Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Bakalářská práce

Historie a geometrický smysl skalárního, vektorového a smíšeného součinu

History and geometric sense of scalar, vector and outer product

Judita Kindlová

2024

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma **Historie a geometrický smysl skalárního, vektorového a smíšeného součinu** vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 30. 11. 2024

……...…………………….
Judita Kindlová

Tímto děkuji RNDr. Františku Mošnovi, Ph.D. za trpělivost při vedení mé bakalářské práce. Také bych chtěla poděkovat své rodině a přátelům za podporu při celém studiu.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zaměřuje na skalární, vektorový a smíšený součin, jejich historii a aplikace. Klade si za cíl uvést čtenáře do problematiky vektorové algebry, upozornit na souvislosti jednak mezipředmětové a jednak mezi jednotlivými matematickými koncepty. Poukazuje na fakt, že k jednomu výsledku lze dojít mnoha cestami, proto je často uváděno k jednomu tvrzení vícero odvození.

Cílem této bakalářské práce je zprostředkovat srozumitelnou formou základy vektorového počtu, jeho historii a interdisciplinaritu. Práce zahrnuje přístup jak geometrický a algebraický, tak i historický a didaktický.

Práce je členěna do osmi kapitol, z čehož lze prvních šest neformálně označit jako teoretickou část a dvě závěrečné jako část praktickou. Po historickém úvodu se čtenář seznamuje se základy vektorové algebry, které jsou rozvedeny dále v kapitolách 3 a 4. Podstatným prvkem při osvojování nových dovedností je jejich propojování jak s těmi známými, tak s novými fakty. O tuto myšlenku se opírají kapitoly 5 a 6. Kapitola 5 pojednává a matematických souvislostech, které se nehodilo zařadit do jiných kapitol, a na ni navazuje kapitola 6, která podporuje interdisciplinaritu. Jsou zde zmíněny obory jako fyzika, informační technologie a geografie, které hojně využívají vektorové algebry. Na vybraných úlohách si v kapitole 7 může čtenář procvičit, zda pochopil, jak se počítá s vektory, maticemi a zda si pod textem úlohy umí představit vhodnou geometrickou reprezentaci. Poslední kapitola srovnává vybrané učebnice z pohledu vektorové algebry. Jak se na toto téma nahlíží v moderních učebnicích a po jakém textu sáhnout, když téma vektorů chceme studovat, to se čtenář dozví právě v této závěrečné kapitole.

Klíčová slova: vektor, skalární (vnitřní) součin, vektorový součin, smíšený součin, vnější součin, kolmost, determinant, obsah, objem

Abstract

This bachelor thesis focuses on scalar, vector and outer product, their history and applications. It aims to introduce the reader to the problems of vector algebra, highlighting the connections both between subjects and between different mathematical concepts. It highlights the fact that a single result can be arrived at by many paths, which is why multiple proofs are often given for one theorem.

The aim of this bachelor thesis is to convey in an understandable form the basics of vector calculus, its history and interdisciplinarity. The thesis includes a geometric and algebraic approach as well as a historical and didactic one.

The thesis is divided into eight chapters, of which the first six can be informally described as the theoretical part and the final two as the practical part. After a historical introduction, the reader is introduced to the basics of vector algebra, which are developed further in Chapters 3 and 4. An essential element in learning new information is to relate it to both familiar and new facts. Chapters 5 and 6 build on this idea. Chapter 5 discusses mathematical contexts that were not appropriate to include in other chapters and is followed by Chapter 6, which promotes interdisciplinarity. Fields such as physics, information technology and geography, which make extensive use of vector algebra, are mentioned. In Chapter 7, the reader can practise on selected problems to see if they have understood how to calculate vectors and matrices and if they can imagine an appropriate geometric representation under the text of the problem. The last chapter compares the selected textbooks from the perspective of vector algebra. How this topic is viewed in modern textbooks and which text to reach for when the topic of vectors is to be studied is what the reader will learn in this final chapter.

Keywords: vector, scalar (inner) product, vector product, outer product, wedge product, perpendicularity, determinant, area, volume

Obsah

Seznam použitého značení

$\vec{v}$	vektor v
$\|\vec{a}\|$	velikost/norma/délka vektoru $\vec{a}$
$\|c\|$	absolutní hodnota reálného čísla c; např. $\|-5\| = 5$
ab	násobení dvou skalárů a, b
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	skalární součin vektorů $\vec{a}, \vec{b}$
$\vec{a} \times \vec{b}$	vektorový součin vektorů $\vec{a}, \vec{b}$
$[a; b]$	uspořádaná dvojice čísel a a b
$(a; b; c)$	složky vektoru; např. $\vec{v} = (2; 8; 1)$
∴	zakončení odvození či důkazu
&	konjunkce, matematické „a zároveň“
$\wedge$	vnější součin
$\sum$	suma, sčítání; např. $\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3$
S	obsah dvourozměrného objektu
P	povrch trojrozměrného objektu
V	objem objektu
$\stackrel{!}{=}$	žádaný výsledek; např. $x \stackrel{!}{=} 5$ znamená, že chceme, aby se proměnná x rovnala pěti
$det(\mathbf{A})$	determinant matice $\mathbf{A}$
♠	doplňková informace

Úvod

Vektorová algebra představuje základní kámen moderní matematiky a fyziky, který má dalekosáhlé aplikace v různých vědeckých a technických disciplínách. Jedním z klíčových nástrojů této oblasti jsou operace se součiny: skalární, vektorový a smíšený součin. Tyto operace nám umožňují zkoumat vlastnosti vektorů, jejich vzájemné vztahy a způsoby, jakým ovlivňují fyzikální jevy.

Tato práce si klade za cíl přiblížit tyto součiny nejen z teoretického hlediska, ale také z historického a geometrického pohledu. Zaměřuje se na to, jak byly jednotlivé koncepty vyvinuty a jakým způsobem je lze intuitivně vysvětlit tak, aby byly pochopitelné i pro studenty na středních školách. Hlavním cílem je poskytnout didaktický návod, který studentům usnadní pochopení tématu, aniž by se jej obávali, a podpořit jejich zvědavost a zájem o matematiku.

Práce je rozdělena do osmi kapitol, z nichž každá má za úkol postupně představit historii, základní definice a aplikace skalárního, vektorového a smíšeného součinu. V textu se snažím upozornit na mezipředmětové souvislosti, které pomohou studentům lépe chápat propojenost matematiky s jinými obory, jako je nejen fyzika a informatika, ale i zeměpis a cizí jazyk. Zároveň je kladen důraz na názornost a využití praktických příkladů.

Cílem této práce je poskytnout ucelený přehled o vektorové algebře, její historii, základních a pokročilých konceptech, praktických aplikacích a mezipředmětových souvislostech. Tato analýza může sloužit jako užitečný zdroj informací pro studenty, pedagogy a další zájemce o tuto důležitou oblast matematiky.

1 Historický přehled

Stěžejním pojmem, bez kterého bychom se při popisu skalárního, vektorového a smíšeného součinu nemohli obejít, je pojem **vektor**. Tato kapitola si klade za cíl osvětlit vývoj tohoto základního matematického konceptu, a to od jeho prvopočátků až po současnou podobu. Prozkoumáme významné historické milníky, které přispěly k formování pojmu vektor, a podíváme se na vývoj terminologie a symboliky spojené s vektorovou algebrou.

V této kapitole jsou klíčové postavy, které přispěly k rozvoji vektorového počtu, zvýrazněny. Tyto „medailonky“ čerpaly ze zdrojů [4], [13], [18] a [22]. Základní informace o matematicích, kteří neměli tak velký podíl na výstavbě tohoto tématu, lze nalézt v poznámkách pod čarou.

1.1 Vývoj konceptu vektoru

Potřeba vektorů se objevila, když lidé začali pracovat se souřadnicemi v rovině, prostoru nebo obecnějších strukturách. Kromě využití v zeměměřičství a stavebnictví se nutnost k evoluci vektorů projevila s rozvojem analytické geometrie kolem roku 1636. S tím jsou spojena jména jako P. de Fermat[1] a R. Descartes.

René Descartes (1596–1650) byl francouzský filosof, matematik a vědec. Pocházel z úřednické rodiny. Mezi lety 1617 a 1621 působil v nizozemské armádě jako dobrovolník. Za objev kartézské soustavy souřadnic vděčíme právě jemu (Descartes je latinsky *Cartesius*, proto „kartézská“). Descartes je známý také svým výrokem „Cogito, ergo sum“ (Myslím, tedy jsem).

První dílo, které rozebírá rovnováhu tělesa na nakloněné rovině a rozkládá síly do dvou složek, nese jméno *De Beghinselen der Weegkonst* (Princip rovnováhy), je z roku 1586 a jeho autorem je S. Stevin. [17]

Simon Stevin (1548–1620) narozený v Bruggách v roce 1548, byl holandský fyzik a vojenský inženýr. Byl průkopníkem v mnoha oblastech, včetně statiky, hydrodynamiky a účetnictví. Jeho největším přínosem byla popularizace desítkové soustavy v Evropě. Desetinné zlomky sice používali Číňané a Arabové dávno před Stevinem, ale byl to právě on, kdo je učinil populárními na Západě díky své práci *De Thiende* (Desetinné číslo), která měla významný dopad na matematiku a vědu.

V roce 1582 přišel Stevin do Leydenu, kde vydal několik knih o matematice a mechanice, všechny v holandštině. Podle něj byl nizozemský jazyk nejvhodnější pro vyjádření vědeckých myšlenek. Zavedl také několik matematických výrazů, které se dodnes používají na nizozemských školách. Například matematika se stále nazývá „wiskunde“ , což znamená věda o tom, co je jisté (gewis).

Stevin byl vynikající inženýr, který se podílel na stavbě větrných mlýnů, zámků a přístavů. Kromě toho pracoval jako inženýr pro mauricijského prince, pro něhož vyvinul různé vojenské a stavební inovace.

J. Argand[2] se pojmu vektor přiblížil v roce 1814, když popsal komplexní čísla jako body v rovině, ale formálně vektory nezavedl. Až v roce 1827 Němec A. F. Möbius[3] začal chápat dvě (nebo

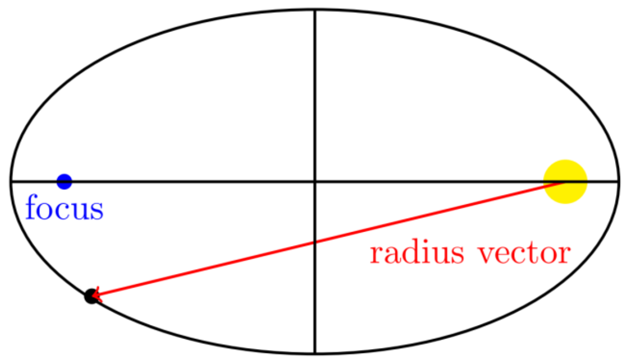
---

[1] Pierre de Fermat: francouzský matematik, 1607–1665.
[2] Jean-Robert Argand: francouzský knihkupec a amatérský matematik, 1768–1822.
[3] August Ferdinand Möbius: německý matematik a teoretický astronom, 1790–1868.

tři) souřadnice nejen jako definici bodu, ale také jako směr vycházející z definovaného počátku, a začal pracovat s vektory jako směrovými veličinami. [11]

1.2 Původ slova „vektor" a jeho značení

Co se týče terminologie, slovo **vektor** má svůj prapůvod ve slovním spojení „radius-vector" , tj. průvodič, což je termín z teoretické astronomie. **Radius vector** je přímka spojující obíhající těleso s jeho středem pohybu v libovolném okamžiku a směřující radiálně ven. U kruhové dráhy se střed pohybu shoduje se středem kružnice, u parabolické nebo hyperbolické dráhy je středem pohybu ohnisko, a u eliptické dráhy je to jedno ze dvou ohnisek (viz obr. 1).



Obrázek 1: Radius vector planety na eliptické dráze kolem hvězdy

První zmínku o tomto slovním spojení lze nalézt v technickém slovníku z roku 1704, který byl sepsán Johnem Harrisem. [13]

Jiné prameny uvádějí, že slovo **vektor** je odvozeno z latinského *vecto*: vozit, přenášet (*vector* tedy doslova znamená nosič či jezdec). Sir W. R. Hamilton uvedl do používání termíny **vektor** a **skalár**; druhým zmíněným termínem označoval reálná čísla, protože jejich pozice lze porovnat na jedné společné stupnici (ose x). J. W. Gibbs[4] ve svém díle *Elements of Vector Analysis* (česky *Základy vektorové analýzy*) z roku 1881 zavedl konvenci psát vektory malými řeckými písmeny, a skaláry malými latinskými písmeny (kromě i, j a k, a také π, které mají speciální funkce). [16]

Sir William Rowan Hamilton (1805–1865) byl irský matematik, fyzik a astronom. Narodil se v roce 1805 v Dublinu jako čtvrté z devíti dětí a ve věku tří let byl svěřen do péče vzdělaného strýce Jamese Hamiltona, který byl anglikánským knězem a řídil školu ve městě Trim v Irsku. James Hamilton záhy rozpoznal mimořádný talent svého synovce, který rozvíjel především studiem jazyků. V třinácti letech jich uměl Hamilton deset, například hebrejštinu, sánskrt, perštinu a klasické i moderní evropské jazyky. Od svých deseti let se zaměřil také na matematiku, studoval Eukleidovy *Základy* v latinském překladu, následně Newtonovy spisy a současná díla o analytické geometrii a diferenciálním počtu.

V roce 1823 nastoupil Hamilton na Trinity College, kde okamžitě vynikl ve svých studiích. Ve dvou po sobě jdoucích ročnících získal prestižní ocenění za znalosti přírodních věd, řečtiny a matematické fyziky. Byl uznáván nejen za své vědecké výsledky, ale také za své básnické nadání, za které obdržel další ocenění. Jeho vědecká kariéra začala už v sedmnácti letech a vedla k významnému příspěvku v oblasti matematické optiky, kde vytvořil slavnou „Teorii soustav

[4] Josiah Willard Gibbs: americký matematik, teoretický fyzik a chemik, 1839–1903.

paprsků" . Jeho výzkum v této oblasti měl dalekosáhlý vliv, což se projevilo i v jeho dalších pracích, které rozšířily matematické metody optiky na dynamiku.

Hamiltonovy práce v dynamice byly revoluční, protože se mu podařilo redukovat optiku i dynamiku na matematickou vědu. Jeho úspěchy v optice, včetně předpovědí dvou nových jevů, které byly následně experimentálně potvrzeny jeho přítelem Humphrey Lloydem, mu přinesly obrovskou slávu mezi vědci. Renomovaný historik René Dugas vyzdvihl Hamiltonův přístup k racionalizaci geometrické optiky, kterou zbavil metafyzických konceptů a přetvořil ji v ryze matematickou disciplínu.

Hamiltonova práce inspirovala mnoho dalších vědců, včetně Schrödingera a Louise de Broglieho, čímž se stal klíčovou postavou ve vývoji moderní fyziky. Jeho schopnost spojit matematiku s fyzikálními zákonitostmi a jeho teoretické objevy zůstávají jedním z nejvýznamnějších příspěvků v oblasti optiky a dynamiky.

Co se týče Hamiltonova vlivu na matematiku, jeho nejznámějším objevem je teorie kvaternionů, která rozšířila komplexní čísla a otevřela nové možnosti v oblasti 3D rotací a aplikací ve fyzice a počítačové grafice.

Dnešní konvence je však taková, že vektory označujeme buď tučným fontem (např. **v**), nebo šipkou nad daným písmenem ($\vec{v}$); obě varianty jsou napsány malým latinským písmenem. Řeckou abecedu využíváme na označení úhlů.

Slovo **skalár** je odvozeno z latinského *scalae*, což znamená žebřík či schody. **Tenzor** je také odvozen z latiny: *tensio* je napětí nebo tlak.

1.3 Komplexní čísla

Komplexní čísla, jak je známe dnes, měla složitý a dlouhý vývoj: již za dob Diofantových[5] vznikla myšlenka „jaký význam má odmocnina ze záporného čísla" . G. Cardano, jehož jméno máme spojeno se vzorci, které se využívají k nalezení kořenů kubických rovnic, ve svých výpočtech zahrnoval odmocninu z minus jedné.

Gerolamo Cardano (1501–1576) se narodil 24. 9. 1501 v italské Pavii jako nemanželský syn právníka. Otec ho přivedl ke studiu klasiků matematiky (již ve dvanácti letech studoval Eukleidovy *Základy*). Roku 1526 dokončil studium medicíny na univerzitě v Padově, pracoval jako praktický lékař. V letech 1534–1570 postupně přednášel matematiku a medicínu v Miláně, Pavii a Bologni. Nejschopnější mezi Cardanovými žáky v matematice byl L. Ferrari[6], který žil od r. 1536 v jeho domě a stal se jeho zetěm. Cardano představoval velmi složitou a rozporuplnou osobnost. Byl všestranně schopný, všeobecně i jazykově nadaný a vzdělaný. Měl velmi rozsáhlé encyklopedické znalosti v oboru lékařství i přírodních věd, projevoval však i značnou pověrčivost. Napsal přes 200 prací z medicíny, matematiky, mechaniky, filozofie i dalších oborů, sestavoval i horoskopy. V r. 1570 byl obviněn inkvizicí z kacířství (za to, že zveřejnil Kristův horoskop) a nesměl dále přednášet. Žil pak v Římě, kde získal od papeže penzi. Zemřel zde 21. 9. 1576, když ještě v r. 1576 sestavil vlastní životopis a seznam svých prací.

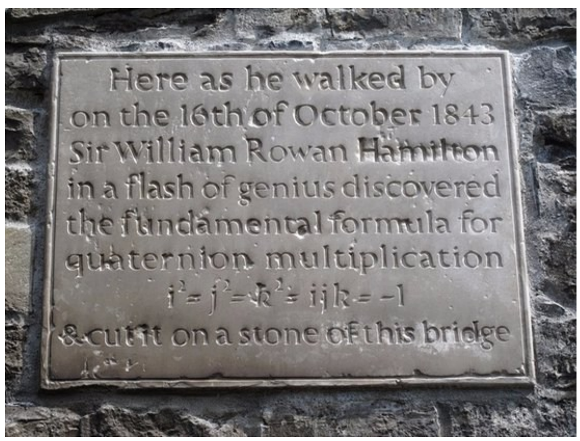
K úspěšným Cardanovým matematickým knihám patří *Practica arithmeticae generalis* (Praxe obecné aritmetiky) z r. 1539, učebnice aritmetiky a algebry, která učila zejména řešit úlohy z praktického života. Kromě numerických výpočtů a počítání pamětí v ní Cardano popsal slovné

[5] Diofantos z Alexandrie: starověký řecký matematik, 3. století n. l.
[6] Lodovico Ferrari: italský matematik, 1522–1565.

úpravy výrazů a rovnice, neboť tehdy ještě nebyla vyvinuta algebraická symbolika. Cardano se zajímal o obecné metody řešení kubických rovnic a dověděl se o Tartagliovi[7], který v r. 1535 předvedl řešení kubických rovnic typu $x^3 = ax + b$. Teprve však po dlouhém přemlouvání prozradil Tartaglia svoji metodu jejich řešení Cardanovi v r. 1539, když ten přísahal, že ji nezveřejní. Po několik let Cardano slib dodržoval, avšak v r. 1542 získal spolu s Ferrarim rukopis italského matematika S. del Ferra[8] z něhož se dozvěděli, že mu bylo známo obecné řešení kubické rovnice již před Tartagliem. Proto se Cardano necítil dále vázán slibem nezveřejňovat je. V r. 1545 je zařadil i se jmény objevitelů (del Ferra a Tartaglii) do svého spisu *Ars magna*.

Mnoho matematiků se inspirovalo Cardanovým dílem *Ars Magna*, např. F. Viète[9], který si uvědomil vztahy mezi koeficienty algebraické rovnice a jejími kořeny, nebo L. Euler[10], po kterém je alternativně pojmenována Napierova konstanta e.

Termín **komplexní číslo** zavedl v roce 1856 již zmíněný W. R. Hamilton. Hamilton též poukázal na fakt, že komplexní čísla můžeme považovat za uspořádané dvojice reálných čísel. Na tuto myšlenku lze pohlížet více abstraktně: nemusíme uvažovat pouze uspořádané dvojice, ale obecněji $n-$tice. Sir Hamilton se tuto myšlenku pokoušel uchopit matematicky a vynalezl čtyřdimenzionální systém zvaný **kvaterniony**. Dodnes můžeme obdivovat jeho geniální myšlenku, například když navštívíme irský Broom Bridge, kde se nachází pamětní deska vyobrazená na obr. 2.



