravidla pro aritmetické výpočty a metody řešení lineárních a kvadratických rovnic. Významná je metoda *kuṭṭaka* pro řešení neurčitých rovnic prvního stupně. Geometrická část se zaměřuje na výpočet obsahů geometrických útvarů, včetně přesného výpočtu délky kružnice a obsahu kruhu. Hodnota π je zde uvedena jako $\pi = \frac{62\,832}{20\,000} = 3{,}141\,6$, což je velmi přesný výsledek. Toto dílo se stalo významným zdrojem inspirace pro mnoho pozdějších autorů a ovlivnilo vývoj těchto vědních oborů v Indii i v dalších částech světa (Sýkorová, 2014).

Dalším dílem je *Brāhma-sphuṭasiddhānta* od Brahmagupty, které je známé pro své příspěvky v algebře, aritmetice a geometrii. Brahmagupta se v aritmetice proslavil zavedením nuly jako plnohodnotné číslice, formulací pravidel pro počítání s nulou a zápornými čísly, čímž otevřel cestu k novým oblastem matematického zkoumání. V kapitole algebry se zabývá řešením lineárních a kvadratických rovnic, včetně neurčitých rovnic, a představuje inovativní metodu pro řešení tzv. Pellovy rovnice (Sýkorová, 2014).

Rukopis Bakhshālī (Bakhšháli) je cenná sbírka matematických textů asi ze 7. až 8. století. Kapitoly, které se věnují výhradně matematice, jsou zaměřeny převážně na aritmetiku a algebru. Obsahuje jak teoretické základy, tak i praktické ukázky pro snazší pochopení. Rukopis zahrnuje základní aritmetické operace jako sčítání, odčítání, násobení a dělení. Nicméně postrádá popis metod, jak se tyto operace skutečně prováděly. Najdeme v něm pouze formální zápis výrazů a výsledky. Zaujme metoda přibližného výpočtu druhé odmocniny, která je předvedena v mnoha příkladech s pozoruhodnou přesností. Navzdory fragmentárním dochovaným částem rukopis, představuje cenný zdroj a dokládá pokročilou úroveň matematického myšlení středověké Indie (Sýkorová, 2014).

Díla Bhāskary II. demonstrují rozvoj indické matematiky v období po Brahmaguptovi a zdůrazňují jeho přínos pro algebru a numerické metody. *Līlāvatī* se stala populární učebnicí matematiky v Indii i v dalších částech světa. Je to komplexní učebnice, která se věnuje pravidlům aritmetiky a počítání se zlomky. Dále se zabývá základními algebraickými postupy, nabízí rozsáhlý soubor úloh o úrocích, obchodních problémech, variacích a kombinacích. Zaměřuje se na pravidla pro součet aritmetické a geometrické posloupnosti. V posledních kapitolách učebnice se Bhāskara věnuje planimetrii a obecně geometrii, s důrazem na výpočet objemů. Závěrečná kapitola pak obsahuje širokou škálu kombinatorických úloh. Dílo Bhāskary mělo značný vliv na vývoj matematiky nejen v Indii. Kniha *Bījaganita* (viz obr.10) popisuje základní algebraická pravidla a operace se zápornými čísly, nulou a odmocninami. Dále se věnuje metodám celočíselných řešení neurčitých lineárních a kvadratických rovnic. Následující kapitoly se zabývají úlohami lineárních a kvadratických rovnic s jednou nebo více neznámými, včetně geometrických úloh a důkazů Pythagorovy věty. Závěr knihy tvoří kapitoly s úlohami vedoucími na určité nebo neurčité lineární rovnice s více neznámými a s různými druhy kvadratických rovnic (Sýkorová, 2014).


८८ बीजगणितं ॥

मष्टौ निखिलनवमभागाश्चालिनी भृङ्गमेकं। निशि
परिमललुब्धं पद्ममध्ये निबद्धं प्रतिरणति रणन्तं
ब्रूहि कान्तेऽलिसङ्ख्यां ॥ १२१ ॥

अत्रालिकुलप्रमाणं याव २ एतदर्द्धमूलं या १
निखिलनवमभागा अष्टौ याव १६/९ मूलभागैक्यं
दृष्टालियुगलयुतं राशिसममिति पक्षौ समच्छेदी
कृत्य छेदगमे

न्यासः याव १८ या ० रू ०
याव १६ या ९ रू १८

शोधने कृते जातौ पक्षौ

याव २ या ९ रू ०
याव ० या ० रू १८

एतावष्टभिः संगुण्य तयोरेकाशीतिरूपाणि
प्रक्षिप्य मूले गृहीत्वा तयोः साम्यकरणार्थं

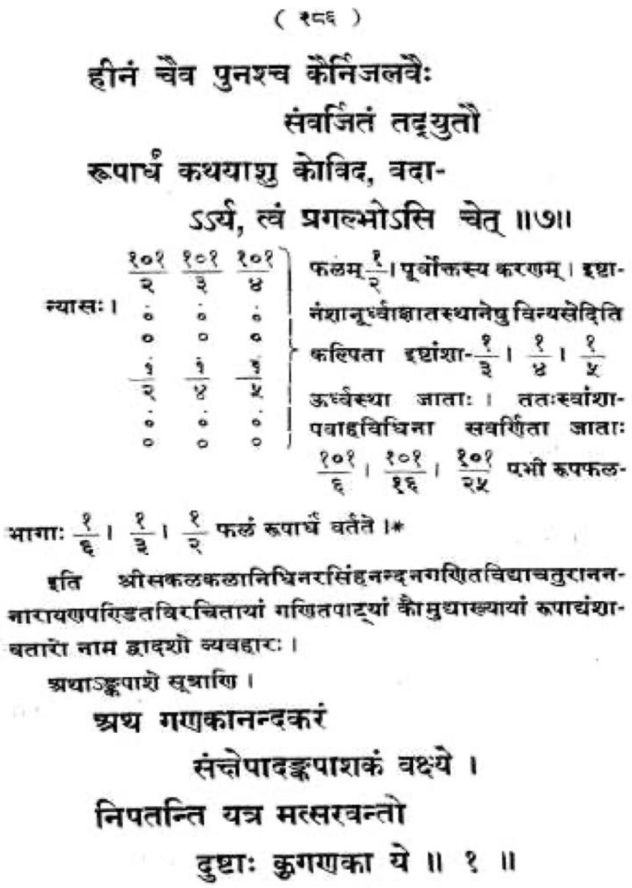
न्यासः या ४ रू ९
या ० रू १५

प्राग्वल्लब्धं यावत्तावन्मानं ६ अस्य वर्गेणोत्थापि
ता जातालिकुलसङ्ख्या ७२

उदाहरणं। पार्थः कर्णवधाय मार्गणगणं क्रुद्धो

Obr.10: kniha Bījaganita (Sýkorová, 2014)

Mezi významné středověké indické matematiky patří také Nārāyana, známý též pod jménem Nārāyana Pandit. Je autorem dvou významných děl: *Ganita-kaumudi* (viz obr.11), které se zabývá aritmetikou a geometrií, a *Bijaganitavatamsa*, které pojednává o algebře. Nārāyana byl výrazně ovlivněn dílem Bhāskary II., a pravděpodobně je i autorem komentáře *Karmapradipika* k Bhāskarově práci *Lilavati.* V díle *Ganita-kaumudi* se Nārāyana zabýval pravidly pro provádění aritmetických operací a věnoval se i přibližným metodám výpočtu druhé odmocniny, zejména v kontextu řešení tzv. Pellovy rovnice. Dalším jeho zájmem byly magické čtverce, které zkoumal v souvislosti s aritmetickými posloupnostmi.