Obrázek 2: Pamětní deska na Broom Bridge

1.4 Vektorový počet

Vektorový počet definoval v roce 1799 C. Wessel, který vektory roviny reprezentoval komplexními čísly, na ose x tedy byla reálná složka a na ose y složka imaginární. Wesselova publikace, ve které pojednává o geometrické interpretaci komplexních čísel, však na sto let zapadla a až v roce 1897 byla znovu publikována. S obdobnou myšlenkou geometrické interpretace komplexních čísel přišel roku 1806 J. R. Argand (po kterém se Gaussově rovině také říká Argandův diagram). Mezi další, kteří si představovali komplexní čísla jako body v dvourozměrné rovině, patří také C. F. Gauss[11],

[7] Niccolò Fontana Tartaglia: italský matematik a konstruktér, 1499–1557.
[8] Scipione del Ferro: italský matematik, 1465–1526.
[9] François Viète: francouzský matematik, 1540–1603.
[10] Leonhard Euler: švýcarský matematik, fyzik, astronom a logik, 1707–1783.
[11] Johann Carl Friedrich Gauss: německý matematik a fyzik, 1777–1855.

který tento objev údajně učinil ve stejné době jako Wessel. V roce 1827 Möbius ve své publikaci *Der baryzentrische Kalkül* zavedl orientované úsečky, se kterými prováděl operace jako sčítání a násobení reálným číslem, nicméně tyto úsečky ještě nenazýval vektory. [4]

Caspar Wessel (1745–1818) byl norsko-dánský matematik a zeměměřič. Jeho nejvýznamnějším příspěvkem byla práce na komplexních číslech. V roce 1799 publikoval článek, ve kterém geometricky znázornil komplexní čísla jako body v rovině, což bylo jedním z prvních známých použití komplexní roviny. Toto pojetí položilo základy moderní analýzy a komplexní geometrie. Ačkoli jeho práce byla v jeho době málo známá, později byla uznána jako významný příspěvek k matematice.

Zhruba ve stejné době, kdy Hamilton objevil kvaterniony, H. Grassmann sepisoval své dílo *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (česky Teorie lineárního rozšíření, nové odvětví matematiky), ve kterém zobecnil koncept vektoru ze známého dvoj- či trojrozměrného prostoru na prostor n-rozměrný. Druhým zásadním přínosem této publikace, která byla vydaná v roce 1844, byla příprava na koncepty matic, lineární algebry, potažmo vektorové a tenzorové analýzy.

Hermann Günther Grassmann (1809–1877) byl německý matematik a lingvista. Jeho hlavním příspěvkem k matematice je teorie vektorových prostorů a vnějších algeber, kterou představil ve své knize *Die lineale Ausdehnungslehre* (Teorie lineárního rozšíření) z roku 1844. Tato práce, zpočátku ignorovaná, se později stala základem moderní lineární algebry a diferenciální geometrie. Kromě matematiky se Grassmann věnoval také filologii a přispěl ke studiu sanskrtu a germánských jazyků.

Navzdory svým zásadním objevům na poli vektorových prostorů se Grassmannova práce nedočkala okamžitého uznání. Jeho systém, byť revoluční, byl pro dobu příliš obecný a komplexní, což ztěžovalo jeho přijetí. Přesto lze jeho příspěvky k vektorové analýze srovnávat s prací Hamiltona, ačkoli se Grassmannův přístup neujal jako hlavní metoda v moderní vektorové analýze.

Na rozdíl od Hamiltona, který byl považován za matematického génia, Grassmann studoval především teologii a filologii na univerzitě v Berlíně, kde matematika hrála jen okrajovou roli. Po návratu do rodného Stettinu, kde se narodil do rodiny pedagoga Justuse Günthera Grassmanna, pokračoval ve své akademické dráze a učil na různých školách. Ačkoli se mu nikdy nepodařilo získat univerzitní post, jeho odkaz zůstává důležitým kamenem v základech moderní matematiky.

V dnešní době již víme, že je vektorová analýza velmi důležitá, a to nejen v počítačové grafice. Využívá se zejména ve fyzice a strojírenství, například při popisu elektromagnetických polí. Toto fyzikální pole, které vyjadřuje působení elektrické a magnetické síly v prostoru, se skládá z elektrického a magnetického pole. Souvislost mezi oběma poli popisují Maxwellovy[12] rovnice. Zápis Maxwellových rovnic v jednoduchém vektorovém tvaru umožnil až vznik moderní vektorové analýzy, ve kterém důležitou roli sehrál J. W. Gibbs. V již zmíněné učebnici *Elements of vector analysis* vytvořil její současnou podobu. O. Heaviside[13] v knize *Electromagnetic theory* z roku 1893 tvůrčím způsobem rozvinul vektorovou analýzu a jejím užitím jako první vyjádřil Maxwellovy

[12] James Clerk Maxwell: skotský všestranný fyzik, 1831–1876.
[13] Oliver Heaviside: anglický fyzik a elektroinženýr, 1850–1925.

rovnice v jednoduchém a přehledném vektorovém tvaru. G. Peano[14] završil historický vývoj pojmu vektoru jeho axiomatickým zavedením. [17]

1.5 Skalární, vektorový a smíšený součin

R. W. Hamilton, který zavedl termín **skalár** a **vektor**, také v roce 1853 vydal *Lectures on Quaternions*, kde rozvinul teorii kvaternionů a také dospěl k základům vektorového počtu, tj. vektorové algebry a vektorové analýzy, a to jak v rovině, tak i v prostoru. Začal zde používat termíny **skalární součin** a **vektorový součin**. [17]

Nezávisle na Hamiltonovi pracoval Grassmann. *Ausdehnungslehre* byly napsány velmi abstraktně a málo srozumitelně, takže po dlouhou dobu nenalezly odezvu a ocenění. Roku 1862 vydal zcela přepracovanou verzi této své monografie, *Vollständig Und In Strenger Form Bearbeitet* (česky Kompletně a přísněji upraveno), která byla podstatně srozumitelnější, avšak nevzbudila větší pozornost. V přepracované verzi zavedl pojem **smíšený součin**. [2]

1.6 Ostatní pojmy z lineární algebry

V kapitole 2 se seznámíme s pojmy jako **matice**, **determinant**, **lineární nezávislost**, **lineární kombinace** a **úhel**. Kromě pojmu **úhel**, který definoval [med1]Eukleides ve svých *Základech*, se pojmenování ostatních konceptů vyskytlo až okolo poloviny 19. století: **determinant** v roce 1843 (Arthur Cayley), **lineární nezávislost** v roce 1846 (Sir William Rowan Hamilton), **matice** v roce 1850 (James Joseph Sylvester) a **lineární kombinace** v roce 1854 (též James Joseph Sylvester). Pojmenování pro determinant bylo tedy zavedeno dříve než pojmenování pro matici. Determinant v moderním slova smyslu dříve totiž znamenal diskriminant homogenního polynomu (zastarale „quantic“), tj. polynomu více proměnných, jehož všechny členy mají stejný stupeň. Slovo **determinant** tedy existovalo dříve, jenom mělo jiný význam. [13]

O Eukleidově životě se zachovalo velmi málo hodnověrných informací. **Eukleides z Alexandrie** (cca 325 př. n. l. – 260 př. n. l.) Narodil se v Řecku a studoval snad v Athénách na Platonově Akademii. Poté žil a pracoval v egyptské Alexandrii. Zde na počátku 3. století před Kristem král Ptolemaios I. založil Museion („Stánek múz“). Toto středisko vědy soustřeďovalo významné učence mnoha oborů vědy a Eukleides v něm zaujímal čelné postavení. Museion mělo svou hvězdárnu, botanickou a zoologickou zahradu, písemnu a zejména proslulou alexandrijskou knihovnu, ve které Eukleides pracoval a asi také učil. Vedle základů geometrie se věnoval i teorii čísel, perspektivě, kuželosečkám a sférické geometrii. Podle svědectví, které nám dochoval ve svých spisech řecký geometr Pappos (4. stol. n. l.), charakteristickými vlastnostmi Eukleida byly svědomitost, skromnost a přátelská laskavost ke všem, kteří třeba i skromnou měrou přispěli k rozvoji matematiky.

Hlavním Eukleidovým dílem jsou *Základy*, jež představují vrcholné dílo starověké matematiky. Ve 13 knihách tohoto díla Eukleides shrnul a utřídil dosud známé matematické poznatky, doplnil je o některé své nové výsledky a podal u všech přesné důkazy. Jeho přístup k výkladu matematiky v *Základech* je zejména nový v tom, že je přísně deduktivní. Výklad začíná definicemi, které (na rozdíl od současných nominativních definic) jsou genetické, popisné, snaží se charakterizovat definované objekty na základě popisu jejich vlastností a vytváření z objektů jednodušších. Z dnešního hlediska (moderní axiomatické výstavby) ovšem některé (základní,

[14] Giuseppe Peano: italský matematik, filosof a logik, 1858–1932.

primitivní) objekty takto definovat nelze. Zatímco téměř každá kniha *Základů* začíná definicemi, pouze před první knihou jsou uvedeny ještě tzv. axiomy a postuláty.

1.7 Matematické symboly

Slovo **symbol** pochází z řeckého slova pro „doklad“ nebo „doklad totožnosti“ , což je kombinace dvou kořenů, *sum* („spolu“) a slovesa *ballo* („házet“). Volnější interpretací by bylo „dávat k sobě“. [12]

Následující dvě tabulky jsou přejaty z [11] a upraveny. Obě znázorňují vznik matematické symboliky. První tabulka obsahuje závorky a relace, druhá aritmetické symboly.

Tabulka 1: Vznik matematické symboliky: závorky a relace

Symbol	Název	První použití
( )	kulaté závorky	Tartaglia (1556)
[ ]	hranaté závorky	Rafael Bombelli (1550)
{ }	složené závorky	Francois Viéte (1600)
=	rovná se	Robert Recorde (1557)
$<, >$	ostrá nerovnost	Thomas Harriot (1585)
$\leq, \geq$	neostrá nerovnost	Pierre Bouguer (1734)
$\approx$	ekvivalence	Gottfried Wilhelm Leibniz (1700)
$\neq$	nerovná se	Leonhard Euler (polovina 18. století)

Tabulka 2: Vznik matematické symboliky: aritmetické symboly

Symbol	Název	První použití
$+, -$	plus, minus	Johann Widmann, 1489. Obecně se ale neujalo. Ještě v r. 1572 užíval Rafael Bombelli m a p místo $-$ a $+$.
$\pm$	plus / minus	William Oughtred, 1631.
$\times$	násobení	William Oughtred, 1631. Dnes se používá hlavně pro kartézské součiny a v programování.
$\cdot$	násobení	Gottfried Wilhelm Leibniz, okolo 1700.
:	dělení	Poprvé užito v knize *Johnson's Arithmetics* roku 1633 ve zlomcích místo zlomkové čáry (o autorovi *Johnsonovi* není nic známo). Jako symbol dělení jej začal používat Gottfried Wilhelm Leibniz, 1684.
$\div$	dělení	Johann Heinrich Rahn, 1659.
—	zlomková čára	Arabové, okolo 1200. V Evropě ji ve stejné době od Arabů převzal Fibonacci.
/	lomeno	V rukopisných poznámkách Thomas T. Ledger, 1718. V tisku Manuel Antonio Valdes, 1784. Lomítko vzniklo patrně ze symbolu „)“, např. 24)8, který zavedl Michael Stifel už 1546.
.	desetinné zlomky	Francesco Pellos, 1492.
$x^2, x^3, \dots$	exponenty	Nicole Oresme okolo 1360 zapisoval pomocí exponentů mocniny celých čísel, avšak tento zápis se neujal. Do všeobecného užívání je uvedl až René Descartes na konci prvé poloviny 17. stol.
$\sqrt{}$	odmocnina	Johann Widmann, 1525.
$\prod$	součin členů	Názor historiků se různí. René Descartes symbol užíval již před polovinou 17. stol. Od roku 1812 jej začal užívat Karl Friedrich Gauss. Sice později, ale jeho symbol se ujal.
$\sum$	součet členů	Leonhard Euler, 1755.
%	procenta	Procenta se začala užívat v Itálii okolo 1425. Autor není znám.
$\vert\vert$	absolutní hodnota	William Oughtred, 1628.
!	faktoriál	Christian Kramp, 1808.

2 Základy vektorové algebry

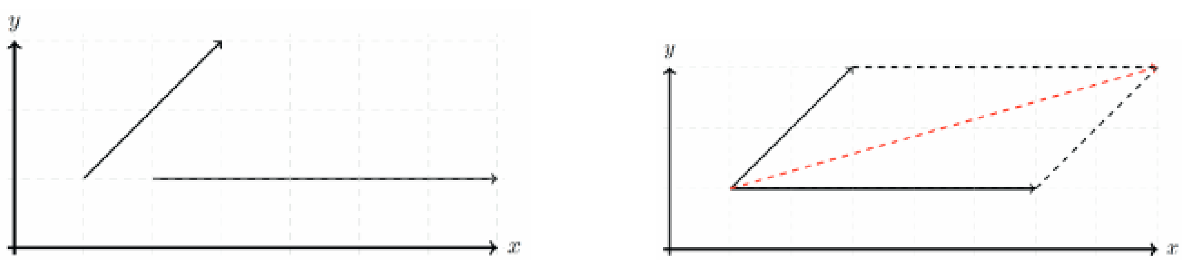
Studiem vektorů se zabývá odvětví matematiky známé jako analytická geometrie, jejíž základy se typicky vyučují ve třetím ročníku na střední škole. Níže uvádím základní pojmy, bez kterých se toto odvětví neobejde.

2.1 Vektor

2.1.1 Základní pojmy

Vektor lze zavést buďto geometricky jako třídu (množinu) ekvivalence orientovaných úseček (tj. úseček s danou velikostí a směrem, případně mající počátek v konkrétním bodě), nebo algebraicky jako uspořádanou n-tici reálných čísel (tedy vnímáme vektor jako prvek vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$). **Velikost (normu) vektoru** vypočteme jako odmocninu ze součtu druhých mocnin rozdílu počátečního a koncového bodu, respektive jako odmocninu ze součtu druhých mocnin jeho složek (souřadnic). Tedy pro vektor $\vec{x} = (x_1, x_2)$ platí $||\vec{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Toto plyne z Pythagorovy věty.

Pokud chceme vektory sečíst, posuneme je k sobě tak, aby vycházely ze stejného bodu, a doplníme je na rovnoběžník[15], viz obr. 3. Souřadnice výsledného vektoru (na obrázku červeně) získáme jako součet jednotlivých složek dvou zadaných vektorů.



Obrázek 3: Sčítání vektorů

2.1.2 Vektor volný, vázaný a opačný

Termínem **volný vektor** rozumíme vektor, který není spjatý s žádným bodem v soustavě souřadnic; zajímá nás pouze jeho velikost a směr. **Vázaný vektor** má konkrétní počátek. Má-li vektor $\vec{v}$ opačný směr než vektor $\vec{w}$, píšeme $\vec{v} = -\vec{w}$.

2.1.3 Další pojmy

Nulovým vektorem nazýváme n-složkový vektor, který má každou souřadnici rovnu nule. **Jednotkový vektor** je takový vektor, jehož norma je rovna jedné. Máme-li n vektorů $\vec{x}_1$ až $\vec{x}_n$ a reálná čísla $k_1, k_2, \dots, k_n$, kterým říkáme koeficienty, **lineární kombinací** těchto vektorů je vektor $\vec{v}$, který vznikne jako součet součinů jednotlivých koeficientů s danými vektory, matematicky

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i \vec{x}_i.$$

[15] Pravidlo pro skládání dvou vektorů vyslovil poprvé explicitně Galileo Galilei, v jistém smyslu bylo však známo již Aristotelovi. [?]

Vektory $\vec{x}_1$ až $\vec{x}_n$ jsou **lineárně závislé**, pokud existuje jiná než triviální lineární kombinace (tj. $k_i = 0; i = 1,2, \ldots, n$), kterou z nich získáme nulový vektor. V opačném příkladě říkáme, že jsou vektory **lineárně nezávislé**.

2.1.4 Vektor jako prvek vektorového prostoru

Algebraické struktury, kterým se říká **vektorové prostory**, se axiomaticky zavádějí až na vysoké škole. Jejich pochopení vyžaduje umění práce s kvantifikátory, tj. znalost predikátové logiky. Pro kompletnost uveďme definici vektorového prostoru.
Definice. [Vektorový prostor]. Nechť jsou dány

1. neprázdná množina V,
2. číselné těleso T,
3. zobrazení $\oplus$: $V \times V \to V$,
4. zobrazení $\odot$: $T \times V \to V$.

Řekneme, že V je vektorový prostor nad tělesem T s vektorovými operacemi $\oplus$, $\odot$ právě když je množina V uzavřená na operace $\oplus$ a $\odot$ a současně platí axiomy vektorového prostoru:

1. komutativita: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{v} \oplus \vec{u}$,
2. asociativita: $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V : (\vec{u} \oplus \vec{v}) \oplus \vec{w} = \vec{u} \oplus (\vec{v} \oplus \vec{w})$,
3. existence neutrálního prvku: $\exists \vec{o} \in V, \forall \vec{u} \in V : \vec{u} \oplus \vec{o} = \vec{u}$,
4. existence opačných prvků: $\forall \vec{u} \in V \exists - \vec{u} \in V : \vec{u} \oplus (-\vec{u}) = \vec{o}$,
5. distributivita: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall a \ \in T : a \odot (\vec{u} \oplus \vec{v}) = a \odot \vec{u} \oplus a \odot \vec{v}$,
6. $\forall \vec{u} \in V, \forall a, b \in T : (a \oplus b) \odot \vec{u} = a \odot \vec{u} \oplus b \odot \vec{u}$,
7. $\forall \vec{u} \in V, \forall a, b \in T : a \odot (b \odot \vec{u}) = (a \odot b) \odot \vec{u}$,
8. $\forall \vec{u} \in V : 1\vec{u} = \vec{u}$.

Prvky množiny V nazýváme **vektory**, vektor $\vec{o}$ se nazývá **nulový vektor** a prvky tělesa T nazýváme **skaláry**.

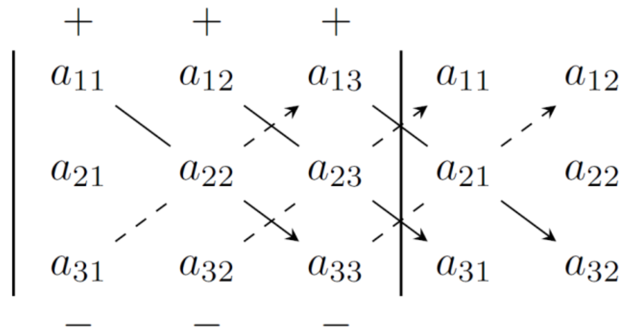
2.2 Matice, determinant

Matice je obdélníkové schéma čísel. Říkáme, že matice je typu $m \times n$, pokud má m řádků a n sloupců. Speciálním typem matic jsou čtvercové matice, které mají stejný počet sloupců jako řádků. Na obecné matice typu $m \times n$ lze také nahlížet jako na „seřazení“ n m-složkových vektorů. **Řád čtvercové matice** je číslo, které udává počet jejích řádků. Jelikož se jedná o matici čtvercovou, je toto číslo stejné jako počet jejích sloupců. Pro ilustraci uveďme matici typu 3×4, která má každý svůj prvek roven jedné:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinant je číslo přiřazené čtvercové matici. Je-li tato matice řádu dva, její determinant je roven rozdílu součinu prvků na hlavní diagonále $(a_{11}a_{22})$ a součinu prvků na vedlejší diagonále $(a_{12}a_{21})$. Pro matice řádu tři používáme k výpočtu determinantu tzv. **Sarrusovo pravidlo**, viz obr. 4, či další metody (Laplaceův rozvoj[16], nebo použití vlastností determinantu).

[16] Pierre Simon de Laplace: francouzský matematik, fyzik, astronom a politik, 1749–1827.



Obrázek 4: Sarrusovo pravidlo

2.2.1 Vlastnosti determinantu

1. Při výměně dvou řádků nebo dvou sloupců se znaménko determinantu změní na opačné. Z této vlastnosti plyne, že pokud má daná matice $\mathbb{A}$ dva stejné sloupce/řádky, platí $\det(\mathbb{A}) = -\det(\mathbb{A}) = 0$.
2. Pokud je jeden z řádků nebo sloupců nulový, je celý determinant roven nule.
3. Když přičteme k jednomu řádku k-násobek řádku jiného, determinant se nezmění. To samé platí se sloupci.
4. Je-li nějaký řádek/sloupec matice násobkem nějakého čísla k (neuvažujeme $k = 0$), můžeme tento řádek/sloupec číslem k vydělit. Potom ale musíme determinant tímto číslem k vynásobit, aby se nezměnila jeho hodnota.

2.3 Standardní skalární součin

2.3.1 Definice a značení

Skalární součin, též vnitřní součin, dvou vektorů je číslo (skalár), které vypočteme tak, že postupně vynásobíme i-tou složku prvního vektoru s i-tou složkou druhého vektoru a sečteme je. Máme-li dva dvousložkové vektory $\vec{u} = (u_1; u_2)$ a $\vec{v} = (v_1; v_2)$, pak jejich skalární součin bude vypadat

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Máme-li dva n-složkové vektory, jejich skalární součin vypočteme jako součet součinů jejich jednotlivých složek:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

V literatuře se občas skalární součin značí úhlovými závorkami, tedy $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. V této práci ale používáme značení s tečkou: $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2.3.2 Vlastnosti skalárního součinu

Skalární součin má tyto vlastnosti:

1. **Pozitivní definitnost**: $\forall \vec{u} \in V: \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$; rovnost nastane právě tehdy, když $\vec{u} = \vec{o}$.

2. **Symetrie**: Z komutativity sčítání i násobení nad tělesem reálných čísel vyplývá, že nezáleží na pořadí činitelů, tj. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
3. **Aditivita**: $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V: \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
4. **Homogenita**: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V\ \forall \alpha \in \mathbb{R}: \vec{u} \cdot (\alpha\, \vec{v}) = \alpha\, (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

2.3.3 Geometrický smysl skalárního součinu

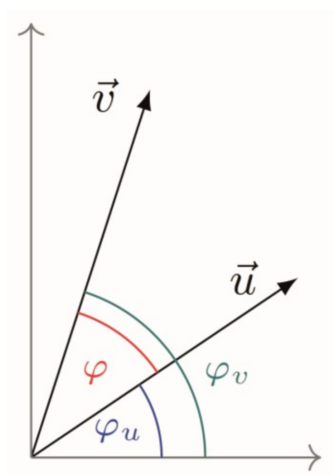
Velikost skalárního součinu je dána součinem absolutních hodnot vektorů a kosinu úhlu mezi nimi sevřeného, tedy, matematicky zapsáno:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}|| \cos\alpha.$$

Pomocí tohoto vzorce (vydělení velikostí $\vec{u}$ a velikostí $\vec{v}$) se dá spočítat odchylka dvou vektorů (α je ostrý úhel):

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||\ ||\vec{v}||} \qquad (\dagger)$$

Předpokládáme, že oba vektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ (a tedy i jejich velikosti) jsou nenulové. Rovnici si označíme křížkem, protože na ni budeme dále odkazovat.



Obrázek 5: Výpočet odchylky dvou vektorů pomocí goniometrických funkcí a součtových vzorců

Odvození 1. Podívejme se na obrázek 5. Chceme vypočítat úhel φ, tedy odchylku těchto dvou vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Z definic funkcí sinus a kosinus sestavíme následující čtyři rovnice:

$$\cos\varphi_u = \frac{u_x}{||\vec{u}||}, \qquad (1)$$

$$\cos\varphi_v = \frac{v_x}{||\vec{v}||}, \qquad (2)$$

$$\sin\varphi_u = \frac{u_y}{||\vec{u}||}, \qquad (3)$$

$$\sin\varphi_v = \frac{v_y}{||\vec{v}||}. \tag{4}$$

Rozepíšeme si úhel φ:

$$\cos\varphi = \cos(\varphi_v - \varphi_u).$$

Použijeme součtové vzorce:

$$\cos(\varphi_v - \varphi_u) = \cos\varphi_v \cdot \cos\varphi_u + \sin\varphi_v \cdot \sin\varphi_u.$$

Dosadíme z rovnic (1) až (4):

$$\cos\varphi_v \cdot \cos\varphi_u + \sin\varphi_v \cdot \sin\varphi_u = \frac{v_x}{||\vec{v}||} \cdot \frac{u_x}{||\vec{u}||} + \frac{v_y}{||\vec{v}||} \cdot \frac{u_y}{||\vec{u}||}.$$

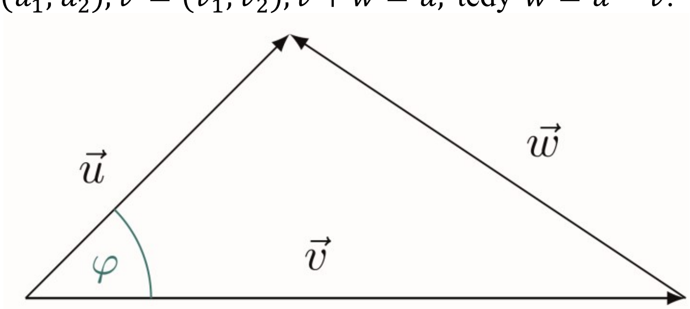
A převedeme na společný zlomek:

$$\frac{u_x v_x + u_y v_y}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}.$$

∴

Odvození 2. Shrňme vědomosti z obrázku 6:

$\vec{u} = (u_1; u_2), \vec{v} = (v_1; v_2), \vec{v} + \vec{w} = \vec{u}$, tedy $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$.



Obrázek 6: Výpočet odchylky dvou vektorů pomocí kosinové věty

Nyní použijeme kosinovou větu:

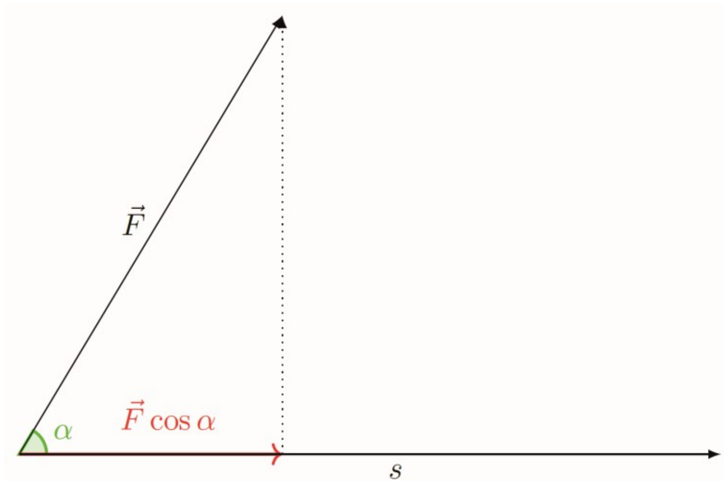
$$\begin{aligned}
||\vec{w}||^2 &= ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\,||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos\varphi \\
2\,||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos\varphi &= ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{w}||^2 \\
||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos\varphi &= \frac{||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{w}||^2}{2} \\
||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos\varphi &= \frac{u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_1^2 - ((u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2)}{2} \\
||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos\varphi &= \frac{u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_1^2 - (u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2)}{2} \\
||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos\varphi &= \frac{2u_1v_1 + 2u_2v_2}{2} \\
||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos\varphi &= u_1v_1 + u_2v_2.
\end{aligned}$$

♠ *Pozorování.* Normu vektoru $\vec{u}$ lze spočítat jako odmocninu ze skalárního součinu: $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||\,||\vec{u}||\cos 0°$, tedy $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$, tj. $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Tímto se dostáváme ke geometrickému znázornění a propojení s fyzikou. Vzpomeňme na vzoreček pro mechanickou práci

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = ||\vec{F}||\ ||\vec{s}||\cos\alpha,$$

kde W značí práci, $\vec{F}$ vektor síly, s dráhu a α je úhel mezi vektorem síly a dráhy. Práce se tedy rovná součinu dráhy s a pravoúhlého průmětu síly do směru dráhy (viz obr. 7). Složka, která je kolmá ke dráze, práci nekoná.



Obrázek 7: Geometrický význam skalárního součinu

♠ *Pozorování.* Pokud síla F působí ve směru pohybu s, je potom kosinus úhlu mezi nimi sevřeného roven jedné $(\cos 0° = 1)$; tento člen tedy můžeme vynechat. Uvádíme to zde proto, že se čtenář možná setkal pouze se vzorečkem $W = F \cdot s$.

Skalární součin dvou nenulových vektorů je roven nule právě tehdy, když jsou vektory navzájem kolmé: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ $(\vec{u} \neq \vec{o} \neq \vec{v})$.

Odvození. Dosadíme-li do vztahu (†) na straně za α úhel $\frac{\pi}{2}$, vyplyne nám

$$0 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||\ ||\vec{v}||}.$$

Zlomek se rovná nule právě tehdy, když má nulový čitatel. ∴

♠ *Pozorování.* Nechť $\vec{u}$ má souřadnice $\vec{u} = (a; b)$. Pak $\vec{v}$, který je kolmý na $\vec{u}$, má souřadnice $\vec{v} = (-b; a)$. Platí totiž, že $\vec{u} \cdot \vec{v} = a(-b) + ba = 0$.

2.4 Vektorový součin

2.4.1 Značení a vlastnosti vektorového součinu

Vektorovým součinem dvou vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$ $(\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b})$, kde „×" značí tento součin. Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ je kolmý na rovinu určenou vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

První odvození kolmosti vektorového součinu. Již známe skalární součin. Když nám skalární součin dvou vektorů vyjde nula, jsou na sebe tyto dva vektory kolmé. Chceme tedy dokázat, že $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ & $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$. Rozepišme si např. výraz $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$; složky $\vec{u}$ jsou

$\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a složky $\vec{v}$ jsou $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$:

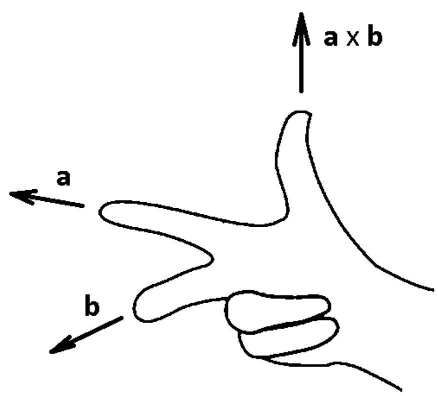
$$(u_1; u_2; u_3) \cdot (u_2v_3 - u_3v_2; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1) =$$

$$= u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) =$$

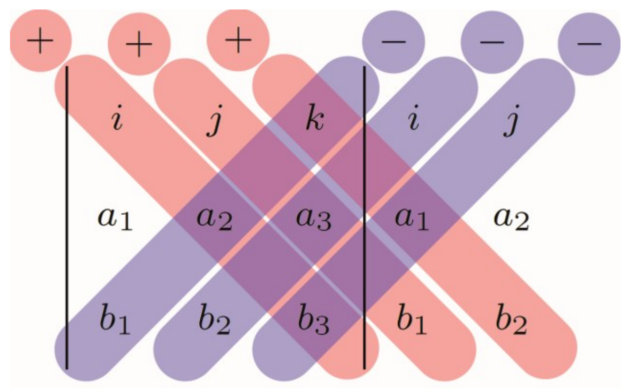
$$= u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_2u_1v_3 + u_3u_1v_2 - u_3u_2v_1 =$$

$$= \underline{\underline{0}}. \qquad \therefore$$

Směr vektoru $\vec{c}$ určujeme dle pravidla pravé ruky, viz obr. 8.



Obrázek 8: Pravidlo pravé ruky



Obrázek 9: Pomůcka pro výpočet vektorového součinu

Matematický výpočet vektorového součinu lze připodobnit k výše zmíněnému Sarrusovu pravidlu: $\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$. Na obrázku 9 můžeme vidět toto připodobnění graficky; pomocná písmenka i, j, k zastupují první, druhou a třetí souřadnici výsledného vektorového součinu.

♠ *Pozorování.* Když hovoříme o vektorovém součinu, nemá smysl uvažovat dvojsložkové vektory.

♠ *Pozorování.* $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Odvození výpočtu vektorového součinu. Mějme dva trojsložkové vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$: $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$. Hledáme vektor $\vec{w}$ takový, aby byl kolmý k oběma vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$, tedy musí platit $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ & $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. Rozepišme si skalární součiny po složkách:

$$u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 = 0 \ \backslash \cdot v_3 \qquad (1)$$
$$v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = 0 \ \backslash \cdot (-u_3) \qquad (2)$$
$$u_1w_1v_3 + u_2w_2v_3 + u_3w_3v_3 = 0 \qquad (1)$$
$$-v_1w_1u_3 - v_2w_2u_3 - v_3w_3u_3 = 0 \qquad (2)$$
$$w_1(u_1v_3 - v_1u_3) + w_2(u_2v_3 - v_2u_3) = 0 \qquad (3)$$
$$w_2 = -\frac{w_1(u_1v_3 - v_1u_3)}{u_2v_3 - v_2u_3}.$$

Rovnice (3) vznikla jako součet rovnic (1) a (2). Vyjádřili jsme si w_2, a nyní zvolíme w_1 jako $u_2v_3 - v_2u_3$. Dopočítáme, že w_2 je rovno $v_1u_3 - u_1v_3$. Zbývá nám už jenom vypočítat w_3. Vyjádřeme jej například z rovnice (1):

$$w_3 = \frac{-u_1w_1 - u_2w_2}{u_3} = \frac{-u_1u_2v_3 + u_1v_2u_3 - u_2v_1u_3 + u_1u_2v_3}{u_3} = u_1v_2 - u_2v_1.$$

Náš vektor $\vec{w}$ má tedy složky $\vec{w} = (u_2v_3 - v_2u_3; v_1u_3 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1)$. ∴

Za předpokladu, že vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou nenulové, je velikost vektoru $\vec{c}$ rovna

$$||\vec{c}|| = ||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\sin\alpha, \tag{❄}$$

kde α je úhel svíraný vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$, $0° < \alpha < 180°$.

Odvození. Obě strany rovnice jsou nezáporná čísla, můžeme tedy celou rovnici umocnit na druhou:

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2\sin^2\varphi.$$

Použijeme známou goniometrickou identitu $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2(1 - \cos^2\varphi).$$

Nyní provedeme substituci za člen $\cos\varphi$ podle vzorce pro skalární součin (vzorec †):

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2\left[1 - \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||}\right)^2\right].$$

Po roznásobení pravé strany vypadá rovnice takto:

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2.$$

Použijeme definici velikosti vektoru a definici skalárního součinu; vše za předpokladu, že jsme ve trojrozměrném prostoru, každý vektor má tedy tři složky $(\vec{u} = (u_1; u_2; u_3), \vec{v} = = (v_1; v_2; v_3))$:

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2.$$

Teď už si jenom stačí pohrát s pravou stranou rovnice: roznásobíme/umocníme, odečteme členy, které se dají odečíst (rozlišeno barevně) a využijeme vzorců $(a + b + c)^2 = = a^2 + b^2 + c^2 + +2ab + 2bc + 2ac$, a $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$= u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 - (u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + +u_3^2v_3^2 + 2u_1v_1u_2v_2 + 2u_2v_2u_3v_3 + 2u_1v_1u_3v_3) =$

$= \underline{\underline{(u_1v_2 - u_2v_1)^2 + (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2.}}$

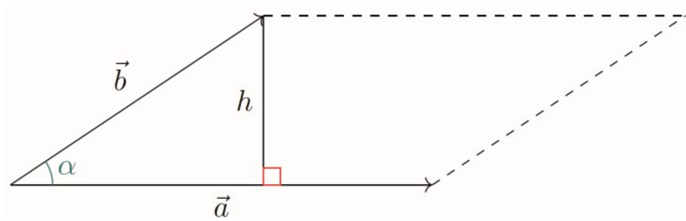
Dvakrát jsme podtrhli pravou stranu rovnice, kterou se snažíme dokázat. Rozepišme si ještě stranu levou:

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||(u_2v_3 - u_3v_2; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1)||^2 =$$

$$= \left(\sqrt{(u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2}\right)^2.$$

A vskutku, tento výraz se rovná pravé straně. ∴

2.4.2 Geometrický význam vektorového součinu

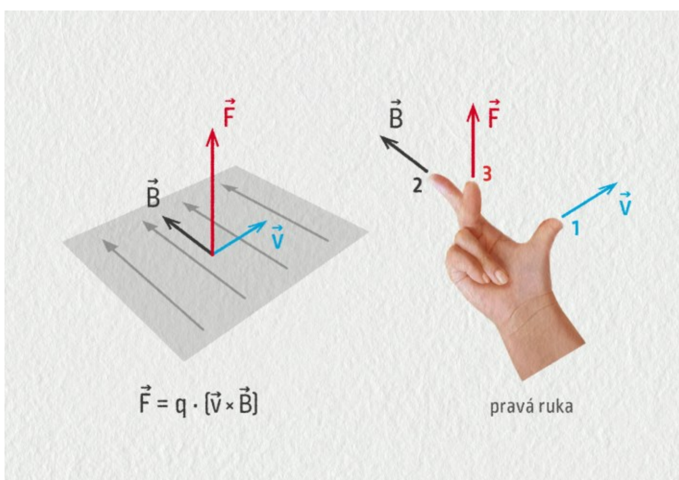


Obrázek 10: Geometrický význam vektorového součinu

Na obrázku 10 je rovnoběžník určený vektory $\vec{a}, \vec{b}$. Jeho obsah S se vypočítá jako základna krát výška. Základna je vektor $\vec{a}$, výšku máme označenou h. Tato výška nám určuje pravoúhlý trojúhelník, ve kterém můžeme použít goniometrické funkce:

$$\sin\alpha = \frac{h}{||\vec{b}||}.$$

Z této rovnice vyjádříme výšku: $h = ||\vec{b}||\sin\alpha$. Můžeme tedy psát, že $S = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\sin\alpha$. Tato rovnice by nám měla připomenout vzorec ❄. Platí tedy: $S = ||\vec{a} \times \vec{b}||$.

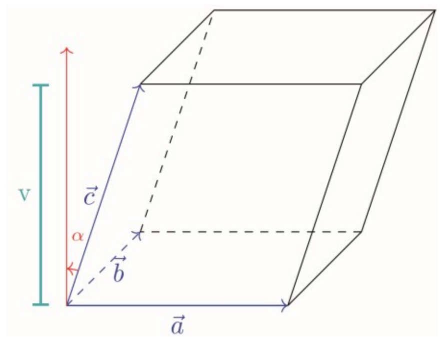


Obrázek 11: Fyzikální význam vektorového součinu

Na obrázku 11 je znázorněn fyzikální jev ilustrující vektorový součin. Veličina $\vec{F}$ značí magnetickou sílu, která působí na nabitou částici, $\vec{B}$ značí vektor magnetické indukce a $\vec{v}$ vektor rychlosti částice.

2.5 Smíšený součin

Smíšený součin je ternární operace (tedy potřebujeme tři vektory), jejímž výsledkem je číslo. Toto číslo udává objem rovnoběžnostěnu, který je těmito třemi vektory tvořen.



Obrázek 12: Rovnoběžnostěn určený třemi vektory

Odvoďme si vzorec pro výpočet rovnoběžnostěnu (obr. 12). Jak víme, objem tohoto tělesa spočítáme jako obsah podstavy krát výška. Z obrázku 12 je patrné, že obsahem podstavy bude velikost vektorového součinu vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Jeho výšku vypočítáme jako velikost vektoru $\vec{c}$, který vynásobíme kosinem úhlu α (vzpomeňme na projekci a na obrázek 7). Zapišme si to matematicky:

$$V = ||\vec{a} \times \vec{b}||\ ||\vec{c}||\cos\alpha.$$

Poté, co si uvědomíme, že na pravé straně máme velikost jednoho vektoru krát velikost druhého vektoru krát úhel mezi nimi sevřený (vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je na obrázku 12 znázorněn červenou barvou), můžeme přepsat pravou stranu:

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Rozepišme si jednotlivé složky obou vektorů:

$$V = \left(det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; -det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}; det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \right) \cdot (c_1; c_2; c_3) =$$

$$= c_1\, det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - c_2\, det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + c_3\, det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Poslední uvedený výraz je Laplaceovým rozvojem determinantu

$$det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

podle třetího řádku. Celkem je tedy objem našeho rovnoběžnostěnu roven

$$V = \left|det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\right|.$$

Bereme v potaz absolutní hodnotu tohoto determinantu pro případ, že by úhel α nebyl ostrý.

♠ *Pozorování.* Smíšený součin tří vektorů je roven nule, právě když jsou komplanární, tedy leží-li v jedné rovině.

Z výše uvedené úlohy jsme se dozvěděli, že smíšený součin lze vypočítat jako determinant matice 3×3, kde v jednotlivých řádcích jsou dané tři vektory. Zapsáno matematicky:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Pomocí této znalosti můžeme dokázat tvrzení, že vektorový součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ vyprodukuje vektor, který je kolmý na vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

Druhé odvození kolmosti vektorového součinu. Stejně jako u prvního odvození ze strany proofofvec chceme dokázat, že $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ & $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$, ale jiným způsobem: za použití znalosti, že smíšený součin lze vypočítat jako determinant matice, tedy:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}.$$

S použitím první vlastnosti determinantu z oddílu 2.2.1 zjistíme, že je celý determinant roven nule. Obdobně řešíme i rovnici $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$.

$\therefore$

3 Skalární součin jako bilineární zobrazení

Skalární součin je velmi užitečný nástroj při hledání délky vektoru a odchylky mezi dvěma vektory. Zatím jsme pracovali se standardním skalárním součinem nad tělesem $\mathbb{R}$. Skalární součin je zobrazení, které může být aplikováno na obecnějším vektorovém prostoru V (vektorový prostor je definován v oddíle 2.1.4).

Než uvedeme obecnější definici skalárního součinu, která platí nejen na reálných číslech, ale také na komplexních číslech, řekněme si, co je to číslo komplexně sdružené a jak se značí:

Definice. [Komplexně sdružené číslo]. Číslo, které je komplexně sdružené k číslu $z = [a; b]$, je číslo $\bar{z} = [a; -b]$.

Příklad. Mějme komplexní číslo $z = 3 + 8i$. Pak $\bar{z} = 3 - 8i$.

Poznámka. Máme-li na mysli těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ nebo těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$, označme je souhrnně T.

Definice. [Skalární součin]. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. *Skalárním součinem* na prostoru V nazveme každé zobrazení f množiny $V \times V$ do tělesa T, které má následující vlastnosti:

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V: f(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{f(\vec{y}, \vec{x})}$; pro $T = \mathbb{R}$ platí $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V: f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$,
2. $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V: f(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = f(\vec{x}, \vec{z}) + f(\vec{y}, \vec{z})$,
3. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall a \in T: f(a\vec{x}, \vec{y}) = a \cdot f(\vec{x}, \vec{y})$,
4. $\forall \vec{x} \in V, \vec{x} \neq \vec{o}: f(\vec{x}, \vec{x}) > 0;\ f(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{o}$.

Příklad. Předpis pro standardní skalární součin nad $\mathbb{R}^n$ jsme uvedli v oddíle 2.3.1.

♠ *Pozorování.* Z definice pro skalární součin vyplývá, že pro vektor $\vec{w}$ platí: $f(\vec{w}, \vec{o}) =$ $= 0 = f(\vec{o}, \vec{w})$, kde $\vec{o}$ je nulový vektor.

Každý vektorový prostor, který je vybaven skalárním součinem, má také **normu**.