(१८६)

हीनं चैव पुनश्च कैर्निजलवैः
संवर्जितं तद्युतौ
रूपार्धं कथयाशु कोविद, वदा-
ऽऽर्य, त्वं प्रगल्भोऽसि चेत् ॥७॥

न्यासः। फलम् $\frac{१}{२}$। पूर्वोक्तस्य करणम्। इष्टा-
नंशानूर्ध्वाधःस्थानेषु विन्यसेदिति
कल्पिता इष्टांशाः $\frac{१}{३}$ । $\frac{१}{४}$ । $\frac{१}{५}$
ऊर्ध्वस्था जाताः। ततः स्वांशा-
पवाहविधिना सवर्णिता जाताः
$\frac{१०१}{६}$ । $\frac{१०१}{१६}$ । $\frac{१०१}{२५}$ एभी रूपफल-
भागाः $\frac{१}{६}$ । $\frac{१}{३}$ । $\frac{१}{२}$ फलं रूपार्धं वर्तते ।*

इति श्रीसकलकलानिधिनरसिंहनन्दनगणितविद्याचतुरानन-
नारायणपण्डितविरचितायां गणितपाट्यां कौमुद्याख्यायां रूपांशा-
वतारो नाम द्वादशो व्यवहारः ।

अथाऽङ्कपाशे सूत्राणि ।

अथ गणकानन्दकरं
संक्षेपादङ्कपाशकं वक्ष्ये ।
निपतन्ति यत्र मत्सरवन्तो
दुष्टाः कुगणका ये ॥ १ ॥

Obr.11: kniha Ganita-kaumudi (Sýkorová, 2014)

2.3 Antické Řecko

Řecká matematika, představovaná jmény jako Pythagoras, Euklid a Archimédés, pak tyto znalosti dále rozvíjela a formalizovala, čímž položila základy pro moderní matematické postupy. Antické Řecko se pyšní bohatou historií plnou významných osobností, které zasvětily svůj život matematice a matematickému výzkumu. Řecké matematiky uchvacovala krása a hloubka matematických konceptů, ať už se jednalo o jejich praktické využití v běžném životě, nebo o abstraktní teoretické principy. Na rozdíl od svých předchůdců, Babylóňanů, kteří se zaměřovali na aritmetiku a počítání s celočíselnými zlomky, Řekové posunuli hranice matematiky dále. Využívali řeckou abecedu k zápisu čísel a zdokonalili desítkovou soustavu, čímž usnadnili složitější výpočty. Kromě toho se nebáli experimentovat i se šedesátkovou soustavou, která se později stala základem pro měření úhlů a času.

Jedním z revolučních objevů Řeků bylo zavedení zlomků v libovolném poměru. Zatímco Babylóňané znali pouze konečný počet zlomků, Řekové si uvědomili, že libovolné číslo lze vyjádřit jako poměr dvou celých čísel. To vedlo k mnohem přesnějším a efektivnějším výpočtům a otevřelo cestu k dalším matematickým konceptům.

Antičtí matematici se také zabývali problematikou odmocnin. V textech z té doby nacházíme různé metody pro výpočet a aproximaci druhých odmocnin, včetně dolních a horních odhadů. Na rozdíl od Babylóňanů, kteří se snažili o nalezení jediné přesné hodnoty, Řekové vnímali odmocninu jako interval mezi dvěma hodnotami. Před započetím výpočtu odmocniny si musel počtář uvědomit očekávaný řád výsledku. Například u čísel mezi 1 a 100 věděl, že odmocnina leží mezi 1 a 10. U čísel mezi 100 a 10 000 se hledalo rozmezí mezi 10 a 100 a podobně. (Honzlová Exnerová, 2014)

Jedním z nejvýznamnějších objevů starověkého Řecka v oblasti matematiky bylo pochopení iracionálních čísel. Pochopení čísel, která nelze vyjádřit jako poměr dvou celých čísel, znamenal zlom v historii matematiky. Tato dříve neznámá oblast čísel vedla k revoluční změně v matematickém myšlení a otevřela cestu k rozvoji dalších důležitých konceptů. První iracionální čísla údajně objevil Pythagoras, slavný řecký filozof a matematik, žijící v 6.

století př. n. l. Pythagorova práce dala základy pro mnoho budoucích matematických a vědeckých objevů a jeho odkaz je dodnes vnímán.

Eukleidés (asi 300 př. n. l.) byl starověký řecký matematik, který se proslavil svým dílem *Základy (Stoicheia)*. Toto dílo, složené z třinácti knih, systematicky a logicky strukturuje geometrické poznatky a je základem pro studium tohoto oboru. Eukleidés formuloval pět základních postulátů, které použil k dokazování stovek geometrických vět. Kromě geometrie přispěl i k teorii čísel, kde zavedl pojem prvočísla a dokázal jejich nekonečný počet. Jeho metody a přístupy ovlivnily matematiku na více než dva tisíce let a dodnes tvoří základ matematického vzdělání. Celým dílem prostupuje metoda eukleidovských konstrukcí, která umožňuje sestrojovat geometrické útvary pouze pomocí pravítka a kružítka. Principy této metody jsou již zformulovány v úvodních postulátech *Eukleidových Základů* (Bečvářová, 2002).

Archimédés ze Syrakus (asi 287–212 př.n.l.) byl řecký matematik, fyzik, filozof, vynálezce a astronom. Je považován za jednoho z nejvýznamnějších vědců starověku a jednoho z největších matematiků všech dob. Archimédes se zaměřil na geometrické problémy, například určení plochy a objemu různých těles. Ve svém díle *O měření kruhu* odhadl hodnotu čísla π mezi $3\frac{1}{7}$ a $3\frac{10}{71}$ (Heath, 1897). Jeho práce na spirálách vedla k definici Archimédovy spirály, a jeho metodika k výpočtu plochy segmentu paraboly přecházela principy integrálního počtu. Ve fyzice jsou jeho nejvýznamnějšími objevy teorie mechanické rovnováhy a princip páky ve statice, stejně jako Archimédův zákon v hydrostatice. Archimédés navrhl a sestrojil mnoho vynálezů, včetně šnekového čerpadla, které bylo použito na největší lodi starověku Syrakúsia. Napsal pozoruhodnou sbírku matematických pojednání, které lze v podstatě rozdělit do tří hlavních skupin: (1) čistá geometrie s měřením křivočarých rovin a pevných těles, (2) systematické zkoumání geometrické mechaniky a hydrostatiky a (3) různorodé práce na témata jako metody a aritmetika. (Calinger, West, Brown)

Hérón z Alexandrie, byl dalším významným antickým matematikem a inženýrem, který žil v prvním století n. l. Jeho práce zahrnovala různé oblasti matematiky, fyziky a mechaniky. Jedním z jeho významných příspěvků je metoda pro výpočet druhé odmocniny, která je často nazývána *Babylonskou metodou* nebo také *Heronova metoda*. Dále pak *Hérónův vzorec*, který využívá odmocniny pro výpočet obsahu trojúhelníku a popisuje vztah mezi tímto obsahem S, obvodem trojúhelníku s a délkami jeho stran a, b a c. Vzorec je založen na polovině obvodu trojúhelníku s, definované jako:

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

Obsah trojúhelníku S pak můžeme vypočítat podle vzorce: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Tento vzorec můžeme použít pro výpočet obsahu libovolného trojúhelníku, pokud známe délky všech jeho stran.

Klaudios Ptolemaios, žijící v 1. a 2. století n. l., nebyl jen slavným astronomem a geografem, ale také významným matematikem. Zformuloval několik důležitých vět, z nichž nejznámější je *Ptolemaiova věta*. Jeho práce v trigonometrii a geometrii položila základy pro další rozvoj těchto oblastí matematiky, stala se nepostradatelnou pro vědce na staletí dopředu a jeho dílo dodnes inspiruje a obohacuje tuto oblast matematiky.

Theón z Alexandrie (asi 335–405 n.l.) byl významný řecký matematik a komentátor antických matematických děl. Ilustroval vysvětlení Ptolemaiovy metody pro odmocňování v šedesátkové soustavě. Úkolem je přibližně najít druhou odmocninu z 4 500 (stupňů) a pomocí geometrického obrázku (viz obr. 8) je zřejmý podstatný Eukleidův základ celé metody (Heath, 1897).