Definice. [Norma]. Normou vektoru $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme číslo

$$||\vec{x}|| = \sqrt{f(\vec{x}, \vec{x})}.$$

Definice. [Eukleidovská norma]. Norma vektoru $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ na reálném vektorovém prostoru se standardním skalárním součinem je

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

3.1 Užitečné vztahy

Oddíl 3.1 se zabývá následujícími tvrzeními (a jejich důkazy):

1. Cauchy-Schwarzova nerovnost,
2. Trojúhelníková nerovnost,
3. Pythagorova věta,
4. Kosinova věta,
5. Rovnoběžníkové pravidlo,
6. Polarizační identita,
7. Jordan-von Neumannova věta.

3.1.1 Cauchy-Schwarzova nerovnost

Nechť V je reálný/komplexní vektorový prostor se skalárním součinem f. Pak

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \colon |f(\vec{x}, \vec{y})| \leq ||\vec{x}||\, ||\vec{y}||,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když jsou vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ lineárně závislé.

Důkaz 1. Uvažujme vektor $\vec{g}$, který vznikne lineární kombinací dvou nenulových vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$: $\vec{g} = \vec{x} - a\vec{y}$. Pro každý vektor platí, že jeho norma je větší (nebo rovna) nule:, tj.

$$||\vec{g}|| = ||\vec{x} - a\vec{y}|| \geq 0.$$

Rovnici umocníme:

$$||\vec{x} - a\vec{y}||^2 \geq 0.$$

Podle definice normy rozepíšeme levou stranu nerovnosti:

$$f(\vec{x} - a\vec{y}, \vec{x} - a\vec{y}) \geq 0.$$

Dle bodu (ii) v definici skalárního součinu tuto levou stranu upravíme:

$$f(\vec{x}, \vec{x}) - af(\vec{x}, \vec{y}) - af(\vec{y}, \vec{x}) + a^2 f(\vec{y}, \vec{y}) \geq 0.$$

Jsme na reálném vektorovém prostoru, tedy platí, že $f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$. Dále využijeme definici normy k úpravě nerovnice:

$$||\vec{x}||^2 - 2af(\vec{x}, \vec{y}) + a^2\, ||\vec{y}||^2 \geq 0.$$

Pro větší názornost ještě přeskupíme členy:

$$a^2\, ||\vec{y}||^2 - 2af(\vec{x}, \vec{y}) + ||\vec{x}||^2 \geq 0.$$

Můžeme si všimnout, že levá strana obsahuje členy a^2 a $-2a$, lze ji tedy považovat za kvadratický výraz v proměnné a. Pojďme vypočítat diskriminant tohoto kvadratického výrazu:

$$D = (-2f(\vec{x}, \vec{y}))^2 - 4\, ||\vec{y}||^2 ||\vec{x}||^2.$$

Kvadratický trojčlen na levé straně má být větší než nula, což znamená, že pokud bychom uvažovali kvadratickou rovnici, která je tvořena právě tímto trojčlenem, neměla by reálné kořeny, nebo jeden dvojnásobný. Z toho vyplývá, že její diskriminant je nekladný:

$$0 \geq D = (-2f(\vec{x}, \vec{y}))^2 - 4\, ||\vec{y}||^2 ||\vec{x}||^2 = 4f^2(\vec{x}, \vec{y}) - 4\, ||\vec{y}||^2 ||\vec{x}||^2.$$

Vydělíme čtyřmi:

$$0 \geq f^2(\vec{x}, \vec{y}) - ||\vec{y}||^2 ||\vec{x}||^2,$$

pravý člen převedeme na levou stranu:

$$||\vec{x}||^2\ ||\vec{y}||^2 \geq f^2(\vec{x},\vec{y}),$$

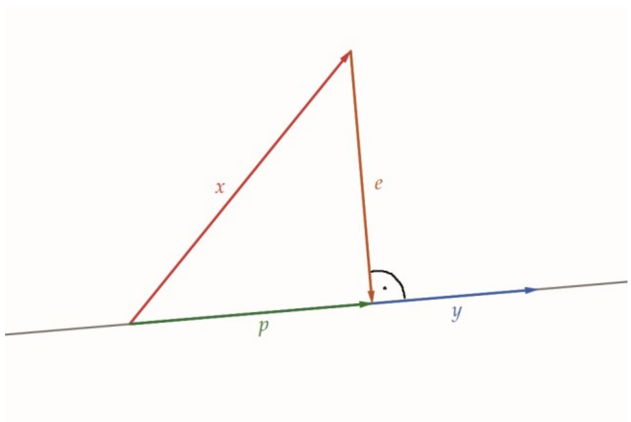
což po odmocnění dává:

$$|f(\vec{x},\vec{y})| \leq |\ ||\vec{x}||\ ||\vec{y}||\ |.$$

Norma je nezáporná, proto absolutní hodnotu na pravé straně můžeme odstranit:

$$|f(\vec{x},\vec{y})| \leq ||\vec{x}||\ ||\vec{y}||. \qquad \therefore$$

Důkaz 2. Druhý důkaz Cauchy-Schwarzovy nerovnosti využije faktu, že vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ lze jeden projektovat do druhého. Na obr. 13 provedeme projekci vektoru $\vec{x}$ na vektor $\vec{y}$:



Obrázek 13: K druhému důkazu Cauchy-Schwarzovy nerovnosti

Vycházejme z faktu, že délka vektoru $\vec{e}$ je nezáporná, tj.

$$||\vec{e}|| \geq 0.$$

Dále platí:

$$0 \leq ||\vec{e}||^2 = f(\vec{e},\vec{e}).$$

Z obrázku je patrné, že $\vec{e} = \vec{p} - \vec{x}$; dosaďme tedy za $\vec{e}$:

$$0 \leq ||\vec{e}||^2 = f(\vec{e},\vec{e}) = f(\vec{p}-\vec{x},\vec{p}-\vec{x}).$$

Dále upravujeme:

$$f(\vec{p}-\vec{x},\vec{p}-\vec{x}) = f(\vec{p},\vec{p}) - 2f(\vec{x},\vec{p}) + f(\vec{x},\vec{x}).$$

Nyní za $\vec{p}$ dosadíme $\frac{f(\vec{x},\vec{y})}{f(\vec{y},\vec{y})}\vec{y}$: (proč dosadíme zrovna tento výraz se čtenář dozví v oddílu 5.2)

$$f(\vec{p},\vec{p}) - 2f(\vec{x},\vec{p}) + f(\vec{x},\vec{x}) = \frac{f^2(\vec{x},\vec{y})}{f^2(\vec{y},\vec{y})} f(\vec{y},\vec{y}) - 2\frac{f^2(\vec{x},\vec{y})}{f(\vec{y},\vec{y})} + f(\vec{x},\vec{x}).$$

Tudíž máme, že

$$0 \leq f(\vec{e},\vec{e}) = \frac{f^2(\vec{x},\vec{y})}{f^2(\vec{y},\vec{y})} f(\vec{y},\vec{y}) - 2\frac{f^2(\vec{x},\vec{y})}{f(\vec{y},\vec{y})} + f(\vec{x},\vec{x})$$

a můžeme výraz napravo upravovat. První člen obsahuje v čitateli $f(\vec{y},\vec{y})$ a ve jmenovateli $f^2(\vec{y},\vec{y})$, můžeme to tedy zkrátit. Poslední člen rozšíříme výrazem $f(\vec{y},\vec{y})$, čímž převedeme všechny tři členy výrazu na společného jmenovatele:

$$0 \leq \frac{f^2(\vec{x},\vec{y})}{f(\vec{y},\vec{y})} - 2\frac{f^2(\vec{x},\vec{y})}{f(\vec{y},\vec{y})} + \frac{f(\vec{x},\vec{x})f(\vec{y},\vec{y})}{f(\vec{y},\vec{y})}.$$

Platí, že $f(\vec{y},\vec{y}) \geq 0$, čili čitatel $f^2(\vec{x},\vec{y}) - 2f^2(\vec{x},\vec{y}) + f(\vec{x},\vec{x})f(\vec{y},\vec{y})$ musí být také neostře větší než nula.

Konečně máme, že

$$-f^2(\vec{x},\vec{y}) + f(\vec{x},\vec{x})f(\vec{y},\vec{y}) \geq 0,$$

z čehož plyne požadovaná nerovnost. ∴

3.1.2 Trojúhelníková nerovnost

Nechť V je reálný/komplexní vektorový prostor se skalárním součinem f. Pak

$$\forall \vec{x},\vec{y} \in V\colon ||\vec{x}+\vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||.$$

Důkaz.

$$||\vec{x}+\vec{y}||^2 \leq (||\vec{x}|| + ||\vec{y}||)^2$$
$$f(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) \leq (||\vec{x}|| + ||\vec{y}||)^2$$
$$f(\vec{x},\vec{x}) + 2f(\vec{x},\vec{y}) + f(\vec{y},\vec{y}) \leq (||\vec{x}|| + ||\vec{y}||)^2.$$

Dále upravujeme levou stranu (označme ji písmeny LHS, z anglického left-hand side):

$$LHS = f(\vec{x},\vec{x}) + 2f(\vec{x},\vec{y}) + f(\vec{y},\vec{y}) = ||\vec{x}||^2 + 2f(\vec{x},\vec{y}) + ||\vec{y}||^2,$$

přidáme do prostředního členu absolutní hodnotu, čímž dostaneme nerovnost

$$||\vec{x}||^2 + 2f(\vec{x},\vec{y}) + ||\vec{y}||^2 \leq ||\vec{x}||^2 + 2|f(\vec{x},\vec{y})| + ||\vec{y}||^2.$$

Nyní použijeme Cauchy-Schwarzovu nerovnost:

$$||\vec{x}||^2 + 2\,|f(\vec{x},\vec{y})| + ||\vec{y}||^2 \leq ||\vec{x}||^2 + 2\,||\vec{x}||\,||\vec{y}|| + ||\vec{y}||^2.$$

Dále pak $||\vec{x}||^2 + 2\,||\vec{x}||\,||\vec{y}|| + ||\vec{y}||^2 = (||\vec{x}|| + ||\vec{y}||)^2$.

Dohromady tedy $LHS = ||\vec{x} + \vec{y}||^2 \leq (||\vec{x}|| + ||\vec{y}||)^2$. ∴

3.1.3 Pythagorova věta

Nechť V je reálný/komplexní vektorový prostor se skalárním součinem f. Pro každé dva kolmé vektory $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platí:

$$||\vec{x} + \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2.$$

Důkaz. $||\vec{x} + \vec{y}||^2 = f(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{x}) + 2f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{y}, \vec{y})$, člen $2f(\vec{x}, \vec{y})$ je roven nule (vektory jsou kolmé, čili jejich skalární součin je nulový), tj. $f(\vec{x}, \vec{x}) + f(\vec{y}, \vec{y}) = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2$. ∴

3.1.4 Kosinova věta

Nechť V je reálný/komplexní vektorový prostor se skalárním součinem f. Pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in V$, jejichž úhel je φ, platí:

$$||\vec{x} - \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - 2\,||\vec{x}||\,||\vec{y}||\cos\varphi.$$

Důkaz. $||\vec{x} - \vec{y}||^2 = f(\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{x}) - 2f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{y}, \vec{y})$, tj. $||\vec{x} - \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 - 2f(\vec{x}, \vec{y}) + ||\vec{y}||^2$. Ze vztahu (†) víme, že $f(\vec{x}, \vec{y}) = ||\vec{x}||\,||\vec{y}||\cos\varphi$, čili

$$||\vec{x} - \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 - 2\,||\vec{x}||\,||\vec{y}||\cos\varphi + ||\vec{y}||^2.$$

∴

3.1.5 Rovnoběžníkové pravidlo

Nechť V je reálný/komplexní vektorový prostor se skalárním součinem f; $\vec{u}, \vec{v} \in V$. Pak platí

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 + ||\vec{u} - \vec{v}||^2 = 2\,||\vec{u}||^2 + 2\,||\vec{v}||^2.$$

Důkaz. $||\vec{u} + \vec{v}||^2 + ||\vec{u} - \vec{v}||^2 = f(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) + f(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}) = f(\vec{u}, \vec{u}) + f(\vec{u}, \vec{v}) + $ $+ f(\vec{v}, \vec{u}) + f(\vec{v}, \vec{v}) + f(\vec{u}, \vec{u}) - f(\vec{u}, \vec{v}) - f(\vec{v}, \vec{u}) + f(\vec{v}, \vec{v}) = 2f(\vec{u}, \vec{u}) + 2f(\vec{v}, \vec{v}) = 2\,||\vec{u}||^2 + $ $+ 2\,||\vec{v}||^2$. ∴

3.1.6 Polarizační identita

Nechť V je reálný/komplexní vektorový prostor se skalárním součinem f; $\vec{u}, \vec{v} \in V$. Pak

$$Re(f(\vec{u}, \vec{v})) = \frac{1}{2}(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2),$$

kde Re(z) značí reálnou část komplexního čísla z.

Důkaz. $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = f(\vec{u}, \vec{u}) + f(\vec{u}, \vec{v}) + f(\vec{v}, \vec{u}) + f(\vec{v}, \vec{v}) = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + f(\vec{u}, \vec{v}) + f\overline{(\vec{u}, \vec{v})}$. Protože $z + \bar{z} = 2\,Re(z)$, dostáváme $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\,Re(f(\vec{u}, \vec{v}))$, tj. $||\vec{u} + $ $+ \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 = 2\,Re(f(\vec{u}, \vec{v}))$. ∴

3.1.7 Jordan-von Neumannova věta

Nechť V je reálný vektorový prostor s normou $||\cdot||$, který splňuje rovnoběžníkové pravidlo. Definujme

$$f(\vec{u},\vec{v}) = \frac{||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}-\vec{v}||^2}{4}.$$

Pak f je skalární součin.

Důkaz. Je nutné ověřit všechny vlastnosti skalárního součinu (definice je v oddíle 2.3.2):

1. $\forall \vec{u},\vec{v} \in V: f(\vec{u},\vec{v}) = f(\vec{v},\vec{u})$

$$\begin{aligned} f(\vec{u},\vec{v}) &= \frac{||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}-\vec{v}||^2}{4} \\ &= \frac{||\vec{u}+\vec{v}||^2-(|-1|\,||\vec{u}-\vec{v}||)^2}{4} \\ &= \frac{||\vec{u}+\vec{v}||^2-||(-1)(\vec{u}-\vec{v})||^2}{4} \\ &= \frac{||\vec{v}+\vec{u}||^2-||\vec{v}-\vec{u}||^2}{4} \\ &= f(\vec{v},\vec{u}). \end{aligned}$$

2. $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V: f(\vec{u}+\vec{v},\vec{w}) = f(\vec{u},\vec{w}) + f(\vec{v},\vec{w})$

S využitím rovnoběžníkového pravidla lze získat tyto dvě rovnice:

$$||(\vec{x}+\vec{z})+\vec{y}||^2 + ||(\vec{x}+\vec{z})-\vec{y}||^2 = 2(||(\vec{x}+\vec{z})||^2 + ||\vec{y}||^2) \tag{1}$$
$$||(\vec{x}-\vec{z})+\vec{y}||^2 + ||(\vec{x}-\vec{z})-\vec{y}||^2 = 2(||(\vec{x}-\vec{z})||^2 + ||\vec{y}||^2) \tag{2}$$

Odečtením rovnice (2) od rovnice (1) obdržíme:

$$||(\vec{x}+\vec{z})+\vec{y}||^2 + ||(\vec{x}+\vec{z})-\vec{y}||^2 - (||(\vec{x}-\vec{z})+\vec{y}||^2 + ||(\vec{x}-\vec{z})-\vec{y}||^2) =$$

$$= 2(||(\vec{x}+\vec{z})||^2 + ||\vec{y}||^2) - 2(||(\vec{x}-\vec{z})||^2 + ||\vec{y}||^2),$$

což lze upravit:

- Při úpravě levé strany použijeme asociativitu sčítání:

$$||(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}||^2 + ||(\vec{x}-\vec{y})+\vec{z}||^2 - ||(\vec{x}+\vec{y})-\vec{z}||^2 - ||(\vec{x}-\vec{y})-\vec{z}||^2.$$

- Pravou stranu upravíme tak, že vytkneme dvojku a členy $||\vec{y}||^2$ a $-||\vec{y}||^2$ se vzájemně vyruší:

$$2(||(\vec{x}+\vec{z})||^2 - ||(\vec{x}-\vec{z})||^2).$$

Nyní k sobě dáme první a třetí člen levé strany, což nám vytvoří nový člen $4f(\vec{x}+\vec{y},\vec{z})$; z druhého a čtvrtého členu vytvoříme člen $4f(\vec{x}-\vec{y},\vec{z})$.

Celkem tedy máme:

$$4f(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) + 4f(\vec{x}-\vec{y},\vec{z}) = 8f(\vec{x},\vec{z}),$$

což po vydělení čtyřmi dá

$$f(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) + f(\vec{x}-\vec{y},\vec{z}) = 2f(\vec{x},\vec{z}).$$

Nyní provedeme substituci:

- $\vec{x} = \frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}$
- $\vec{y} = \frac{\vec{u}-\vec{v}}{2}$
- $\vec{z} = \vec{w}$

Naše rovnice tedy vypadá:

$$f\left(\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2} + \frac{\vec{u}-\vec{v}}{2}, \vec{w}\right) + f\left(\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2} - \frac{\vec{u}-\vec{v}}{2}, \vec{w}\right) = 2f\left(\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}, \vec{w}\right).$$

Zlomky převedeme na společného jmenovatele:

$$f\left(\frac{2\vec{u}}{2}, w\right) + f\left(\frac{2\vec{v}}{2}, w\right) = f(\vec{u}+\vec{v}, \vec{w}).$$

Po zkrácení dvojek vidíme výsledný tvar:

$$f(\vec{u}, \vec{w}) + f(\vec{v}, \vec{w}) = f(\vec{u}+\vec{v}, \vec{w})$$

3. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall a \in T: f(a\vec{u}, \vec{v}) = a \cdot f(\vec{u}, \vec{v})$

Důkaz této části je složitější, čtenář jej může nalézt např. v [19].

4. $\forall \vec{u} \in V, \vec{u} \neq \vec{o}: f(\vec{u}, \vec{u}) > 0$

$$f(\vec{u}, \vec{u}) = \frac{||\vec{u}+\vec{u}||^2 - ||\vec{u}-\vec{u}||^2}{4} = \frac{||2\vec{u}||^2 - ||\vec{o}||^2}{4} = \frac{4\,||\vec{u}||^2}{4} = ||\vec{u}||^2 > 0.$$

∴

3.2 Příklady „nestandardních“ skalárních součinů

3.2.1 Vážený skalární součin

Nechť $\vec{u}, \vec{v} \in V_n, c_1, \ldots, c_n \in T,\ f_w(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i v_i$.

Příklad. Nechť $n = 4, c_i = -3i + 1$, tj. váhy jsou $-2, -5, -8$ a -11, $\vec{u} = (7; 2; 4; 1)$ a $\vec{v} = (1; 3; -2; 5)$. Pak $f_w(\vec{u}, \vec{v}) = (-2) \cdot 7 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 \cdot 3 + (-8) \cdot 4 \cdot (-2) + (-11) \cdot 1 \cdot 5 =$ $= -14 - 30 + 64 - 55 = -35$.

3.2.2 Hermitovský součin

Pro dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ v komplexním vektorovém prostoru je Hermitovský součin definován jako

$$f_H(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}.$$

Jedná se o rozšíření standardního skalárního součinu na komplexní vektorové prostory.

3.2.3 Součin v prostoru polynomů

Prostor všech polynomů stupně nejvýše n, označíme jako P_n. Vnitřní součin v tomto prostoru definujeme jako

$$f_P(p(x), q(x)) = \int_a^b p(x)q(x)x,$$

kde $p(x)$ a $q(x)$ jsou polynomy z P_n. Tento součin je definován na intervalu od a do b.

Příklad. Nechť $n = 3, a = 1, b = 4$. Dále $p(x) = 3x^2 - 7$ a $q(x) = x^3 + 9x$. $f_P(p(x), q(x)) = \int_1^4 (3x^2 - 7)(x^3 + 9x)\mathrm{d}x = \int_1^4 3x^5 + 20x^3 - 63x\, dx = [15x^4 + 60x^2 - 63]_1^4 = (15 \cdot 256 + 60 \cdot 16 - 63) - (15 + 60 - 63) = 4\,725.$

3.2.4 Frobeniův součin

Frobeniův součin dvou komplexních matic $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ je dán výrazem:

$$f_F(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}\overline{b_{ij}}.$$

Příklad. Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou dvě komplexní matice,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-i & 3 \\ 5-2i & 7+i \\ 9+12i & 2+5i \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 7+2i \\ 2i & 15 \\ 3-7i & 6-i \end{pmatrix}.$$

Frobeniův součin těchto dvou matic vypočteme takto:

$$f_F(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (1-i)\cdot 4 + 3\cdot(7-2i) + (5-2i)(-2i) + (7+i)\cdot 15 + (9+12i)(3+7i) + (2 + 5i)(6+i) = 76 + 126i.$$

3.2.5 Kroneckerův součin

Máme-li matici $\mathbf{A}$ o rozměrech $m \times n$ a matici $\mathbf{B}$ o rozměrech $p \times q$, je Kroneckerův součin definován jako matice $\mathbf{C}$, kde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Příklad. Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = (1 \quad 2 \quad 4).$ Pak

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5\cdot(1 \quad 2 \quad 4) & 0\cdot(1 \quad 2 \quad 4) \\ \\ 1\cdot(1 \quad 2 \quad 4) & 3\cdot(1 \quad 2 \quad 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

4 Vnější algebra

V této kapitole se přesuneme z Eukleidovských prostorů E^n do vícedimenzionálních vektorových prostorů V^n. Na to potřebujeme ještě pár definic z prostorů $\mathbb{R}^2$ popř. $\mathbb{R}^3$.

Ještě než začneme definovat další matematické koncepty, pozastavme se nad etymologií a historií tohoto matematického odvětví. Vnější algebra se anglicky překládá jako **the exterior algebra** a také nese název po Hermannu Grassmannovi, tj. **the Grassmann algebra**. Hermann Grassmann položil základy této algebry ve svém díle z roku 1844 (viz kapitola 1).

V názvu slovo *vnější* napovídá, že se jedná o typ algebry, která rozšiřuje obvyklou algebru[17] (často zvanou **vnitřní algebra**) o nové prvky a operace, které umožňují pracovat s vektorovými prostory a geometrickými objekty na mnohem obecnější úrovni. Základní operací je v tomto případě **vnější součin** (anglicky **wedge product**), definujeme ji jako obsah rovnoběžníku určeného danými vektory. Značíme ji $\wedge$.

Mezi vlastnosti operací v algebraických strukturách patří například asociativita, komutativita, antikomutativita a distributivita. Operace $\wedge$ je asociativní, antikomutativní a distributivní, matematicky zapsáno:

$$(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge (\vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2) = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2,$$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v}$$

a

$$\vec{v} \wedge (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = (\vec{v} \wedge \vec{w}_1) + (\vec{v} \wedge \vec{w}_2).$$

4.1 Definice

Nejprve definujme podstatný pojem **báze**, na který navážeme vysvětlením pojmu **kanonické báze**, která je speciálním typem obecné báze.

Definice. [Báze vektorového prostoru]. Báze vektorového prostoru V^n je množina lineárně nezávislých vektorů, které generují prostor V^n.

Definice. [Kanonická báze]. Kanonická báze vektorového prostoru V^n je tvořena sloupci jednotkové matice v prostoru V^n.

♠ *Pozorování.* Prvky kanonické báze jsou jednotkové vektory, tj. vektory, jejichž norma je rovna jedné. Zároveň platí, že jsou vůči sobě kolmé (jejich skalární součin je roven nule). Z těchto dvou vlastností vyplývá, že kanonická báze je *ortonormální*.

Příklad. Kanonická báze v prostoru $\mathbb{R}^3$ je tvořena vektory $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

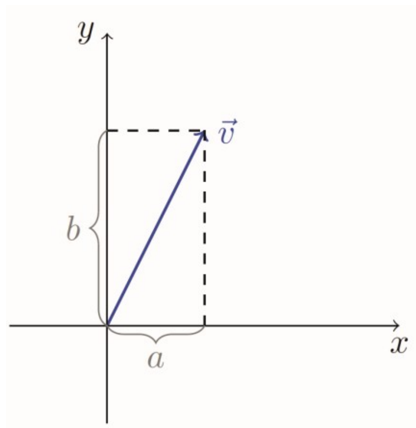
Značení. Prvky kanonické báze značíme postupně $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$.

Tvrzení. Každý vektor prostoru $\mathbb{R}^2$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$.

[17] Algebraickou strukturu, přesněji řečeno.

Ověření. Vezměme vektor $\vec{v} = (a; b)$ a pokusme se ho vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$. Z obrázku 14 je patrné, že vektor $\vec{v}$ má x-ovou složku a-krát větší velikosti než vektor $\mathbf{e}_1$ a y-ovou složku b-krát větší velikosti než vektor $\mathbf{e}_2$. Můžeme tedy psát:

$$\vec{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2.$$



Obrázek 14: Ilustrace rozkladu vektoru na složky

$\therefore$

♠ *Pozorování.* $\vec{v} \wedge \vec{v} = 0$.

Algebraické odvození. Z antikomutativity vyplývá, že

$$\vec{v} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{v}.$$

Zprava přičteme výraz $\vec{v} \wedge \vec{v}$

$$\vec{v} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{v}$$

a upravujeme:

$$2(\vec{v} \wedge \vec{v}) = 0.$$

Nyní stačí už pouze vydělit dvěma a máme požadovaný výsledek. $\therefore$

Geometrické odvození. Uvědomme si, co operátor $\wedge$ znamená: v úvodu této kapitoly jsme ho definovali jako obsah rovnoběžníku. Jaký je obsah „rovnoběžníku“ , který je utvořen dvěma totožnými vektory? Správně, je to nula, protože dva totožné vektory netvoří rovnoběžník. $\therefore$

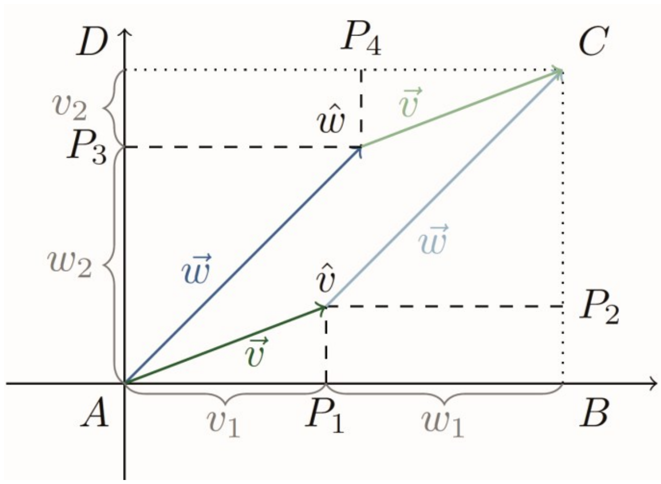
Definice. [Simplex]. Útvar, který je konvexním obalem množiny $n+1$ afinně nezávislých bodů v prostoru dimenze n, nazýváme simplex. Jednoduše řečeno, simplex je n-rozměrné zobecnění trojúhelníku. V této práci je n-rozměrný simplex značen jako S_n.

Například 0simplex je bod, 1simplex je úsečka, 2simplex je trojúhelník, 3simplex je čtyřstěn (tetraedr), viz obr. 15.

Obrázek 15: Simplexy

4.2 Souvislost s determinantem

V oddílu 2.2 jsme si determinant definovali, ale neřekli jsme si jeho geometrický význam. Pojďme na to: na obrázku 16 vidíme dva vektory $\vec{v} = (v_1; v_2)$ a $\vec{w} = (w_1; w_2)$ doplněné na rovnoběžník. Lze pomocí souřadnic obou vektorů nějakým způsobem vyjádřit obsah tohoto rovnoběžníku?



Obrázek 16: Obsah rovnoběžníku

Odpověď je kladná. Obsah obdélníku $ABCD$ vypočteme jako $(v_1 + w_1)$ krát $(v_2 + w_2)$. Tento obdélník můžeme „rozřezat“ na menší útvary – obdélníky a trojúhelníky, které oddělíme od rovnoběžníku určeného vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$. Budeme-li znát obsahy všech oddělených mnohoúhelníků, uvědomíme si, že spolu s obsahem rovnoběžníku dávají celý obdélník $ABCD$, jehož obsah již známe.

Z obrázku je patrné, že obdélník $ABCD$ je tvořen naším rovnoběžníkem, dvěma obdélníky ($P_1BP_2\hat{v}$ a $P_3\hat{w}P_4D$) a čtyřmi trojúhelníky ($AP_1\hat{v}, \hat{v}P_2C,$ $A\hat{w}P_3 a\ \hat{w}CP_4$). Obsahy obou obdélníků se vypočítají jako součin druhé souřadnice vektoru $\vec{v}$ a první souřadnice vektoru $\vec{w}$, první a čtvrtý zmíněný trojúhelník mají stejný obsah $(\frac{1}{2}v_1v_2)$ a zbývající dva trojúhelníky mají obsah $\frac{1}{2}w_1w_2$. Hledaný obsah je tedy

$$(v_1 + w_1)(v_2 + w_2) - (v_1v_2 + w_1w_2 + 2v_2w_1) = v_1w_2 - v_2w_1.$$

Pozornému čtenáři neunikne, že výsledek je determinant matice $\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$, případně souvislost s vnějším součinem:

$$\begin{aligned}
\vec{v} \wedge \vec{w} &= (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \wedge (w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2) \\
&= v_1\mathbf{e}_1 \wedge (w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2) + v_2\mathbf{e}_2 \wedge (w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2) \\
&= v_1w_1\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 + v_1w_2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + v_2w_1\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 + v_2w_2\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 \\
&= v_1w_2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + v_2w_1\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \\
&= v_1w_2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 - v_2w_1\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2.
\end{aligned}$$

4.3 Prostory vyšší dimenze

Již víme, co je to kanonická báze. Počet prvků této báze se nazývá **dimenze** daného vektorového prostoru. Oddíl 4.2 je popsán ve 2D prostoru, přestože výpočty můžeme provádět v libovolném prostoru dimenze n. Shrňme naše vědomosti a zobecněme je.

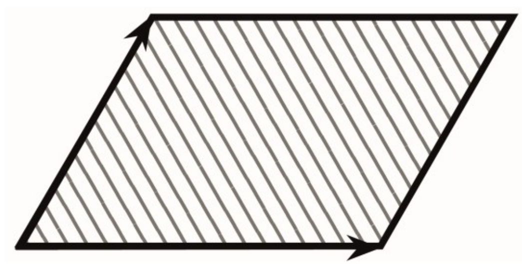
4.3.1 Dvojrozměrný prostor

Pro $\vec{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$ a $\vec{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ jsme výše vypočítali, že

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2.$$

Obsah rovnoběžníku, který je dán vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ vypočteme jako velikost jejich vnějšího součinu, tj.

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}| = \sqrt{det^2\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}}.$$



Obrázek 17: Geometrický význam vnějšího součinu ve 2D

Dvourozměrný simplex, tj. trojúhelník, má obsah roven jedné polovině obsahu rovnoběžníku. Tedy

$$S(\triangle) = \frac{1}{2}|\vec{u} \wedge \vec{v}|.$$

4.3.2 Trojrozměrný prostor

Další dimenze nám nabízí více možností jak využít vnější součin: můžeme spočítat jak povrch rovnoběžnostěnu (daného třemi vektory $\vec{u}, \vec{v}$ a $\vec{w}$), tak jeho objem.

Pro $\vec{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$, $\vec{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ a $\vec{w} = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3$ máme

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + det\begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + det\begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3.$$

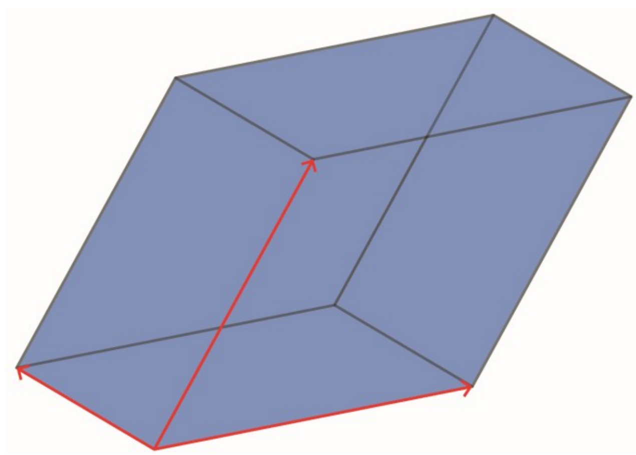
Povrch tohoto rovnoběžnostěnu vypočteme jako

$$S = |\vec{u} \wedge \vec{v}| = \sqrt{det^2\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} + det^2\begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix} + det^2\begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}}.$$

Jeho objem je roven absolutní hodnotě vnějšího součinu všech tří vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ a $\vec{w}$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w} = det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3,$$

$$V = |\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}| = \left|det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{det^2 \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}}.$$



Obrázek 18: Rovnoběžnostěn, jeho povrch a objem

Tetraedr, což je simplex v 3D prostoru a je na obrázku 15 úplně vpravo, má objem rovný šestině objemu našeho rovnoběžnostěnu, tj.

$$V(S_3) = \frac{1}{6} |\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}|.$$

4.3.3 Čtyř- a více rozměrný prostor

Pro objem obecného n-rozměrného simplexu S_n platí tento vzorec:

$$V(S_n) = \frac{1}{n!} |\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_n|.$$

5 Matematické souvislosti

Ještě než přistoupíme k praktičtější části této práce, tj. počítání příkladů a porovnávání učebnic zabývajících se tématem vektorové algebry, zmíníme koncepty, které se nehodilo zařadit do jiných kapitol, ale jsou velmi užitečné. Jejich přínos tkví buď v tom, že si čtenář vzájemně propojí, co se již dozvěděl (oddíly 5.1 a 5.2), nebo se dozví početní principy, které jsou sice nad rámec základního textu o vektorech, ale mohou velice usnadnit a zjednodušit vektorové výpočty (oddíly 5.3 a 5.4).

5.1 Arita operací s vektory

Operace je podmnožina kartézského součinu několika množin. To, kolik množin do operace zahrneme, se nazývá **arita**. Jinými slovy, **arita operace** označuje počet operandů, které daná operace přijímá. Uveďme příklady operací, se kterými jsme se v textu setkali:

Tabulka 3: Tabulka operací

operace	unární	binární	ternární
příklad	kolmý vektor	skalární součin, vektorový součin	smíšený součin

5.2 Ortogonální projekce

Zhruba uprostřed druhého důkazu Cauchy-Schwarzovy nerovnosti jsme narazili na myšlenku, že když projektujeme vektor $\vec{x}$ na vektor $\vec{y}$, dá se tato projekce vyjádřit takto:

$$\vec{x}_p = \frac{f(\vec{x},\vec{y})}{f(\vec{y},\vec{y})}\vec{y}.$$

Vysvětleme, proč zrovna tímto výrazem. Za prvé si uvědomme, že zlomek obsahuje jak ve svém čitateli, tak ve svém jmenovateli čísla (skalární součiny), jedná se tedy o prodloužení či zkrácení vektoru $\vec{y}$. To odpovídá geometrickému smyslu této projekce: vektor $\vec{x}$ „položíme“ na vektor $\vec{y}$. Snažíme se při tomto „položení“ zachovat směr vektoru $\vec{y}$ a přitom korigovat jeho délku. Projekce má určitou velikost, která závisí na tom, jak moc jsou vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ „rovnoběžné“ . Tuto velikost udává skalární součin $\vec{x} \cdot \vec{y}$, protože skalární součin zachycuje vztah mezi dvěma vektory: je větší, když jsou vektory více „srovnané“ ve stejném směru.

♠ *Pozorování.* Je-li vektor $\vec{x}$ jednotkový, pak $\vec{x} \cdot \vec{y}$ představuje (orientovanou) velikost projekce $\vec{y}$ do směru $\vec{x}$.

♠ *Pozorování.* Jsou-li na sebe oba vektory kolmé, velikost jejich vzájemné projekce jsou nulové.

5.3 Laplaceův rozvoj

Výklad z následující sekce se nám bude hodit při řešení úloh z kapitoly 7. Jedná se o jednu z možností, jak vypočítat determinant matice. Nejprve uveďme dva základní pojmy, které potřebujeme znát, abychom pochopili Laplaceovu větu o rozvoji determinantu: subdeterminant a algebraický doplněk.

Mějme čtvercovou matici A, tj. matici, která má stejný počet řádků jako sloupců. Determinant matice, která vznikne z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce, nazveme **subdeterminantem**, značíme M_{ij}.

Příklad:

Mějme $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ a nechť $i = 3,\ j = 2$, pak $M_{32} = det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Algebraický doplněk je číslo $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$. V našem případě je tedy

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní můžeme přistoupit k vyslovení Laplaceovy věty, potřebnou teorii již známe.

Věta 1 *Je-li čtvercová matice řádu $n \geq 2$, pro každé $i = 1,2,\dots,n$ definujeme rozvoj matice A podle i-tého řádku jako výraz $a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in}$.*

Ilustrujme Větu 1 na příkladu:

$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, rozviňme třeba dle prvního řádku. Rozepišme si jednotlivé prvky a k nim příslušné algebraické doplňky:

$$a_{11} = 7; A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot det\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, a_{12} = 0; A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a_{13} = 2; A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nyní stačí tato tři čísla sečíst:

$$7 \cdot 1 \cdot (5 - 12) + 0 \cdot (-1) \cdot (2 - 0) + 2 \cdot 1 \cdot (6 - 0) = -49 + 12 = \underline{\underline{-37}}.$$

5.4 Gramova matice a Gramův determinant

Mějme n-prvkovou množinu vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ ve vektorovém prostoru, na kterém je definován skalární součin „·“ . Gramova matice je čtvercová matice řádu n, jejíž prvek na pozici (i, j) má hodnotu $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$.

Příklad: Nechť $n = 2$. Pak Gramova matice vypadá následovně:

$$G = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 \end{pmatrix}.$$

Mějme nyní dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, které svírají úhel α. Spočteme-li jejich Gramův determinant, vyjde nám zajímavý výsledek:

$$\begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot \vec{v} \\ \vec{v} \cdot \vec{u} & \vec{v} \cdot \vec{v} \end{vmatrix} = (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{v} \cdot \vec{u}) = ||\vec{u}||^2\ ||\vec{v}||^2 - (||\vec{u}||\ ||\vec{v}||\ \cos\alpha)^2.$$

Vytkneme člen $||\vec{u}||^2\ ||\vec{v}||^2$:

$$||\vec{u}||^2\ ||\vec{v}||^2 - (||\vec{u}||\ ||\vec{v}||\ \cos\alpha)^2 = ||\vec{u}||^2\ ||\vec{v}||^2(1 - \cos^2\alpha) = ||\vec{u}||^2\ ||\vec{v}||^2 \sin^2\alpha.$$

Jak víme z geometrického významu vektorového součinu (oddíl 2.4.2), výraz $||\vec{u}||\ ||\vec{v}||\sin\alpha$ se rovná obsahu rovnoběžníku, který je tvořen právě těmito dvěma vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Platí tedy, že

$$\begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot \vec{v} \\ \vec{v} \cdot \vec{u} & \vec{v} \cdot \vec{v} \end{vmatrix} = ||\vec{u}||^2\ ||\vec{v}||^2 \sin^2\alpha = S^2,$$

čili obsah rovnoběžníku vypočteme jako

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot \vec{v} \\ \vec{v} \cdot \vec{u} & \vec{v} \cdot \vec{v} \end{vmatrix}}.$$

6 Mezipředmětové souvislosti

Mezipředmětové vztahy představují klíčový prvek moderního vzdělávacího procesu, který umožňuje studentům vnímat a pochopit souvislosti mezi jednotlivými obory. Tento přístup podporuje integraci znalostí, rozvíjí kritické myšlení a zvyšuje schopnost aplikovat naučené poznatky v reálném světě. V této kapitole se zaměříme na propojení matematiky s fyzikou, informatikou a zeměpisem, což jsou obory, které nejenže úzce spolupracují s matematikou, ale také ji využívají jako základní nástroj pro své vlastní disciplíny.

6.1 Fyzika

Mezi málokterými dvěma vědními oblastmi lze nalézt tak úzký vztah jako mezi matematikou a fyzikou. Matematika jako univerzální jazyk přírodních věd hraje zásadní roli ve fyzice, kde je nezbytná pro popis přírodních zákonů a analýzu fyzikálních jevů. Fyzika zase poskytuje konkrétní aplikace matematických teorií, čímž umožňuje studentům lépe pochopit abstraktní matematické koncepty. V následujících řádcích objasníme, co je to fyzikální veličina a jaké jsou její typy. Dále zabrousíme do vybraného fyzikálního oboru – mechaniky, kde se podíváme na vzorec pro mechanickou práci a také si vysvětlíme princip nakloněné roviny.

6.1.1 Fyzikální veličiny

Fyzikální veličiny dělíme na tři typy:

1. skaláry,
2. vektory,
3. tenzory.

Tenzor je pojem nejobecnější. Lze říci, že skalár je tenzor nultého řádu a vektor je tenzor prvního řádu.

Skalární fyzikální veličiny

Skalární fyzikální veličina je číselná hodnota, která má typicky svoji jednotku. S tímto typem veličiny se žáci setkávají již na základní škole. Uveďme tabulku sedmi základních jednotek SI:

Tabulka 4: Základní jednotky SI

Fyzikální veličina	Základní jednotka	Značka jednotky
délka	metr	m
hmotnost	kilogram	kg
čas	sekunda	s
elektrický proud	ampér	A
termodynamická teplota	kelvin	K
látkové množství	mol	mol
svítivost	kandela	cd

Všechny tyto fyzikální veličiny jsou veličinami skalárními.

Vektorové fyzikální veličiny

Vektorová veličina má kromě číselné hodnoty (velikosti) také směr a značíme ji šipkou nad jejím pojmenováním, např. rychlost ($\vec{v} = 56\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$) nebo síla ($\overleftarrow{F} = 84$ N).

Tenzorové fyzikální veličiny

Tenzor je zobecněný vektor. Slovo *tenzor* pochází z latinského *tensio*, což znamená napětí. Tenzory řádu dva je možné reprezentovat maticemi. Mezi tenzorové fyzikální veličiny patří tenzor napětí, deformace, či moment setrvačnosti.