2.4 Metody a jejich vizualizace

Vizualizace v matematice hraje klíčovou roli v pochopení abstraktních konceptů a vztahů. Pomocí grafů, diagramů, geometrických obrazců a animací můžeme znázorňovat matematické objekty, problémy a procesy srozumitelným a intuitivním způsobem. Volba vhodné techniky závisí na typu dat a cílové skupině. Vizualizace přináší mnoho benefitů, jako je zlepšení porozumění nebo usnadnění řešení problémů. S rostoucí dostupností technologií se otevírají nové možnosti pro tvorbu interaktivních a dynamických vizualizací, které posouvají hranice matematického poznání a vzdělávání.

2.4.1 Babylónská metoda

Babylónská metoda je také známa jako *Heronova metoda*. Hérón Alexandrijský byl řecký matematik a inženýr, který žil v prvním století našeho letopočtu. Heronův nejslavnější text, *Metrika*, který se dochoval až do dnešní doby, je jeho pojednání o měření ploch a objemů. *Babylonská metoda* je iterativní algoritmus pro nalezení aproximace druhé odmocniny. Tato metoda byla známa již starověkým Babylóňanům, kteří ji používali k řešení různých matematických problémů. Hérón z Alexandrie popsal podobný algoritmus ve svých dílech, což vedlo k tomu, že je někdy tato metoda připisována právě jemu.

Matematici z Mezopotámie používali lepší aproximaci, a to pomocí metody průměru.
Označíme si první odhad $\sqrt{A}$ jako

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a} + a\right).$$

Víme, že je $a_1 > \sqrt{A}$. Toho využijeme při hledání druhého, přesnějšího, odhadu a_2 ve tvaru

$$a_2 = a_1 - x.$$

Hledáme takové malé kladné číslo x, pro které platí

$$a_2{}^2 = (a_1 - x)^2.$$

Jestliže zanedbáme x^2, dostaneme

$$(a_1 - x)^2 \doteq a_1{}^2 - 2a_1x = A.$$

Po vyjádření x z tohoto vztahu dostaneme

$$x = \frac{a_1{}^2 - A}{2a_1}$$

a po dosazení do prvotního vyjádření a_2 získáme

$$a_2 = a_1 - \frac{a_1{}^2 - A}{2a_1} = \frac{a_1{}^2 + A}{2a_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a_1} + a_1\right).$$

Pokud víme, že je $a_1 > \sqrt{A}$, pak platí: $a_1 > a_2 > \sqrt{A}$.

Abychom dostali ještě přesnější aproximaci, mohli bychom použít odhad $a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a_2} + a_2\right)$.

Stejně jako výše bychom dokázali, že platí: $a_1 > a_2 > a_3 > \sqrt{A}$.

Takto bychom mohli používat aproximaci libovolně dlouho a tím získat přesnější hodnotu, a to pomocí vztahu:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a_{n-1}} + a_{n-1}\right)$$

(Bečvář, Bečvářová, Vymazalová, 2003, s. 230-231)

Neboli, zkrácený princip metody:

Babylónská metoda je iterativní algoritmus pro výpočet druhé odmocniny libovolného kladného čísla. Vychází z následujícího principu:

1. Zvolte počáteční aproximaci a_0.
2. Iterativně zlepšujte aproximaci pomocí vztahu $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a_{n-1}} + a_{n-1}\right)$, kde A je číslo, jehož odmocninu chceme najít, a a_n je n-tá aproximace.

Postup:

1. **Počáteční hodnota:** Zvolte počáteční hodnotu a, která je prvním odhadem odmocniny A. Obvykle se volí $a_0 = \frac{A}{2}$ nebo jiný vhodný odhad.
2. **Iterace:** Použijte výše uvedený vztah pro iterativní zlepšování aproximace. Proces opakujte, dokud se rozdíl mezi po sobě jdoucími aproximacemi nestane dostatečně malý.
3. **Konečný výsledek:** Když se rozdíl mezi a_n a a_{n+1} stane zanedbatelným, a_{n+1} je přibližná hodnota druhé odmocniny A.

Příklad 1.1 Pomocí odvozeného vzorce $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a_{n-1}} + a_{n-1}\right)$ spočítej hodnotu $\sqrt{2}$.

<u>Řešení:</u>

$a_0 = 1$

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1} + 1\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) = \frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{24}{17} + \frac{17}{12}\right) = \frac{577}{408} = 1{,}4142156\cdots$$

2.4.2 Indická metoda

Indická metoda výpočtu druhé odmocniny je matematický postup, který má své kořeny ve starověké Indii. Je elegantní, efektivní a svědčí o pokročilé úrovni matematiky. I když se na první pohled může zdát složitá, její stručné shrnutí ukazuje hloubku matematického myšlení v té době, především v díle *Āryabhaṭīya*, napsané Āryabhaṭou v 5. století n. l.

V této metodě se druhá odmocnina nazývá *mūla* nebo *pada*, což znamená spodek, základ nebo příčina. Indové termínem *varga-mu ̄la* (druhá odmocnina) označovali *příčina* či *původ* druhé mocniny nebo geometricky stranu uvažovaného čtverce.

Postup výpočtu zahrnuje rozdělení číslic daného čísla na liché (*varga*) a sudé (*avarga*) pozice, přičemž se rozděluje zprava doleva, a jednotky jsou vždy na liché pozici. Výpočet formuloval Ā ryabhaṭa následovně: *Vždy je třeba vydělit číslo avarga (sudá pozice) dvojnásobkem (druhé) odmocniny předchozího čísla varga (lichá pozice). Po odečtení druhé mocniny (podílu) od varga (lichá pozice), bude tento podíl zapsaný na jiném místě dávat kořen* (Clark, 1930).

O druhé odmocnině se též zmiňovali i další Indičtí matematici jako Mahāvīra, Śrīdhara a Śrīpati. Formulace Bhāskary II. je následující: *Odečteme od poslední liché číslice největší druhou mocninu, zdvojnásobíme jeho odmocninu; a tímto dvojnásobkem vydělíme následující sudou číslici, a odečteme druhou odmocninu podílu od další liché číslice, zaznamenáme dvojnásobek podílu na řádek [spolu s předchozím dvojnásobkem]. Vydělíme [číslem zaznamenaným na řádku] další sudou číslici, a odečteme druhou odmocninu podílu od následující liché číslice, a poznamenáme si dvojnásobek podílu na řádek. Opakujeme tento postup [dokud nebudou všechny číslice vyčerpané.] Polovina [čísla zaznamenaného na řádku] je výslednou odmocninou.*

Postup pro výpočet si ukážeme na následujícím příkladu (viz tab.1)

$$\sqrt{88\,209} = 297$$

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>|</td><td>–</td><td>|</td><td>–</td><td>|</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td>8</td><td>2</td><td>0</td><td>9</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>−</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>4</td><td>8</td><td>2</td><td>0</td><td>9</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>−</td><td>36</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>0</td><td>9</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>−</td><td>8</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>8</td><td></td><td></td><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>9</td></tr>
<tr><td>5</td><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>9</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tab.1: Vizualizace indické metody

Zapíšeme číslo, označíme sudá (−) a lichá (|) místa:

1. *Od posledního lichého místa (8) odečteme čtverec (4),* zůstane 48 209. *Zdvojnásobíme odmocninu (2) a vydělíme touto číslicí (4) následující sudou číslici 48,* podíl je devět [vyšší nelze vzít, protože odmocnina předchozí číslice by byla větší než 2], zbytek je 12 209
2. *Od lichého místa (se zbytkem) 122, odečteme čtverec podílu 9 (81),* zůstane 4 109. *Dvojnásobek podílu (18) je třeba zaznamenat na řádek spolu s předchozím dvojnásobným číslem (4*), tedy 58.
3. *Tímto (58) vydělíme sudé místo 410,* podíl je 7 a zbytek 4; *k této liché číslici (7) odpovídá čtverec podílu 49 bez zbytku. Dvojnásobek podílu (14) je třeba zaznamenat na řádek,* což dává 594

Polovina z toho je hledaná odmocnina: $594 : 2 = 297$ (Colebrooke, 1817).