Tenzorový součin vektorů

Dva trojsložkové vektory $\vec{u} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ a $\vec{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ lze vynásobit tenzorově. Vynásobíme je člen po členu, stejně jako mnohočleny:

$$\vec{u}\vec{v} = 1 \cdot 2\ \mathbf{ii} + 1 \cdot (-4)\ \mathbf{ij} + 1 \cdot 1\ \mathbf{ik} + 3 \cdot 2\ \mathbf{ji} + 3 \cdot (-4)\ \mathbf{jj} + 3 \cdot 1\ \mathbf{jk} + (-5) \cdot 2\ \mathbf{ki}\ + +(-5) \cdot (-4)\ \mathbf{kj} + (-5) \cdot 1\ \mathbf{kk},$$

tedy:

$$\vec{u}\vec{v} = 2\ \mathbf{ii} - 4\ \mathbf{ij} + \mathbf{ik} + 6\ \mathbf{ji} - 12\ \mathbf{jj} + 3\ \mathbf{jk} - 10\ \mathbf{ki} + 20\ \mathbf{kj} - 5\ \mathbf{kk}.$$

Nyní vzniklý mnohočlen zapíšeme do matice:

$$\vec{u}\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 6 & -12 & 3 \\ -10 & 20 & -5 \end{pmatrix}.$$

6.1.2 Mechanika

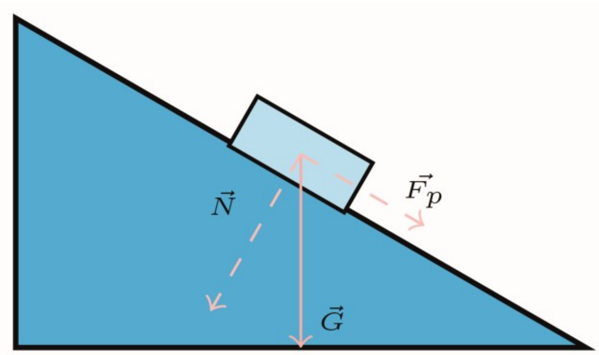
Mechanika je obor fyziky zabývající se pohybem (a rovnováhou) těles nebo bodů. Mezi základní vektorové veličiny patřící do mechaniky se řadí zrychlení a také síla, která toto zrychlení způsobuje. Podle přístupu ke studiu pohybu těles a jejich rovnovážného stavu dělíme mechaniku na dynamiku (která se dále dělí na kinematiku a kinetiku) a na statiku.

Vzorec

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\alpha$$

dává do vztahu mechanickou práci, sílu a dráhu, a je zmíněn v oddílu, který se zabývá geometrickým smyslem skalárního součinu (oddíl 2.3.3).

Zkoumáme-li mechaniku tuhého tělesa, můžeme tíhu ($\vec{G}$), která působí na těleso, rozložit na dvě složky: normálovou sílu ($\vec{N}$) a pohybovou sílu ($\vec{F_p}$). Směry obou sil jsou na sebe vzájemně kolmé, viz obr. 19.



Obrázek 19: Nakloněná rovina

6.2 Informační technologie

Informatika, která se zabývá algoritmy, programováním a datovou analýzou, má své základy pevně ukotvené v matematice. Matematické znalosti jsou klíčové pro vývoj efektivních algoritmů a pro řešení komplexních problémů, které informatika studuje. Zároveň informatika nabízí nástroje a metody, které mohou matematické výpočty a analýzy výrazně usnadnit a zefektivnit.

6.2.1 Práce s daty

Práce s daty je důležitá v mnoha odvětvích, včetně obchodu, vědy a zdravotnictví. Díky pokroku v technologii a zvyšujícímu se množství dostupných dat se práce s daty stává stále důležitějším aspektem pro konkurenceschopnost a inovace.

V rámci práce s daty je nezbytné nejenom získávat a ukládat data, ale také je správně interpretovat a využít k formulaci informovaných rozhodnutí. Protože data mohou být složitá a obsáhlá, matematika a informatika sehrávají klíčovou roli při vyvíjení nástrojů, technik a algoritmů pro efektivní práci s daty. Matematika poskytuje teoretické základy pro analýzu dat a vývoj statistických modelů, zatímco informatika přináší technologické nástroje a algoritmy pro jejich zpracování a interpretaci.

Mezi nejznámější tabulkový procesor patří Microsoft Excel. V Microsoft Excelu jsou data obvykle organizována do buněk, které mohou obsahovat různé typy informací, jako jsou např. text nebo čísla. Když mluvíme o vektorech v matematice, obvykle máme na mysli uspořádanou kolekci čísel nebo jiných objektů. V Excelu můžete vytvořit vektor například pomocí jednoho sloupce (nebo jednoho řádku), který obsahuje soubor dat. Každý prvek v tomto sloupci by pak odpovídal jednomu prvku v našem vektoru.

6.2.2 Kódování textu a šifrování

Kódování i šifrování mají společné to, že mění podobu textu. Mají však jiný účel. Cílem šifrování je uchování tajemství. Cílem kódování není utajení, pouze spolehlivý záznam či přenos zprávy.

Pro kódování textu v počítačích se používají metody založené na binárních číslech, tj. nuly a jedničky, nebo je znakům textu přiřazena číselná hodnota z intervalu [0;127], která je pak konvertována do dvojkové soustavy. Vektory s tímto tématem úzce souvisejí. Když máme např. slovo $s = 100$ a generující matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

zakódujeme jej takto:

$$(1 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1).$$

Pokud chceme zašifrovat slovo VEKTOR (např. použitím Hillovy šifry), zakódujeme jej tak, že každému písmenu přiřadíme číslo od nuly do 25 (v anglické abecedě je 26 písmen), tj. VEKTOR = = (21; 4; 10; 19; 14; 17). Náhodně zvolíme klíčovou matici: $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Matice je typu 2×2 (řádu 2), což znamená, že vektor (21; 4; 10; 19; 14; 17) rozdělíme do bloků po dvou: $\begin{pmatrix} 21 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 17 \end{pmatrix}$ a tyto bloky postupně vynásobíme klíčovou maticí:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 21 + 3 \cdot 4 \\ 2 \cdot 21 + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 62 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 10 + 3 \cdot 19 \\ 2 \cdot 10 + 5 \cdot 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 115 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 14 + 3 \cdot 17 \\ 2 \cdot 14 + 5 \cdot 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 93 \\ 123 \end{pmatrix}.$$

Abychom mohli vyjádřit nově vzniklý vektor (75; 62; 87; 115; 93; 123) pomocí (anglické) abecedy, musíme použít operátor *modulo*. V našem případě budeme všechny prvky nově vzniklého vektoru dělit číslem 26 a budou nás zajímat jejich zbytky.

$$(75; 62; 87; 115; 93; 123) \; mod \; 26 = (23; 10; 9; 11; 15; 19)$$

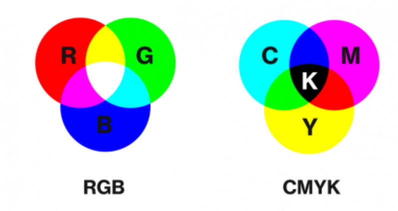
Posledním krokem je převést prvky vektoru (23; 10; 9; 11; 15; 19) do latinky. Tj. 23=X,10=K,9=J,11=L,15=P,19=T.

Zašifrované slovo „VEKTOR“ je pomocí náhodně zvolené klíčové matice $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ve tvaru „XKJLPT“ .

6.2.3 Grafika

Počítačová grafika je oblast výpočetní techniky, která se zabývá tvorbou a úpravou grafických informací. Dle způsobu zpracování obrazu se dělí na rastrovou (bitmapovou) a vektorovou grafiku.

Rastrová grafika je tvořena mřížkou (tzv. rastrem), kterou lze reprezentovat matematicky pomocí matice. Každý pixel (tj. „políčko“) má svou barvu, jejíž formát je například RGB nebo CMYK (viz obr. 20).



Obrázek 20: Ukázka barevných modelů

Vektorová grafika je oproti rastrové grafice dobře škálovatelná: zatímco bitmapový obrázek ztrácí kvalitu při přiblížení, vektorová ilustrace je více odolná vůči zoomu. Další výhodou vektorové grafiky je, že díky matematickému popisu mívají vektorové obrázky menší velikost.

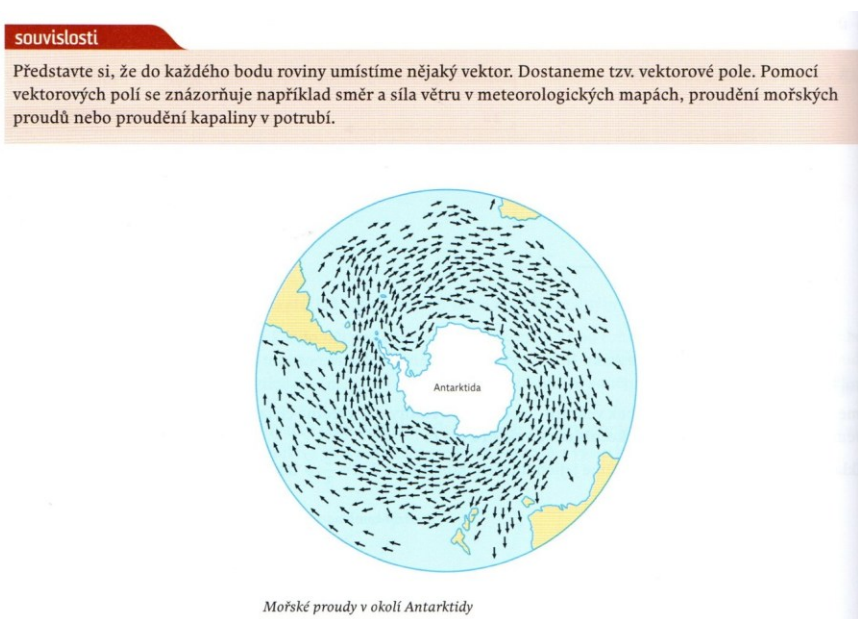
6.3 Geografie

Vektory mohou být užitečným pomocníkem i v geografii, např. při různých modelech a simulacích, územních plánováních a analýze a prevenci potenciálních rizik.

6.3.1 Kartografie

Každý vektor má svůj počáteční a koncový bod. Místa na mapě mohou být také reprezentována body, potažmo vektory. Můžeme takto například vypočítat, jak dlouhá je vzdušná čára z bodu A do bodu B. Pokud trasou nelze jít přímo (tj. po té vzdušné čáře), tak platí, že čím více „mezizastávek" zahrneme do výpočtů, tím přesnější náš odhad bude.

Vektory se hodí nejen pro modeláž dráhy na mapě, ale také například ke znázornění počasí a klimatických jevů. Obrázky 21 a 22 ukazují užitečnost konceptu vektoru i v kartografii.

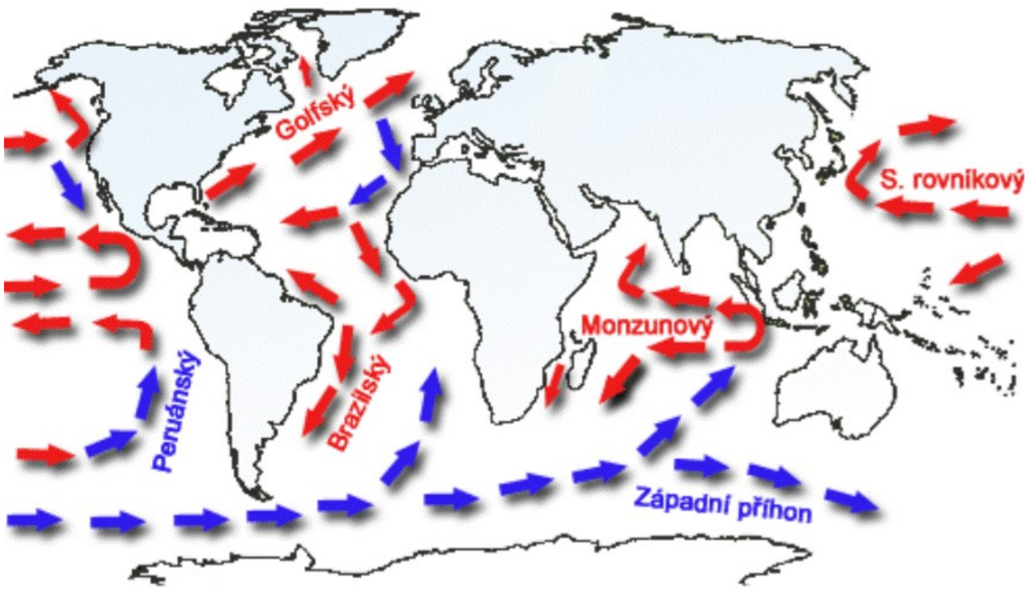

souvislosti

Představte si, že do každého bodu roviny umístíme nějaký vektor. Dostaneme tzv. vektorové pole. Pomocí vektorových polí se znázorňuje například směr a síla větru v meteorologických mapách, proudění mořských proudů nebo proudění kapaliny v potrubí.

Mořské proudy v okolí Antarktidy

*Obrázek 21: Výňatek ze středoškolské učebnice**

* Učebnice je podrobněji rozebrána ve druhém oddílu kapitoly 8.

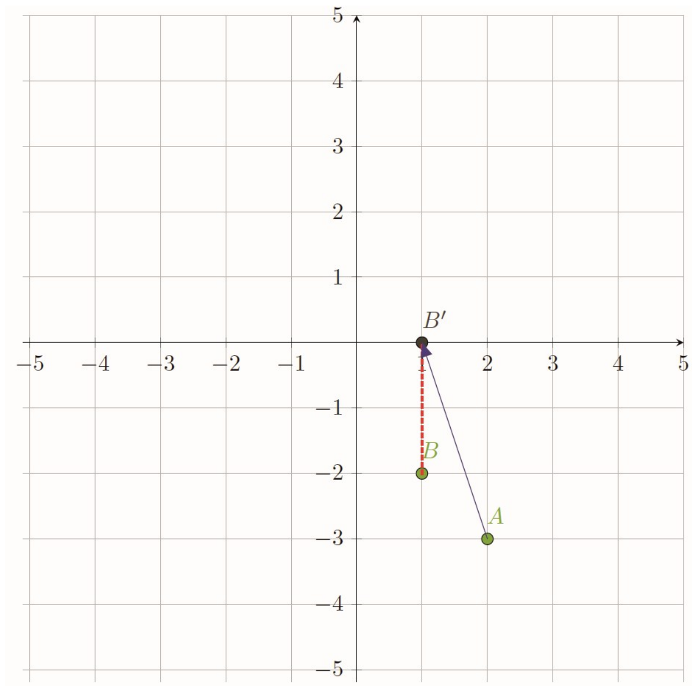


Obrázek 22: Přehled mořských proudů na světě

7 Vybrané úlohy

Tato kapitola obsahuje 13 úloh, které mají za cíl procvičit teorii, která byla vyložena v předešlých kapitolách. Úlohy jsou inspirovány zdroji [3], [6] a [14].

Úloha 1 *Určete vzdálenost bodu* $A = [2; -3]$ *od kolmého průmětu bodu* $B = [1; -2]$ *na osu* x.



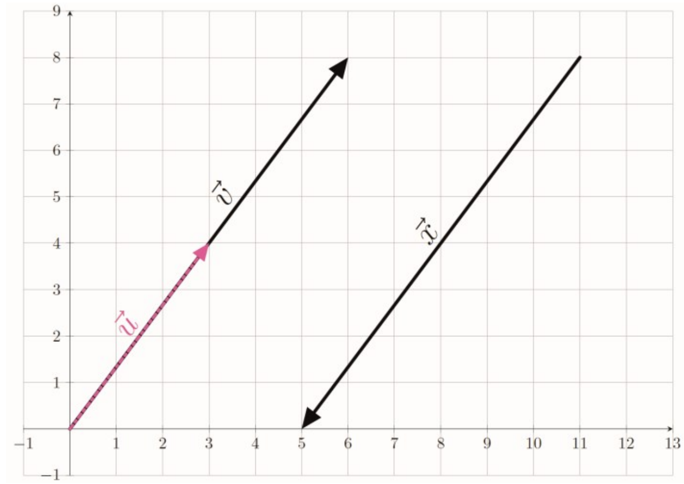
Obrázek 23: Ilustrace k řešení úlohy 1

Řešení: Souřadnice kolmého průmětu B' bodu B na osu x získáme tak, že bod B promítneme na osu x (viz obr. 23). Všimneme si, že x-ová složka zůstala stejná, a y-ová souřadnice je rovna nule. Vzdálenost bodů A a B' spočítáme jako velikost vektoru $A - B'$:

$$||(2-1; -3)|| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \underline{\underline{\sqrt{10}}}.$$

Úloha 2 *Najděte vektor* $\vec{v}$*, který je rovnoběžný s vektorem* $\vec{u} = (3; 4)$ *a jehož velikost je 10.*

Řešení: Je zřejmé, že hledaný vektor $\vec{v}$ bude nějakým k-násobkem vektoru $\vec{u}$. Velikost vektoru $\vec{u}$ je $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Hledaný vektor $\vec{v}$ je tedy dvakrát delší než známý vektor $\vec{u}$. Stačí tedy obě souřadnice vektoru $\vec{u}$ vynásobit číslem dva. Hledáme-li vektor $\vec{v}$ jako vektor vázaný, pak má $\vec{v}$ souřadnice $\underline{\underline{\vec{v} = (6; 8)}}$. Pokud nám nezáleží na počátečním bodu, případně na orientaci, může být dalším řešením i vektor $\vec{x}$, viz obr. 24.



Obrázek 24: Ilustrace k řešení úlohy 2

Úloha 3 *Nechť* $A[-1; 2; 4], B[1; 3; -2], C[6; 1; 0]$ *jsou tři body v rovině. Určete, zda tyto body tvoří vrcholy trojúhelníku. Pokud ano, vypočtěte souřadnice těžiště tohoto trojúhelníku.*

Řešení: Pokud by body A, B, C ležely na přímce (tj. byly by kolineární), nemohly by tvořit vrcholy trojúhelníku. Budeme tedy zjišťovat, zda jsou vektory $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = C - A$ lineárně nezávislé:

$$\vec{u} = B - A = (1 - (-1); 3 - 2; -2 - 4) = (2; 1; -6)$$

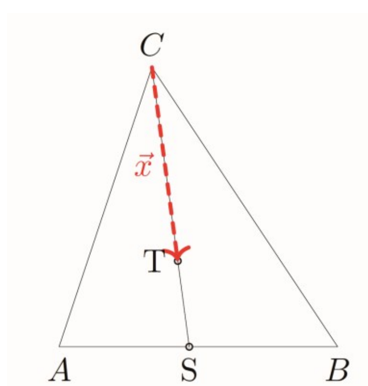
$$\vec{v} = C - A = (6 - (-1); 1 - 2; 0 - 4) = (7; -1; 4)$$

Z druhé složky obou vektorů vidíme, že jeden je (-1)-násobkem druhého, což o ostatních složkách neplatí. Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou tedy lineárně nezávislé.

Pojďme vypočítat těžiště. Pokud známe vzorec

$$T = \left[\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}; \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right],$$

můžeme do něj dosadit a máme hotovo. Pokud vzorec neznáme, nakresleme si situaci:



Obrázek 25: Výpočet těžiště trojúhelníku

Z obrázku 25 je patrné, že

$$T = C + \vec{x}.$$

Dále víme, že poměr vzdálenosti těžiště T od vrcholu vůči vzdálenosti těžiště a středu protilehlé strany S je dvě ku jedné, tedy platí $\vec{x} = \frac{2}{3}(S - C)$. Souřadnice bodu S jsou

$$S = \left[\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}; \frac{a_3+b_3}{2}\right],$$

tedy $\vec{x} = \frac{2}{3}\left(\frac{a_1+b_1-2c_1}{2}; \frac{a_2+b_2-2c_2}{2}; \frac{a_3+b_3-2c_3}{2}\right)$ a po úpravě dostáváme, že

$$\vec{x} = \left(\frac{a_1+b_1-2c_1}{3}; \frac{a_2+b_2-2c_2}{3}; \frac{a_3+b_3-2c_3}{3}\right).$$

Bod C má souřadnice

$$C = [c_1; c_2; c_3], \text{po rozšíření trojkou } C = \left[\frac{3c_1}{3}; \frac{3c_2}{3}; \frac{3c_3}{3}\right].$$

Pokud tedy přičteme k bodu C vektor $\vec{x}$, získáme kýžené souřadnice těžiště T:

$$T = \left[\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}; \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right].$$

Souřadnice těžiště z našeho příkladu jsou tedy $T = \left[\frac{-1+1+6}{3}; \frac{2+3+1}{3}; \frac{4-2+0}{3}\right] = \underline{\underline{\left[2; 2; \frac{2}{3}\right]}}.$

Úloha 4 *Mějme vektory* $\vec{a} = (2; 3; 1), \vec{b} = (-4; 6; 8), \vec{c} = (2; 15; 11)$. *Zjistěte, zda jsou komplanární.*

Řešení: Víme, že tři vektory jsou komplanární (leží v jedné rovině), je-li jejich smíšený součin roven nule. Pojďme tedy spočítat výraz $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$:

$$det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 8 \\ 2 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice 3×3 se dá počítat vícero způsoby: pomocí Sarrusova pravidla (obr. 4), pomocí Laplaceova rozvoje, nebo též za uplatnění vlastností determinantu. Zkusíme třetí variantu. Vlastnosti determinantu jsme probírali v oddílu 2.2.1. Vydělme 2. řádek dvojkou, a tedy vynásobme tímto číslem i celý determinant:

$$det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 8 \\ 2 & 15 & 11 \end{pmatrix} = 2\,det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

Všimneme si, že první sloupec je násobkem čísla 2 a druhý sloupec je násobkem čísla 3:

$$2\,det\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -2 & 3 & 4\\ 2 & 15 & 11\end{pmatrix} = 12\,det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 4\\ 1 & 5 & 11\end{pmatrix}.$$

Přičteme k druhému řádku řádek první, a také přičteme (-1)-násobek prvního řádku k třetímu řádku, čímž se determinant nezmění:

$$12\,det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 4\\ 1 & 5 & 11\end{pmatrix} = 12\,det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 4 & 10\end{pmatrix}.$$

Poslední operaci, kterou provedeme, bude přičtení (-2)-násobku druhého řádku k třetímu řádku:

$$12\,det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 4 & 10\end{pmatrix} = 12\,det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Dle druhé vlastnosti z oddílu 2.2.1 víme, že celý determinant je nulový. Zadané vektory tedy jsou komplanární. Výsledek můžeme ověřit za použití již zmíněného Sarrusova pravidla.

Úloha 5 *Stanovte chybějící souřadnici vektoru* $\vec{a} = (2; 0; z)$ *tak, aby ležel v téže rovině s vektory* $\vec{m} = (0; 3; 5), \vec{n} = (-2; 0; -4)$.

Řešení: Pro komplanaritu tří vektorů stačí zajistit, aby jejich smíšený součin byl roven nule. Víme, že determinant matice lze vypočítat Laplaceovým rozvojem. Pojďme ho zkusit:

$$det\begin{pmatrix}2 & 0 & z\\ 0 & 3 & 5\\ -2 & 0 & -4\end{pmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot det\begin{pmatrix}3 & 5\\ 0 & -4\end{pmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+2}\cdot det\begin{pmatrix}0 & z\\ 0 & -4\end{pmatrix} +$$

$$+(-2)\cdot(-1)^{1+3}\cdot det\begin{pmatrix}0 & z\\ 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Prostřední člen nám vypadne (násobíme nulou) a zbylé dva členy se mají rovnat nule. Tedy:

$$2\cdot(-1)^{1+1}\cdot det\begin{pmatrix}3 & 5\\ 0 & -4\end{pmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{1+3}\cdot det\begin{pmatrix}0 & z\\ 3 & 5\end{pmatrix} \overset{!}{=} 0.$$

Dále počítáme:

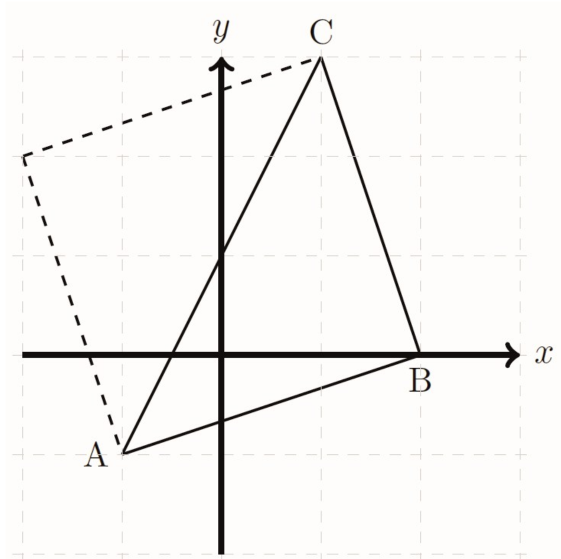
$$2\cdot 1\cdot(-12-0) + (-2)\cdot 1\cdot(-3z) \overset{!}{=} 0.$$

Rovnici dořešíme:

$$-24 + 6z \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{\underline{z = 4}}.$$

Vektor $\vec{a}$ má tedy souřadnice $\vec{a} = (2; 0; 4)$.

Úloha 6 *Vypočítejte obsah trojúhelníku v rovině, jsou-li jeho vrcholy dány souřadnicemi:* $A[-1;-1], B[2;0], C[1;3]$.



Obrázek 26: Ilustrace k řešení úlohy 6: doplnění trojúhelníku na rovnoběžník (čtverec)

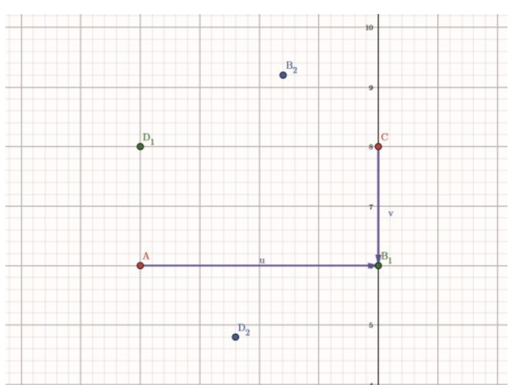
Řešení: Nenecháme se zmást zadáním a umístíme trojúhelník do 3D prostoru – přidáme mu třetí souřadnici: $A[-1;-1;0], B[2;0;0], C[1;3;0]$. Vytvoříme vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ následovně: $\vec{u} = (B - A) = (3;1;0), \vec{v} = (C - A) = (2;4;0)$. Vektorovým součinem, respektive jeho absolutní hodnotou, vypočítáme obsah rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(0;0;10)| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 10^2} = 10.$$

Nesmíme výsledek zapomenout vydělit dvěma. Nás totiž nezajímal obsah rovnoběžníku, ale obsah trojúhelníku, který je pochopitelně poloviční. Zadaný trojúhelník má tedy obsah 5 j ^{2}.

Úloha 7 *Určete souřadnice vrcholů obdélníku* $ABCD$*, znáte-li body* $A = [-4;6], C = [0;8]$ *a víte-li, že pro strany obdélníku platí:* $|AB| = 2\,|BC|$*. Najděte obě řešení.*

Řešení: Označme souřadnice hledaného bodu $B = [b_1; b_2]$ a vektory z tohoto bodu vycházející: $\vec{u} = B - A, \vec{v} = B - C$. Číselně $\vec{u} = (b_1 + 4; b_2 - 6)$ a $\vec{v} = (b_1; b_2 - 8)$.



Obrázek 27: Ilustrace k řešení úlohy 7

Z informace, která je nasnadě, že vektor $\vec{u}$ je kolmý na vektor $\vec{v}$, získáme rovnici

$$b_1(b_1+4)+(b_2-6)(b_2-8)=0.$$

Dále spočteme velikosti vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$:

$$||\vec{u}||=\sqrt{(b_1+4)^2+(b_2-6)^2},$$
$$||\vec{v}||=\sqrt{b_1^2+(b_2-8)^2}.$$

Ze zadaní víme, že $\vec{u}=2\vec{v}$, tedy

$$\sqrt{(b_1+4)^2+(b_2-6)^2}=2\sqrt{b_1^2+(b_2-8)^2}.$$

Provedeme ekvivalentní úpravy:

$$b_1^2+4b_1+b_2^2-14b_2+48=0,$$

$$3b_1^2-8b_1+3b_2^2-52b_2+204=0.$$

K rovnici (ii) přičteme (-3)-násobek rovnice (i), abychom eliminovali kvadratické členy:

$$-20b_1-10b_2+60=0,$$

tj. $b_2=6-2b_1$. Nyní máme krásný vztah mezi lineárními členy b_1 a b_2 a můžeme dosadit dle našeho výběru do rovnice (i) nebo (ii) za b_2. Vyjde $5b_1^2+8b_1=0$, z čehož vypočteme, že se b_1 rovná nule nebo $-\frac{8}{5}$. Pro $b_1=0$ dopočteme, že $b_2=6$ a pro $b_1=-\frac{8}{5}$ je $b_2=\frac{46}{5}$.

Hledané body B_1 a B_2 tedy mají souřadnice $B_1=[0;6]$ a $B_2=[-\frac{8}{5};\frac{46}{5}]$. Zbývá dopočítat body D_1 a D_2 a jsme hotovi.

Bod D_1 vypočteme tak, že „vyjdeme“ z bodu A a urazíme stejnou vzdálenost, jako je to z bodu B_1 do C. Řečeno matematicky, k bodu A přičteme minus jedna násobek vektoru $\vec{v}$:

$$D_1=A+(-\vec{v}).$$

Numericky $D_1=[-4;6]+(0;2)=[-4;8]$. Bod D_2 vypočítáme obdobně:
$$D_2=A+[-(B_2-C)]=[-4;6]+(\tfrac{8}{5};-\tfrac{6}{5})=[-\tfrac{12}{5};\tfrac{24}{5}].$$

Úloha 8 *Dokažte, že jestliže jsou vektory* $\vec{a}+\vec{b}$ *a* $\vec{a}-\vec{b}$ *navzájem kolmé, potom* $||\vec{a}||=||\vec{b}||$.

Řešení:

$$f(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b})=0$$
$$f(\vec{a},\vec{a})-f(\vec{a},\vec{b})+f(\vec{a},\vec{b})-f(\vec{b},\vec{b})=0$$
$$f(\vec{a},\vec{a})=f(\vec{b},\vec{b}).$$

Velikost je nezáporná:

$$f(\vec{a},\vec{a}) = f(\vec{b},\vec{b})$$
$$f^2(\vec{a},\vec{a}) = f^2(\vec{b},\vec{b})$$
$$||\vec{a}|| = ||\vec{b}||.$$

Úloha 9 *Ověřte, že v prostoru* $\mathbb{R}^2$ *se skalárním součinem daným maticí* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $tj.\, f(\vec{u},\vec{v}) = (u_1; u_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + u_2v_2$, *je posloupnost* $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ *ortogonální a najděte ortonormální bázi tohoto prostoru.*

Řešení:

$$(1;0)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2;1)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0.$$

Ortonormální bázi nalezneme znormováním ortogonální posloupnosti $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$:

$$||\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}|| = \sqrt{(1;0)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{(2;1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{2},$$

$$||\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}|| = \sqrt{(-1;2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{(0;1)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}.$$

Hledaná ortogonální báze má tedy členy $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Úloha 10 *Vypočtěte práci* W *síly* $\vec{F} = (4;-3)$ *po dráze* $\overline{AB}$, *kde* $A = [-4;0]$ *a* $B = [8;5]$.

Řešení: V této úloze využijeme vzorec z oddílu 6.1.2: $W = \vec{F}\cdot\vec{s}$; vektor síly je přímo v zadání, vektor dráhy $\vec{s}$ musíme dopočítat: $\vec{s} = B - A = (12;5)$. $W = 4\cdot 12 + (-3)\cdot 5 = \underline{\underline{33J}}$.

Úloha 11 *Nechť vektory* $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ *splňují*

$$||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = ||\vec{w}|| = 1, \qquad (1)$$
$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{o}. \qquad (2)$$

Vypočtěte hodnotu výrazu $\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{w}\cdot\vec{u}$.

Řešení: Prozkoumejme druhou mocninu trojčlenu $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$:

$$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + \vec{w}^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{w}\cdot\vec{u}).$$

Nyní na levou stranu rovnice použijeme znalost (2):

$$0 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + \vec{w}^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}).$$

Dále upravíme znalost (1) následovně:

$$||\vec{u}|| = 1 \Rightarrow \vec{u}^2 = 1, resp. ||\vec{v}|| = 1 \Rightarrow \vec{v}^2 = 1, resp. ||\vec{w}|| = 1 \Rightarrow \vec{w}^2 = 1.$$

Můžeme tedy psát

$$0 = 1 + 1 + 1 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}),$$

tedy $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}.$

Úloha 12 *Určete všechny hodnoty parametru* q, *pro které je vektor* $\vec{u} = (q; \frac{4}{3}q; \frac{5q-3}{5})$ *jednotkový.*

Řešení: Vektor nazveme jednotkový, pokud je jeho velikost rovna jedné. Velikost vektoru $\vec{u}$ vypočteme jako odmocninu ze součtu druhých mocnin jeho složek, tj.

$$||\vec{u}|| = \sqrt{q^2 + \left(\frac{4}{3}q\right)^2 + \left(\frac{5q-3}{5}\right)^2} \overset{!}{=} 1.$$

Upravme výraz pod odmocninou:

$$q^2 + \frac{16q^2}{9} + q^2 - \frac{6q}{5} + \frac{9}{25},$$

sečtěme tři kvadratické členy:

$$\frac{34q^2}{9} - \frac{6q}{5} + \frac{9}{25}$$

a převeďme vše na společného jmenovatele, což je nejmenší společný násobek čísel 9, 5 a 25:

$$\frac{850q^2 - 270q + 81}{225}.$$

Vraťme se k původní rovnici s odmocninou. Chceme, aby se odmocnina z námi upraveného výrazu rovnala jedné. Musí tedy platit, že i výraz pod odmocninou je roven jedné, jelikož platí $\sqrt{1} = 1$. Tento fakt je zřejmý, nicméně je zde zmíněn proto, abychom nemuseli celou rovnici umocňovat.

Máme tedy, že

$$\frac{850q^2 - 270q + 81}{225} = 1.$$

Nyní už můžeme provádět úpravy dle potřeby; vynásobíme tedy celou rovnici jmenovatelem levé strany, čili se nám na straně pravé objeví číslo 225, které následně od obou stran rovnice odečteme:

$$850q^2 - 270q - 144 = 0.$$

Nově vzniklou rovnici lze vydělit dvěma:

$$425q^2 - 135q - 72 = 0.$$

Zbývá už jenom dopočítat dva kořeny této kvadratické rovnice:

$$q_{1,2} = \frac{135 \pm \sqrt{(-135)^2 - 4 \cdot 425 \cdot (-72)}}{850} = \frac{135 \pm 375}{850};$$

$$q_1 = \frac{135 + 375}{850} = \frac{510}{850} = \frac{3}{5},$$

$$q_2 = \frac{135 - 375}{850} = -\frac{240}{850} = -\frac{24}{85}.$$

Zkoušku provedeme výpočtem délky vektorů $\vec{u}_1 = (\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0)$ a $\vec{u}_2 = (-\frac{24}{85}; -\frac{32}{85}; -\frac{15}{17})$:

$$||\vec{u}_1|| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1.$$

$$||\vec{u}_2|| = \sqrt{\left(-\frac{24}{85}\right)^2 + \left(-\frac{32}{85}\right)^2 + \left(-\frac{15}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{24^2}{85^2} + \frac{32^2}{85^2} + \frac{15^2}{17^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{24^2}{5^2 \cdot 17^2} + \frac{32^2}{5^2 \cdot 17^2} + \frac{15^2 \cdot 5^2}{17^2 \cdot 5^2}} = \frac{\sqrt{24^2 + 32^2 + 75^2}}{5 \cdot 17} = \frac{\sqrt{576 + 1024 + 5625}}{5 \cdot 17} =$$

$$= \frac{\sqrt{7225}}{5 \cdot 17} = \frac{85}{85} = 1.$$

Úloha 13 *Mějme vektor $\vec{y} = (4; 2)$ a vektor $\vec{x}$ je dán tak, že jeho projekce na vektor $\vec{y}$ má poloviční délku než vektor $\vec{y}$ a samotný vektor $\vec{x}$ má dvojnásobnou délku oproti vektoru $\vec{y}$. Vypočtěte úhel mezi vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$.*

Řešení: Ze zadání víme, že $\vec{y} = (4; 2), \vec{x}_p = \frac{1}{2}\vec{y} = (2; 1)$. Podle vzorce pro projekci

$$\vec{x}_p = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\vec{y} \cdot \vec{y}}\, \vec{y}$$

vypočítáme složky vektoru $\vec{x}$. Pak již bude snadné vypočítat odchylku vektoru $\vec{x}$ od vektoru $\vec{y}$. Nejprve označme neznámé složky vektoru $\vec{x}$:

$$\vec{x} = (x_1; x_2).$$

Jelikož ve jmenovateli vzorce pro projekci máme (nenulové) číslo, můžeme jím vynásobit celou rovnici:

$$(\vec{y} \cdot \vec{y})\, \vec{x}_p = (\vec{x} \cdot \vec{y})\, \vec{y}.$$

Levou stranu můžeme dopočítat:

$$(\vec{y}\cdot\vec{y})\,\vec{x}_p = (4\cdot 4 + 2\cdot 2)\vec{x}_p = 20\cdot(2;1) = (40;20).$$

Skalární součin neznámého vektoru $\vec{x}$ s vektorem $\vec{y}$ spočítáme jako:

$$(x_1; x_2)\cdot\binom{4}{2} = 4x_1 + 2x_2.$$

Celá pravá strana rovnice tedy vypadá takto:

$$(4x_1 + 2x_2)\cdot\vec{y} = (4x_1 + 2x_2)\cdot(4;2) = (16x_1 + 8x_2; 8x_1 + 4x_2).$$

Rovnice má tedy tvar:

$$(40;20) = (16x_1 + 8x_2; 8x_1 + 4x_2).$$

Z této rovnice získáme informace pro první složku i druhou složku hledaného vektoru:

- První složka neznámého vektoru $\vec{x}$: $40 = 16x_1 + 8x_2$,
- Druhá složka neznámého vektoru $\vec{x}$: $20 = 8x_1 + 4x_2$.

Obě rovnice nesou tutéž informaci: koncový bod hledaného vektoru $\vec{x}$ leží na přímce $20 = = 8x + 4y$, tj. (po vydělení čtyřmi) $2x + y - 5 = 0$. Směrnicový tvar této přímky je: $y = -2x + +5$. Vektor $\vec{x}$ má tedy souřadnice $\vec{x} = (x; -2x + 5)$.

Sice ještě nemáme konkrétní souřadnice hledaného vektoru $\vec{x}$, ale už se blížíme – máme je vyjádřeny na základě jedné proměnné x. Pojďme se posunout dál. Tím, že máme informaci o velikosti vektoru $\vec{x}$, nám z nekonečné množiny všech koncových bodů zbude pouze množina konečná, dvouprvková. Přišli jsme na to následovně:

Velikost vektoru $\vec{y}$ je:

$$||\vec{y}|| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Velikost vektoru $\vec{x}$ je:

$$\sqrt{x^2 + (-2x + 5)^2}.$$

Zadání požaduje, aby platilo:

$$||\vec{x}|| = 2\,||\vec{y}||,$$

tedy

$$\sqrt{x^2 + (-2x + 5)^2} = 2\cdot 2\sqrt{5}.$$

Rovnici řešíme umocněním:

$$x^2 + 25 - 20x + 4x^2 = 80.$$

Uspořádáme členy na jednu stranu a posčítáme, co je možné:

$$5x^2 - 20x - 55 = 0.$$

Ještě vydělíme pěti:

$$x^2 - 4x - 11 = 0.$$

Tuto kvadratickou rovnici vyřešíme pomocí diskriminantu:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+44}}{2} \Rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{15}, x_2 = 2 - \sqrt{15}.$$

Do výše vypočítaných souřadnic $\vec{x} = (x; -2x + 5)$ nyní můžeme dosadit konkrétní hodnoty:

$$\vec{x}_1 = (2 + \sqrt{15}; 1 - 2\sqrt{15}), \quad \vec{x}_2 = (2 - \sqrt{15}; 1 + 2\sqrt{15}).$$

Teď stačí už jenom dopočítat úhel α, který svírá $\vec{x}_1$ s vektorem $\vec{y}$. (Nezáleží na tom, jestli počítáme odchylku vektorů $\vec{x}_1, \vec{y}$ nebo $\vec{x}_2, \vec{y}$, oba úhly jsou stejné.)

$$\cos\alpha = \frac{\vec{x}_1 \cdot \vec{y}}{||\vec{x}_1||\,||\vec{y}||} = \frac{(2+\sqrt{15}) \cdot 4 + (1-2\sqrt{15}) \cdot 2}{\sqrt{(2+\sqrt{15})^2 + (1-2\sqrt{15})^2} \cdot \sqrt{4^2+2^2}} =$$

$$= \frac{8+4\sqrt{15}+2-4\sqrt{15}}{\sqrt{4+4\sqrt{15}+15+1-4\sqrt{15}+60} \cdot \sqrt{20}} = \frac{10}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{20}} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}.$$

Tedy platí, že

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{75°31'}}.$$

V průběhu řešení této úlohy si čtenář mohl procvičit všechny tři významy symbolu tečky („·“) – násobení čísla číslem, násobení vektoru číslem, i skalární násobení dvou vektorů.

8 Porovnání učebnic

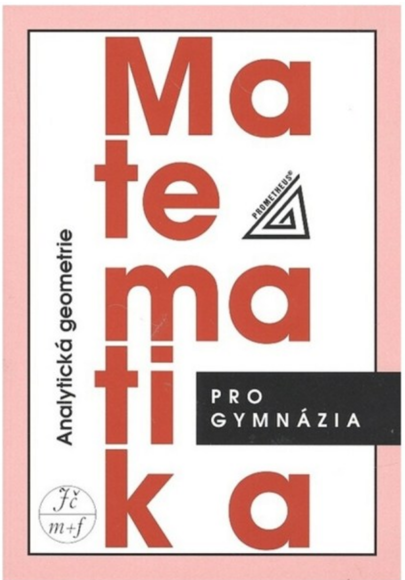
Tato kapitola se zabývá srovnáním přístupu k tématu vektorů v šesti učebnicích, z toho jedné internetové (viz tabulka 5). Chtěla bych zdůraznit, že jsem analyzovala pouze kapitoly na téma vektorové algebry, nikoliv celé učebnice. Každý oddíl obsahuje obrázek obálky dané učebnice a zhodnocení jejího největšího kladu/přínosu. Učebnice jsem vybírala podle aktuálnosti (sama jsem jako žákyně používala učebnici (a)) a dle dostupnosti.