V některých situacích se algoritmus může ukázat jako nespolehlivý. To se stává, když je zbytek po dělení příliš malý a výsledek po odečtení může být záporný (viz tab.2). V takových případech je nutné výpočet opakovat s menším podílem a větším zbytkem (viz tab.3). Tento problém se objevuje například při výpočtu

$$\sqrt{61\,504} = 248.$$

<table>
<tr><td></td><td>|</td><td>–</td><td>|</td><td>–</td><td>|</td></tr>
<tr><td></td><td>6</td><td>1</td><td>5</td><td>0</td><td>4</td></tr>
<tr><td>−</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>−</td><td>2</td><td>5</td></tr>
</table>

Tab.2: Selhání algoritmu

Zapíšeme číslo, označíme sudá (-) a lichá (|) místa, pak *odečti od posledního lichého místa největší čtverec* $[6-22\ =2]$, *zapiš dvojnásobek jeho kořene na linku* $[2\cdot 2=4]$, *vyděl další sudé místo tímto* $[21 : 4 = 5\ (\text{zb.} 5)]$; číslo 21 se nahradilo zbytkem dělení 1, připojila se číslice na další liché místo; *odečti čtverec podílu od dalšího lichého místa*

Rozdíl je záporný, podíl 5 byl příliš velký, proto je potřeba se vrátit k dělení a uvažovat $21 : 4 = 4\ (\text{zb.} 5)$

	$\vert$	–	$\vert$	–	$\vert$
	6	1	5	0	4
–	4				
	2				
4					
	2	1			
		5			
		5	5		
	–	1	6		
		3	9		
48					
		3	9	0	
				6	
				6	4
			–	6	4
					0
496					

Tab.3: Selhání algoritmu

Zapíšeme číslo, označíme sudá (-) a lichá (|) místa, pak *odečti od posledního lichého místa největší čtverec* $[6-2^2=2]$, *zapiš dvojnásobek jeho kořene na linku* $[2\cdot 2=4]$, *vyděl další sudé místo tímto* $[21{:}4=4\ (zb.5)]$ *;* číslo 21 se nahradilo zbytkem dělení 5, připojila se číslice na další liché místo; *odečti čtverec podílu od dalšího lichého místa* $[55-4^2=39]$ *, zapiš dvojnásobek podílu na linku* $[2\cdot 4=8]$ *;* dokončeno první kolo operací; *vyděl další sudé místo tímto* $[390 : 48 = 8\ (\text{zb.} 6)]$; číslo 390 se nahradilo zbytkem dělení 6, připojila se číslice na další liché místo; *odečti čtverec podílu od dalšího lichého místa* $[64-8^2=0]$, *zapiš dvojnásobek podílu na linku* $[2\cdot 8=16]$

Hledaná odmocnina byla zjištěna jako polovina čísla, které se nacházelo na poslední lince ve výpočtu:

$$496:2 = 248$$

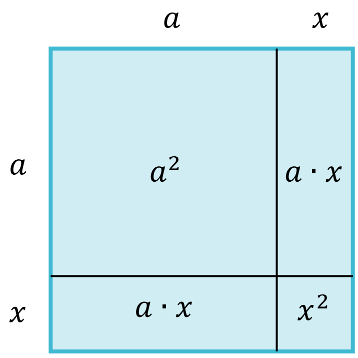
(Sýkorová, 2014, s. 135).

2.4.3 Odmocňování podle Ptolemaia

Hlavní myšlenka je čistě geometrická a využívá známého vztahu

$$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2.$$

Tento vztah uvádí, že obsah čtverce s délkou strany $a + x$ se rovná součtu obsahů čtverce se stranou a, čtverce se stranou x a dvou obdélníků, každý s rozměry stran a a x. (viz obr.12)



Obr.12: Čtverec o straně $a + x$

Pokud je A číslo, jehož druhou odmocninu potřebujeme zjistit, je nezbytné použít vztah $(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$ a nalézt x tak, aby $2ax + x^2$ bylo o něco menší než zbytek $A - a^2$. Označíme a jako první člen nebo hodnotu odmocniny a x jako další člen nebo hodnotu, kterou je třeba najít. Pokusem by se tedy snadno našla nejvyšší možná hodnota x splňující podmínku. Pokud by tato hodnota byla b, muselo by se od prvního zbytku $A - a^2$ odečíst další množství $2ab + b^2$ a od druhého zbytku by tedy musel být odvozen třetí člen nebo označení druhé odmocniny, a tak dále.

Ptolemaia nejprve zjistil celočíselnou část odmocniny z $\sqrt{4\,500}$ jako 67. Nyní se $67^2 = 4\,489$, takže zbytek je 11. Předpokládejme, že zbytek odmocniny je vyjádřen pomocí obvyklých šedesátkových zlomků, a že můžeme proto dosadit

$$\sqrt{4\,500} = \sqrt{67^2 + 11} = 67 + \frac{x}{60} + \frac{y}{60^2},$$

kde x, y je třeba ještě nalézt.

Takže x musí být takové, že $\frac{2 \cdot 67 \cdot x}{60}$ je o něco menší než 11, nebo x musí být o něco menší než $\frac{11 \cdot 60}{2 \cdot 67}$ nebo $\frac{330}{67}$, což je zároveň větší než 4. Po zkoušce se ukáže, že 4 splňuje podmínky problému, totiž že $\left(67 + \frac{4}{60}\right)^2$ musí být menší než 4 500, takže zůstane zbytek, pomocí kterého lze nalézt y.

K určení hodnoty y využijeme rozdíl

$$\sqrt{4\,500} - \left(67 + \frac{4}{60}\right)^2 = 4\,500 - 4\,489 - \frac{2 \cdot 67 \cdot 4}{60} - \left(\frac{4}{60}\right)^2 = 11 - \frac{2 \cdot 67 \cdot 4}{60} - \left(\frac{4}{60}\right)^2$$
$$= \frac{11 \cdot 60^2 - 2 \cdot 67 \cdot 4 \cdot 60 - 16}{60^2} = \frac{7\,424}{60^2}.$$

Předpokládáme, že $2\left(67 + \frac{4}{60^2}\right) \cdot \frac{y}{60^2}$ se přibližuje hodnotě zlomku $\frac{7\,424}{60^2}$, nebo že $8048y$ je přibližně rovno $7\,424 \cdot 60$.

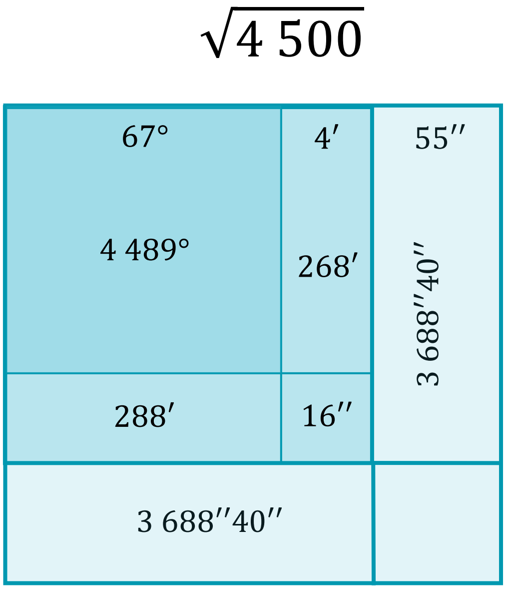
Proto je y přibližně rovno 55. Po dosazení y do původního vztahu zjistíme, že

$$\sqrt{4\,500} = 67 + \frac{4}{60} + \frac{55}{60^2},$$

což ve stupních a minutách odpovídá

$$67°4'55''.$$

Abychom ukázali sílu této metody odmocňování pomocí šedesátkových zlomků, stačí zmínit, že Ptolemaios uvádí $\frac{103}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{23}{60^3}$ jako aproximaci k $\sqrt{3}$. Tento zlomek odpovídá hodnotě 1,732 050 9 v běžné desítkové soustavě, a je tedy správný na 6 desetinných míst (Heath, 1897).



Obr.13: Výpočet v šedesátkové soustavě.

2.4.4 Ruční metoda výpočtu odmocniny

V této kapitole se ponoříme do světa čísel a naučíme se starou metodu pro výpočet druhé odmocniny z libovolného čísla. Druhou odmocninu zvládneme spočítat jen s tužkou a papírem. Tato metoda se dříve běžně učila na základních školách po boku sčítání, násobení a dělení. I když dnes už ji běžně nepoužíváme, má stále své kouzlo a může nám posloužit pro rychlý a snadný odhad odmocniny. Představuje systematický způsob, jak získat každou cifru výsledku odmocniny. Dnes se ruční výpočet odmocniny vyučuje spíše okrajově nebo je zmíněn jako historická zajímavost, jak si lidé dokázali poradit s komplexními výpočty ještě před nástupem kalkulaček a počítačů. Níže si ukážeme, jak metoda funguje krok za krokem obecně, a poté si spočítáme odmocninu s přesností na dvě desetinná místa. Celá metoda vychází ze známého vztahu: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Obecný postup:

1. Rozdělíme číslo A na dvojice cifer od desetinné čárky vlevo i vpravo.
2. Najdeme největší celé číslo a, jehož druhá mocnina je menší nebo rovna první dvojici vlevo.
3. Zapíšeme mezivýsledek a provedeme první odečtení (od první cifry / dvojice cifer odečteme a^2).
4. Sepíšeme zbytek a opíšeme další dvojici odmocňovaného čísla, čímž vznikne z. Opsáním další dvojice se posouváme o jedno desetinné místo, a tedy a se stává 10krát větším. Zapíšeme si dvojnásobek našeho mezivýsledku $2a$ (tedy 20).
5. Další cifru odmocniny najdeme jako maximální x splňující $(a+x)^2 \leq A$, (což upravíme na tvar $2ax + x^2 \leq z$) a nazveme ji b.
6. Výsledné b zapíšeme do mezivýsledku, čímž dostaneme odmocninu ve tvaru ab. (zde ab není součin, ale dvojciferné číslo s první cifrou a a druhou cifrou b). Veličinu $2ax + x^2$ odečteme od aktuálního zbytku z. Vyjde nový zbytek, ke kterému sepíšeme další dvojici. Tím se posouváme o další desetinné místo, čímž se ab stává 10krát větší.
7. Opět si zapíšeme dvojnásobek stávajícího mezivýsledku $2ab$ a hledáme největší možné y splňující rovnici $2aby + y^2 \leq$ novému zbytku.
8. Takto pokračujeme, dokud nevypočítáme odmocninu na požadovaný počet desetinných míst.

Poznámka ke vzorci:

Podstata odmocniny: Odmocnina A se postupně odhaduje jako číslo $(a+b)$, kde a je již vypočítaná část a b je část, kterou hledáme.

Druhá mocnina čísla: Druhá mocnina $(a+b)$ se rozkládá podle vzorce $(a+b)^2 = a^2 + +2ab + b^2$. Předpokládáme, že a je dosavadní výsledek, a b je malý přírůstek, který hledáme.

Zjednodušení výpočtu: Hodnotu b hledáme tak, aby zbytek po odečtení a^2 byl co nejblíže nule. To znamená, že chceme, aby $2a \cdot b + b^2$ bylo menší nebo rovno zbytku. Protože b^2 je malé, zanedbáme ho v odhadu.

Metodu si ukážeme přímo na konkrétním příkladu $\sqrt{152{,}41}$ (viz obr.14). V příkladu bude postupovat bez desetinné čárky s tím, že ji doplníme po vypočítání odmocniny na požadovaný počet desetinných míst.

1. Číslo pod odmocninou rozdělíme na dvojice cifer:

$$1\ \ 52,\ \ 41$$

2. Najdeme největší celé číslo a, jehož druhá mocnina je menší nebo rovna 1. Víme, že $1^2 = 1 \leq 1$, a tak si můžeme zapsat, že $a = 1$.
3. Zapíšeme spočítané $a = 1$ do mezivýsledku a odečteme a^2 od první cifry.

$$\begin{array}{l} \ \ 1\ \ 52,\ 41\ \sqrt{\ } = 1 \\ -1 \\ \hline \ \ 0 \end{array}$$

4. Opíšeme další dvojici a zapíšeme si dvojnásobek našeho mezivýsledku (který se v důsledku posunutí desetinného místa stal 10, což znamená $2 \cdot 10 = 20$)

$$\begin{array}{l} \ \ 1\ \ 52,\ 41\ \sqrt{\ } = 1 \\ -1 \\ \hline \ \ 0\ \ 52 \end{array}$$

5. Druhou cifru odmocniny najdeme jako maximální x splňující $(10 + x)^2 \leq\ 152$, (což upravíme na tvar $20x + x^2\ \leq\ 52$) a tedy $x = 2$.

$$\begin{array}{l} \ \ 1\ \ 52,\ 41\ \sqrt{\ } = 12 \\ -1 \\ \hline \ \ 0\ \ 52 \qquad\qquad 22 \cdot 2 \end{array}$$

6. Napíšeme 2 do mezivýsledku a $20 \cdot 2 + 2^2$ odečteme od předešlého zbytku, tj. od 52. Tím získáme nový zbytek, 8. K němu sepíšeme další dvojici odmocňovaného čísla, tedy 41. Dostaneme tak 841. Sepsáním další dvojice se posouváme o další desetinné místo, čímž se 12 stává 10krát větší.

$$\begin{array}{ll}
1\ 52,\ 41\ \sqrt{\ } = 12 & \\
-1 & \\
\hline
0\ 52 & 22 \cdot 2 \\
-44 & \\
\hline
841 &
\end{array}$$

7. Opět si zapíšeme dvojnásobek stávajícího mezivýsledku $2ab = 240$ a hledáme největší možné y splňující rovnici $240y + y^2 \leq 841$, tj. 3, které si označíme jako c.
8. Napíšeme 3 do mezivýsledku a $240 \cdot 3 + 3^2$ odečteme od předešlého zbytku, tj. od 841. Tím získáme nový zbytek, 112. K němu sepíšeme další dvojici odmocňovaného čísla, tedy 00. Dostaneme tak 11 200. Sepsáním další dvojice se posouváme o další desetinné místo, čímž se 123 stává 10krát větší.

$$\begin{array}{ll}
1\ 52,\ 41\ \sqrt{\ } = 12,3 & \\
-1 & \\
\hline
0\ 52 & 22 \cdot 2 \\
-44 & \\
\hline
841 & 243 \cdot 3 \\
-729 & \\
\hline
11200 &
\end{array}$$

9. Opět si zapíšeme dvojnásobek stávajícího mezivýsledku $2abc = 2460$ a hledáme největší možné u splňující rovnici $2460u + u^2 \leq 11\,200$, tj.4, které si označíme jako d.

$$\begin{array}{ll}
1\ 52,\ 41\ \sqrt{\ } = 12,34 & \\
-1 & \\
\hline
0\ 52 & 22 \cdot 2 \\
-44 & \\
\hline
841 & 243 \cdot 3 \\
-729 & \\
\hline
11200 & 2464 \cdot 4 \\
-9856 & \\
\hline
1344 &
\end{array}$$

10. Dosáhli jsme požadovaného počtu desetinných míst, a výsledek je 12,34.

Odmocninu jsme vypočítali s přesností na dvě desetinná místa. Nerovnosti jsou čím dál složitější, což je nevhodné pro výpočet většího počtu cifer. Dokázali jsme písemně určit odmocninu s touto přesností. Metoda je náročnější na přesnost a čas při ručním výpočtu, ale je užitečný pro ilustraci principu odmocňování. Pro větší přesnost je třeba pokračovat ve stejném vzoru.

$$
\begin{array}{ll}
\sqrt{1\ 52,41} = 12,34 & \\
-1 & \\
\hline
0\ 52 & 22 \cdot 2 \\
-\ 44 & \\
\hline
8\ 41 & 243 \cdot 3 \\
-\ 7\ 29 & \\
\hline
11200 & 2464 \cdot 4 \\
-\ 9856 & \\
\hline
1344 &
\end{array}
$$

Obr.14: Ruční výpočet odmocniny

Metoda stále nachází uplatnění ve školní výuce jako ilustrativní příklad toho, jak byli lidé schopni řešit složité výpočetní problémy před érou moderních technologií, jako jsou kalkulačky a počítače. Slouží jako důležitá ukázka historického vývoje matematických postupů a dovedností.