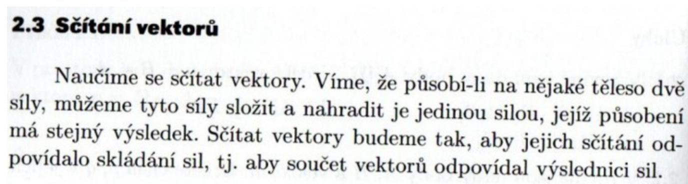
Tabulka 5: Přehled analyzovaných učebnic

	Název učebnice	**Autoři**	**Nakladatelství**	**Rok**
(a)	Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie	M. Kočandrle, L. Boček	Prometheus	1995
(b)	Od prváku k maturitě; Matematika s nadhledem: Analytická geometrie v rovině	J. Janyška	Fraus	2020
(c)	Edexcel AS and A level Modular Mathematics: Mechanics 1	S. Hooker, M. Jennings, B. Moran, L. Pateman	Heinemann Secondary Education	2008
(d)	Matika pro spolužáky: Analytická geometrie	M. Liška, T. Valenta, L. Král	ProSpolužáky.cz s. r. o.	2017
(e)	Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU 5. část	J. Kolouchová, J. Řepová, V. Šobr	Prometheus	1986
(f)	Portál středoškolské matematiky (https://www.karlin.mff.cuni.cz/ portal/)	Vedoucí projektu: J. Robová	Katedra didaktiky matematiky, MFF UK	2011

8.1 Učebnice (a)

V této učebnici je tématu vektorů věnována kapitola 2 (oddíly 2.1–2.9). Jako její největší přínos vidím rozšiřující látku (konkrétně posunutí soustavy souřadnic a otočení kartézské soustavy souřadnic), hloubku (kromě skalárního součinu je zde zmíněn vektorový i smíšený součin) a interdisciplinaritu (souvislosti především s fyzikou, viz obr. 28).





2.3 Sčítání vektorů

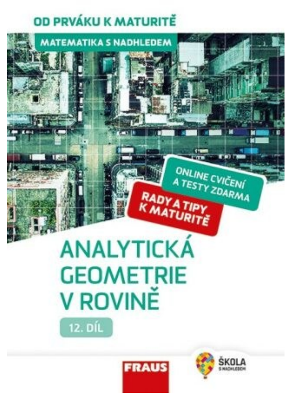
Naučíme se sčítat vektory. Víme, že působí-li na nějaké těleso dvě síly, můžeme tyto síly složit a nahradit je jedinou silou, jejíž působení má stejný výsledek. Sčítat vektory budeme tak, aby jejich sčítání odpovídalo skládání sil, tj. aby součet vektorů odpovídal výslednici sil.

Obrázek 28: Motivace ke sčítání vektorů v učebnici (a), str. 30

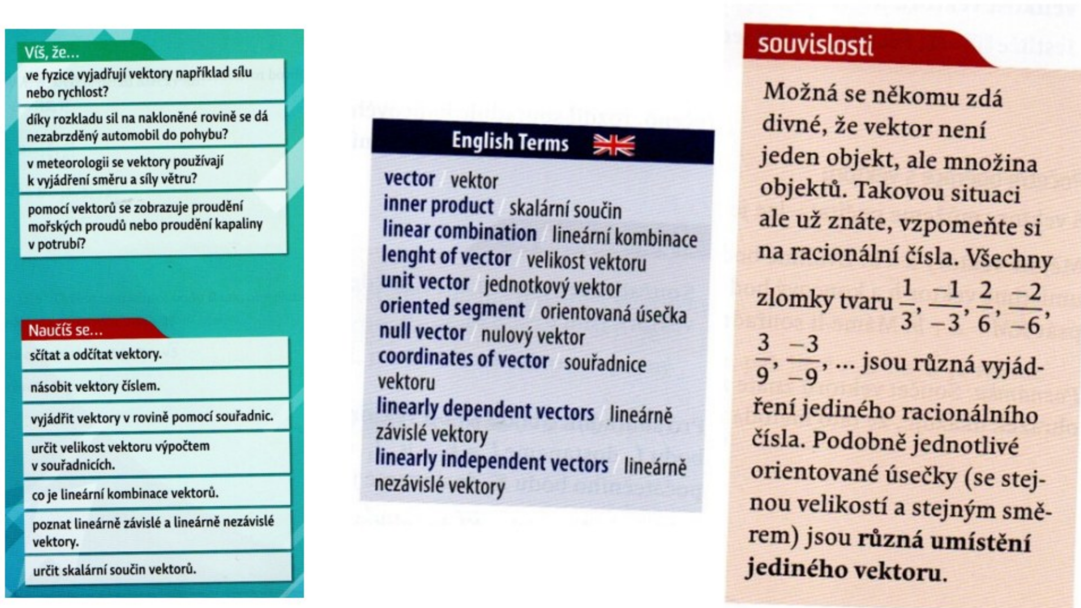
Obrázek 29: Obálka učebnice (a)

8.2 Učebnice (b)

Tato učebnice podporuje mezipředmětové vztahy nejen s fyzikou, ale i s anglickým jazykem. V rámečcích jsou uvedeny pojmy v překladu do angličtiny (viz obr. 31) a některá zadání ukázkových příkladů jsou také v anglickém jazyce. Za další klad této učebnice považuji interaktivně zpracovaný on-line pracovní sešit. Dále lze pozitivně hodnotit, že v úvodu každé kapitoly jsou uvedeny její cíle (viz obr. 31) a nejsou opomenuty ani souvislosti v rámci matematiky (viz obr. 31).



Obrázek 30: Obálka učebnice (b)



Víš, že...

ve fyzice vyjadřují vektory například sílu nebo rychlost?

díky rozkladu sil na nakloněné rovině se dá nezabrzděný automobil do pohybu?

v meteorologii se vektory používají k vyjádření směru a síly větru?

pomocí vektorů se zobrazuje proudění mořských proudů nebo proudění kapaliny v potrubí?

Naučíš se...

sčítat a odčítat vektory.

násobit vektory číslem.

vyjádřit vektory v rovině pomocí souřadnic.

určit velikost vektoru výpočtem v souřadnicích.

co je lineární kombinace vektorů.

poznat lineárně závislé a lineárně nezávislé vektory.

určit skalární součin vektorů.

English Terms

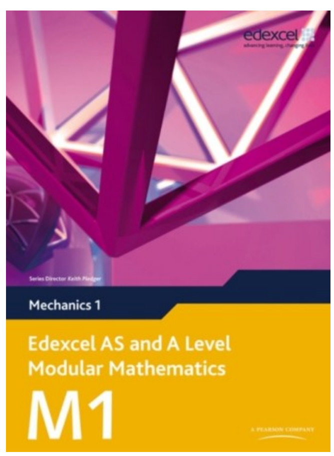
vector / vektor
inner product / skalární součin
linear combination / lineární kombinace
lenght of vector / velikost vektoru
unit vector / jednotkový vektor
oriented segment / orientovaná úsečka
null vector / nulový vektor
coordinates of vector / souřadnice vektoru
linearly dependent vectors / lineárně závislé vektory
linearly independent vectors / lineárně nezávislé vektory

souvislosti

Možná se někomu zdá divné, že vektor není jeden objekt, ale množina objektů. Takovou situaci ale už znáte, vzpomeňte si na racionální čísla. Všechny zlomky tvaru $\frac{1}{3}, \frac{-1}{-3}, \frac{2}{6}, \frac{-2}{-6}, \frac{3}{9}, \frac{-3}{-9}, \ldots$ jsou různá vyjádření jediného racionálního čísla. Podobně jednotlivé orientované úsečky (se stejnou velikostí a stejným směrem) jsou **různá umístění jediného vektoru.**

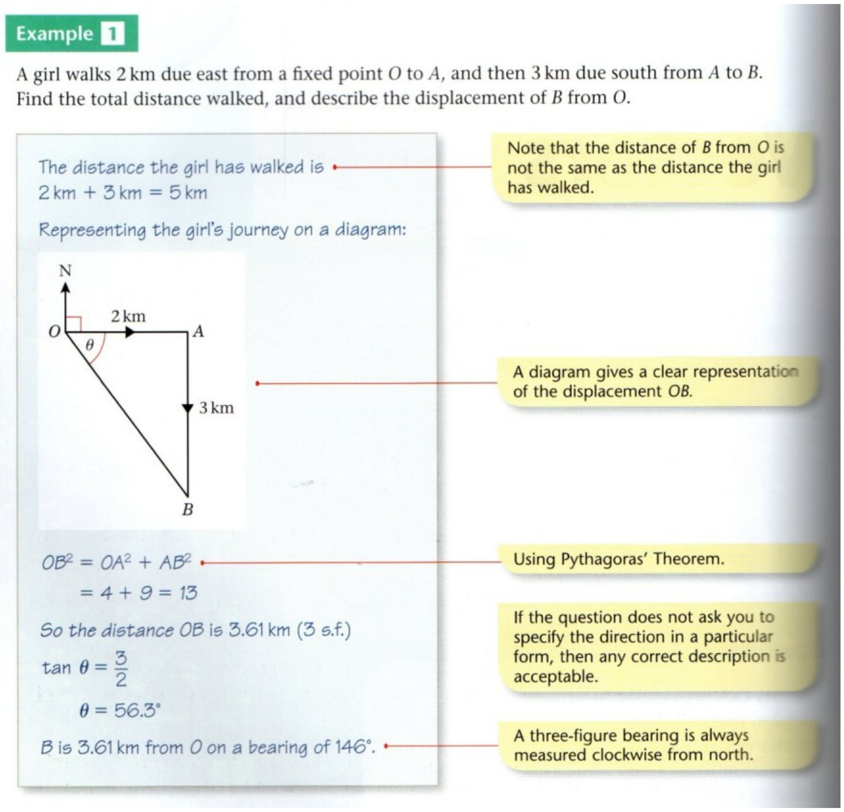
Obrázek 31: Ukázky z učebnice (b)

8.3 Učebnice (c)



Obrázek 32: Obálka učebnice (c)

Tato učebnice je zahraniční, anglicky psaná, a je určená pro žáky, kteří se připravují na závěrečnou zkoušku, aby získali *Všeobecné osvědčení o vzdělání* (General Certificate of Education, GCE). Je nutné podotknout, že v zahraničí se kurikula liší a vektory se berou spíše ve fyzice než v matematice. Za největší pozitivum považuji velmi názorná řešení příkladů (viz obr. 33) a gradované sety úloh.



Example 1

A girl walks 2 km due east from a fixed point O to A, and then 3 km due south from A to B. Find the total distance walked, and describe the displacement of B from O.

The distance the girl has walked is
2 km + 3 km = 5 km

Note that the distance of B from O is not the same as the distance the girl has walked.

Representing the girl's journey on a diagram:

A diagram gives a clear representation of the displacement OB.

$OB^2 = OA^2 + AB^2$
$= 4 + 9 = 13$

Using Pythagoras' Theorem.

So the distance OB is 3.61 km (3 s.f.)

$\tan\theta = \frac{3}{2}$

$\theta = 56.3°$

If the question does not ask you to specify the direction in a particular form, then any correct description is acceptable.

B is 3.61 km from O on a bearing of 146°.

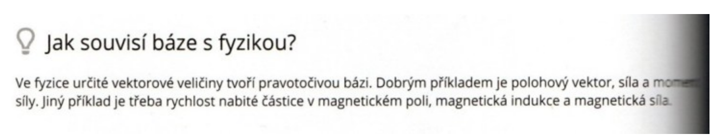
A three-figure bearing is always measured clockwise from north.

Obrázek 33: Ukázka řešení úlohy v učebnici (c), str. 134

8.4 Učebnice (d)

Tato učebnice věnuje vektorům kapitolu číslo 2. Je psána opravdu polopaticky, přesto obsahuje termíny jako báze a smíšený součin (viz srovnávací tabulka 6) a přirozeně je propojuje s fyzikou (obr. 34).

Obrázek 35: Obálka učebnice (d)



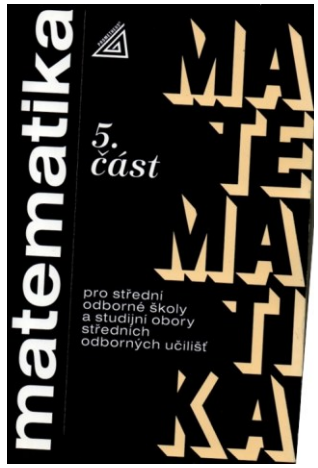
Jak souvisí báze s fyzikou?

Ve fyzice určité vektorové veličiny tvoří pravotočivou bázi. Dobrým příkladem je polohový vektor, síla a mom síly. Jiný příklad je třeba rychlost nabité částice v magnetickém poli, magnetická indukce a magnetická síla.

Obrázek 34: Propojení s fyzikou v učebnici (d), str. 50

8.5 Učebnice (e)

Tato učebnice je velmi uživatelsky přívětivě zpracovaná. Téma vektorů je zahrnuto v oddílech 1.1–1.12 a každá kapitola obsahuje potřebnou teorii ilustrovanou obrázky, řešené příklady, a úlohy či cvičení bez řešení. Důležité vzorce jsou opatřeny rámečky. Tato učebnice je svým uspořádáním podobná učebnici (a), ale mám dojem, že učebnice (a) je více akademicky pojatá (obsahuje více rozšiřujícího učiva).



Obrázek 36: Obálka učebnice (e)

8.6 Učebnice (f)

Téma vektorů v Portálu středoškolské matematiky najdeme pod záložkou Geometrie, Analytická geometrie. Na obrázku 38 je obsah pokryté látky, kterou lze na tomto portálu nalézt. Velkou výhodou všech internetových učebnic jsou interaktivní applety: žák si může vyzkoušet, co se stane, když bude objektem hýbat, nebo může zobrazit/skrýt řešení příkladu.

Obrázek 37: Úvodní strana Portálu středoškolské matematiky

Obrázek 38: Rozklikávací menu v on-line učebnici (f)

8.7 Shrnutí

Z níže uvedené tabulky 6 lze rychle vyčíst společné/rozdílné rysy zmíněných šesti učebnic.

Tabulka 6: Srovnávací tabulka

Učebnice	**(a)**	**(b)**	**(c)**	**(d)**	**(e)**	**(f)**
Základní pojmy[18]	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Rozšiřující pojmy[19]	✓	╳	╳	✓	╳	╳
Interdisciplinarita/souvislosti	✓	✓	✓	✓	✓	╳
Logická návaznost textu	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Grafická podpora[20]	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Barevný tisk[21]	╳	✓	✓	✓	╳	✓
Pracovní sešit[22]	╳	✓	╳	✓	╳	╳

Cílem této kapitoly je, aby si čtenář mohl vybrat učebnici, která je pro jeho studium nejvhodnější. Těm, kteří se s vektory teprve seznamují, doporučuji učebnici (d); ty, které zajímá terminologie v anglickém jazyce, nechť studují z učebnice (b) či (c). V pracovních sešitech učebnic (b) a (d) může čtenář nalézt úlohy k procvičení.

[18] Základní pojmy: úhel, rovnoběžnost, součet a rozdíl vektorů, skalární součin.
[19] Rozšiřující pojmy: smíšený součin, báze.
[20] Grafická podpora: obrázky, členění textu.
[21] Barevný tisk není pro matematiku tak nutný jako pro jiné předměty.
[22] Pracovní sešit: může být fyzický či on-line.

Závěr

Tato práce měla za cíl představit historii a geometrický smysl skalárního, vektorového a smíšeného součinu, přičemž hlavní důraz byl kladen na didaktický přístup k tomuto tématu. Tento cíl se dle našeho názoru podařilo splnit. V úvodních kapitolách jsme probrali základy vektorové algebry, což položilo pevný základ pro další diskusi o různých typech součinů a jejich významu v matematice. Kapitola o skalárním součinu jej podrobně prozkoumala jako bilineární zobrazení, což umožnilo lepší pochopení jeho role v různých matematických kontextech. I když jsou vektorové a smíšené součiny hojně využívány ve fyzice, tato práce je diskutuje relativně málo. Zaměřili jsme se především na didaktickou stránku věci a na to, jak součiny představit studentům v matematickém kontextu.

V kapitole o vnější algebře jsme nahlédli do hlubších geometrických a fyzikálních významů vektorových prostorů. Následující dvě kapitoly – matematické a mezipředmětové souvislosti – si kladly za úkol propojit již známé informace. Po jejich prostudování by čtenář měl být schopen uvést, jak se téma vektorů odráží a uplatňuje v reálném světě. Tento výčet však není vyčerpávající, a to s ohledem na téma práce, jež primárně nebylo zaměřené na tyto souvislosti.

Závěrečná kapitola srovnala různé přístupy v učebnicích a ukázala, jakým způsobem lze téma vektorových součinů didakticky zpracovat. Součástí práce bylo také třináct úloh s řešeními, které poskytují praktický návod k procvičení probíraných témat.

V rámci této práce jsem poskytla ucelený text, který zahrnuje nejen teorii, ale také praktické úlohy a srovnání různých přístupů z učebnic. Cílem bylo vytvořit učební materiál vhodný jak pro studenty, kteří se s problematikou vektorů teprve seznamují, tak pro ty, kteří mají zájem hlouběji se ponořit do důkazů známých vzorců a aplikovat je například ve vlastní učitelské praxi. Navíc jsem odpověděla na klasickou žákovskou otázku „K čemu jsou vektory?“ tím, že jsem ukázala jejich široké využití v různých oblastech.

Tato práce tedy poskytuje nejen teoretický základ skalárního, vektorového a smíšeného součinu, ale také praktické nástroje pro učitele a studenty, kteří chtějí tato témata dále prozkoumávat a aplikovat v praxi. Případné rozšíření této práce se nabízí v oblasti fyziky, kde mají součiny velké uplatnění, které se dá pojmout jak teoreticky, tak prakticky.

Seznam literatury

[1] Barto, L., & Tůma, J. (2017). *Lineární algebra.* Skripta k přednáškám. [Online; cit. 2023–08–27]. https://www.karlin.mff.cuni.cz/~barto/LinAlg/skripta_la5.pdf

[2] Bečvář, J. (2007). *Z historie lineární algebry.* Matfyzpress.

[3] Černá, B. (2001). *Matematika – lineární algebra.* Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně.

[4] Crowe, M. J. (1994). *A history of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system.* Dover Publications, Inc.

[5] Halas, Z. (n.d.). Cesta ke skalárnímu součinu. [Online; cit. 2023–06–17]. https://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Temp/skal_soucin.pdf

[6] Hrubý, D. (2008). *Matematická cvičení pro střední školy.* Prometheus.

[7] Janyška, J. (2020). *Matematika s nadhledem: Analytická geometrie v rovině.* Nakladatelství Fraus.

[8] Kočandrle, M., & Boček, L. (2011). *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie.* Prometheus.

[9] Kolouchová, J., Řepová, J., & Šobr, V. (1986). *Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU 5. část.* Prometheus.

[10] Liška, M., Valenta, T., & Král, L. (2017). *Matika pro spolužáky.* Hradec Králové: ProSpolužáky.cz.

[11] Mareš, M. (2011). *Příběhy matematiky: Stručná historie královny věd.* Druhé, revidované vydání. Pistorius & Olšanská.

[12] Mazur, J. (2017). *Kde se vzaly symboly: Stručná historie matematického zápisu od starověku k dnešku.* Universum.

[13] Miller, J. (2008). *Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics.* [Online; cit. 2023–06–15]. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Miller/mathwor d/

[14] Petáková, J. (1998). *Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Prometheus.

[15] Pledger, K., & Hooker, S. (2008). *Edexcel AS and a level modular mathematics mechanics 1 M1*. Pearson Education.

[16] Podolský, J. (1998). *Zrození Maxwellovy teorie a formalismu vektorové analýzy.* In *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 43*(3), s. 237–248.

[17] Polák, J. (2014). Didaktika matematiky: Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. Fraus.

[18] Polák, J. (2016). *Didaktika matematiky: Jak učit matematiku zajímavě a užitečně.* III. část historie matematiky pro učitele. Fraus.

[19] Ribeiro, F. B. R. (2017). *Proof of Jordan-von Neumann theorem for vector spaces over* $\mathbb{R}$. [Online; cit. 2024–09–24]. https://oitofelix.github.io/academic/Jordan-von%20Neumann%20Theorem.pdf

[20] Robová, J. (2011). *Portál středoškolské matematiky.* [Online; cit. 2023–06–21]. https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/

[21] Šikola, J. (2022). *Výuka matematiky na střední škole s ohledem na její integraci do jiných předmětů* [diplomová práce]. [Online; cit. 2024–06–09]. https://dspace.tul.cz/server/api/core/bitstreams/f49a21ad-6a07-4147-8dac-935f333e9993/content

[22] Waerden, B. L. (2013). *A history of Algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether.* Springer Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-51599-6

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Citace obrázků

Obrázek 1: Pamětní deska na Broom Bridge, zdroj: https://www.tripadvisor.co.uk/Attraction_Review-g186605-d11742051-Reviews-Broom_Bridge-Dublin_County_Dublin.html (cit. 2023–03–11)

Obrázek 8: Pravidlo pravé ruky, zdroj: https://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=analyza-a -hodnoceni-biologickych-dat–vicerozmerne-metody-pro-analyzu-dat–priloha-a -zaklady-maticove-algebry–vektory (cit. 2024–06–17)

Obrázek 11: Fyzikální význam vektorového součinu, zdroj: https://e-manuel.cz/kapitoly/magneticke-pole/vyklad/magneticka-sila/ (cit. 2023–07–19)

Obrázek 15: Simplexy, zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Simplex#/media/File:Simplexes.jpg (cit. 2023–11–17)

Obrázek 20: Ukázka barevných modelů, zdroj: https://printnes.co/en/blog/rgb-vs-cmyk/a -358858275 (cit. 2024–09–29)

Obrázek 22: Přehled mořských proudů na světě, zdroj: https://www.in-pocasi.cz/clanky/teorie/morske-proudy/ (cit. 2024–09–29)

Zbylé obrázky byly vytvořeny autorkou tohoto textu pomocí systému LaTeX.