3 Odmocniny ve výuce

Odmocniny patří k základním matematickým konceptům, se kterými se žáci setkávají již na základní škole. Jejich pochopení je klíčové pro zvládnutí široké škály matematických témat, od algebry a geometrie až po statistiku. Učebnice matematiky hrají důležitou roli při výuce odmocnin a jejich aplikace. V této kapitole se zaměříme na obsah a didaktický přístup k výuce odmocnin na základních a středních školách v České republice.

3.1 Základní školy

V učebnicích matematiky pro základní školy se odmocniny obvykle zavádějí v 7. ročníku. Základní koncept odmocniny je prezentován jako operace opačná neboli inverzní k umocňování. Žáci se seznamují s druhou odmocninou a s jejími vlastnostmi, jako je Pythagorova věta a vyčíslování odmocnin celých čísel. Podle rámcového vzdělávacího programu (RVP) žák umí pracovat v oboru celých a racionálních čísel, kde používá ve výpočtech druhou mocninu i odmocninu. Učebnice obvykle obsahují pestrou škálu příkladů a úloh pro procvičení pochopení odmocnin a jejich použití v praxi.

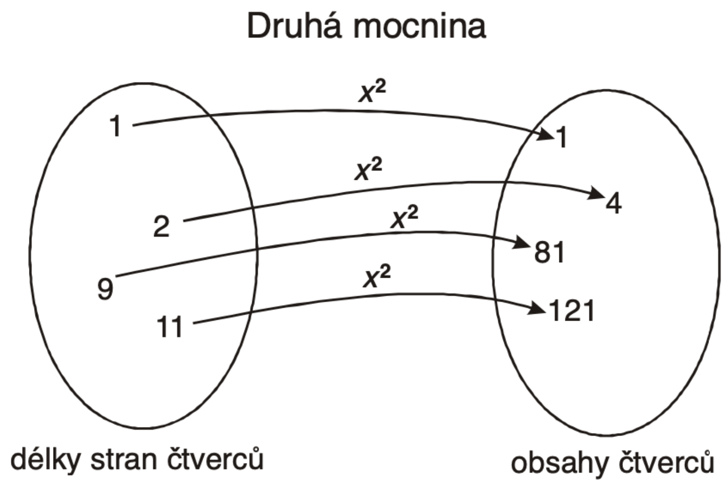
Učebnice matematiky od Oldřicha Odvárka, často používané na základních školách v České republice, vysvětlují odmocniny pomocí praktických příkladů, tabulek a diagramů. Texty jsou formulovány jednoduše a přehledně, aby byly srozumitelné pro žáky druhého stupně základní školy. Odvárko v těchto učebnicích klade důraz na spojení matematiky s běžným životem a ukazuje využití výpočtů odmocnin v praxi. Typicky se začíná s popisem základních principů druhé odmocniny a pokračuje příklady zaměřenými na reálné situace, jako jsou výpočty délek, obsahů a dalších geometrických veličin. Součástí výuky je také postupné budování numerické intuice, například řešením úloh na odhady odmocnin a praktickým procvičováním algoritmického výpočtu odmocnin. Tyto přístupy pomáhají žákům nejen pochopit danou látku, ale také ji smysluplně aplikovat.

Učebnice matematiky od Vividbooks jsou navrženy tak, aby reflektovaly moderní trendy ve vzdělávání. Klíčovým cílem je rozvoj logického a kritického myšlení žáků, schopnosti řešit problémy a upevnění základních dovedností prostřednictvím důrazu na systematické opakování. Žáci si budují pevné základy, na kterých postupně staví další úrovně. Hlavní složkou těchto učebnic je pracovní sešit, ve kterém žáci přímo řeší zadané úkoly a praktické příklady. Tento sešit plní nejen roli nástroje k procvičování, ale také funguje jako osnova výuky, kolem níž je vystavěna celá koncepce předmětu. Učební texty, které jsou součástí tohoto systému, shrnují klíčové informace k probírané látce, přičemž žáci si tyto poznatky často osvojují postupným řešením úloh obsažených právě v pracovním sešitě. Pro ověření pochopení a upevnění získaných vědomostí nabízí Vividbooks připravené testy. Ty lze buď vytisknout, nebo zadat k vyplnění v interaktivní podobě, což přispívá k větší flexibilitě v procesu hodnocení a k individualizaci přístupu k žákům. Tento komplexní a strukturovaný přístup umožňuje žákům nejen zvládnout potřebnou látku, ale také si ji lépe osvojit a propojit s reálným využitím.

Většina učitelů na základních školách si vytváří vlastní učební materiály, které následně poskytují žákům během výuky. Tento krok vzniká z potřeby přizpůsobit výuku konkrétním potřebám třídy a žáků, protože jednotné a univerzální učebnice často neodpovídají všem výukovým podmínkám. Učitelé tedy čerpají inspiraci z různých zdrojů, jako jsou internetové portály, odborné vzdělávací publikace, ale také jejich vlastní zkušenosti získané dlouholetou praxí. Mnozí používají osvědčené metody a materiály, které si osvojili v průběhu let, často i v případě matematiky a výuky konceptů jako je druhá odmocnina.

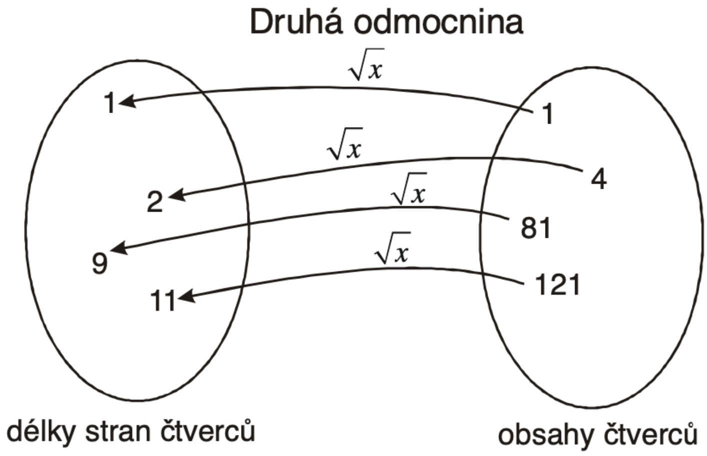
Je také důležité zdůraznit, že klasické učebnice jsou ve výuce na základních školách využívány jen minimálně. Většina žáků pracuje především s pracovními sešity, které jsou strukturovány tak, aby usnadnily procvičování a aplikaci nabytých znalostí. Pracovní sešity umožňují cílené procvičování dovedností, často obsahují úkoly různých obtížností a poskytují dostatek prostoru pro individuální přístup učitele k žákům. Tento trend ukazuje na posun od tradiční práce s učebnicemi směrem k modernějším a interaktivnějším formám vzdělávání.

Nyní se podíváme, jak mohou být odmocniny na základních školách vyučovány. V praxi se můžeme setkat se situací, kdy známe plochu čtverce a potřebujeme zjistit délku jeho strany. V tomto případě se obracíme k opačné operaci, než je druhá mocnina, která nám umožňuje



Obr.15: Druha mocnina (Krynický, 2010)

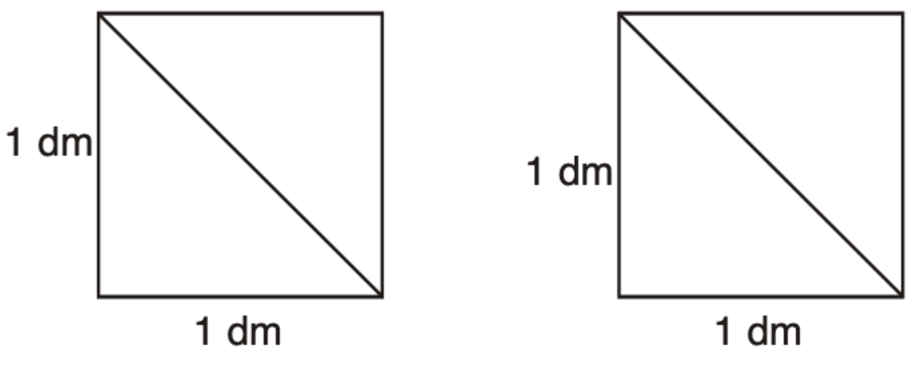
spočítat plochu z délky strany. Tato operace se nazývá druhá odmocnina a značí se symbolem $\sqrt{x}$. Odmocnina nám „ruší“ efekt mocniny a vrací nás zpět k původní hodnotě, ze které byla mocnina vypočítána (Krynický, 2010)



Obr.16: Druhá odmocnina (Krynický, 2010)

Seznámení s definicí odmocniny představuje klíčový krok v matematickém vzdělávání žáků. Definice odmocniny jim dává hlubší pochopení principu, jakým odmocniny fungují, a umožňuje jim je vnímat nejen jako mechanický výpočet, ale i jako logický matematický nástroj. Jakmile si žáci osvojí základní koncept odmocniny, otevírá se jim cesta k široké škále praktických aplikací a řešení rozmanitých úloh.

Příklad 1.2 Pokud chceme ověřit, zda existuje druhá odmocnina ze dvou 2, musím najít takový čtverec, který má obsah 2. Máme dva čtverce, každý se stranou 1 dm. Jaký budou mít dohromady obsah?

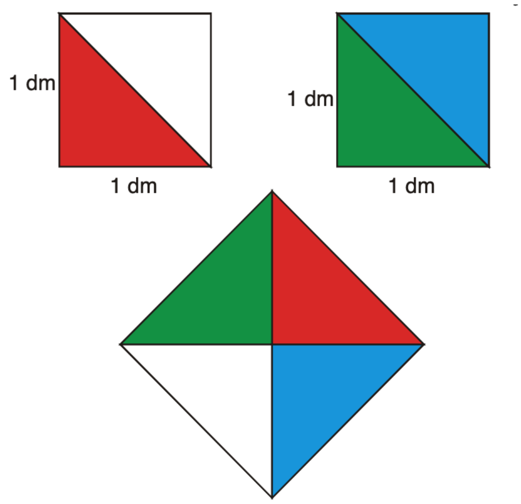


Obr.17: Obsahy čtverců (Krynický, 2010)

Obsah jednoho čtverce je 1 dm^2, pak je tedy součet 2 dm^2.

Příklad 1.3 Z předchozího příkladu vytvoř jeden čtverec tak, aby měl obsah 2 dm^2.

Máme dva čtverce. Pokud je rozstřihneme každý po úhlopříčce a ze vzniklých čtyř dílů složíme nový čtverec, jeho obsah bude roven součtu obsahů původních dvou čtverců. Jinými slovy, nový čtverec bude mít dvakrát větší obsah než jeden z původních čtverců, jelikož jeho strana bude tvořena úhlopříčkou původního čtverce, která je $\sqrt{2}$.



Obr.18: Čtverec se stranou $\sqrt{2}$ (Krynický, 2010)

Na základní škole se žáci seznamují s konceptem odmocniny a učí se je počítat s využitím různých metod, včetně aproximace bez kalkulačky. Tyto metody pomáhají žákům rozvíjet intuitivní pochopení odmocnin. Vzhledem k tomu, že ne všechny odmocniny se dají vyjádřit jako zlomky nebo celými čísly, je důležité, aby žáci zvládli i metody pro výpočet jejich přibližných hodnot.

3.1.1 Metody výpočtu přibližných hodnot odmocnin bez kalkulačky

V této části se zaměříme na metody výpočtu přibližných hodnot odmocnin bez použití kalkulačky. Tyto metody hrají důležitou roli v numerické matematice a slouží k pochopení principu odmocňování.

3.1.1.1 Rozklad na činitele

Tato metoda spočívá v rozložení zadaného čísla na součin prvočísel. Poté se odmocnina počítá jako součin odmocnin z jednotlivých prvočísel.

Příklad 1.4

$$\sqrt{36} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3 = 6$$

3.1.1.2 Částečné odmocnění

Tato metoda rozděluje odmocninu na součin více menších odmocnin.

Příklad 1.5

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

3.1.1.3 Metoda odhadem (půlení) intervalů

Tato metoda je založena na postupném zmenšování intervalu, ve kterém se hledá odmocnina. Pomocí odhadů a porovnávání hodnot se interval zmenšuje, dokud se nedosáhne požadované přesnosti.

Postup je následovný:

1. *Počáteční interval* – nejdříve určíme počáteční interval, který obsahuje hledanou odmocninu.
2. *První odhad* – vypočítáme prvotní odhad odmocniny, například jako střed intervalu a označíme ho jako x_0.
3. *Hodnocení polohy odhadu* – porovnáme hodnotu odmocniny v odhadovaném bodě x_0 s hledanou hodnotou *S*. Zjistíme, zda je x_0 příliš velké nebo příliš malé.
4. *Zmenšení intervalu* – na základě hodnocení zvolíme nový interval tak, aby obsahoval odmocninu.
    a. Pokud je x_0 příliš velké, zvolíme nový interval vlevo od x_0
    b. Pokud je x_0 příliš malé, zvolíme nový interval vpravo od x_0
    c. Pokračujeme dále tak, že postupně zmenšujeme interval kolem odhadu.
5. *Opakování* – opakujeme 2. až 4. krok, dokud se interval nezmenší na požadovanou přesnost.

Příklad 1.6 Vypočítáme přibližnou hodnotu $\sqrt{10}$ s přesností na dvě desetinná místa.

1. *Počáteční interval:* $(2;\ 4)$
2. *První odhad:* $x_0 = \frac{2+4}{2} = 3$

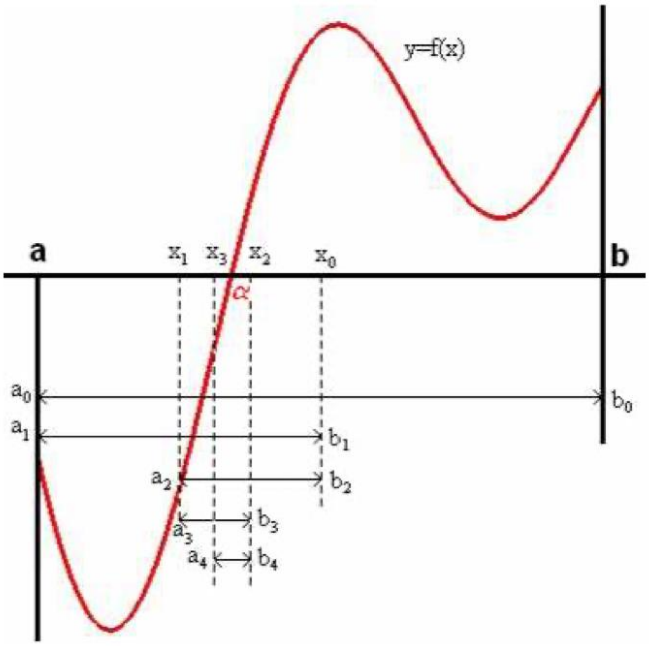
3. *Hodnocení polohy odhadu*: $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, $\sqrt{10} \approx 3{,}16$, odhad je menší než hledaná hodnota.
4. *Zmenšení intervalu:* nový interval $(3; 4)$
5. *Opakování:* $x_0 = \frac{(3+4)}{2} = 3{,}5$, $\sqrt{3{,}5} \approx 1{,}87$, $\sqrt{10} \approx 3{,}16$, odhad je stále menší než hledaná hodnota. Nový interval $(3{,}5; 4)$

…

Po opakování 2. až 5. kroku s požadovanou přesností získáme přibližnou hodnotu $\sqrt{10} \approx 3{,}16$.

Metody pro výpočet přibližných hodnot odmocnin bez kalkulačky jsou důležitým nástrojem pro rozvoj numerických dovedností a pochopení principu odmocňování. Vhodně se dají využít na základních a středních školách pro hrubý odhad odmocniny. Učí pracovat s iracionálními čísly a odhadovat jejich hodnoty. Pro přesné výpočty je však nutné používat kalkulačku.

Představte si interval na číselné ose (viz obr.19), který obsahuje hledanou odmocninu (pro nás podle obrázku kořen α). Prvním krokem je odhad odmocniny, například středem intervalu. Porovnáním hodnoty odmocniny v tomto bodě s hledanou hodnotou zjistíme, zda je odhad příliš velký nebo příliš malý. Na základě tohoto hodnocení se interval zmenší tak, aby obsahoval odmocninu. Tento proces se opakuje, dokud se interval nezmenší na požadovanou přesnost.



Obr.19: Metoda půlení intervalu (Váňová, 2013)

(Váňová, 2013)

3.2 Střední školy

Na středních školách se výuka odmocnin dále rozšiřuje a prohlubuje. Žáci se seznamují s pokročilejšími matematickými koncepty, jako jsou komplexní čísla, iracionální čísla a odmocniny vyšších stupňů. Důraz je kladen na pochopení vzájemného vztahu mezi mocninami a odmocninami, a na aplikaci jejich pravidel pro výpočet.

Podle Rámcového vzdělávacího programu (RVP) se od žáků očekává, že zvládnou práci s matematickými operacemi a výrazy, které obsahují mocniny a odmocniny. Učebnice matematiky pro střední školy se zaměřují nejen na naučení výpočtových technik, ale také na pochopení principů, které stojí za těmito postupy. Tato látka se často propojuje s fyzikou a informatikou, kde jsou odmocniny prakticky využívány.

Výuka obvykle začíná definicí odmocniny, která říká, že: *"Ke každému nezápornému číslu* a *existuje pro každé dané přirozené číslo* n *právě jedno nezáporné číslo* b *takové, že* $b^n = a$*"* (Polák, str. 89). Následně se probírají základní vlastnosti odmocnin a žáci se učí, jak s nimi provádět různé matematické operace.

Jedním z důležitých témat je zjednodušování výrazů s odmocninami. K odmocňování se využívá, stejně tak jako na základních školách, metody částečného odmocňování nebo metody odhadu. Učebnice poskytují řadu příkladů, jak vytknout činitele před odmocninu a jak zjednodušit zlomky, jejichž jmenovatel obsahuje odmocninu (tzv. usměrňování zlomků). Usměrňování zlomků je matematický postup, při kterém se upravují zlomky tak, aby v jejich jmenovateli nebyl iracionální nebo složený výraz. Tento proces zjednodušuje práci s daným zlomkem, protože umožňuje snazší porovnávání, sčítání, odčítání a násobení zlomků.

Příklad 1.7 Usměrňování zlomků (přibližné určení součinu je snazší než určení podílu):

- $\frac{6}{\sqrt{2}} \doteq 6 : 1{,}414 \doteq 4{,}243$
- $\frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \doteq 3 \cdot 1{,}414 \doteq 4{,}242$

Zlomky s odmocninami v jmenovateli se usměrňují tak, že jmenovatel i čitatel zlomku vynásobíme vhodným výrazem, který odstraní odmocninu z jmenovatele. Tímto způsobem se zlomky stávají jednoduššími pro další matematické operace. (Polák, 2016)

Někdy lze upravit ke sčítání odmocniny, které mají stejné odmocnitele, ale různé základy, což nelze je sečíst přímo.

Příklad 1.8 Částečné odmocni, pokud platí, že $x, y \geq 0$:

a) $\sqrt{32x^3y} = \sqrt{(4x)^2 2xy} = 4x\sqrt{2xy}$

b) $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{2^2 \cdot 2} + \sqrt{3^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Závěr

Hlavním cílem této bakalářské práce bylo komplexní zkoumání odmocnin v matematice z historického, matematického a didaktického hlediska. V rámci této práce jsem se soustředila na analýzu různých metod výpočtu odmocnin, jejich historický vývoj a způsob, jakým byly a jsou tyto metody zaváděny do výuky matematiky v různých učebnicích vzdělávacího systému. Cílem bylo nejen popsat základní principy odmocňování, ale také zhodnotit, jak se jejich výuka vyvíjela v průběhu historie a jaké výzvy přináší jejich výuka v současné didaktice matematiky.

Věřím, že se mi podařilo přinést do této oblasti cenný přínos a splnit všechny stanovené cíle. Zaměřila jsem se na historický vývoj metody odmocňování, přičemž jsem se detailně věnovala historickým metodám výpočtu odmocnin z Babylonské říše, Starověké Indie a Antického Řecka. Tyto metody byly základem pro formování našich současných výpočtových technik a v některých případech byly používány i v podstatně zjednodušené formě až do nedávné minulosti.

Jedním z cílů této práce bylo také zkoumání způsobu, jakým jsou odmocniny prezentovány a učeny ve výukách matematiky pro základní a střední školy. V této části práce jsem se zaměřila na analýzu používaných učebnic a metodiku výuky.

V této bakalářské práci jsem se zaměřila také na metody výpočtu přibližných hodnot odmocnin bez použití kalkulačky. Cílem bylo srozumitelně a dostatečně podrobně popsat principy těchto metod, které jsou v současnosti spíše okrajově vyučovány, ale přitom mohou žákům či studentům pomoci lépe pochopit samotný princip odmocňování. Kromě textového popisu jsem se snažila zpřístupnit informace i pomocí vizualizací, které slouží k lepšímu pochopení abstraktních konceptů a usnadňují pochopení principů odmocňování. Tyto vizualizace jsou nejen didaktickým nástrojem, ale i prostředkem k vizualizaci matematických procesů, které mohou být pro některé studenty těžko uchopitelné.

Svého času byla metoda odmocňování klíčovou součástí matematických výpočtů, která měla velký význam pro různé vědecké i praktické aplikace. S nástupem výpočetní techniky a kalkulaček se její význam v každodenní praxi poněkud zmenšil, avšak stále zůstává nezbytnou součástí matematiky, a to nejen na teoretické úrovni, ale i ve vědeckých a technických oborech, kde je potřeba provádět složité výpočty.

Věřím, že práce přináší přehled o problematice odmocnin a může být cenným zdrojem pro pedagogy, studenty matematiky a všechny, kteří se zajímají o historii matematiky a didaktiku matematiky.

Seznam použitých zdrojů

BEČVÁŘ, Jindřich; BEČVÁŘOVÁ, Martina a VYMAZALOVÁ, Hana. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. *Dějiny matematiky*. Praha: Prometheus, 2003. ISBN 80-7196-255-4.

BEČVÁŘOVÁ, Martina. *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*. Praha: Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-233-3.

CALINGER, Roland; WEST, Thomas a BROWN, Joseph. *A Contextual History of Mathematics*. Prentice Hall, 1999. ISBN ISBN 0-02-318285-7.

CLARK W. E., *The Āryabhaṭīya of Āryabhaṭa*. Chicago, Illinois: The University of Chicago Press, 1930.

COLEBROOKE H. T., *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*. London: John Murray, 1817.

FOWLER, David, ROBSON, Eleanor. Square root approximations in Old Babylonian mathematics: YBC 7289 in context. Online. *Historia Mathematica* 25, 1998. [cit. 2024-07-11].

HEATH, T. L., *The works of archimedes*. Online. Aproged. 1897. Dostupné z: https://www.aproged.pt/biblioteca/worksofarchimede.pdf. [cit. 2024-07-03].

HONZLOVÁ EXNEROVÁ, Vendula. *Výpočet odmocnin od starověku po současnost*. Závěrečná práce, vedoucí Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 2014.

KRYNICKÝ, Martin. *Druhá odmocnina*. Online. Realisticky.cz. 2010, s. 1.2.7. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/ucebnice/01%20Matematika%20SŠ/01%20Základní%20poznatky/02%20Číselné%20obory/07%20Druhá%20odmocnina.pdf. [cit. 2024-06-14].

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. Prometheus, 2016. ISBN 978-80-7196-458-2.

SÝKOROVÁ, Irena. *Matematika ve staré Indii*. Disertační Práce. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 2014.

ŠKARDA, Čeněk a BALKOVÁ, L'ubomíra. *Aritmetika včera a dnes*. Online. Dostupné z: http://bimbo.fjfi.cvut.cz/~soc/Deleni/odmocnina.html. [cit. 2024-12-01].

VÁŇOVÁ, Veronika. *Numerické řešení algebraických rovnic*. Bakalářská práce, vedoucí Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc. Západočeská univerzita v Plzni, 2013.